arXiv:2304.01504v1 [math.GT] 4 Apr 2023

对于闭结曲面，一次稳定化还不够

Kyle Hayden、Sungkyung Kang、Anubhav Mukherjee

摘要。在这篇简短的论文中，我们证明，存在一些（边界非空的）光滑四维流形，其中包含成对的奇异打结的二球面；经过一次（外部或内部）稳定化后，它们仍然是异化的。由此可知，Auckly-Kim-Melvin-Ruberman-Schwartz 的“一次就够”定理不适用于同调类为特征类的闭曲面。

1. 引言

四维中的异化现象本质上是不稳定的。例如，Wall [Wal64] 和 Gompf [Gom84] 的结果表明，通过反复取与 $S^2\times S^2$ （在可定向情形下）或 $S^2\tilde{\times}S^2$ （在不可定向情形下）的连通和来进行稳定化后，异化紧4-流形会变得微分同胚。对于4-流形 X 中的曲面 Σ 和 Σ' 也有类似结果：它们是奇异打结的，即二者可通过 X 的环境同胚同位，但不能通过 X的环境微分同胚同位。特别地，Perron [Per86]和 Quinn [Qui86]的结果意味着，经过足够多次外部稳定化后，这类曲面会光滑同位；在此过程中，环境4-流形 X本身在远离 Σ和 Σ'处进行稳定化。最近，Baykur-Sunukjian [BS15] 证明，反复进行内部稳定化后，奇异曲面也会变得光滑同位；也就是说，反复将每个曲面与一个标准的 $T^2\subset S^4$作连通和。

理解消除异化现象所需的稳定化次数仍是一个基本问题；在闭合、单连通的奇异四维流形这一原始设定中，单次稳定化是否足够尚不得而知。对于大多数已知的异化现象实例，单次稳定化已足够（参见 [Auc03、Akb02、BS13、AKMR15、Akb15、Kim19]），在若干更一般的设定中也同样如此 [AKM+19、AS21、RS22]。然而，近期一系列研究结果揭示了单次稳定化不足的情形 [Lin20、LM21、Gut22、Kan22、GHKP、KMT22、Hay23]。

迄今为止，所有经过一次稳定化后仍保持奇异性的奇异四维流形或奇异曲面实例，其边界均非空。着眼于闭合情形，本文考察 4-流形（带边界）中的闭曲面这一中间设定。

定理 1.1。 存在一些带边界的光滑四维流形，其中包含成对的外来纽结 2-球面，这些球面在一次（外部或内部）稳定化后仍然是外来的。

据作者所知，这也是首批在内部和外部稳定化后仍然存在的曲面奇异对。这是定理1.1 的关键依据，即第二作者近期构造出经过一次稳定化后仍然存在的奇异可缩 4-流形，且具有 $S^2\times S^2$ [Kan22]。我们证明，这些奇异 4-流形经过一次扭转稳定化后便彼此微分同胚，而这个扩大的 4-流形包含

所需的一对奇异打结的二球面。在此过程中，我们利用[AKM+19] 的结果证明，一次（可能是扭转）稳定化便足以消解一大类软木塞流形，即由沿着 B^4中的切片圆盘进行手术所得到的那些；参见§2。

注 1.2. (a) 在 [AKM+19]中，Auckly–Kim–Melvin–Ruberman–Schwartz 运用 Gabai 的灯泡定理 [Gab20]证明了一类“一个就够了”的结果：若 X 是一个光滑、单连通的 4-流形，且 Σ, $\Sigma' \subset X$ 是亏格和同调类相同的光滑嵌入曲面，并且

(i) Σ和 Σ' 各自都是连通曲面，(ii) $[\Sigma] = [\Sigma']$ 是一个普通的同调类，即不与 $w_2(X)$ 对偶，且 (iii) $X \setminus \Sigma$ 和 $X \setminus \Sigma'$ 都是单连通的，

那么 Σ 和 Σ' 经过一次外部稳定化后便光滑同位。在 [LM21],中，Lin 与第三位作者证明了假设 (i) 是必要的。在本文中，环境 4-流形 X 是单连通的，且曲面连通并具有单连通补空间，因此我们的例子表明假设 (ii) 是必要的，即这些曲面必须属于普通同调类。**(b)** 在即将发表的工作中， [Auc], Auckly 在闭4-流形中构造了奇异曲面，这些曲面在内部稳定化后仍彼此不同。

致谢。 作者感谢 Dave Auckly 提供的有益意见。KH 获得美国国家科学基金会资助，项目编号 DMS-2243128。SK 获得基础科学研究院（IBS-R003-D1）的支持。

2. 一些拓扑构造

2.1. 沿切片圆盘的手术。我们首先回顾一种基于切片圆盘构造可缩四维流形的方法（参见 [Gor75]）。给定一个由光滑切片圆盘 $D \subset B^4$ 所界定的纽结 $K \subset S^3$，固定一个紧致管状邻域 $N(D) \cong D \times D^2$，并为某点 $p \in K = \partial D$ 选取一条子午线 $\{p\} \times \partial D^2 \subset S^3$。取圆盘外部 $B^4 \setminus \mathring{N}(D)$，并沿子午线 μ 附加一个 $(-k)$-框架的 2-手柄，便得到一个边界为 $S^3_{1/k}(K)$ 的可缩四维流形。我们将此四维流形称为沿切片圆盘 $D \subset B^4$ 的 $1/k$-手术，并记作 $B^4_{1/k}(D)$。

我们还可以用柯比图来描述这一构造。给定一个 B^4 的手柄图，其中 K 是平凡结，且 D 是其标准切片圆盘，我们将 K替换为带点的一柄曲线，并沿着一个子午线添加一个（$-k$）框架的 2-手柄，使其连接到 K。图1展示了一个例子，其中 K 是 stevedore 结。

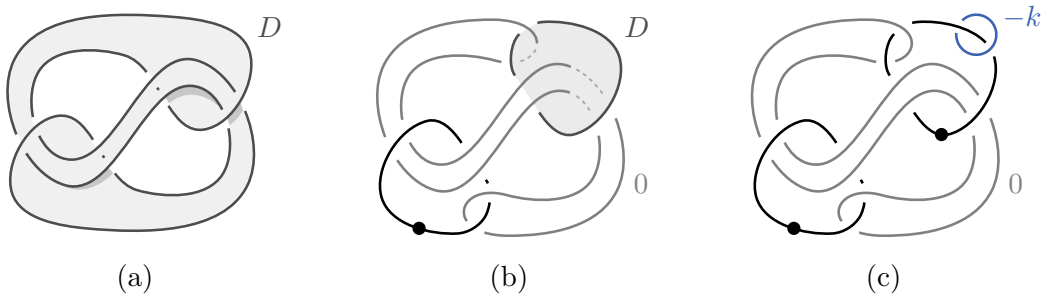


图 1. (a) 由 stevedore 结围成的切片圆盘 D。(b) 对于 B^4，其中 D 是标准的手柄图。(c) 4-流形 $B^4_{1/k}(D)$。

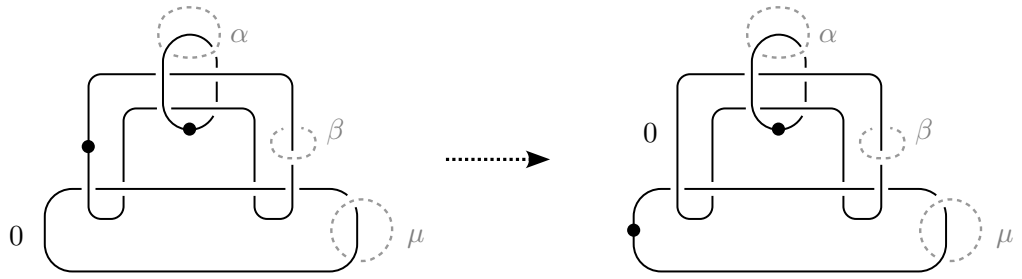


图 2. 重数为零的对数变换。

2.2. 对数变换。考虑一个包含光滑嵌入环面 T 的光滑 4-流形 X，该环面的自交数为零，并固定一个带框架的管状邻域 $N(T) \cong T^2 \times D^2$。沿 T 进行环面手术，是指移除 $\mathring{N}(T)$，再利用其边界 $\partial N(T)$ 上的一个非平凡自微分同胚，将 $N(T)$ 重新粘合回去 $\cong T^2 \times \partial D^2 = T^3$。我们的论证将涉及这一操作的一个特殊情形，称为重数为零的对数变换；在此情形下，$T^3 \cong T^2 \times \partial D^2$ 的自微分同胚将 ∂D^2 与 T^2 中的一条本质简单闭曲线互换。注意，结果与 T^2 中曲线的选取无关，因为任意两条这样的曲线都可以通过 f 的微分同胚互换，而将粘合微分同胚 $f \times \mathrm{id}$ 从 $T^2 \times \partial D^2$ 延拓到 $T^2 \times D^2$ 的操作可以实现 T^2。关于这一操作的把手论描述，参见图 2（参见 [GS99，图 8.25]）。

3. 主定理的证明

我们首先注意到，对于通过沿着具有相同边界的切片圆盘对进行手术而得到的任意一对奇异四维流形，一次（可能带扭转的）稳定化就足够了，其中 B^4。

引理 3.1. 设 D 和 D' 是 B^4 中的切片圆盘，其边界为纽结 $K \subset S^3$。

(a) If k is even, then $B^4_{1/k}(D)\#(S^2\times S^2) \cong B^4_{1/k}(D')\#(S^2\times S^2)$ rel boundary.
(b) If k is odd, then $B^4_{1/k}(D)\#(S^2\tilde{\times}S^2) \cong B^4_{1/k}(D')\#(S^2\tilde{\times}S^2)$ rel boundary.

证明。考虑零框架结迹 $X_0(K)$，并令 S 和 S' 分别表示由 D 和 D'与 2-手柄中的核心圆盘取并后得到的 2-球面。令 Z 表示从 $X_0(K)$ 沿 K的子午线附加一个 $(-k)$-框架 2- 手柄后得到的 4- 流形。于是，$B^4_{1/k}(D)$ 和 $B^4_{1/k}(D')$ 分别由 Z 沿 2- 球面 S 和 S' 进行外科手术得到。注意，S 和S' 的补空间均为单连通（因为它们的子午线围成一个 2-手柄的核心圆盘），且当且仅当 k 为奇数时，它们代表特征同调类。根据 [AKM+19]，在进行一次稳定化后，若 k为偶数，则 S 和 S' 在 Z 中（相对于 ∂Z）经由 $S^2\times S^2$ 同痕；若 k为奇数，则经由 $S^2\tilde{\times}S^2$ 同痕。此环境同痕（相对于边界）诱导了外科手术后 4-流形之间的微分同胚，即 $B^4_{1/k}(D)$ 和 $B^4_{1/k}(D')$ 的一次稳定化副本。□

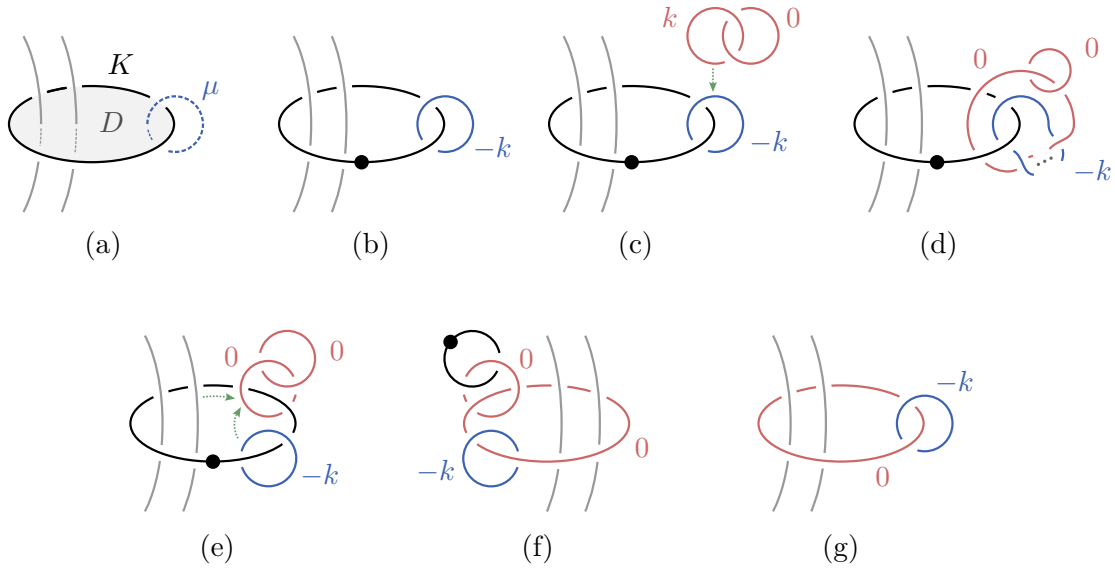


图3. 经过一次（可能带扭转的）稳定化后，沿切片圆盘进行手术。

就证明定理1.1这一较狭义的目的而言，我们可以满足于较弱的结论：经过一次（可能带扭转的）稳定化后，$B^4_{1/k}(D)$ 和 $B^4_{1/k}(D')$ 微分同胚；在先验意义上，该微分同胚在边界上可能并非平凡。（在定理1.1的证明等具体情形中，通常可以将这一结论提升为更强的相对于边界的结论。）

这种较弱的替代方案有一个初等的把手理论证明：首先固定 B^4 相对于切片圆盘 D 的把手结构，使得 D 表现为 0-把手中的一个平凡结边界平行圆盘，而 K 表现为一个平凡结，并在 D的补空间上附加额外把手。图3的 (a) 部分对此作了示意。图的 (b) 部分描绘了 $B^4_{1/k}(D)$。在 (c) 部分，我们进行一次稳定化，当且仅当 k 为奇数时，该稳定化带扭转。经过一次把手滑动后，我们得到 (d) 中的图示。将右上方 0-框定子午线上的 2- 手柄滑过 $(-k)$- 框定的 2- 手柄，得到 (e) 中的图示。将所有原有的 2- 手柄从 1- 手柄上滑开，得到 (f) 中的图示；随后进行一次 1-/2-手柄消去，得到 (g) 中的图示。注意，最终图示只是 B^4 与一个沿 K 附加的 0-框定 2-手柄，以及一个沿着 k的子午线 μ 附加的 K-框定 2-手柄的并集；这个 4-流形只取决于 K 和 k，而不取决于 D 或 D'。

我们还指出内部稳定化与外部稳定化之间的关系。以下结论对专家而言众所周知，但为求完整，我们仍略述其证明。

引理 3.2. 设 S 是光滑4-流形 X中一个自交数为零的光滑嵌入的2-球面，并令 X_0 表示沿 S对 X 进行外科手术所得的结果。那么 $X_0\#S^2\times S^2$ 可由 X 沿 $S\#T^2\subset X$进行一次重数为零的对数变换得到。

证明。 固定一个关于 X 相对于邻域 $N(S)\cong S^2\times D^2$的把手分解。图 4(a) 示意了这一分解，其中灰色弧线表示 2-手柄，它们

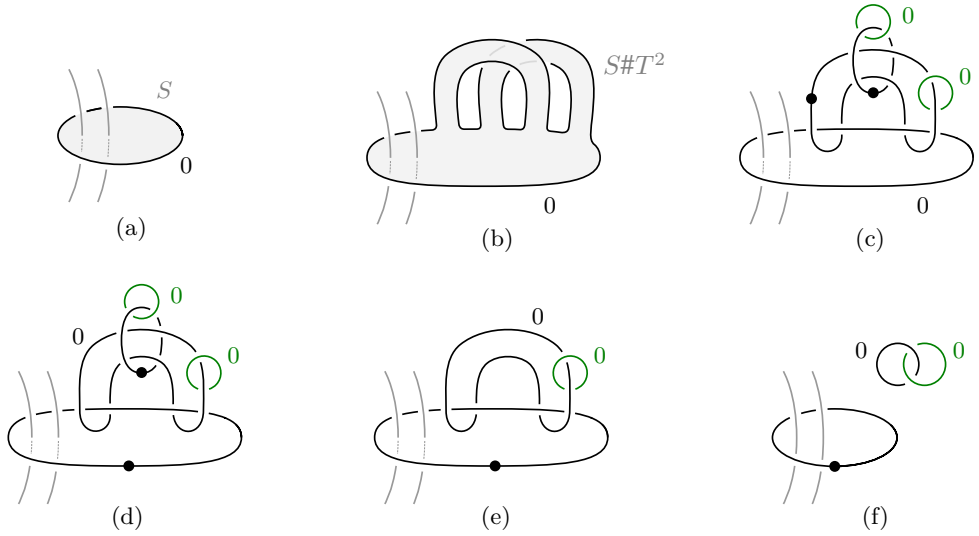


图 4. 通过对数变换关联内部稳定化与外部稳定化。

可能与 S相交。由于该图从 $S^2\times D^2$ 开始（图 4(a) 中将其表示为一个平凡打结分支的零迹），它包含给定的球面 S 作为 $S^2\times\{0\}$，显然，虽然可能存在 1-手柄和 3-手柄，但我们可以假设它们附着在远离 S 的位置。如图中 (b) 和 (c) 部分所示，我们可以对 S 进行局部稳定化，以生成环面 $S\#T^2$ ，并引入相互消去的 1-/2-手柄对，使图示适用于 $S\#T^2$。 (d) 中的图示描绘了重数为零的对数变换结果。消去最上方的 1-/2-手柄对并进行少许同痕后，我们得到 (f)，这是 $X_0\#(S^2\times S^2)$ 的图示。（我们还注意到，与 $S\#T^2$ 的子午线交换的是 T^2 中哪个 S^1- 因子并不重要；两种变换都会得到相同结果。）□

3.1. 主定理的证明。令 W 和 W' 表示第二作者在 [Kan22]中构造的一对紧致可缩 4-流形。这两个 4-流形同胚但不同胚，并且在进行一次与 $S^2\times S^2$的稳定化后仍不同胚。该构造始于沿圆盘 $D, D'\subset B^4$ 进行的一对 $(+1)$-手术，其边界相同，均为 K。尽管这些 4-流形仅具有边界相对的奇异结构，但 Akbulut-Ruberman 的结果 [AR16]可用于通过可逆同调协边 C 延拓 $B^4_{+1}(D)$和 $B^4_{+1}(D')$，将其从 $S^3_{+1}(K)$扩展到另一个整系数同调球面 Y，并且具有这样的性质： Y 的每个自微分同胚都可延拓为 C 上的一个自微分同胚，该自微分同胚在 $S^3_{+1}(K)$上为恒等映射。由此得到的扩展 4-流形 $W=B^4_{+1}(D)\cup C$和 $W'=B^4_{+1}(D')\cup C$ 是绝对奇异的，并且在与 $S^2\times S^2$ [Kan22]进行一次稳定化后仍保持这一性质。

根据引理3.1，4-流形 $B^4_{+1}(D)$与 $B^4_{+1}(D')$在一次使用 $S^2\tilde{\times}S^2$的扭曲稳定化后，相对于边界微分同胚。由于 W'可通过切除 W中的 $B^4_{+1}(D)$，再通过恒等映射粘入 $B^4_{+1}(D')$得到，因此我们得到如下结论：

命题 ition 3.3. $W\#(S^2\tilde{\times}S^2)$与 $W'\#(S^2\tilde{\times}S^2)$ 相对于边界微分同胚。 □

现在我们可以证明主定理了。

定理证明 *1.1*。设纽结 K、切片圆盘 D 和 D'以及 4-流形W 和 W' 如上所述。另设 Z 表示扩大的 4-流形 $Z = W\#(S^2\tilde{\times}S^2) \cong W'\#(S^2\tilde{\times}S^2)$。如引理 3.1 的证明所示，$Z$ 也可以通过沿 B^4 附加一个 0-框架 2-手柄，并沿 K 附加一个以（-1）为框架的 2-手柄来得到，该手柄沿着 K的子午线附加。

考虑在 Z 中的 2-球面 S 和 S'，它们是通过用沿 K 附加的 0-框架 2-手柄的核心封闭切片圆盘 D 和 D' 而得到的。如引理 3.1 的证明所示，这些球面的补空间是单连通的，因此根据 Perron [Per86] 和 Quinn [Qui86] 的结果（基于 Freedman [Fre82]的工作），它们在拓扑意义下同位。另一方面，沿 S 对 Z 进行外科手术，或沿 S' 对其进行外科手术，分别得到 W 或 W'，因此这些球面并非光滑同位。此外，由于 W 和 W' 在用 $S^2\times S^2$ 稳定化一次后仍不同胚，我们可知，经过一次外部稳定化后，S 和 S' 仍不光滑同位。

如果我们改为考虑内部稳定化，则得到环面 $T = S\#T^2$ 和 $T' = S'\#T^2$。为导出矛盾，假设存在一条光滑同位，将 T 映到 T'。这条同位将管状邻域 $N(T) \cong T^2\times D^2$ 映到管状邻域 $N(T')$。该微分同胚保持子午线 ∂D^2在 $\partial N(T)$ 和 $\partial N(T')$ 中的同调类，因此，沿 T或 T' 进行重数为零的对数变换后从 Z 得到的 4-流形彼此微分同胚。（注意，如 §2 中所述，零次对数变换的结果与这些邻域所选的框架无关。）然而，引理3.2表明，这些所得的 4-流形也可以通过沿 S 或 S'对 Z 进行外科手术，再用 $S^2\times S^2$进行稳定化而得到，即 $W\#(S^2\times S^2)$ 和 $W'\#(S^2\times S^2)$。这就产生了矛盾，因为后两个 4-流形并不微分同胚。□

参考文献

[*Akb*02] *Akbulut*，《四维流形上的 *Fintushel-Stern* 纽结手术》的若干变体，《土耳其数学杂志》，*26(1):81–92*，*2002*。[*Akb*15] *Akbulut*，《*4*-流形中 *2*-球面的同位》，载于《*G¨okova* 几何-拓扑会议 *2014* 论文集》，第 *264–266* 页，*G¨okova* 几何/拓扑会议 *(GGT)*，*G¨okova*，*2015*。[*AKM*+19] *Auckly*、*Kim*、*Melvin*、*Ruberman*、*Schwartz*，《单次稳定化后四维流形中曲面的同位》，《数学进展》，*341:609–615*，*2019*。[*AKMR*15] *Auckly*、*Kim*、*Melvin*、*Ruberman*，《四维中的稳定同位》，《伦敦数学会杂志》*(2)*，*91(2):439–463*，*2015*。[*AR*16] *Akbulut*、*Ruberman*，《绝对异种紧致 *4*-流形》，《赫尔维蒂数学评论》，*91(1):1–19*，*2016*。[*AS*21] *Auckly*、*Sadykov*，《嵌入 *4*-流形中的不可定向曲面》，《拓扑学杂志》，*14(2):587–607*，*2021*。[*Auc*] *Auckly*，《经多次内部稳定化后仍彼此不同的光滑打结曲面》，准备中。[*Auc*03] *Auckly*，《经一次稳定化后变为彼此微分同胚的四维流形族》，《应用拓扑学》，*127(1-2):277–298*，*2003*。

[*BS*13] *Baykur*、*Sunukjian*，《圆柄、对数变换与光滑 *4*-流形》，《拓扑学杂志》，*6(1):49–63*，*2013*。[*BS*15] *Baykur*、*Sunukjian*，《*4*-流形中的打结曲面与稳定化》，《拓扑学杂志》，*9(1):215–231*，*2015*。[*Fre*82] *Freedman*，《四维流形的拓扑》，《微分几何杂志》，*17(3):357–453*，*1982*。[*Gab*20] *Gabai*，《四维灯泡定理》，《美国数学会杂志》，*33(3):609–652*，*2020*。[*GHKP*] *Guth*、*Hayden*、*Kang*、*Park*，《双重圆盘与卫星曲面》，准备中。[*Gom*84] *Gompf*，《紧致 *4*-流形的稳定微分同胚》，《拓扑学及其应用》，*18:115–120*，*1984*。[*Gor*75] *Gordon*，《纽结、同调球面与可缩 *4*-流形》，《拓扑学》，*14:151–172*，*1975*。[*GS*99] *Gompf*、*Stipsicz*，《*4*-流形与 *Kirby*演算》，数学研究生教材第 *20* 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，*1999*。[*Gut*22] *Guth*，《对于带边界的奇异曲面，一次稳定化并不足够》，*arXiv:2207.11847*，*2022*。[*Hay*23] *Hayden*，《*Wall*型稳定化问题的原子化方法》，*arXiv:2302.10127*，*2023*。[*Kan*22] *Kang*，《对于可缩 *4*-流形，一次稳定化并不足够》，*arXiv:2210.07510*，*2022*。[*Kim*19] *Kim*，《通过纽结手术与稳定化构造 *4*-流形中的打结曲面》，《美国数学会汇刊》，*371(12):8405–8427*，*2019*。[*KMT*22] *Konno*、*Mukherjee*、*Taniguchi*，《*4*-流形中的奇异余维一子流形与稳定化》，*arXiv:2210.05029*，*2022*。[*Lin*20] *Lin*，《单次稳定化后 *K3#K3* 上 *Dehn*扭转的同位》，即将发表于《几何与拓扑》*(arXiv:2003.03925)*，*2020*。[*LM*21] *Lin*、*Mukherjee*，《族*Bauer–Furuta*不变量、奇异曲面与 *Smale* 猜想》，*arXiv:2110.09686*，*2021*。[*Per*86] *Perron*，《拓扑范畴中四维的拟同痕与同痕》，《拓扑学》，*25:381–397*，*1986*。[*Qui*86] *Quinn*，《四维流形的同痕》，《微分几何杂志》，*24:343–372*，*1986*。[*RS*22] *Ruberman*、*Strle*，《*Wall*关于正定 *4*-流形微分同胚的稳定实现》，*arXiv:2210.16260*，*2022*。[*Wal*64] *Wall*，《关于单连通 *4*-流形》，《伦敦数学会杂志》，*39:141–149*，*1964*。

数学与计算机科学系，罗格斯大学，纽瓦克，NJ 07102, USA
电子邮箱：kyle.hayden@rutgers.edu

几何与物理中心，基础科学研究院（IBS），浦项 37673, 韩国
电子邮件地址：sungkyung38@icloud.com

数学系，普林斯顿大学，普林斯顿，新泽西州 08540，USA
电子邮件地址：anubhavmaths@princeton.edu