arXiv:2304.01540v1 [math.DS] 4 Apr 2023

性染色体代数及其相关的离散时间动力系统

U.A. ROZIKOV, S.K. SHOYIMARDONOV, R. VARRO

Abstract. 本文研究了性染色体代数所对应的离散时间动力系统，这类代数被用作性连锁基因遗传的代数模型。我们证明，性染色体代数这一类代数与通常研究的其他非结合代数（李代数、替代代数、约旦代数、结合幂代数）互不相交。对于每个性染色体代数，给定映射 $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$，都可定义一个演化算子 W，它给出出生阶段子代群体的状态；随后，我们由 W 定义算子 V，用以给出遗传类型的频率分布。我们研究由这两个算子生成的离散时间动力系统，特别证明，从 W过渡到 V时，平衡点的各种稳定性概念均得以保持。此外，对于与遗传性疾病相关、且涉及二等位基因性染色体致死基因的情形下的演化算子，我们全面分析了这些动力系统的不动点和极限点。

2010年数学主题分类。17D92；17D99。
关键词。两性群体、性染色体代数、二次算子、性染色体算子、平衡点、极限点。

1. Introduction

在大多数两性物种中，性别决定系统以性染色体为基础，性染色体也称为性染色体（或异染色体、异型染色体、异染色体、异染色体）。性染色体不同于常染色体，并非同源染色体，通常大小不同，而且都具有两个不同的区域：

– 拟常染色体区对应于两种性染色体上的同源区域，其中携带的基因存在于两种性染色体上，其传递方式与常染色体基因相同；

– 差异区携带的基因仅存在于一种性染色体上，在另一种性染色体上没有对应基因；我们称这些基因为性连锁基因或性染色体连锁基因。

性染色体中的染色体二态性导致性染色体基因传递的不对称性：例如，对于一个双等位基因，在一种性别中可观察到三种基因型，而在另一种性别中只有两种；当某个等位基因为隐性时，它总是在一种性别中表达，而在另一种性别中仅有三分之一的情况下表达。因此，性染色体基因的遗传与常染色体基因的遗传有很大不同。

种群遗传学研究进化力量作用下，遗传类型（等位基因、基因型、基因集合等）的频率分布在连续世代中的演化（动态变化）。这项研究基于演化算子的定义与应用，用已知的上一

世代状态描述下一世代状态，即由演化算子生成的离散时间动力系统（参见 [1], [8], [10], [16]）。

本书 [1] 简要介绍了数学在解决种群动力学中的各种问题方面的应用历史。此外， [8] 为一类种群建立了一套非常有效的代数动力学理论。

在近期出版的著作 [9] 中，系统地阐述了自由种群和性连锁种群的离散时间动力系统理论与演化代数。

本文继续研究 [12], [11] 中关于性染色体代数以及用于模拟性连锁基因遗传的离散时间动力系统的工作。已知两性随机交配种群的遗传系数后，我们据此定义一个性染色体代数。接着，由性染色体代数定义一个演化算子 W，称为性染色体算子。多元二次算子 W 连接相邻两代的遗传状态。由算子 W 构造算子 V，称为 W的归一化性染色体算子；算子 V 由多元二次有理函数组成，连接相邻两代的频率分布。我们研究这两个算子，并证明平衡点的不同稳定性概念对于 W 在 V中仍然成立。最后一节研究双等位基因致死性别染色体基因的遗传动力学。

2. Evolution operators of a bisexual panmictic population

在具有离散非重叠世代的两性随机交配种群中，我们考虑一个性别染色体基因，其在雌性（分别在雄性）中的遗传类型为 $(e_i)_{1\le i\le n}$ （分别为 $(\widetilde{e}_j)_{1\le j\le \nu}$）。

记：

- $x_{(t)i}$（分别为 $y_{(t)j}$）表示第 $t\in\mathbb{N}$ 代出生的雌性（分别为雄性）中类型 e_i（分别为 $\widetilde{e}_j$）的频率，因此 $x_{(t)i}, y_{(t)j} \ge 0$ 和 $\sum_{i=1}^{n} x_{(t)i} + \sum_{j=1}^{\nu} y_{(t)j} = 1$。
- γ_{ijk} （分别为 $\widetilde{\gamma}_{ijr}$）表示亲本对为类型 e_i 的雌性和类型 $\widetilde{e}_p$ 的雄性时，雌性（分别为雄性）后代属于类型 e_k（分别为 $\widetilde{e}_r$）的概率，因此 γ_{ijk}, $\widetilde{\gamma}_{ijr} \ge 0$ 和 $\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ijk} + \sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ijr} = 1.$

随机交配后，由所有可能的亲本交配产生的女性（分别为男性）类型e_k （分别为 $\widetilde{e}_r$）后代在世代 $t+1$ 中的比例为

$$\sum_{i,j=1}^{n,\nu} \gamma_{ijk} x_i^{(t)} y_j^{(t)} \quad \Big(\text{resp.} \sum_{i,j=1}^{n,\nu} \widetilde{\gamma}_{ijr} x_i^{(t)} y_j^{(t)}\Big). \tag{2.1}$$

由此可推得，第 $t+1$ 世代种群的总数 $N(t+1)$ 为

$$\begin{aligned} N(t+1) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n,\nu} \gamma_{ijk} x_i^{(t)} y_j^{(t)} + \sum_{r=1}^{\nu}\sum_{i,j=1}^{n,\nu} \widetilde{\gamma}_{ijr} x_i^{(t)} y_j^{(t)} \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{(t)}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\nu} y_j^{(t)}\Big) \end{aligned} \tag{2.2}$$

因此，若 $N(t+1) \neq 0$，则第 $t+1$ 世代中类型 e_k（分别为 $\widetilde{e}_r$）的频率为:

$$x_k^{(t+1)} = \frac{\sum_{i,j=1}^{n,\nu} \gamma_{ijk} x_i^{(t)} y_j^{(t)}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{(t)}\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j^{(t)}\right)} \tag{2.3}$$

$$\left(\text{resp. } y_k^{(t+1)} = \frac{\sum_{i,j=1}^{n,\nu} \widetilde{\gamma}_{ijr} x_i^{(t)} y_j^{(t)}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{(t)}\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j^{(t)}\right)}\right). \tag{2.4}$$

考虑 $(n+\nu-1)$–维单纯形

$$S^{n+\nu-1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_\nu) \in \mathbb{R}^{n+\nu} : x_i \geq 0,\, y_j \geq 0,\, \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{\nu} y_j = 1 \right\}.$$

于是，方程 (2.3) 是由演化算子 $W: S^{n+\nu-1} \to S^{n+\nu-1}$ 定义的离散时间动力系统（见 [11]）

$$W: \begin{array}{l} x_k' = \frac{\sum_{i,j=1}^{n,\nu} \gamma_{ijk} x_i y_j}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j\right)} \\ y_k' = \frac{\sum_{i,j=1}^{n,\nu} \widetilde{\gamma}_{ijr} x_i y_j}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j\right)}. \end{array} \tag{2.5}$$

3. Definition and basic properties of gonosomal algebras

研究性染色体基因遗传的代数模型有多种。Etherington [3] 首先针对 XY-方程组中的性染色体二等位基因提出了一种模型，该模型随后在 [4], 中扩展到含突变的双等位基因情形，并在 [5, 14, 15]中进一步扩展到多等位基因情形。第二种模型由 Gonshor [6] 提出，其引入了性连锁重复的概念。在 [7] 中，作者提出了一个更一般的定义：两性群体演化代数（EABP）。在 [12] 中，我们表明，EABP 无法表示若干遗传学情形，因此给出以下定义。

定义 1. 给定一个特征为 $\neq 2$ 的交换域 K，如果一个 K-代数 A 存在一个基 $(e_i)_{1\leq i\leq n} \cup (\widetilde{e}_j)_{1\leq j\leq \nu}$，使得对于所有 $1 \leq i、j \leq n$ 以及 $1 \leq p、q \leq \nu$，均有:

$$\begin{aligned} e_i e_j &= 0, \\ \widetilde{e}_p \widetilde{e}_q &= 0, \\ e_i \widetilde{e}_p = \widetilde{e}_p e_i &= \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ipk} e_k + \sum_{r=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{ipr} \widetilde{e}_r, \end{aligned}$$

其中 $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ipk} + \sum_{r=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{ipr} = 1$。基 $(e_i)_{1\leq i\leq n} \cup (\widetilde{e}_j)_{1\leq j\leq \nu}$ 称为 A 的性染色体基。

注 1. 目前，我们无需假设结构常数 $\gamma_{ipk}, \widetilde{\gamma}_{ipr}$ 为非负数。

文献 [12] 已证明，性染色体代数能够以代数方式表示所有性别决定系统（XY、WZ、$X0$、$Z0$ 和 WXY），以及多种与性别相关的遗传现象：温度依赖型性别决定、序列性雌雄同体、雄核生殖、孤雌生殖、雌核生殖、细菌接合、细胞质遗传、性连锁致死基因、多重性染色体系统、WXY-系统中的遗传、具有雄性雌性化的 WZ-系统中的遗传、具有可育 XY 雌性的 XY-系统、X-连锁的性别比例偏倚因子、盗生殖、受性别影响的遗传过程（突变、重组、转座）、纤毛虫遗传、基因组印记、X-失活、通过性染色体消除决定性别、三倍体有性生殖、多基因性别决定、细胞质遗传。

性染色体代数上的性染色体基可能并不唯一，正如下述命题所示。

命题1. 设 A 是一个性染色体代数，其性染色体基为 $(e_i)_{1\leq i\leq n}\cup(\widetilde{e}_p)_{1\leq p\leq \nu}$。那么，任意基 $(a_i)_{1\leq i\leq n}\cup(\widetilde{a}_p)_{1\leq p\leq \nu}$ 满足

$$a_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}e_j \ \ and\ \widetilde{a}_p=\sum_{q=1}^{\nu}\widetilde{\alpha}_{qp}\widetilde{e}_p$$

其中 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}=\sum_{q=1}^{\nu}\widetilde{\alpha}_{qp}=1$ 对所有 $1\leq i\leq n, 1\leq p\leq \nu$ 均成立，是 A 的性染色体基。

证明. 设 $(a_i)_{1\leq i\leq n}\cup(\widetilde{a}_p)_{1\leq p\leq \nu}$ 是一个具有上述形式的基。显然，$a_ia_j=\widetilde{a}_p\widetilde{a}_q=0$。接下来，经过简单计算可得

$$a_i\widetilde{a}_p \ = \ \sum_{k=1}^{n}\big(\sum_{j,q=1}^{n,\nu}\alpha_{ji}\widetilde{\alpha}_{qp}\gamma_{jqk}\big)e_k+\sum_{r=1}^{\nu}\big(\sum_{j,q=1}^{n,\nu}\alpha_{ji}\widetilde{\alpha}_{qp}\widetilde{\gamma}_{jqr}\big)\widetilde{e}_r$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\big(\sum_{j,q=1}^{n,\nu}\alpha_{ji}\widetilde{\alpha}_{qp}\gamma_{jqk}\big)+\sum_{r=1}^{\nu}\big(\sum_{j,q=1}^{n,\nu}\alpha_{ji}\widetilde{\alpha}_{qp}\widetilde{\gamma}_{jqr}\big) \ &= \ \sum_{j,q=1}^{n,\nu}\alpha_{ji}\widetilde{\alpha}_{qp}\big(\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jqk}+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{jqr}\big)\\ &= \ \big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\big)\big(\sum_{q=1}^{\nu}\widetilde{\alpha}_{qp}\big)=1,\end{aligned}$$

这表明基 $(a_i)_{1\leq i\leq n}\cup(\widetilde{a}_p)_{1\leq p\leq \nu}$ 是性染色体连锁的。 □

命题2. 任何类型为（n，ν）的性染色体代数都同构于类型为（ν，n）的性染色体代数。

证明. 令 A 为一个性染色体代数，其基为 $(e_i)_{1\leq i\leq n}\cup(\widetilde{e}_p)_{1\leq p\leq \nu}$，满足 $e_i\widetilde{e}_p=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}e_k+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}\widetilde{e}_r$。我们考虑代数 A^o，其基为 $(a_i)_{1\leq i\leq \nu}\cup(\widetilde{a}_p)_{1\leq p\leq n}$，由 $a_i\widetilde{a}_p=\sum_{k=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{pik}a_k+\sum_{r=1}^{n}\gamma_{pir}\widetilde{a}_r$ 定义，则映射 $\varphi\colon A\to A^o$ 由 $e_i\mapsto\widetilde{a}_i$ 定义，且 $\widetilde{e}_p\mapsto a_p$ 是一个代数同构。□

命题3. 设 A 是类型为（n，ν）的性染色体代数，若 A' 与 A 代数同构，则 A' 是类型为（n，ν）或（ν，n）的性染色体代数。

证明. 设 A 是一个性染色体代数，其基为 $(e_i)_{1\le i\le n}\cup(\widetilde{e}_p)_{1\le p\le\nu}$，且 $\varphi:\ A\to A'$ 是一个代数同构，令 $a_i=\varphi(e_i)$ 和 $b_p=\varphi(\widetilde{e}_p)$，可得 $a_ia_j=\varphi(e_ie_j)=0$, $b_pb_q=\varphi(\widetilde{e}_p\widetilde{e}_q)=0$ 以及 $a_ib_p=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}a_k+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}b_r$，因此，代数 A' 在基 $(a_i)_{1\le i\le n}\cup(b_p)_{1\le p\le\nu}$ 下是性染色体代数，而命题2表明它可以是 $(\nu,\ n)$ 型。□

在文献中（参见 [13]），为强调并不假设结合律 $x(yz)=(xy)z(\star)$ 成立，通常将某代数称为非结合代数。若代数中不满足关系式（$\star$），则称该代数非结合。最著名的非结合代数包括:

- 李代数，即 $xy+yx=0$ 并且 $(xy)\ z+(yz)\ x+(zx)\ y=0$（雅可比恒等式）。
- 柔性代数，若 $x(yx)=(xy)x$。
- 交错代数，若 $x^2y=x(xy)$ 且 $yx^2=(yx)x$。
- 约旦代数，若 $xy=yx$ 且 $x^2(xy)=x\left(x^2y\right)$（约旦恒等式）。
- 幂结合代数：若由任意元素 x 生成的子代数是结合的，这等价于定义 $x^1=x$ 和 $x^{i+1}=xx^i$，并要求对于 i、$j=1$、2、.....以及任意 x，都有 $x^{i+j}=x^ix^j$。

众所周知,

- 交换代数是柔性的;
- 结合代数是柔性的、替代代数、幂结合的，并满足约当恒等式;
- 交换交错代数是约旦代数;
- 约旦代数是幂结合的。

在 [12] 这里给出了一个性染色体代数的例子，它既不是结合的、李代数、替代代数、幂结合代数，也不是约旦代数。接下来，我们将通过证明性染色体代数构成一个与其他非结合代数互不相交的新类别，来阐明这一点。

定理1. 任何性染色体代数都不是结合的、李代数、幂结合代数、约旦代数或替代代数。

证明. 设 A是一个基为$(e_i)_{1\le i\le n}\cup(\widetilde{e}_j)_{1\le j\le\nu}$的性染色体代数。对于任意的 $1\le i$、$j\le n$和 $1\le p$、$q\le\nu$，有:

$$e_i\left(e_j\widetilde{e}_p\right) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{r=1}^{\nu}\gamma_{irk}\widetilde{\gamma}_{jpr}\Big)e_k+\sum_{s=1}^{\nu}\Big(\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{jpr}\Big)\widetilde{e}_s \tag{3.1}$$

$$\left(e_i\widetilde{e}_p\right)\widetilde{e}_q = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{n}\gamma_{ipl}\gamma_{lqk}\Big)e_k+\sum_{r=1}^{\nu}\Big(\sum_{l=1}^{n}\gamma_{ipl}\widetilde{\gamma}_{lqr}\Big)\widetilde{e}_r. \tag{3.2}$$

Assu明 A 是结合的，由 $e_i(e_j\widetilde{e}_p)=(e_ie_j)\ \widetilde{e}_p=0$ 以及（3.1）可推得 t

$$\sum_{r=1}^{\nu}\gamma_{irk}\widetilde{\gamma}_{jpr}=\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{jpr}=0,\quad(1\le i,j,k\le n,1\le p,s\le\nu)$$

但我们有

$$\sum_{k,r=1}^{n,\nu}\gamma_{irk}\widetilde{\gamma}_{jpr}+\sum_{s,r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{jpr}=\sum_{r=1}^{\nu}\Big(\sum_{k=1}^{n}\gamma_{irk}+\sum_{s=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{irs}\Big)\widetilde{\gamma}_{jpr}=\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{jpr}$$

因此

$$\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{jpr}=0,\quad (1\leq j\leq n,1\leq p\leq\nu)\,. \tag{3.3}$$

同样，由 $(e_i\widetilde{e}_p)\widetilde{e}_q=e_i\,(\widetilde{e}_p\widetilde{e}_q)\ =0$ 和 (3.2) 可得

$$\sum_{l=1}^{n}\gamma_{ipl}\gamma_{lqk}=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{ipl}\widetilde{\gamma}_{lqr}=0,\quad (1\leq i,k\leq n,1\leq p,q,r\leq\nu)\,,$$

由此可推出

$$\sum_{k,l=1}^{n}\gamma_{ipl}\gamma_{lqk}+\sum_{l,r=1}^{n,\nu}\gamma_{ipl}\widetilde{\gamma}_{lqr}\ \ =\ \ \sum_{l=1}^{n}\gamma_{ipl}\Big(\sum_{k=1}^{n}\gamma_{lqk}+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{lqr}\Big)=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{ipl}$$

thus

$$\sum_{l=1}^{n}\gamma_{ipl}=0\quad (1\leq i\leq n,1\leq p\leq\nu)\,. \tag{3.4}$$

由关系式 (3.3) 和 (3.4) 可得，对于所有 $1\leq i\leq n,1\leq p\leq\nu$，$\sum_{l=1}^{n}\gamma_{ipl}+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}=0$，因此产生矛盾。

代数 A不是李代数，因为若 A 既是交换的又是反交换的，则对任意 $x,y\in A$，都有 $xy=0$；换言之，A 是一个零代数。

如果 A 是幂结合代数，则对所有 $x\in A$，它满足 $x^2x^2=x^4$。设 $x=e_i+\widetilde{e}_p$，其中 $1\leq i\leq n$、$1\leq p\leq\nu$，我们有：

$$x^2=2\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}e_k+2\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}\widetilde{e}_r.$$

由此可得

$$x^2x^2=8\sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{k,r=1}^{n,\nu}\gamma_{ipk}\widetilde{\gamma}_{ipr}\gamma_{krl}\Big)e_l+8\sum_{s=1}^{\nu}\Big(\sum_{k,r=1}^{n,\nu}\gamma_{ipk}\widetilde{\gamma}_{ipr}\widetilde{\gamma}_{krs}\Big)\widetilde{e}_s.$$

但也有

$$x^3=2\sum_{j=1}^{n}\Theta_je_j+2\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u\widetilde{e}_u$$

注意到

$$\Theta_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}\gamma_{kpj}+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}\gamma_{irj}\ \text{ and }\ \widetilde{\Theta}_u=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}\widetilde{\gamma}_{kpu}+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}\widetilde{\gamma}_{iru} \tag{3.5}$$

最后我们得到

$$x^4=2\sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\Theta_j\gamma_{jpl}+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u\gamma_{iul}\Big)e_l+2\sum_{s=1}^{\nu}\Big(\sum_{j=1}^{n}\Theta_j\widetilde{\gamma}_{jps}+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u\widetilde{\gamma}_{ius}\Big)\widetilde{e}_s.$$

由上述内容，关系 $x^2x^2=x^4$ 推出

$$\begin{aligned}4\sum_{k,r=1}^{n,\nu}\gamma_{ipk}\widetilde{\gamma}_{ipr}\gamma_{krl} &= \sum_{j=1}^{n}\Theta_j\gamma_{jpl}+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u\gamma_{iul}\\ 4\sum_{k,r=1}^{n,\nu}\gamma_{ipk}\widetilde{\gamma}_{ipr}\widetilde{\gamma}_{krs} &= \sum_{j=1}^{n}\Theta_j\widetilde{\gamma}_{jps}+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u\widetilde{\gamma}_{ius}\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}4\sum_{k,r=1}^{n,\nu}\gamma_{ipk}\widetilde{\gamma}_{ipr} &= 4\sum_{k,r=1}^{n,\nu}\gamma_{ipk}\widetilde{\gamma}_{ipr}\Big(\sum_{l=1}^{n}\gamma_{krl}+\sum_{s=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{krs}\Big)\\ &= \sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\Theta_j\gamma_{jpl}+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u\gamma_{iul}\Big)+\sum_{s=1}^{\nu}\Big(\sum_{j=1}^{n}\Theta_j\widetilde{\gamma}_{jps}+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u\widetilde{\gamma}_{ius}\Big)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\Theta_j\Big(\sum_{l=1}^{n}\gamma_{jpl}+\sum_{s=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{jps}\Big)+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u\Big(\sum_{l=1}^{n}\gamma_{iul}+\sum_{s=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ius}\Big)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\Theta_j+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u.\end{aligned}$$

但由 (3.5) 可得:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\Theta_j+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\Theta}_u &= \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}\Big(\sum_{j=1}^{n}\gamma_{kpj}+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{kpu}\Big)+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}\Big(\sum_{j=1}^{n}\gamma_{irj}+\sum_{u=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{iru}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr} \;=\; 1\end{aligned}$$

因此 $\Big(\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}\Big)\Big(\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}\Big)=\frac{1}{4}$并且由 $\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}+\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}=1$ 可得

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ipk}=\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{ipr}=\tfrac{1}{2},\quad (1\le i\le n,1\le p\le\nu)\,. \tag{3.6}$$

对 $x^2x^2=x^4$进行线性化，得到 $4x^2(xy)=x^3y+x\left(x^2y\right)+2x(x(xy))$（参见 [13], 第 129 页），由此推得 $e_i(e_i(e_i\widetilde{e}_p))=0$。利用 (3.1) 可得

$$e_i\left(e_i\left(e_i\widetilde{e}_p\right)\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{r,s=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{ipr}\gamma_{isk}\Big)e_k+\sum_{t=1}^{\nu}\Big(\sum_{r,s=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{ipr}\widetilde{\gamma}_{ist}\Big)\widetilde{e}_t$$

由此可得

$$\sum_{r,s=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{ipr}\gamma_{isk} \;=\; \sum_{r,s=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{ipr}\widetilde{\gamma}_{ist} \;=\; 0,\quad (1\le i,k\le n,1\le p,t\le\nu)$$

因此，对于所有的 $1 \leq i \leq n$、$1 \leq p \leq \nu$，我们有

$$\sum_{r,s=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{ipr} \;=\; \sum_{r,s=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{ipr}\Big(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{isk} + \sum_{t=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{ist}\Big) \;=\; 0,$$

但由（3.6）可得：

$$\sum_{r,s=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{irs}\widetilde{\gamma}_{ipr} = \sum_{r=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{ipr} \sum_{s=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{irs} = \tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{ipr} = \tfrac{1}{4}$$

因此， A 是幂结合的假设会导致矛盾。 □

命题 4. 性染色体代数不满足雅可比恒等式。

证明。设 A 是一个性染色体代数，其基为 $(e_i)_{1\leq i\leq n} \cup (\widetilde{e}_j)_{1\leq j\leq \nu}$，并满足雅可比恒等式。将雅可比恒等式应用于 $(x,y) = (e_i, \widetilde{e}_p)$ 和 $(x,y) = (\widetilde{e}_p, e_i)$，得到 $2e_i(e_i\widetilde{e}_p) = 0$ 和 $2\widetilde{e}_p(\widetilde{e}_p e_i) = 0$。然而，在前面的证明中，为了说明性染色体代数不是结合的，我们已经证明这会导致矛盾。□

4. From gonosomal algebras to normalized gonosomal evolutionoperators

现在我们结合 $K = \mathbb{R}$ 使用定义 1。本节将为每个性染色体连锁的 $\mathbb{R}$-代数关联两个演化算子。

从一个性染色体连锁的 $\mathbb{R}$-代数 A 出发，我们定义映射

$$\begin{array}{rccc} W: & A & \to & A \\ & z & \mapsto & \frac{1}{2}z^2. \end{array} \tag{4.1}$$

特别地，如果 $(e_i)_{1\leq i\leq n} \cup (\widetilde{e}_j)_{1\leq j\leq \nu}$ 是 A 的一个性染色体基，对于

$$z^{(t)} = W^t(z) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(t)} e_i + \sum_{p=1}^{\nu} y_p^{(t)} \widetilde{e}_p$$

我们得到：

$$z^{(t+1)} = W\big(z^{(t)}\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{i,p=1}^{n,\nu} \gamma_{ipk} x_i^{(t)} y_j^{(t)} e_k + \sum_{r=1}^{\nu}\sum_{i,p=1}^{n,\nu} \widetilde{\gamma}_{ipr} x_i^{(t)} y_j^{(t)} \widetilde{e}_r. \tag{4.2}$$

我们注意到，算子 W 的各分量对应于式 (2.1) 中得到的比例。

顺便提一下，也请注意性染色体算子与由下式定义的常染色体遗传类型所关联的演化算子之间的差异： $z \mapsto z^2$ （参见 [8], 第 15 页和 [16], 第 7 页）。

对于给定的 $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\nu$，由 W 生成的动力系统定义为以下序列： $z, W(z), W^2(z), W^3(z), \ldots$. 回忆一下，称为性染色体进化算子的二次演化算子 W，其坐标形式定义如下：

$$W : \mathbb{R}^{n+\nu} \to \mathbb{R}^{n+\nu}, (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto \big(x_1', \ldots, x_n', y_1', \ldots, y_n'\big)$$

$$W:\begin{cases} x_k' = \sum\limits_{i,j=1}^{n,\nu} \gamma_{ijk} x_i y_j, \quad k = 1, \ldots, n \\ y_r' = \sum\limits_{i,j=1}^{n,\nu} \widetilde{\gamma}_{ijr} x_i y_j, \quad r = 1, \ldots, \nu, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} + \sum_{r=1}^{\nu} \widetilde{\gamma}_{ijr} = 1, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le \nu. \tag{4.4}$$

反过来，显然，任何满足 (4.4) 的 (4.3) 形式的算子都对应于一个性染色体代数。

元素 $z^* \in \mathbb{R}^{n+\nu}$ 是动力系统 (4.3) 的平衡点，当且仅当对所有 $t \ge 1$，都有 $W^t(z^*) = z^*$。由等价关系 $W^t(z^*) = z^*, \forall t \ge 1 \Leftrightarrow W(z^*) = z^*$ 可知，z^* 是平衡点，当且仅当 z^* 是 W 的不动点。

根据 W 的定义，我们立即得出以下结果。

命题 5. 性染色体代数 A 的幂等元与和 A 相关的性染色体算子 W 的不动点一一对应。

证明。事实上，若 $e \in A$ 是幂等元，则有 $W(2e) = 2e$，即 $2e$ 是W的不动点。若 $z^* \in \mathbb{R}^{n+\nu}$是 W的不动点，则有 $\left(\frac{1}{2}z^*\right)^2 = \frac{1}{4}(z^*)^2 = \frac{1}{2}W(z^*) = \frac{1}{2}z^*$，因此元素 $\frac{1}{2}z^*$ 是 A的幂等元。□

根据式 (4.1) 给出的定义，我们得到如下结果:

命题 6。设 $\varphi : A_1 \to A_2$ 是两个性染色体代数A_1 和 A_2之间的一个同构，则性染色体算子 $W_1 : A_1 \to A_1$ 和 $W_2 : A_2 \to A_2$ 满足$\varphi \circ W_1 = W_2 \circ \varphi$。

Proof. 事实上，对于所有 $x \in A_1$，我们有 $\varphi \circ W_1(x) = \varphi\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}\varphi(x)^2 = W_2 \circ \varphi(x)$。 □

并且这 一结果表明，性染色体算子之间存在如下等价关系 ;

定义 2. 两个性染色体算子 $W_1 : A_1 \to A_1$ 和 $W_2 : A_2 \to A_2$ 共轭，当且仅当存在代数同构 $\varphi : A_1 \to A_2$，使得 $\varphi \circ W_1 = W_2 \circ \varphi$。

点 $z^{(0)} \in \mathbb{R}^{n+\nu}$ 在性染色体算子 W 下的轨迹是由 $z^{(t)} = W^t\left(z^{(0)}\right)$ 定义的迭代序列 $\left(z^{(t)}\right)_{t\ge 0}$，其中每个点 $z^{(t)}$ 对应于种群在第 t 世代的状态。如果初始点 $z^{(0)}$ 的轨迹收敛，则存在一点 $z^{(\infty)}$，使得 $z^{(\infty)} = \lim_{t\to\infty} z^{(t)}$；根据算子 W 的连续性，极限点 $z^{(\infty)}$ 是 W 的不动点。

命题 7. 若 W_1、W_2 是两个共轭的性染色体算子，则这两个算子的不动点与极限点之间存在一一对应关系。

证明。这是一个广为人知的事实，例如参见 [2]。这里我们给出一个简要证明。令$\varphi : A_1 \to A_2$ 为连接 W_1 与 W_2的代数同构。若 z_1^* 是W_1的不动点，由 $\varphi(z_1^*) = \varphi \circ W_1(z_1^*) = W_2 \circ \varphi(z_1^*)$，可得 $\varphi(z_1^*)$是 W_2的不动点。并且

若 $z_1^{(\infty)}$ 、 $z_2^{(\infty)}$ 分别是 W_1 和 W_2 的极限点，则由 φ的连续性可容易得到：$\varphi(x_1^{(\infty)}) = \left(\varphi(x_1^{(0)})\right)^{(\infty)}$ 和 $\varphi^{-1}(x_2^{(\infty)}) = \left(\varphi^{-1}(x_2^{(0)})\right)^{(\infty)}$。

□

对每个性染色体代数 A，都自然地关联着如下线性形式：

$$\varpi : A \to \mathbb{R}, \quad \varpi(e_i) = \varpi(\widetilde{e}_j) = 1. \tag{4.5}$$

将 ϖ 应用于 (4.2)，得到

$$\varpi\left(z^{(t+1)}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(t+1)} + \sum_{j=1}^{\nu} y_j^{(t+1)} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{(t)}\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j^{(t)}\right) \tag{4.6}$$

这与关系式 (2.2) 相对应。

对于 W 的非负分量不动点，我们有：

命题 8. 若 $z^* \in \mathbb{R}_+^{n+\nu}$, $z^* \neq 0$ 是 W 的一个不动点，则 $\varpi(z^*) \geq 4$。

证明。设 $z^* = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)$是 W的不动点，其中 $x_k, y_r \geq 0$。由$W(z^*) = z^*$可推得$(\sum_k x_k)(\sum_r y_r) = \sum_k x_k + \sum_r y_r = \varpi(z^*)$，因此 $\sum_k x_k$和$\sum_r y_r$是多项式 $X^2 - \varpi(z^*)X + \varpi(z^*)$的正实根，其中 $\varpi(z^*) \in \mathbb{R}_+$，但 $\varpi(z^*)(\varpi(z^*) - 4) \geq 0$，且仅当 $\varpi(z^*) \geq 4$时，$\varpi(z^*) \geq 0$。□

对于 $\mathbb{R}^{n+\nu}$的遗传学应用，我们将范围限制在单纯形上：

$$S^{n+\nu-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu) \in \mathbb{R}^{n+\nu} : x_i \geq 0, y_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{\nu} y_i = 1\right\}$$

该单纯形与遗传类型 e_i 和 $\widetilde{e}_j$的频率分布相关联。但是，性染色体算子 W 不保持单纯形 $S^{n+\nu-1}$，事实上：

命题9. 设 A 是类型为 (n, ν) 的性染色体 $\mathbb{R}$-代数，则有：

a) $W\left(\mathbb{R}_+^{n+\nu}\right) \subset \mathbb{R}_+^{n+\nu}$当且仅当 $\gamma_{ijk} \geq 0$ 且对所有 $1 \leq i$、$k \leq n$ 和$1 \leq r \leq \nu$，均有$\widetilde{\gamma}_{ijr} \geq 0$。

b) $\varpi \circ W(z) \leq \frac{1}{4}$ *for all* $z \in S^{n+\nu-1}$.

证明. 对于 a)，充分条件显然成立。对于必要条件，只需注意到，对每个 $1 \leq i \leq n$ 和 $1 \leq j \leq \nu$，都有 $W(e_i + \widetilde{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} e_k + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\gamma}_{ijk} \widetilde{e}_k$。结论 b) 由著名不等式 $4ab \leq (a+b)^2$ 得出。□

由此得到以下定义。

定义 3. 如果 K-代数 A 满足定义 1，其中 $K = \mathbb{R}$ 和 $\gamma_{ipk} \geq 0$、$\widetilde{\gamma}_{ipr} \geq 0$ 对所有 $1 \leq i$、$k \leq n$ 和 $1 \leq p$、$r \leq \nu$ 成立，则称其为类型为 (n, ν) 的性别染色体随机代数。

在以 $(e_i)_{1 \leq i \leq n} \cup (\widetilde{e}_p)_{1 \leq p \leq \nu}$ 为基的性别染色体随机代数中，$(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ （分别为 $(\widetilde{e}_p)_{1 \leq p \leq \nu}$）中的元素表示在雌性（分别在雄性）中观察到的遗传类型，而结构常数 γ_{ipk} （分别为 $\widetilde{\gamma}_{ipr}$）是遗传系数，也就是说，当亲本对由类型为 e_i 的雌性和类型为 $\widetilde{e}_p$ 的雄性组成时，雌性（分别为雄性）后代属于类型 e_k （分别为 $\widetilde{e}_r$）的概率。

命题10. 设 A 是一个类型为 (n,ν) 的性别染色体随机代数，且 $z\in\mathbb{R}_+^{n+\nu}$。

a) If $\varpi(z)=0$ *th*在 $z=0$

对于所有 $t\geq 1$，记 $z^{(t)}=W^t(z)$，则有：

b) 若 $\varpi(z)\leq 4$，序列 $\left(\varpi\left(z^{(t)}\right)\right)_{t\geq 0}$ 是递减的。

c) 对于 $t\geq 0$,

$$\left(\min_{i,j}\left\{\sqrt{\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{ij}}\right\}\right)^{2\left(2^t-1\right)}\left(\varpi(z)\right)^{2^t}\leq\varpi\left(z^{(t)}\right)\leq\left(\max_{i,j,p,q}\left\{\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}\right\}\right)^{2^t-1}\left(\varpi(z)\right)^{2^t},$$

$$\varpi\left(z^{(t)}\right)\leq\left(\max_{i,j,p,q}\left\{\tfrac{1}{16}\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}\right\}\right)^{\frac{1}{3}\left(4^{\lfloor t/2\rfloor}-1\right)}\times\begin{cases}\left(\varpi(z)\right)^{4^{\lfloor t/2\rfloor}} & \textit{if } t \textit{ is even,}\\ \left(\frac{1}{4}\varpi(z)\right)^{4^{\lfloor t/2\rfloor}} & \textit{if } t \textit{ is odd,}\end{cases}$$

其中，对所有 $1\leq i,p\leq n$ 和 $1\leq j,q\leq\nu$，我们令 $\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ijk}$ 和 $\widetilde{\gamma}_{pq}=\sum_{r=1}^{\nu}\widetilde{\gamma}_{pqr}$。

证明。a) 显然。

在下文中，对所有 $t\geq 0$，记 $z^{(t)}=\left(x_{(t)1},\ldots,x_{(t)n},y_{(t)1},\ldots,y_{\binom{t}{\nu}}\right)$，其中 $z^{(0)}=z$。b) 利用关系 (4.3) 递归地证明，对每个 $t\geq 0$，都有 $z^{(t)}\in\mathbb{R}_+^{n+\nu}$。由

$$4\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k^{(t-1)}\Big)\Big(\sum_{r=1}^{\nu}y_r^{(t-1)}\Big)\leq\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k^{(t-1)}+\sum_{r=1}^{\nu}y_r^{(t-1)}\Big)^2$$

我们可推得，对所有 $t\geq 1$，有：

$$4\varpi\left(z^{(t)}\right)\leq\left(\varpi\left(z^{(t-1)}\right)\right)^2,\qquad(*)$$

由 $0\leq\varpi(z)\leq 4$，我们推得 $\left(\varpi(z)\right)^2\leq 4\varpi(z)$；结合 (∗)，可得 $\varpi\left(z^{(1)}\right)\leq\varpi(z)\leq 4$。然后由 (∗)，并通过数学归纳法，得到所需结果。

c) 确实，由 (4.6) 可得：

$$\varpi\left(z^{(t)}\right)=\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k^{(t-1)}\Big)\Big(\sum_{r=1}^{\nu}y_r^{(t-1)}\Big)$$

利用关系式 (4.3)，可将其写为

$$\begin{aligned}\varpi\left(z^{(t)}\right)&=\Big(\sum_{i,j=1}^{n,\nu}\gamma_{ij}\,x_i^{(t-2)}y_j^{(t-2)}\Big)\Big(\sum_{p,q=1}^{n,\nu}\widetilde{\gamma}_{pq}\,x_p^{(t-2)}y_q^{(t-2)}\Big)\\&=\sum_{i,p=1}^{n}\sum_{j,q=1}^{\nu}\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}\,x_i^{(t-2)}x_p^{(t-2)}y_j^{(t-2)}y_q^{(t-2)}\end{aligned}\tag{4.7}$$

因此

$$\varpi\left(z^{(t)}\right)\leq\max_{i,j,p,q}\left\{\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}\right\}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^{(t-2)}\Big)^2\Big(\sum_{j=1}^{\nu}y_j^{(t-2)}\Big)^2\tag{4.8}$$

但由（4.6）可得 $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{(t-2)}\right)\left(\sum_{r=1}^{\nu} y_r^{t-2}\right) = \varpi\left(z^{(t-1)}\right)$，因此

$$\varpi\left(z^{(t)}\right) \leq \max_{i,j,p,q}\left\{\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}\right\}\left(\varpi\left(z^{(t-1)}\right)\right)^2,$$

由数学归纳法可得：$\varpi\left(z^{(t)}\right) \leq \left(\max_{i,j,p,q}\left\{\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}\right\}\right)^{2^t-1}\left(\varpi\left(z\right)\right)^{2^t}$。

在 (4.7) 中交换 (i,j) 与 (p,q) 的角色，可得：

$$\varpi\left(z^{(t)}\right) = \sum_{i,p=1}^{n}\sum_{j,q=1}^{\nu}\gamma_{pq}\widetilde{\gamma}_{ij}\, x_i^{(t-2)}x_p^{(t-2)}y_j^{(t-2)}y_q^{(t-2)}$$

因此

$$\varpi\left(z^{(t)}\right) = \sum_{i,p=1}^{n}\sum_{j,q=1}^{\nu}\tfrac{1}{2}\left(\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}+\gamma_{pq}\widetilde{\gamma}_{ij}\right) x_i^{(t-2)}x_p^{(t-2)}y_j^{(t-2)}y_q^{(t-2)}$$

但由 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ 可知

$$\begin{aligned}\varpi\left(z^{(t)}\right) &\geq \sum_{i,p=1}^{n}\sum_{j,q=1}^{\nu}\sqrt{\gamma_{ij}\gamma_{pq}\widetilde{\gamma}_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}}\, x_i^{(t-2)}x_p^{(t-2)}y_j^{(t-2)}y_q^{(t-2)}\\ &= \left(\sum_{i,j=1}^{n,\nu}\sqrt{\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{ij}}\, x_i^{(t-2)}y_j^{(t-2)}\right)^2\\ &\geq \left(\min_{i,j}\left\{\sqrt{\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{ij}}\right\}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{(t-2)}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{\nu}y_j^{(t-2)}\right)^2\end{aligned}$$

因此

$$\left(\min_{i,j}\left\{\sqrt{\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{ij}}\right\}\right)^2\left(\varpi\left(z^{(t-1)}\right)\right)^2 \leq \varpi\left(z^{(t)}\right),$$

并由数学归纳法得出 $\left(\min_{i,\ j}\left\{\sqrt{\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{ij}}\right\}\right)^{2(2^t-1)}\left(\varpi\left(z\right)\right)^{2^t} \leq \varpi\left(z^{(t)}\right)$。

由 (4.8) 并利用 (4.6) 和 $ab\leq\frac{1}{4}(a+b)^2$，可得

$$\varpi\left(z^{(t)}\right) \leq \max_{i,j,p,q}\left\{\tfrac{1}{16}\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}\right\}\left(\varpi\left(z^{(t-2)}\right)\right)^4$$

因此，由数学归纳法

$$\varpi\left(z^{(t)}\right) \leq \left(\max_{i,j,p,q}\left\{\tfrac{1}{16}\gamma_{ij}\widetilde{\gamma}_{pq}\right\}\right)^{\frac{1}{3}\left(4^{\lfloor t/2\rfloor}-1\right)}\left(\varpi\left(z^{\left(t-2\lfloor\frac{t}{2}\rfloor\right)}\right)\right)^{4^{\lfloor t/2\rfloor}}$$

当 t 为偶数时，立即可得该结果；当 t 为奇数时，只需注意到$\varpi\left(z^{(1)}\right) = \left(\sum_k x_k\right)\left(\sum_r y_r\right) \leq \frac{1}{4}\left(\varpi\left(z\right)\right)^2$。□

记作

$$\mathcal{O}^{n,\nu} = \left\{(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_\nu)\in\mathbb{R}^{n+\nu} : x_1=\cdots=x_n=0 \text{ or } y_1=\cdots=y_\nu=0\right\}.$$

容易看出，对于 $z \in \mathbb{R}_+^{n+\nu}$，我们有：

$$\varpi \circ W(z) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\nu} y_j\Big) = 0 \;\Leftrightarrow\; z \in \mathcal{O}^{n,\nu}.$$

因此，若记

$$S^{n,\nu} = S^{n+\nu-1} \setminus \mathcal{O}^{n,\nu}$$

则算子

$$V : S^{n,\nu} \to S^{n,\nu}, \quad z \mapsto \frac{1}{\varpi \circ W(z)} W(z)$$

是良定义的，称为 W 的归一化性染色体算子。利用关系式 (4.3)，我们可以将算子 V 表示为坐标形式：

$$V : \begin{cases} x_k' = \dfrac{\sum_{i,j=1}^{n,\nu} \gamma_{ijk} x_i y_j}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j\right)}, & k = 1, \ldots, n \\ y_r' = \dfrac{\sum_{i,j=1}^{n,\nu} \widetilde{\gamma}_{ijr} x_i y_j}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j\right)}, & r = 1, \ldots, \nu. \end{cases} \tag{4.9}$$

我们可以注意到，算子 V 的坐标对应于式 (2.3) 中得到的遗传类型频率分布。

命题11. 设 A 是一个类型为 (n, ν) 的性别染色体随机代数。对于所有 $z \in S^{n,\nu}$ 和 $t \geq 1$，定义 $z^{(t)} = V^t(z) = \Big(x^{(t)1}, \ldots, x^{(t)n}, y^{(t)1}, \ldots, y^{(t)\binom{t}{\nu}}\Big)$，则有

$$\min_{i,j}\{\gamma_{ijk}\} \leq x_k^{(t)} \leq \max_{i,j}\{\gamma_{ijk}\} \quad \textit{and} \quad \min_{i,j}\{\widetilde{\gamma}_{ijr}\} \leq y_r^{(t)} \leq \max_{i,j}\{\widetilde{\gamma}_{ijr}\}.$$

证明。容易看出，对于每个 $1 \leq k \leq n$ 和 $1 \leq r \leq \nu$，以下不等式成立

$$\min_{i,j}\{\gamma_{ijk}\}\Big(\sum_{i,j} x_i^{(t-1)} y_j^{(t-1)}\Big) \leq \sum_{i,j} \gamma_{ijk} x_i^{(t-1)} y_j^{(t-1)} \leq \max_{i,j}\{\gamma_{ijk}\}\Big(\sum_{i,j} x_i^{(t-1)} y_j^{(t-1)}\Big)$$

$$\min_{i,j}\{\widetilde{\gamma}_{ijr}\}\Big(\sum_{i,j} x_i^{(t-1)} y_j^{(t-1)}\Big) \leq \sum_{i,j} \widetilde{\gamma}_{ijr} x_i^{(t-1)} y_j^{(t-1)} \leq \max_{i,j}\{\widetilde{\gamma}_{ijr}\}\Big(\sum_{i,j} x_i^{(t-1)} y_j^{(t-1)}\Big),$$

因此，利用关系式 (4.9) 即可得出结果。 □

我们可以研究代数同构对归一化性染色体算子的作用.

命题12。若 A_1 和 A_2 是性别染色体随机代数，ϖ_1 和 ϖ_2 是按 (4.5) 在 A_1 和 A_2 上定义的线性形式，且若 $\varphi : A_1 \to A_2$ 是一个代数同构，满足 $\varpi_2 \circ \varphi = \varpi_1$，则有 $V_2 = \varphi \circ V_1 \circ \varphi^{-1}$。

证明。根据命题 6，我们有 $\varphi \circ W_1 = W_2 \circ \varphi$。容易证明，对于$z \in \mathbb{R}^{n+\nu}$，我们得到：$\varpi_1 \circ W_1(z) = 0 \Leftrightarrow \varpi_2 \circ W_2(z) = 0$。而对于所有 $z \in S^{n,\nu}$，我们得到：

$$\begin{aligned} V_2 \circ \varphi(z) &= \frac{1}{\varpi_2 \circ W_2 \circ \varphi(z)} W_2 \circ \varphi(z) = \frac{1}{\varpi_2 \circ \varphi \circ W_1(z)} \varphi \circ W_1(z) \\ &= \frac{1}{\varpi_1 \circ W_1(z)} \varphi \circ W_1(z) = \varphi \circ V_1(z). \end{aligned}$$

□

命题13。在类型为 (n,ν) 的性别染色体随机代数中：

a) 如果存在 $t_0 \geq 1$ 使得 $W^{t_0}(z) = 0$，那么对于所有 $t \geq t_0$，$W^t(z) = 0$。

b) 如果存在 $t \geq 0$ 使得 $W^t(z) \in \mathcal{O}^{n,\nu}$，那么 $W^{t+1}(z) = 0$。 c) 对于 $z \in \mathbb{R}_+^{n+\nu}$ 和 $t \geq 0$，我们有 $W^t(z) \in \mathcal{O}^{n,\nu} \Leftrightarrow \varpi \circ W^{t+1}(z) = 0$。

d) 对于 $z \in \mathbb{R}_+^{n+\nu}$, $z \neq 0$，若 $W^t(z) = 0$ 则存在 $0 \leq t_0 < t$ 使得 $W^{t_0}(z) \neq 0$ 且 $W^{t_0}(z) \in \mathcal{O}^{n,\nu}$.

e) 对所有满足 $\varpi \circ W^t(z) \neq 0$ 的 $z \in S^{n,\nu}$ 和 $t \geq 0$，我们有：

$$V^t(z) = \frac{1}{\varpi \circ W^t(z)} W^t(z).$$

证明。a) 由 $z^{(t)} = \left(x^{(t)1}, \ldots, x^{(t)n}, y^{(t)1}, \ldots, y^{(t}_{n}{}^{t)}\right)$，根据 $W^{t_0}(z) = 0$ 可得 $x^{(t_0)}{}_i = 0$ 和 $y^{(t_0)}{}_j = 0$，由此根据（4.3）得出：$x^{(t_0+1)}{}_i = 0$ 和 $y^{(t_0+1)}{}_j = 0$，结论由数学归纳法得出。

b) 对于 $W^t(z) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)$，若对所有 $1 \leq k \leq n$ 都有 $x_k = 0$，或者 $y_r = 0$ 且 $1 \leq r \leq \nu$，则由关系式（4.3）可得 $x'_k = 0$ 和 $y'_r = 0$，因此 $W^{t+1}(z) = 0$。

c) 必要性由 b) 得出。对于充分性，只需注意到 $W^t(z) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)$ 蕴含 $\varpi \circ W^{t+1}(z) = (\sum_{k=1}^n x_k)(\sum_{r=1}^\nu y_r)$，因此若 $\varpi \circ W^{t+1}(z) = 0$，则可得 $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ 或 $\sum_{r=1}^\nu y_r = 0$，并且由于对所有 k 和 r，$x_k \geq 0, y_r \geq 0$，我们有 $W^t(z) \in \mathcal{O}^{n,\nu}$。

d) 设 $z \neq 0$ 和 $t > 0$。设 $t_0 \geq 0$ 为满足 $W^{t_0+1}(z) = 0$ 的最小整数，因此 $t_0 + 1 \leq t$；由 $\varpi \circ W^{t_0+1}(z) = 0$ 和 c)，我们推得 $W^{t_0}(z) \in \mathcal{O}^{n,\nu}$。

e) 通过对 $t \geq 0$ 使用数学归纳法。对于 $t_2 \geq 1$，假设 $\varpi \circ W^{t+1}(z) \neq 0$ 且 $V^t(z) = \frac{1}{\varpi \circ W^t(z)} W^t(z)$，则有 $W\left(V^t(z)\right) = \left(\frac{1}{\varpi \circ W^t(z)}\right) W^{t+1}(z)$ (∗)，由此可得 $\varpi \circ W\left(V^t(z)\right) = \left(\frac{1}{\varpi \circ W^t(z)}\right)^2 \varpi \circ W^{t+1}(z) \neq 0$ (∗∗)。根据算子 V 的定义，我们得到

$$V^{t+1}(z) = V\left(V^t(z)\right) = \frac{1}{\varpi \circ W\left(V^t(z)\right)} W\left(V^t(z)\right)$$

结合 (∗) 和 (∗∗)，得到与阶数 $t+1$ 的关系。 □

注释 2。从遗传学的角度来看，结果 a) 意味着在两性群体中，当一个性连锁异型染色体基因消失时，它不会重新出现。结果 b) 和 c) 意味着，当且仅当一个性别染色体基因消失时，某一性别的所有个体都会消失。

算子 V 的不动点与 W 的某些不动点之间存在关系。为此，我们引入以下定义：性染色体算子 W 的一个不动点 $z = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)$ 若满足以下条件 x_i、$y_j \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^\nu y_j > 0$，则称其为非负且可归一化的。文献 [11] 已证明，

命题 14. 映射 $z^* \mapsto \frac{1}{\varpi\, z^*(\,)} z^*$ 是 W 的非负且可归一化不动点集合与算子 V 的不动点集合之间的一一对应。

从W 转到算子 V时，平衡点的各种稳定性概念均保持不变。

定理 2. 设 z^* 是 W 的一个非负且可归一化的不动点。

a) 若 z^* 是吸引的，则 $\varpi^{-1}(z^*)z^*$ 是 V 的一个吸引平衡点。

b) 若 z^* 稳定（分别地，一致稳定），则 $\varpi^{-1}(z^*)z^*$ 是 V 的一个稳定（分别地，一致稳定）平衡点。

c) 若 z^* 渐近稳定，则 $\varpi^{-1}(z^*)z^*$ 是 V 的不动点且渐近稳定。d) 若 z^* 指数稳定，则 $\varpi^{-1}(z^*)z^*$ 是 V 的不动点且指数稳定。

证明. a) 若 z^* 是 W 的一个吸引点，则存在 $\rho>0$，使得对于所有满足 $\|z-z^*\|<\rho$ 的 $z\in\mathbb{R}^{n+\nu}$，我们有 $\lim_{t\to\infty}W^t(z)=z^*$。由于 $z^*\neq 0$，我们得到 $\varpi(z^*)\neq 0$。根据 ϖ 的连续性，我们有 $\lim_{t\to\infty}\varpi\circ W^t(z)=\varpi(z^*)$。接下来，对所有满足 $\lim_{t\to\infty}W^t(z)=z^*$ 的 $z\in\mathbb{R}^{n+\nu}$，我们得到对于每个 $t\geq 0$，$W^t(z)\neq 0$；否则，根据命题13 a)，我们会有 $\lim_{t\to\infty}W^t(z)=0$。由此可推得，特别是当 $z\in S^{n+\nu-1}$ 时，我们有 $\varpi\circ W^t(z)\neq 0$。最后，对于任意满足 $\|z-z^*\|<\rho$ 的 $z\in S^{n+\nu-1}$，我们有 $\lim_{t\to\infty}V^t(z)=\lim^{t\to\infty}{}^{\frac{1}{\varpi\circ W^t(z)}}W^t(z)={}^{\frac{1}{\varpi(z^*)}}z^*$。

在下文中，$\mathbb{R}^{n+\nu}$ 配备范数 $\|(x_1,\ldots,x_{n+\nu})\|=\sum_{i=1}^{n+\nu}|x_i|$，由此可知，对于该范数，当 $z\in\mathbb{R}_+^{n+\nu}$ 时有 $\|z\|=\varpi(z)$。

b) 根据定义，若对于所有 $t_0\geq 0$ 和 $\epsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得条件 $\|z-z^*\|<\delta$ 蕴含 $\|W^t(z)-z^*\|<\epsilon\,(t\geq t_0)$，则平衡点 z^* 对于 W 是稳定的；若 $\delta>0$ 的存在与 t_0 无关，则 z^* 是一致稳定的。

由命题 8 可推得 $\varpi(z^*)-2>2$；下文中我们取 $0<\epsilon<\varpi(z^*)-2$。对于所有 $z\in S^{n,\nu}$，我们得到

$$\left\|V^t(z)-V(z^*)\right\|\leq\left\|\frac{1}{\varpi\circ W^t(z)}W^t(z)-\frac{1}{\varpi\circ W^t(z)}z^*\right\|+\left\|\frac{1}{\varpi\circ W^t(z)}z^*-\frac{1}{\varpi(z^*)}z^*\right\|$$

or

$$\left\|V^t(z)-V(z^*)\right\|\leq\frac{1}{\varpi\circ W^t(z)}\left\|W^t(z)-z^*\right\|+\left|\frac{1}{\varpi\circ W^t(z)}-\frac{1}{\varpi(z^*)}\right|\|z^*\|.\tag{4.10}$$

如果我们将 $W^t(z)=\left(x_i^{(t)}\right)_{1\leq i\leq n+\nu}$ 和 $z^*=(x_i^*)_{1\leq i\leq n+\nu}$ 分别记为，我们注意到

$$\left|\varpi\circ W^t(z)-\varpi(z^*)\right|\leq\sum_{i=1}^{n+\nu}\left|x_i^{(t)}-x_i^*\right|=\left\|W^t(z)-z^*\right\|,$$

我们推得，对于所有满足 $\|z-z^*\|<\delta$ 的 $x\in S^{n,\nu}$，都有 $0<\varpi(z^*)-\epsilon\leq\varpi\circ W^t(z)$；结合这一点和 $\|z^*\|=\varpi(z^*)$，不等式 (4.10) 化为

$$\left\|V^t(z)-V(z^*)\right\|\leq\frac{2\epsilon}{\varpi(z^*)-\epsilon}<\epsilon$$

这就证明了该结果。

c) 如果 z^* 对于 W 是渐近稳定的，那么根据定义，z^* 对于 W 是吸引且稳定的；但由 a) 和 b) 可知，z^* 对于 V 是吸引且稳定的，因此 z^* 对于 V 是渐近稳定的。

d）根据定义，z^* W 的平衡点是指数稳定的，当且仅当对于所有 $t_0\geq 0$，存在 $\delta>0$、$M>0$ 和 $\eta\in\,]0,\,1[$，使得对于$z\in\mathbb{R}^{n+\nu}$：

$$\|z-z^*\|\leq\delta\Rightarrow\left\|W^t(z)-z^*\right\|\leq M\eta^t\|z-z^*\|,\ \text{for all } t\geq t_0.$$

与 b）中的做法类似，对于所有 $z \in S^{n,\ \nu}$，我们有如下不等式：

$$\left\|V^t(z) - V(z^*)\right\| \leq \frac{1}{\varpi \circ W^t(z)} \left\|W^t(z) - z^*\right\| + \left|\frac{1}{\varpi \circ W^t(z)} - \frac{1}{\varpi(z^*)}\right| \|z^*\|. \tag{4.11}$$

与 b) 中一样，我们得到：$\left|\varpi \circ W^t(z) - \varpi(z^*)\right| \leq \left\|W^t(z) - z^*\right\|$，由此推得，对于所有满足 $\|z - z^*\| \leq \delta$ 的 $z \in S^{n,\ \nu}$，我们得到 $\varpi(z^*) - M\eta^t \|z - z^*\| \leq \varpi \circ W^t(z)$。但是，$\eta \in]0,1[$，因此存在这样的 $t_1 \geq t_0$，使得对于 $t \geq t_1$，$4 - M\eta^t \|z - z^*\| \geq 2$，但我们在命题 8 中看到 $\varpi(z^*) \geq 4$，因此对于所有满足 $\|z - z^*\| \leq \delta$ 的 $z \in S^{n,\ \nu}$，且对于每个 $t \geq t_1$，我们有

$$2 \leq \varpi(z^*) - M\eta^t \|z - z^*\| \leq \varpi \circ W^t(z)$$

由此及 $\|z^*\| = \varpi(z^*)$，不等式 (4.11) 变为

$$\left\|V^t(z) - V(z^*)\right\| \leq \frac{2M\eta^t \|z - z^*\|}{\varpi(z^*) - M\eta^t \|z - z^*\|} \leq M\eta^t \|z - z^*\|, \text{ for all } t \geq t_1,$$

这证明 x^* 是 V 的指数稳定点。 □

5. Dynamical systems of diallelic gonosomal lethal genetic disorders

遗传病是由基因发生突变引起的疾病；如果突变基因的基因座位于性染色体上（或常染色体上或假常染色体上），则该遗传病称为性染色体连锁的（或常染色体的）。如果突变等位基因是显性的或隐性的，则该遗传病称为显性遗传病或隐性遗传病。对于性染色体连锁疾病，显隐性只对同配性别个体起作用，也就是说，这类个体携带两条相同类型的性染色体；而携带突变等位基因的异配性别个体无论该等位基因是显性还是隐性，都会患病。最后，如果某个等位基因在其为显性时会导致携带者死亡，或在其为隐性时会导致纯合个体死亡，则该等位基因是致死的。

下文将讨论一种在 XY 性别决定方程组中含有一个致死等位基因的性染色体二等位基因遗传病。根据致死等位基因的显性或隐性性质，存在六种性染色体代数，分别对应下表所列的情况：

		♂ 致死	♂ 非致死
♀	致死显性	(1, 1)	(1, 2)
♀	致死性隐性	(2, 1)	(2, 2)
♀	非致死	(3, 1)	(3, 2)

在下文中，我们用 X^* 表示携带致死等位基因的性染色体 X。

5.1. (♀ 致死显性，♂致死)情形下轨迹的渐近行为。

在这种情况下，基因型 XX^*、X^*X^* 和 X^*Y 是致死的，种群中只能观察到两种基因型 XX 和 XY。与这种情况相关的性染色体代数定义在基 $(e, \widetilde{e})$ 上，其定义为：$e\widetilde{e} = \gamma e + (1-\gamma)\ \widetilde{e}$，当且仅当 $0 < \gamma < 1$ 时，它是随机的。

命题15。与下文定义的性染色体代数 $\mathbb{R}\langle e, \widetilde{e}\rangle$ 相关联的性染色体算子 W 有两个不动点：(0, 0)和 $\left(\frac{1}{1-\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right)$、$\gamma \neq 0$、1。

证明。对于 $z \in \mathbb{R}\langle e、\ \widetilde{e}\rangle$、 $z = xe + y\widetilde{e}$，关系$z = \frac{1}{2}z^2$等价于

$$\begin{cases} x &= \gamma xy \\ y &= (1-\gamma)\, xy \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} (1-\gamma y)\, x &= 0 \\ (1-(1-\gamma)\, x)\, y &= 0. \end{cases}$$

如果 $\gamma = 0$或 $\gamma = 1$，我们立即得到 $(x, y) = (0, 0)$。如果 $\gamma \neq 0,\ 1$，显然，若 $x = 0$，则 $y = 0$；若 $x \neq 0$，则由第一个方程推出 $y = \frac{1}{\gamma}$，由此第二个方程得到 $x = \frac{1}{1-\gamma}$。
□

命题16。关于与性别染色体随机代数 $\mathbb{R}\langle e, \widetilde{e}\rangle$ 相关的算子 W, V： $e\widetilde{e} = \gamma e + (1-\gamma)\ \widetilde{e}$，$(0 < \gamma < 1)$，对于任意初始点 $z^{(0)} = \left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^2$，有：

$$\lim_{t\to\infty} W^t\left(z^{(0)}\right) = \begin{cases} (0,0) & if\ \left|x^{(0)}y^{(0)}\right| < \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \\ \left(\frac{1}{1-\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right) & if\ \left|x^{(0)}y^{(0)}\right| = \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \\ +\infty & if\ \left|x^{(0)}y^{(0)}\right| > \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \end{cases}$$

$$V^t\left(z^{(0)}\right) = (\gamma, 1-\gamma), \quad (\forall t \geq 1).$$

证明。设 $z^{(t)} = W^t\left(z^{(0)}\right) = \left(x^{(t)}, y^{(t)}\right)$。我们得到

$$\begin{cases} x^{(t+1)} &= \gamma x^{(t)} y^{(t)} \\ y^{(t+1)} &= (1-\gamma)\, x^{(t)} y^{(t)} \end{cases}$$

由此，我们很容易证明，对于任意 $t \geq 1$

$$x^{(t)} = \frac{1}{1-\gamma}\left[\gamma(1-\gamma)\, x^{(0)}y^{(0)}\right]^{2^t} \text{ and } y^{(t)} = \frac{1}{\gamma}\left[\gamma(1-\gamma)\, x^{(0)}y^{(0)}\right]^{2^t},$$

因此 $\varpi \circ W^t\left(z^{(0)}\right) = \gamma^{\frac{1}{(1-\gamma)}}\left[\gamma(1-\gamma)\ x^{(0)}y^{(0)}\right]^{2^t}$ 并且我们使用命题13的结果 e)。

□

注记3. 命题2中的结论一般来说不可逆。事实上，在上述结果中，不动点 $\left(\frac{1}{1-\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right)$ 对于 W不稳定，而其归一化形式 $(\gamma, 1-\gamma)$ 对于 V稳定。

应用：我们考虑一种性染色体二等位基因，该基因在雌性中为隐性致死，在雄性中为致死。我们将 $0 \leq \mu \leq 1$ 表示雌性中正常等位基因突变为致死等位基因的突变率，将 $0 \leq \eta \leq 1$ 表示雄性中的相应突变率。我们假设每个个体每次突变只影响一条性染色体 X，因此在配子发生过程中有： $XX \rightarrowtail (1-\mu)\ X + \mu X^*$， $XY \rightarrowtail \frac{1-\eta}{2}X + \frac{\eta}{2}X^* + \frac{1}{2}Y$，从而在繁殖后$XX \times XY \rightarrowtail \frac{1-\eta}{2-\eta}XX + \frac{1}{2-\eta}XY$。根据命题16，每一世代中非致死等位基因的频率分布均为平稳分布，且等于 $\left(\frac{1-\eta}{2-\eta}, \frac{1}{2-\eta}\right)$。我们注意到，该分布不依赖于突变率 μ，并且雌性中的频率低于雄性中的频率。

5.2. (♀ 隐性致死, ♂致死) 情形下轨迹的渐近行为。

在这种情况下，基因型 X^*X^* 和 X^*Y 是致死的，因此我们只能观察到 XX、 XX^* 和 XY类型。设 A 为由$e_1e = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma e$和 $e_2e = \delta_1e_1 + \delta_2e_2 + \delta e$ 定义的、以 (e_1, e_2, e) 为基的 (2,1) 型性染色体代数，其中 $\gamma_i, \delta_i \geq 0$和 $\gamma = 1 - \gamma_1 - \gamma_2, \delta = 1 - \delta_1 - \delta_2$，且 $\gamma, \delta \geq 0$。

设 W 为与上述定义的性染色体代数相关联的性染色体算子 W。对于 $z^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, y^{(0)}\right)$，考虑 $z^{(t)} = W^t\left(z^{(0)}\right)$，其中

$$W : \begin{cases} x_1' &= \left(\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2\right) y \\ x_2' &= \left(\gamma_2 x_1 + \delta_2 x_2\right) y \\ y' &= \left(\gamma x_1 + \delta x_2\right) y. \end{cases} \tag{5.1}$$

命题17. 设 $Fix(W)$ 为 W 的不动点集合。除点 (0,0,0) 外，算子 W 还具有以下不动点:

1) 如果 $\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 = 0$,

$$Fix(W) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\gamma_1}, 0, \frac{1}{\gamma_1}\right), & if \quad \gamma_1 \neq 0, \gamma_1 \neq 1, \delta_2 = 0, \gamma_2 = 0 \\ \left(0, \frac{1}{1-\delta_2}, \frac{1}{\delta_2}\right), & if \quad \gamma_1 = 0, \delta_2 \neq 0, \delta_2 \neq 1, \delta_1 = 0 \\ \left(\frac{\gamma_1}{(\gamma_1+\gamma_2)(1-\gamma_1-\delta_2)}, \frac{\gamma_2}{(\gamma_1+\gamma_2)(1-\gamma_1-\delta_2)}, \frac{1}{\gamma_1+\delta_2}\right), & if \quad \gamma_1\delta_2 \neq 0, \gamma_1 + \delta_2 \neq 1, \gamma_2\delta_1 \neq 0. \end{cases}$$

2) 如果 $\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 \neq 0$,

$$Fix(W) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{1-\gamma_1}, \frac{1-\lambda}{1-\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_1}\right), \lambda \in \mathbb{R}, & if \quad \gamma_1 = \delta_2, \delta_1 = 0, \gamma_2 = 0 \\ \left(\frac{1}{1-\gamma_1}, 0, \frac{1}{\gamma_1}\right), \left(0, \frac{1}{1-\delta_2}, \frac{1}{\delta_2}\right), & if \quad \gamma_1 \neq \delta_2, \delta_1 = 0, \gamma_2 = 0 \\ \left(\frac{\gamma_1-\delta_2}{(1-\gamma_1)(\gamma_1+\gamma_2-\delta_2)}, \frac{\gamma_2}{(1-\gamma_1)(\gamma_1+\gamma_2-\delta_2)}, \frac{1}{\gamma_1}\right), & if \quad \delta_1 = 0, \gamma_2 \neq 0 \\ \left(0, \frac{1}{1-\delta_2}, \frac{1}{\delta_2}\right), & if \quad \delta_1 = 0, \gamma_2 \neq 0 \\ \left(\frac{\delta_1}{(1-\delta_2)(\delta_1+\delta_2-\gamma_1)}, \frac{\delta_2-\gamma_1}{(1-\delta_2)(\delta_1+\delta_2-\gamma_1)}, \frac{1}{\delta_2}\right), & if \quad \delta_1 \neq 0, \gamma_2 = 0 \\ \left(\frac{1}{1-\gamma_1}, 0, \frac{1}{\gamma_1}\right), & if \quad \delta_1 \neq 0, \gamma_2 = 0 \\ \left(\frac{\delta_1 y_i}{(\gamma\delta_1-\delta\gamma_1)y_i+\delta}, \frac{1-\gamma_1 y_i}{(\gamma\delta_1-\delta\gamma_1)y_i+\delta}, y_i\right), (i = 1, 2) & if \quad \delta_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0. \end{cases}$$

其中， y_1 和 y_2 是 $(\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)\, y^2 - (\gamma_1 + \delta_2)\, y + 1 = 0$ 的根。

证明。让我们找出 W 的不动点，为此我们必须求解方程组:

$$\begin{cases} x_1 &= \left(\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2\right) y \\ x_2 &= \left(\gamma_2 x_1 + \delta_2 x_2\right) y \\ y &= \left(\gamma x_1 + \delta x_2\right) y \end{cases} \tag{5.2}$$

如果 $y=0$ 我们得到不动点 (0, 0, 0)。

若 $y\neq 0$，我们将方程组（5.2）写成如下形式：

$$\begin{cases}(\gamma_1 y-1)\,x_1+(\delta_1 y)\,x_2 &= 0\\ (\gamma_2 y)\,x_1+(\delta_2 y-1)\,x_2 &= 0\\ \gamma x_1+\delta x_2 &= 1\end{cases}\tag{5.3}$$

前两个方程的行列式必为零，因此

$$(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)\,y^2-(\gamma_1+\delta_2)\,y+1=0.\tag{5.4}$$

根据方程（5.4）的次数，我们分两种情形讨论。

情形1。若 $\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1=0$，则由（5.4）可得 $\gamma_1+\delta_2\neq 0$；否则，唯一的不动点为（0, 0, 0）。因此 $y=\frac{1}{\gamma_1+\delta_2}$，于是将（5.2）中的第一、第二个方程代入可得

$$\begin{cases}\gamma_2 x_1-\gamma_1 x_2 &= 0\\ \delta_2 x_1-\delta_1 x_2 &= 0\end{cases}\tag{5.5}$$

利用这一点可得 $\gamma x_1=(1-\gamma_1)\ x_1-\gamma_1 x_2$ 以及 $\delta x_2=(1-\delta_2)\ x_1-\delta_2 x_1$，因此 $\gamma x_1+\delta x_2=(1-\gamma_1-\delta_2)\ (x_1+x_2)\ =1$。于是，若 $\gamma_1+\delta_2\neq 1$，则 $x_1+x_2=\frac{1}{1-\gamma_1-\delta_2}$。当然，若 $\gamma_1+\delta_2=1$，则 $\gamma x_1+\delta x_2=0$，且方程组（5.3）除（0, 0, 0）外没有其他解。因此，在条件 $\gamma x_1+\delta x_2\neq 0$下，我们考虑以下子情形：1。

情形 1.1. 若 $\gamma_1\neq 0,\gamma_1\neq 1,\delta_2=0,\gamma_2=0$，则由 (5.5) 并考虑到 $\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1=0$，可得不动点 $\left(\frac{1}{1-\gamma_1},0,\frac{1}{\gamma_1}\right)$；

情形 1.2. 若 $\gamma_1=0,\delta_2\neq 0,\delta_2\neq 1,\delta_1=0$，则与前一种情形一样，可得下一个不动点 $\left(0,\frac{1}{1-\delta_2},\frac{1}{\delta_2}\right)$；

情形 1.3. 若 $\gamma_1\neq 0,\delta_2\neq 0,\gamma_1+\delta_2\neq 1,\gamma_2\neq 0,\delta_1\neq 0$，则由 (5.5) 的第一个方程可得 $x_2=\frac{\gamma_2 x_1}{\gamma_1}$，再利用 $x_1+x_2=\frac{1}{1-\gamma_1-\delta_2}$，得到 $x_1=\frac{\gamma_1}{(\gamma_1+\gamma_2)(1-\gamma_1-\delta_2)}$，因此 $x_2=\frac{\gamma_2}{(\gamma_1+\gamma_2)(1-\gamma_1-\delta_2)}$。注意 $\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1=0$，即 $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\frac{\delta_2}{\delta_1}$，因此可以得到另一种等价的不动点形式：$x_1=\frac{\delta_1}{(\delta_1+\delta_2)(1-\gamma_1-\delta_2)}$ 以及 $x_2=\frac{\delta_2}{(\delta_1+\delta_2)(1-\gamma_1-\delta_2)}$。N ote th而对于其他子情形，方程组（5.3）有唯一平凡解（0，0，0）.

情况2. 若 $\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1\neq 0$，则（5.4）的判别式为 $\Delta=(\gamma_1+\delta_2)^2-4(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)$ 或 $\Delta=(\gamma_1-\delta_2)^2+4\gamma_2\delta_1\geq 0$。令 y_1、y_2 为（5.4）的根。

若 $\delta_1=0$ 或 $\gamma_2=0$，则有 $\gamma_1\delta_2\neq 0$，且根为 $y_1=\frac{1}{\gamma_1}$ 和 $y_2=\frac{1}{\delta_2}$。

情况2.1. 若 $\delta_1=\gamma_2=0$ 且 $\gamma_1=\delta_2\neq 1$，则 $\gamma=\delta=1-\gamma_1$，且（5.3）化简为 $x_1+x_2=\frac{1}{1-\gamma_1}$，从而对于任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，得到不动点 $\left(\frac{\lambda}{1-\gamma_1},\frac{1-\lambda}{1-\gamma_1},\frac{1}{\gamma_1}\right)$。

情况2.2。若 $\delta_1=\gamma_2=0$ 且 $\gamma_1\neq\delta_2$，利用 (5.3) 可得，根 y_1 对应的解为 $\left(\frac{1}{1-\gamma_1},0,\frac{1}{\gamma_1}\right)$，其中 $\gamma_1\neq 1$；而对于 y_2，不动点为 $\left(0,\frac{1}{1-\delta_2},\frac{1}{\delta_2}\right)$，其中 $\delta_2\neq 1$。

情况2.3。若 $\delta_1=0$、$\gamma_2\neq 0$ 且 $\gamma_1=\delta_2\neq 1$，则由 (5.3) 可得 $\left(0,\frac{1}{1-\gamma_1},\frac{1}{\gamma_1}\right)$。

情况2。4. 如果 $\delta_1=0$、$\gamma_2\neq 0$ 和 $\gamma_1\neq\delta_2$，对于根 $y_1=\frac{1}{\gamma_1}$，方程组 (5.3) 写为

$$\begin{cases}\gamma_2 x_1+(\delta_2-\gamma_1)\,x_2 &= 0\\ (1-\gamma_1-\gamma_2)\,x_1+(1-\delta_2)\,x_2 &= 1\end{cases}$$

由此得到不动点 $\left(\frac{\gamma_1-\delta_2}{1-\gamma_1}(\cdot)(\gamma_1+\gamma_2-\delta_2),\ \gamma_2(1-\gamma_1)(\gamma_1+\gamma_2-\delta_2),\ \frac{1}{\gamma_1}\right)$，其中 $\gamma_1 \neq 1$、$\gamma_1+\gamma_2-\delta_2 \neq 0$，并且对于 y_2，根据 (5.3) 可得：$\left(0, \frac{1}{1-\delta_2}, \frac{1}{\delta_2}\right)$，其中 $\delta_2 \neq 1$。

情况2. 5. 若 $\delta_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$ 和 $\gamma_1 = \delta_2 \neq 1$，由 (5.3) 得到解 $\left(\frac{1}{1-\gamma_1}, 0, \frac{1}{\gamma_1}\right)$.

情形 2.6. 若 $\delta_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$ 和 $\gamma_1 \neq \delta_2$，对于根 y_1，我们得到 $\left(\frac{1}{1-\gamma_1}, 0, \frac{1}{\gamma_1}\right)$，其中 $\gamma_1 \neq 1$；而对于 y_2，方程组 (5.3) 变为

$$\begin{cases} (\gamma_1 - \delta_2)\, x_1 + \delta_1 x_2 &= 0 \\ (1-\gamma_1)\, x_1 + (1-\delta_1-\delta_2)\, x_2 &= 1 \end{cases}$$

由此可得不动点 $\left(\frac{\delta_1}{1-\delta_2}(\cdot)(\delta_1+\delta_2-\gamma_1),\ \frac{\delta_2-\gamma_1}{(1-\delta_2)(\delta_1+\delta_2-\gamma_1)},\ \frac{1}{\delta_2}\right)$，其中 $\delta_2 \neq 1$ 且 $\delta_1 + \delta_2 - \gamma_1 \neq 0$。

情形 2.7. 若 $\delta_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$ 我们有 $\Delta > 0$，则方程 (5.4) 的每个根 y_i 都对应一个不动点 $\left(\frac{\delta_1 y_i}{\gamma\delta_1-\delta\gamma_1}(\cdot)y_i+\delta, \frac{1-\gamma_1 y_i}{(\gamma\delta_1-\delta\gamma_1)y_i+\delta}, y_i\right)$. □

下文考虑由 W 生成的动力系统 $\left(z^{(t)}\right)_{t\geq 0}$。对于给定的初始点 $z^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, y^{(0)}\right)$，我们有 $z^{(t)} = W^t\left(z^{(0)}\right)$ 和 $z^{(t)} = \left(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, y^{(t)}\right)$。显然，若存在 $t_0 \geq 0$，使得 $y^{(t_0)} = 0$，则由 (5.1) 可得，对于所有$t \geq t_0$，均有 $W^t(z) = 0$。现在假设对于所有 $t \geq 0$，均有 $y^{(t)} \neq 0$。

为了研究轨迹 $\left(z^{(t)}\right)$，我们根据集合$\mathcal{E}_{z^{(0)}} = \left\{t \in \mathbb{N} : x_2^{(t)} = 0\right\}$ 是无限集还是有限集，分两种情况讨论。

引理1. 设 W 为由 (5.1) 定义的性染色体算子，且对所有 $t \geq 0$，$y^{(t)} \neq 0$。a) 若 $\gamma_2 = 0$，则以下条件等价：

(i) $\mathcal{E}_{z^{(0)}}$ *is infinite; (ii)* $\mathbb{N}^* \subset \mathcal{E}_{z^{(0)}}$*; (iii)* $x_2^{(1)} = 0$.

b) 若 $\gamma_2 \neq 0$，则以下条件等价：

(i) $\mathcal{E}_{z^{(0)}}$ *is infinite; (ii)* $\mathcal{E}_{z^{(0)}} = 2\mathbb{N}$ *or* $\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$*; (iii)* $\begin{cases} x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(1)} = x_2^{(3)} = 0, \\ or \\ x_1^{(1)} = 0, \quad x_2^{(0)} = x_2^{(2)} = 0. \end{cases}$

证明. a) 假设 $\gamma_2 = 0$，由 (5.1) 得：$x_2^{(t+1)} = \delta_2 x_2^{(t)} y^{(t)}$ $(*)$。

$(i) \Rightarrow (iii)$ 设 t_0 为 $\mathcal{E}_{z^{(0)}}$的最小元素，若 $t_0 = 0$，由 $(*)$ 可推出，对所有 $t \geq 0$，$x_2^{(t)} = 0$。若 $t_0 \geq 1$，由 $0 = x^{(t_0)}{}^2 = \delta_2 x^{(t_0-1)}{}^2 y^{(t_0-1)}$，$y^{(t_0-1)} \neq 0$，并利用 t_0 的最小性，得到 $\delta_2 = 0$，但这意味着对所有 $t \geq 1$，$x_2^{(t)} = 0$。

$(iii) \Rightarrow (i)$ 如果 $x_2^{(1)} = 0$ 从（$*$）可以清楚看出，$x_2^{(t)} = 0$ 来自所有 $t \geq 1$。$(ii) \Rightarrow (i)$ 是显然的。

b) 如果我们有 $\gamma_2 \neq 0$。

$(i) \Rightarrow (ii)$ 令 t_0 为 $\mathcal{E}_{z^{(0)}}$的最小元素，由（5.1）可得

$$x_1^{(t_0+1)} = \gamma_1 x_1^{(t_0)} y^{(t_0)}, \quad x_2^{(t_0+1)} = \gamma_2 x_1^{(t_0)} y^{(t_0)}, \quad y^{(t_0+1)} = \gamma x_1^{(t_0)} y^{(t_0)}.$$

对于任意 $m \geq 1$，存在 a_m、b_m、$c_m \geq 0$，使得

$$\begin{cases} x_1^{(t_0+m+1)} = \gamma^{2^{m-1}} a_m \left(x_1^{(t_0)} y^{(t_0)} \right)^{2^{m-1}} \\ x_2^{(t_0+m+1)} = \gamma_2 \gamma^{2^{m-1}} b_m \left(x_1^{(t_0)} y^{(t_0)} \right)^{2^{m-1}} \\ y^{(t_0+m+1)} = \gamma^{2^{m-1}} c_m \left(x_1^{(t_0)} y^{(t_0)} \right)^{2^{m-1}} \end{cases} \tag{5.6}$$

其中 $a_1 = \gamma_1$、$b_1 = 1$、$c_1 = \gamma$，且

$$a_{m+1} = c_m \left(\gamma_1 a_m + \delta_1 \gamma_2 b_m \right), \quad b_{m+1} = c_m \left(a_m + \delta_2 b_m \right), \quad c_{m+1} = c_m \left(\gamma a_m + \delta \gamma_2 b_m \right).$$

由 $y^{(t)} \neq 0$ 可知，对所有 $t \geq 0$，结合（5.6）的第三个方程，我们推出 $\gamma \neq 0$, $x^{(t_0)}{}_1 \neq 0$, 并且当 $m \geq 1$时，$c_m \neq 0$。由于 $\mathcal{E}_{z^{(0)}}$ 是无限的，存在 $m_0 \geq 3$ 使得 $x^{(t_0+m_0+1)}{}_2 = 0$，因此我们有 $b_{m_0} = 0$。由给出 b_{m_0} 的关系可得 $a_{m_0-1} = \delta_2 b_{m_0-1} = 0$ (∗)，于是 $c_{m_0} = \delta \gamma_2 c_{m_0-1} b_{m_0-1}$。由于 $c_{m_0} \neq 0$，我们得到 $\delta \gamma_2 b_{m_0-1} \neq 0$，再由（∗）得到 $\delta_2 = 0$。由 $0 = a_{m_0-1} = c_{m_0-2} \left(\gamma_1 a_{m_0-2} + \delta_1 \gamma_2 b_{m_0-2} \right)$ 可推出 $\gamma_1 a_{m_0-2} = \delta_1 \gamma_2 b_{m_0-2} = 0$。假设 $\gamma_1 \neq 0$，则得到 $a_{m_0-2} = 0$，递归下去便会导致矛盾$a_1 = 0$。因此我们有 $\gamma_1 = 0$，再由（5.1）可得

$$\begin{cases} x_1^{(t+1)} &= \delta_1 x_2^{(t)} y^{(t)} \\ x_2^{(t+1)} &= \gamma_2 x_1^{(t)} y^{(t)} \\ y^{(t+1)} &= \left((1-\gamma_2) x_1^{(t)} + (1-\delta_1) x_2^{(t)} \right) y^{(t)}. \end{cases}$$

我们可以说，$\delta_1 \neq 0$ 否则，对于所有 $t \geq 1$，我们都会有 $x_1^{(t)} = 0$，因此对于每个 $t \geq 2$，都有 $x_2^{(t)} = 0$，并且对于每个 $t \geq 3$，都有 $y^{(t)} = 0$。假设 $t_0 \geq 2$，由 $x^{(t_0)}{}_2 = 0$ 可得 $\gamma_2 x^{(t_0-1)}{}_1 y^{(t_0-1)} = 0$，于是 $0 = x^{(t_0-1)}{}_1 = \delta_1 x^{(t_0-2)}{}_2 y^{(t_0-2)}$，因此 $x^{(t_0-2)}{}_2 = 0$，这与 t_0 的极小性矛盾。因此 $t_0 \leq 1$；对于 $t_0 = 1$，可得 $0 = x_2^{(1)} = \gamma_2 x_1^{(0)} y^{(0)}$，因此 $x_1^{(0)} = 0$，继而可得 $x_2^{(0)} \neq 0$；否则 $y^{(1)} = 0$。接下来 $x_1^{(2)} = \delta_1 x_2^{(1)} y^{(1)} = 0$，因此 $x_2^{(3)} = \gamma_2 x_1^{(2)} y^{(2)} = 0$。在 $t_0 = 0$ 的情况下，我们有 $x_2^{(0)} = 0$，因此 $x_1^{(1)} = 0$，继而 $x_2^{(2)} = 0$。

(iii) ⇒ *(ii)* 若 $x_1^{(0)} = x_2^{(1)} = x_2^{(3)} = 0$，则有 $0 = x_2^{(1)} = \delta_2 x_2^{(0)} y^{(0)}$，因为 $x_2^{(0)} \neq 0$；否则 $y^{(1)} = 0$ 可得 $\delta_2 = 0$。由此我们推得 $x_2^{(2)} = \delta_1 \gamma_2 x_2^{(0)} y^{(0)} y^{(1)}$ 且 $0 = x_2^{(3)} = \gamma_1 \delta_1 \gamma_2 x_2^{(0)} y^{(0)} y^{(1)} y^{(2)}$，因此 $\gamma_1 \delta_1 = 0$；假设 $\delta_1 = 0$，则有 $x_1^{(1)} = 0$，与矛盾 $y^{(2)} = 0$，故有 $\delta_1 \neq 0$ 和 $\gamma_1 = 0$。最后，对所有 $t \geq 1$，我们都有 $x_2^{(2t+1)} = \delta_1 \gamma_2 x_2^{(2t-1)} y^{(2)}$，并由 $x_2^{(1)} = 0$ 可得 $\mathcal{E}_{z^{(0)}} = \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$。

若 $x_1^{(1)} = x_2^{(0)} = x_2^{(2)} = 0$，则有 $0 = x_1^{(1)} = \gamma_1 x_1^{(0)} y^{(0)}$，因为 $x_1^{(0)} \neq 0$；否则 $y^{(1)} = 0$，我们得到 $\gamma_1 = 0$。由 $0 = x_2^{(2)} = \delta_2 x_2^{(1)} y^{(1)}$ 和 $x_2^{(1)} \neq 0$ 可得 $\delta_2 = 0$。于是，对所有 $t \geq 0$，都有 $x_2^{(2t+2)} = \gamma_2 x_1^{(2t+1)} y^{(2t+1)} = \delta_1 \gamma_2 x_2^{(2t)} y^{(2t)} y^{(2t+1)}$；结合这一点和 $x_2^{(0)} = 0$，可得 $\mathcal{E}_{z^{(0)}} = 2\mathbb{N}$。□

定理3。给定任意初始点 $z^{(0)} \in \mathbb{R}^3$，例如 $\mathcal{E}_{z^{(0)}}$ 是无限的。对于性染色体算子(5.1)，我们得到:

a) 如果 $\gamma_2 = 0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} W^t\left(z^{(0)}\right) &= \begin{cases}(0,0,0) & if \ \left|x_1^{(1)}y^{(1)}\right| < \frac{1}{\gamma_1(1-\gamma_1)}\\ \left(\frac{1}{1-\gamma_1},0,\frac{1}{\gamma_1}\right) & if \ \left|x_1^{(1)}y^{(1)}\right| = \frac{1}{\gamma_1(1-\gamma_1)}\\ +\infty & if \ \left|x_1^{(1)}y^{(1)}\right| > \frac{1}{\gamma_1(1-\gamma_1)}.\end{cases}\\ V^{t+2}\left(z^{(0)}\right) &= (\gamma_1,0,1-\gamma_1), \quad (\forall t\geq 0).\end{aligned}$$

b) 若 $\gamma_2 \neq 0$ and
情况 1: 如果 $x_1^{(0)} = 0$, 则

$$\lim_{t\to\infty} W^t\left(z^{(0)}\right) = \begin{cases}(0,0,0) & if \ \left|x_2^{(0)}y^{(0)}\right| < \frac{1}{\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}}\\ +\infty & if \ \left|x_2^{(0)}y^{(0)}\right| > \frac{1}{\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}}.\end{cases}$$

如果 $\left|x_2^{(0)}y^{(0)}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}}$ 则 $\forall t\geq 0$

$$\begin{aligned}W^{2t+1}\left(z^{(0)}\right) &= \left(\frac{\delta_1}{\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}},0,\frac{\delta}{\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}}\right)\\ W^{2t+2}\left(z^{(0)}\right) &= \left(0,\frac{\gamma_2\delta_1\delta}{\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}},\frac{\gamma\delta_1\delta}{\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}}\right)\end{aligned}$$

对于任意的 $z^{(0)}$ 和 $\forall t\geq 0$

$$\begin{aligned}V^{2t+1}\left(z^{(0)}\right) &= (\delta_1,0,1-\delta_1),\\ V^{2t+2}\left(z^{(0)}\right) &= (0,\gamma_2,1-\gamma_2).\end{aligned}$$

情况2: 如果 $x_2^{(0)} = 0$,

$$\lim_{t\to\infty} W^t\left(z^{(0)}\right) = \begin{cases}(0,0,0) & if \ \left|x_1^{(0)}y^{(0)}\right| < \frac{1}{\sqrt[3]{\gamma_2^2\delta_1\gamma^2\delta}}\\ +\infty & if \ \left|x_1^{(0)}y^{(0)}\right| > \frac{1}{\sqrt[3]{\gamma_2^2\delta_1\gamma^2\delta}}.\end{cases}$$

如果 $\left|x_1^{(0)}y^{(0)}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{\gamma_2^2\delta_1\gamma^2\delta}}$ 那么 $\forall t\geq 0$

$$\begin{aligned}W^{2t+1}\left(z^{(0)}\right) &= \left(0,\frac{\gamma_2}{\sqrt[3]{\gamma_2^2\delta_1\gamma^2\delta}},\frac{\gamma}{\sqrt[3]{\gamma_2^2\delta_1\gamma^2\delta}}\right)\\ W^{2t+2}\left(z^{(0)}\right) &= \left(\frac{\delta_1\gamma_2\gamma}{\sqrt[3]{\gamma_2^2\delta_1\gamma^2\delta}},0,\frac{\delta\gamma_2\gamma}{\sqrt[3]{\gamma_2^2\delta_1\gamma^2\delta}}\right)\end{aligned}$$

且对于任意的 $z^{(0)}$ 和 $\forall t \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned} V^{2t+1}\left(z^{(0)}\right) &= (0, \gamma_2, 1-\gamma_2), \\ V^{2t+2}\left(z^{(0)}\right) &= (\delta_1, 0, 1-\delta_1). \end{aligned}$$

证明。a) 根据引理1，我们有 $x_2^{(t)} = 0$，当 $t \geq 1$ 时；由 $\gamma_2 = 0$ 可知，因此 (5.1) 对所有 $t \geq 1$ 均成立

$$\begin{cases} x_1^{(t+1)} &= \gamma_1 x_1^{(t)} y^{(t)} \\ y^{(t+1)} &= (1-\gamma_1)\, x_1^{(t)} y^{(t)}. \end{cases} \tag{5.7}$$

我们有 $\gamma_1 \neq 0$，否则就会有 $y^{(t)} = 0$，当 $t \geq 3$ 时。由 (5.7) 得

$$\begin{cases} x_1^{(t+2)} &= {\gamma_1}^{2^t} (1-\gamma_1)^{2^t-1} \left(x_1^{(1)} y^{(1)}\right)^{2^t} \\ y^{(t+2)} &= {\gamma_1}^{2^t-1} (1-\gamma_1)^{2^t} \left(x_1^{(1)} y^{(1)}\right)^{2^t}, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

由于 $0 < \gamma_1 < 1$，我们有 $\lim_{t\to\infty} {\gamma_1}^{2^t} (1-\gamma_1)^{2^t} = 0$，并且由 $\varpi \circ W^{t+2}\left(z^{(0)}\right) = {\gamma_1}^{2^t-1} (1-\gamma_1)^{2^t-1} \left(x_1^{(1)} y^{(1)}\right)^{2^t}$，得到该命题的结论。

b) 我们在引理1的证明中看到，在这种情况下，对所有 $t \geq 0$，都有：

$$\begin{cases} x_1^{(t+1)} &= \delta_1 x_2^{(t)} y^{(t)} \\ x_2^{(t+1)} &= \gamma_2 x_1^{(t)} y^{(t)} \\ y^{(t+1)} &= \left(\gamma x_1^{(t)} + \delta x_2^{(t)}\right) y^{(t)}. \end{cases}$$

其中 $\gamma = 1-\gamma_2$ 和 $\delta = 1-\delta_1$。

情形1：$x_1^{(0)} = 0$。显然，$x_2^{(1)} = 0$.

我们有 $x_2^{(0)} \neq 0$；否则，若 $x_1^{(0)} = 0$，则得到 $y^{(1)} = 0$，因此 $x_1^{(1)} = \delta_1 x_2^{(0)} y^{(0)} \neq 0$。我们证明，对于所有 $t \geq 0$，都有 $x_1^{(2t)} = 0$ 和 $x_2^{(2t+1)} = 0$。于是，对于所有 $t \geq 0$，我们得到：

$$\begin{cases} x_1^{(2t+1)} &= \delta_1 x_2^{(2t)} y^{(2t)} \\ x_2^{(2t+2)} &= \gamma_2 x_1^{(2t+1)} y^{(2t+1)} \\ y^{(2t+1)} &= \delta x_2^{(2t)} y^{(2t)} \\ y^{(2t+2)} &= \gamma x_1^{(2t+1)} y^{(2t+1)}. \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} x_1^{(2t+1)} &= \delta_1 \left[\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2\right]^{\left(4^t-1\right)/3} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\right)^{4^t} \\ x_2^{(2t+2)} &= \gamma_2\delta_1\delta \left[\gamma_2^2\delta_1^4\gamma^2\delta^4\right]^{\left(4^t-1\right)/3} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\right)^{2\times 4^t} \\ y^{(2t+1)} &= \delta \left[\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2\right]^{\left(4^t-1\right)/3} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\right)^{4^t} \\ y^{(2t+2)} &= \gamma\delta_1\delta \left[\gamma_2^2\delta_1^4\gamma^2\delta^4\right]^{\left(4^t-1\right)/3} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\right)^{2\times 4^t}. \end{cases}$$

Si因此 $y^{(t)} \neq 0$ 我们得到 $\gamma_2\delta_1\gamma\delta \neq 0$，并且可以改变最后一个方程组的形式:

$$\begin{cases} x_1^{(2t+1)} &= \frac{\delta_1}{\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}\right)^{4^t} \\ x_2^{(2t+2)} &= \frac{\gamma_2\delta_1\delta}{\sqrt[3]{(\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2)^2}} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}\right)^{2\times 4^t} \\ y^{(2t+1)} &= \frac{\delta}{\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}\right)^{4^t} \\ y^{(2t+2)} &= \frac{\gamma\delta_1\delta}{\sqrt[3]{(\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2)^2}} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\sqrt[3]{\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2}\right)^{2\times 4^t}. \end{cases}$$

利用 $0 < \gamma_2\delta_1\gamma\delta < 1$，我们得到该命题的结果。从

$$\begin{aligned} \varpi \circ W^{2t+1}\left(z^{(0)}\right) &= \left[\gamma_2\delta_1^2\gamma\delta^2\right]^{\left(4^t-1\right)/3} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\right)^{4^t} \\ \varpi \circ W^{2t+2}\left(z^{(0)}\right) &= \delta_1\delta \left[\gamma_2^2\delta_1^4\gamma^2\delta^4\right]^{\left(4^t-1\right)/3} \left(x_2^{(0)}y^{(0)}\right)^{2\times 4^t}, \end{aligned}$$

我们推导出$V^{2t+1}\left(z^{(0)}\right)$ 和$V^{2t+2}\left(z^{(0)}\right)$的值。

情况2: $x_2^{(0)} = 0$。然后我们得到 $x_1^{(1)} = 0$.

如果不满足 $x_2^{(0)} = 0$，我们得到 $y^{(1)} = 0$, 因此 $x_2^{(1)} = \gamma_2 x_1^{(0)}y^{(0)} \neq 0$。然后对于所有 $t \geq 0$，我们得到 $x_1^{(2t+1)} = 0$ 和 $x_2^{(2t)} = 0$ 以及

$$\begin{cases} x_1^{(2t+2)} &= \delta_1 x_2^{(2t+1)}y^{(2t+1)} \\ x_2^{(2t+1)} &= \gamma_2 x_1^{(2t)}y^{(2t)} \\ y^{(2t+2)} &= \delta x_2^{(2t+1)}y^{(2t+1)} \\ y^{(2t+1)} &= \gamma x_1^{(2t)}y^{(2t)}. \end{cases}$$

这些结果可由前一种情形推导得出: 同时交换 $x_1^{(t)}$ 与 $x_2^{(t)}$、γ_2 与 δ_1 以及 γ 与 δ 的角色。□

定理4. 对于任意初始点 $z^{(0)} \in \mathbb{R}^3$，若 $\mathcal{E}_{z^{(0)}}$ 为有限值，则对于性染色体算子 (5.1)，可得:

(a) 如果 $\gamma_1 = \delta_2 < 1$ 和 $\gamma_2\delta_1 = 0$,

$$\lim_{t\to\infty} W^t\left(z^{(0)}\right) = (0,0,0)$$

且对任意 $z^{(0)} \in S^2$,

$$\lim_{t\to+\infty} V^t\left(z^{(0)}\right) = \begin{cases} (\gamma_1, 0, \gamma) & if\ \gamma_2 \neq 0, \delta_1 = 0 \\ \left(\frac{\gamma_1 x_1^{(t_0)}}{x_1^{(t_0)}+x_2^{(t_0)}}, \frac{\delta_2 x_2^{(t_0)}}{x_1^{(t_0)}+x_2^{(t_0)}}, \frac{\gamma x_1^{(t_0)}+\delta x_2^{(t_0)}}{x_1^{(t_0)}+x_2^{(t_0)}}\right) & if\ \gamma_2 = \delta_1 = 0, \\ (0, \delta_2, \delta) & if\ \gamma_2 = 0, \delta_1 \neq 0. \end{cases}$$

其中 $t_0 =$最大值（$\mathcal{E}_{z^{(0)}}$）$+1$。

（b）如果 $\gamma_1 \neq \delta_2$ 或 $\gamma_2\delta_1 \neq 0$,

$$\lim_{t\to\infty} W^t\left(z^{(0)}\right) = (0,0,0)$$

且对于任意 $z^{(0)} \in S^2$,

$$\lim_{t\to+\infty} V^t(z^{(0)}) = \left(\frac{\gamma_1+\delta_1 u(\lambda_i)}{U(\lambda_i)}, \frac{u(\lambda_i)(\gamma_1+\delta_1 u(\lambda_i))}{U(\lambda_i)}, \frac{\gamma+\delta u(\lambda_i)}{U(\lambda_i)}\right)$$

其中 $i=1$ 若 $|\lambda_1| < |\lambda_2|$，且 $i=2$ 若 $|\lambda_1| > |\lambda_2|$，并
且

$$\begin{cases} U(\lambda_i) = \delta_1 u(\lambda_i)^2 + (\delta+\delta_1+\gamma_1)u(\lambda_i) + \gamma + \gamma_1, \\ u(\lambda_i) = \frac{\gamma_2 x_1^{(t_0)} + (\delta_2-\lambda_i)x_2^{(t_0)}}{(\gamma_1-\lambda_i)x_1^{(t_0)} + \delta_1 x_2^{(t_0)}}, \\ \lambda_1 = \frac{\gamma_1+\delta_2-\sqrt{(\gamma_1-\delta_2)^2+4\gamma_2\delta_1}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\gamma_1+\delta_2+\sqrt{(\gamma_1-\delta_2)^2+4\gamma_2\delta_1}}{2}. \end{cases}$$

证明。现在假设集合 $\mathcal{E}_{z^{(0)}}$ 是有限的。令 $t_0 =$最大值（$\mathcal{E}_{z^{(0)}}$）$+1$。对于所有 $t \geq t_0$，我们有 $x_2^{(t)} \neq 0$，因为对于所有 $t \geq 0$ 均有 $y^{(t)} \neq 0$，由（5.1）的第二个方程可得，对于所有 $t \geq t_0$，有 $\gamma_2 x_1^{(t)} + \delta_2 x_2^{(t)} \neq 0$。由（5.1）得到:

$$\frac{x_1^{(t+1)}}{x_2^{(t+1)}} = \frac{\gamma_1 x_1^{(t)} + \delta_1 x_2^{(t)}}{\gamma_2 x_1^{(t)} + \delta_2 x_2^{(t)}}, \quad \forall t \geq t_0,$$

令 $w^{(t)} = \frac{x_1^{(t)}}{x_2^{(t)}}$ 为 $t \geq t_0$，可将其写作 $w^{(t+1)} = f\left(w^{(t)}\right)$，其中 $f(x) = \frac{\gamma_1 x+\delta_1}{\gamma_2 x+\delta_2}$。

设 $M = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$，若 $M^t = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}$，我们验证可得，对所有 $t \geq 0$，均有 $f^t(x) = \frac{a_t x+b_t}{c_t x+d_t}$。$M$ 的特征多项式为 $\chi_M(X) = X^2 - (\gamma_1+\delta_2)X + (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)$，其判别式为 $\Delta = (\gamma_1-\delta_2)^2 + 4\gamma_2\delta_1 \geq 0$。当且仅当 $\gamma_1 = \delta_2$ 且 $\gamma_2\delta_1 = 0$ 时，我们有 $\Delta = 0$。

（a）情况 $\Delta = 0$。

令 $\lambda = \gamma_1$ χ_M 的根为 $\gamma_1 < 1$，我们有 $\gamma_1 = 1$；事实上，若 $\gamma = \gamma_2 = 0$，则 $\delta = \delta_1 = 0$且 $\gamma = \delta = 0$，因此 $y^{(t_0+1}$，这就导致矛盾 $) = 0$。模 χ_M 意义下，对所有 $t \geq 0$，有: $X^t \equiv t\lambda^{t-1}X - (t-1)\lambda^t$，因此 $M^t = t\lambda^{t-1}M - (t-1)\lambda^t I_2$。由此可得，对于任意 $m \geq 1$，当 $z^{(t_0)} \in \mathbb{R}^3$ 时:

$$\begin{aligned} x_1^{(t_0+m)} &= \lambda^{t_0+m-1}\left[\lambda x_1^{(t_0)} + (t_0+m)\,\delta_1 x_2^{(t_0)}\right] y^{(t_0)} \\ x_2^{(t_0+m)} &= \lambda^{t_0+m-1}\left[(t_0+m)\,\gamma_2 x_1^{(t_0)} + \lambda x_2^{(t_0)}\right] y^{(t_0)} \end{aligned}$$

then

$$y^{(t_0+m)} = y^{(t_0)} \prod_{k=0}^{m-1}\left(\gamma x_1^{(t_0+k)} + \delta x_2^{(t_0+k)}\right).$$

由 $\lambda < 1$, 我们得到 $\lim_{t\to+\infty} x_1^{(t)} = 0$ 和 $\lim_{t\to+\infty} x_2^{(t)} = 0$。关于 $y^{(t)}$, 显然存在正整数 k_0, 使得对所有 $t > k_0$. 都有 $\gamma x_1^{(t)} + \delta x_2^{(t)} < 1$。最后，我们得到 $\lim_{t\to+\infty} y^{(t)} = 0$。

为研究算子 V, 设 $z^{(0)} \in S^2$, 我们考虑两种情况。
情况 1: 若 $x^{(t_0+m)}{}_1 \neq 0$ 对所有 $m \geq 1$, 则得到

$$\frac{x_2^{(t_0+m)}}{x_1^{(t_0+m)}} = \frac{(t_0+m)\,\gamma_2 x_1^{(t_0)} + \lambda x_2^{(t_0)}}{\lambda x_1^{(t_0)} + (t_0+m)\,\delta_1 x_2^{(t_0)}}.$$

因此我们有

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{x_2^{(t_0+m)}}{x_1^{(t_0+m)}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \gamma_2 = 0, \delta_1 \neq 0, \\ \frac{x_2^{(t_0)}}{x_1^{(t_0)}} & \text{if } \gamma_2 = \delta_1 = 0, \\ +\infty & \text{if } \gamma_2 \neq 0, \delta_1 = 0. \end{cases}$$

并且对于 $t \geq t_0 + m + 1$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y^{(t)}}{x_1^{(t)}} = \begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma_1} & \text{if } \gamma_2 = 0, \delta_1 \neq 0 \\ \frac{\gamma x_1^{(t_0)} + \delta x_2^{(t_0)}}{\gamma_1 x_1^{(t_0)}} & \text{if } \gamma_2 = \delta_1 = 0, \\ +\infty & \text{if } \gamma_2 = 0, \delta_1 \neq 0. \end{cases}$$

and

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y^{(t)}}{x_2^{(t)}} = \begin{cases} +\infty & \text{if } \gamma_2 = 0, \delta_1 \neq 0 \\ \frac{\gamma x_1^{(t_0)} + \delta x_2^{(t_0)}}{\delta_2 x_2^{(t_0)}} & \text{if } \gamma_2 = \delta_1 = 0, \\ \frac{\delta}{\delta_2} & \text{if } \gamma_2 = 0, \delta_1 \neq 0. \end{cases}$$

使用它们以及

$$\frac{x_1^{(t_0+m)}}{\varpi \circ W(z^{(t_0+m)})} = \frac{1}{1 + \frac{x_2^{(t_0+m)}}{x_1^{(t_0+m)}} + \frac{y^{(t_0+m)}}{x_1^{(t_0+m)}}}, \quad \frac{x_2^{(t_0+m)}}{\varpi \circ W(z^{(t_0+m)})} = \frac{1}{1 + \frac{x_1^{(t_0+m)}}{x_2^{(t_0+m)}} + \frac{y^{(t_0+m)}}{x_2^{(t_0+m)}}},$$

$$\frac{y^{(t_0+m)}}{\varpi \circ W(z^{(t_0+m)})} = \frac{1}{1 + \frac{x_1^{(t_0+m)}}{y^{(t_0+m)}} + \frac{x_2^{(t_0+m)}}{y^{(t_0+m)}}}$$

我们得到

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{x_1^{(t_0+m)}}{\varpi\circ W\left(z^{(t_0+m)}\right)}=\begin{cases}\gamma_1 & \text{if } \gamma_2=0,\delta_1\neq 0,\\ \frac{\gamma_1 x_1^{(t_0)}}{x_1^{(t_0)}+x_2^{(t_0)}} & \text{if } \gamma_2=\delta_1=0,\\ 0 & \text{if } \gamma_2\neq 0,\delta_1=0,\end{cases}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{x_2^{(t_0+m)}}{\varpi\circ W\left(z^{(t_0+m)}\right)}=\begin{cases}0 & \text{if } \gamma_2=0,\delta_1\neq 0,\\ \frac{\delta_2 x_2^{(t_0)}}{x_1^{(t_0)}+x_2^{(t_0)}} & \text{if } \gamma_2=\delta_1=0,\\ \delta_2 & \text{if } \gamma_2\neq 0,\delta_1=0,\end{cases}$$

且对于 $t\geq t_0+m+1$

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{y^{(t)}}{\varpi\circ W\left(z^{(t)}\right)}=\begin{cases}\gamma & \text{if } \gamma_2=0,\delta_1\neq 0,\\ \frac{\gamma x_1^{(t_0)}+\delta x_2^{(t_0)}}{x_1^{(t_0)}+x_2^{(t_0)}} & \text{if } \gamma_2=\delta_1=0,\\ \delta & \text{if } \gamma_2\neq 0,\delta_1=0.\end{cases}$$

情况2：如果存在 $m_0\geq 1$，例如 $x^{(t_0+m_0)}{}_1=0$，那么由 $z^{(0)}\in S^2$，并根据 $x^{(t_0+m)}{}_1$ 的公式，可得 $x^{(t_0)}{}_1=0$，且 $\delta_1=0$，因此 $x^{(t_0+m)}{}_1=0$。对于每个 $m\geq 1$，我们容易得到 $\lim_{t\to+\infty}V^t\left(z^{(0)}\right)=$(0,1,0)。

(b) 情况 $\Delta>0$。

设 $\lambda_1<\lambda_2$ 为 χ_M 的根。模 χ_M 而言，对所有 $t\geq 0$:

$$X^t\equiv\frac{\lambda_2^t-\lambda_1^t}{\lambda_2-\lambda_1}X-\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_2^{t-1}-\lambda_1^{t-1}}{\lambda_2-\lambda_1}$$

并且结合 $\theta_t=\frac{\lambda_2^t-\lambda_1^t}{\lambda_2-\lambda_1}$，有 $M^t=\theta_t M-\lambda_1\lambda_2\theta_{t-1}I_2$，因此对所有 $m\geq 1$:

$$\begin{aligned}x_1^{(t_0+m)} &= \left[\left(\gamma_1\theta_{t_0+m}-\lambda_1\lambda_2\theta_{t_0+m-1}\right)x_1^{(t_0)}+\delta_1\theta_{t_0+m}x_2^{(t_0)}\right]y^{(t_0)}\\ x_2^{(t_0+m)} &= \left[\gamma_2\theta_{t_0+m}x_1^{(t_0)}+\left(\delta_2\theta_{t_0+m}-\lambda_1\lambda_2\theta_{t_0+m-1}\right)x_2^{(t_0)}\right]y^{(t_0)},\end{aligned}$$

因此

$$y^{(t_0+m)}=y^{(t_0)}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\gamma x_1^{(t_0+k)}+\delta x_2^{(t_0+k)}\right).$$

我们来证明，$|\lambda_1|<1$ 和 $|\lambda_2|<1.$。由于 $\gamma_2<1-\gamma_1$，$\delta_1<1-\delta_2$，可得 $0<\Delta=(\gamma_1-\delta_2)^2+4\gamma_2\delta_1<(\gamma_1-\delta_2)^2+4(1-\gamma_1)(1-\delta_2)=(\gamma_1+\delta_2-2)^2.$。由此得到 $\lambda_2=\frac{\gamma_1+\delta_2+\sqrt{\Delta}}{2}<1$ 和 $\lambda_1=\frac{\gamma_1+\delta_2-\sqrt{\Delta}}{2}>\gamma_1+\delta_2-1>-1.$。因此，$|\lambda_1|<1$，$|\lambda_2|<1$，由此可得 $\theta_t\to 0$，因为 $t\to+\infty.$。因此，得到$\lim_{t\to+\infty}x_1^{(t)}=\lim_{t\to+\infty}x_2^{(t)}=0$，并且与前一种情况一样，$\lim_{t\to+\infty}y^{(t)}=0.$

通过考虑与 (a) 中相同的两种情况，我们可以得到算子 V 对于 $z^{(0)}\in S^2$ 的定理证明。□

应用。哺乳动物中的剂量补偿和X染色体失活。

在 XY 性别决定系统中，雌性有两条 X染色体，而雄性只有一条。X染色体携带许多参与细胞功能的基因，因此，如果没有调节机制，雌性产生的由这些基因编码的蛋白质将是雄性的两倍，这会导致细胞功能紊乱。在雌性胚胎形成的早期阶段，一种称为剂量补偿（或莱昂化）的机制会使两条 X染色体中的一条失活。X染色体失活受 X染色体上一段名为 X染色体失活中心（Xic）的短区域控制；在失活的 X染色体上，Xic 处于活性状态。Xic 位点对于引发 X染色体失活既必要又充分：雌性胚胎中存在一个无功能的 Xic 位点会导致致死。

如果我们用 X^* 表示一条携带无功能 Xic 位点的性染色体 X，则只有三种基因型 XY、 X^*Y、 XX，因此相应的性染色体代数属于 (1, 2) 型。在性染色体算子 W的定义中，变量 $x_1^{(t)}$、 $x_2^{(t)}$、 $y^{(t)}$ 分别与基因型 XY、 X^*Y、 XX相关联。

利用命题2和命题6、定义2以及命题7，本节所得结果适用于这种情况。

5.3.（♀ 致死性隐性， ♂ 非致死）情况下轨迹的渐近行为。

在这种情况下，只有基因型 X^*X^* 是致死的，因此我们只观察类型 XX、 XX^*、X^*Y 和 XY。与这种情况相关的动力系统一般情形较为复杂，因此我们将研究一个由以下例子引出的较简单情形。

在人类中，血友病是一种遗传病，由编码凝血因子的基因发生突变所致，该基因位于 X 性染色体上。血友病是一种性染色体连锁的隐性致死遗传病，这意味着不存在携带该突变的纯合女性；杂合女性不会患血友病，但会成为携带者；患者仅见于男性。多达三分之一的血友病患者没有受影响的家族成员，这反映出较高的突变率（“新发”突变）。

我们用 μ （分别用 η）表示在母系（分别为父系）配子中，从 X 到 X^* 的突变率，其中 $0 \le \mu$、$\eta \le 1$。假设在卵子发生和精子发生过程中，突变一旦发生在某个细胞中，就只影响一个性染色体 X，而不会同时影响两者；并且考虑到突变后的基因不会恢复为野生型，配子发生后我们观察到以下突变率：

$$\begin{aligned} XX &\rightarrowtail (1-\mu)\,X + \mu X^*, \qquad XY \rightarrowtail \tfrac{1-\eta}{2}X + \tfrac{\eta}{2}X^* + \tfrac{1}{2}Y, \\ XX^* &\rightarrowtail \tfrac{1-\mu}{2}X + \tfrac{1+\mu}{2}X^*, \qquad X^*Y \rightarrowtail \tfrac{1}{2}X^* + \tfrac{1}{2}Y. \end{aligned}$$

因此，繁殖后基因型的频率分布如下列潘尼特方格所示：

$$\begin{array}{lcccccc} XX \times XY & \rightarrowtail & \frac{(1-\mu)(1-\eta)}{2-\mu\eta}XX, & \frac{\mu+\eta-2\mu\eta}{2-\mu\eta}XX^*, & \frac{1-\mu}{2-\mu\eta}XY, & \frac{\mu}{2-\mu\eta}X^*Y \\ XX \times X^*Y & \rightarrowtail & & \frac{1-\mu}{2-\mu}XX^*, & \frac{1-\mu}{2-\mu}XY, & \frac{\mu}{2-\mu}X^*Y \\ XX^* \times XY & \rightarrowtail & \frac{(1-\mu)(1-\eta)}{4-(1+\mu)\nu}XX, & \frac{1+\mu-2\mu\eta}{4-(1+\mu)\eta}XX^*, & \frac{1-\mu}{4-(1+\mu)\eta}XY, & \frac{1+\mu}{4-(1+\mu)\eta}X^*Y \\ XX^* \times X^*Y & \rightarrowtail & & \frac{1-\mu}{3-\mu}XX^*, & \frac{1-\mu}{3-\mu}XY, & \frac{1+\mu}{3-\mu}X^*Y \end{array}$$

与这种情形相关的代数是类型为 (2, 2) 的 gonomal $\mathbb{R}$-代数，其基为 $(e_1, e_2) \cup (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2)$，交换乘法表为:

$$\begin{aligned}
e_1\widetilde{e}_1 &= \tfrac{(1-\mu)(1-\eta)}{2-\mu\eta}e_1 + \tfrac{\mu+\eta-2\mu\eta}{2-\mu\eta}e_2 + \tfrac{1-\mu}{2-\mu\eta}\widetilde{e}_1 + \tfrac{\mu}{2-\mu\eta}\widetilde{e}_2\\
e_1\widetilde{e}_2 &= \tfrac{1-\mu}{2-\mu}e_2 + \tfrac{1-\mu}{2-\mu}\widetilde{e}_1 + \tfrac{\mu}{2-\mu}\widetilde{e}_2\\
e_2\widetilde{e}_1 &= \tfrac{(1-\mu)(1-\eta)}{4-(1+\mu)\nu}e_1 + \tfrac{1+\mu-2\mu\eta}{4-(1+\mu)\nu}e_2 + \tfrac{1-\mu}{4-(1+\mu)\nu}\widetilde{e}_1 + \tfrac{1+\mu}{4-(1+\mu)\nu}\widetilde{e}_2\\
e_2\widetilde{e}_2 &= \tfrac{1-\mu}{3-\mu}e_2 + \tfrac{1-\mu}{3-\mu}\widetilde{e}_1 + \tfrac{1+\mu}{3-\mu}\widetilde{e}_2
\end{aligned}$$

未提及的乘积均为零。

由 (4.3) 可得与该代数相关的动力系统:

$$W_{\mu,\eta}: \begin{cases}
x_1' &= \tfrac{(1-\mu)(1-\eta)}{2-\mu\eta}x_1y_1 & & & +\tfrac{(1-\mu)(1-\eta)}{4-(1+\mu)\eta}x_2y_1 & \\
x_2' &= \tfrac{\mu+\eta-2\mu\eta}{2-\mu\eta}x_1y_1 & +\tfrac{1-\mu}{2-\mu}x_1y_2 & +\tfrac{1+\mu-2\mu\eta}{4-(1+\mu)\eta}x_2y_1 & +\tfrac{1-\mu}{3-\mu}x_2y_2\\
y_1' &= \tfrac{1-\mu}{2-\mu\eta}x_1y_1 & +\tfrac{1-\mu}{2-\mu}x_1y_2 & +\tfrac{1-\mu}{4-(1+\mu)\eta}x_2y_1 & +\tfrac{1-\mu}{3-\mu}x_2y_2\\
y_2' &= \tfrac{\mu}{2-\mu\eta}x_1y_1 & +\tfrac{\mu}{2-\mu}x_1y_2 & +\tfrac{1+\mu}{4-(1+\mu)\eta}x_2y_1 & +\tfrac{1+\mu}{3-\mu}x_2y_2
\end{cases} \tag{5.8}$$

命题 18。算子 $W_{1,\ 1}$ 和 $W_{1,\ \eta}$ 的不动点为 (0, 0, 0, 0)；对于 $W_{\mu,\ 1}$，不动点为 (0, 0, 0, 0) 和 $\left(0, \frac{3-\mu}{2}, \frac{3-\mu}{2}, \frac{(1+\mu)(3-\mu)}{2(1-\mu)}\right)$。

证明。令 $z = (x_1, x_2, y_1, y_2)$，考虑方程 $z = W_{\mu,\ \eta}(z)$。

a) 若 $\mu = \eta = 1$，则由 (5.8) 立即得到: $x_1 = x_2 = y_1 = 0$，因此 $y_2 = 0$。b) 若 $\mu = 1$且 $\eta \neq 1$，在 (5.8) 中令 $\mu = 1$，得到 $x_1 = y_1 = 0$，由此可得 $x_2 = y_2 = 0$。c) 若 $\mu \neq 1$ 且 $\eta = 1$，算子 $W_{\mu,\ 1}$ 的不动点 (x_1, x_2, y_1, y_2) 满足

$$\begin{cases}
x_1 &= 0\\
x_2 &= \tfrac{1-\mu}{3-\mu}x_2(y_1+y_2)\\
y_1 &= \tfrac{1-\mu}{3-\mu}x_2(y_1+y_2)\\
y_2 &= \tfrac{1+\mu}{3-\mu}x_2(y_1+y_2),
\end{cases} \tag{5.9}$$

若 $y_1 + y_2 = 0$ 我们有 $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$。假设 $y_1 + y_2 \neq 0$，将（5.9）的最后两个方程相加，得到 $y_1 + y_2 = \frac{2}{3-\mu}x_2(y_1 + y_2)$，因此 $x_2 = \frac{3-\mu}{2}$，继而 $y_1 = \frac{1-\mu}{2}(y_1 + y_2)$ 和 $y_2 = \frac{1+\mu}{2}(y_1 + y_2)$，于是 $y_1 = \frac{1-\mu}{1+\mu}y_2$，可推出 $y_1 + y_2 = \frac{2}{1+\mu}y_2$，并结合（5.9）中给出的方程 y_2，得到 $y_2 = \frac{(1+\mu)(3-\mu)}{2(1-\mu)}$，因此 $y_1 = \frac{3-\mu}{2}$。最后，$W_{\mu,1}$ 的不动点为：(0, 0, 0, 0) 和 $\left(0, \frac{3-\mu}{2}, \frac{3-\mu}{2}, \frac{(1+\mu)(3-\mu)}{2(1-\mu)}\right)$。□

命题19. 对于所有 $z = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ 以及 $0 \leq \mu, \eta \leq 1$，我们有:

a) $W_1^n(z) = 0$ 对于每个 $n \geq 2$。

b) 对每个 $n \geq 3$, $W_1^n(z) = 0$。

c) $\lim_{n\to\infty} W_{\mu,1}^n(z) = \begin{cases} 0 & if \ \left|\frac{x_1}{2-\mu} + \frac{x_2}{3-\mu}\right| \cdot |y_1 + y_2| \leq \frac{1}{(1-\mu)^2} \\ +\infty & if \ \left|\frac{x_1}{2-\mu} + \frac{x_2}{3-\mu}\right| \cdot |y_1 + y_2| > \frac{1}{(1-\mu)^2}. \end{cases}$

对于由 $W_{\mu,1}$ 定义的归一化性染色体算子 $V_{\mu,1}$ ，我们有：

$$V_{\mu,1}^{n}(z)=\left(0,\frac{1-\mu}{3-\mu},\frac{1-\mu}{3-\mu},\frac{1+\mu}{3-\mu}\right),\quad \forall n\geq 1.$$

证明。a) 如果 $\mu=\eta=1$，方程组 (5.8) 变为：

$$\begin{cases} x_1' &= x_2'=y_1'=0\\ y_2' &= (x_1+x_2)(y_1+y_2)\end{cases}$$

换言之，第一代中不再有雌性，种群在第二代灭绝。

b) 如果 $\mu=1$ 和 $\eta\neq 1$，方程组 (5.8) 写作：

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' &=& 0\\ x_2' &=& \frac{1-\eta}{2-\eta}x_1y_1 \qquad\qquad +\frac{1-\eta}{2-\eta}x_2y_1\\ y_1' &=& 0\\ y_2' &=& \frac{1}{2-\eta}x_1y_1 \quad +x_1y_2 \quad +\frac{1}{2-\eta}x_2y_1 \quad +x_2y_2\end{array}\right.$$

对于 $z=(x_1,x_2,y_1,y_2)$，我们得到 $z^{(2)}=\left(0,0,0,\left(\frac{1-\eta}{2-\eta}\right)^2(x_1+x_2)^2y_1^2\right)$，因此 $z^{(3)}=(0,0,0,0)$，种群延续至第三代。

c) 当 $\mu\neq 1$ 和 $\eta=1$ 时，方程组 (5.8) 变为：

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' &=& 0\\ x_2' &=& \left(\frac{1-\mu}{2-\mu}x_1+\frac{1-\mu}{3-\mu}x_2\right)(y_1+y_2)\\ y_1' &=& \left(\frac{1-\mu}{2-\mu}x_1+\frac{1-\mu}{3-\mu}x_2\right)(y_1+y_2)\\ y_2' &=& \left(\frac{\mu}{2-\mu}x_1+\frac{1+\mu}{3-\mu}x_2\right)(y_1+y_2).\end{array}\right.$$

如果对于 $z=(x_1,x_2,y_1,y_2)\in S^{2,2}$ 以及 $n\geq 0$，我们令 $W_{\mu,1}^{n}(z)=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},y_1^{(n)},y_2^{(n)}\right)$，我们证明

$$\begin{array}{lcl} x_1^{(n+1)} &=& 0\\ x_2^{(n+1)} &=& 2^{2^n-1}\frac{(1-\mu)^{2^{n+1}-1}}{(3-\mu)^{2^n-1}}\left(\frac{x_1}{2-\mu}+\frac{x_2}{3-\mu}\right)^{2^n}(y_1+y_2)^{2^n}\\ y_1^{(n+1)} &=& x_2^{(n+1)}\\ y_2^{(n+1)} &=& 2^{2^n-1}(1+\mu)\frac{(1-\mu)^{2^{n+1}-2}}{(3-\mu)^{2^n-1}}\left(\frac{x_1}{2-\mu}+\frac{x_2}{3-\mu}\right)^{2^n}(y_1+y_2)^{2^n}.\end{array}\tag{5.10}$$

我们有 $\frac{2}{3}<\frac{2}{3-\mu}<1$，$x_2^{(n+1)}=\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{2}{3-\mu}\right)^{2^n-1}\left[(1-\mu)^2\left(\frac{x_1}{2-\mu}+\frac{x_2}{3-\mu}\right)(y_1+y_2)\right]^{2^n}$，$y_1^{(n+1)}=x_2^{(n+1)}$ 以及 $y_2^{(n+1)}=\frac{1-\mu}{1+\mu}x_2^{(n+1)}$，由此可推导出 $W_{\mu,\,1}^{n}$ 的极限值。

由 (5.10) 得到 $\varpi \circ W^n_{\mu,\ 1}(z) \ = \ 2^{2^n-1}(1-\mu)^{2^{n+1}-2}(3-\mu)^{2^n-2} \ \left(\frac{x_1}{2-\mu}+\frac{x_2}{3-\mu}\right)^{2^n}(y_1+y_2)^{2^n}$，对所有 $n \geq 1$ 均成立；并且通过对 (5.10) 给出的项进行归一化，可得 $V^n_{\mu,\ 1}$ 分量 $\left(0, \frac{1-\mu}{3-\mu}, \frac{1-\mu}{3-\mu}, \frac{1+\mu}{3-\mu}\right)$，对所有 $n \geq 1$ 均成立。□

下文中我们假设 $\mu, \eta \neq 1$。

命题20。对于任意 $z = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S^{2,2}$ 以及 $0 \leq \mu, \eta \leq 1$，轨迹 $\{z^{(n)}\}$以指数速度趋于不动点 0。

证明。显然，对于任意 $n \geq 1$， $x_1^{(n)} \geq 0, x_2^{(n)} \geq 0, y_1^{(n)} \geq 0, y_2^{(n)} \geq 0$。我们选取函数 $F(z) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$，并证明 $F(z)$ 是方程组 (5.8) 的李雅普诺夫函数。考虑

$$F(z') = (x_1' + x_2')(y_1' + y_2') = (x_1' + x_2' + y_1' + y_2')(y_1' + y_2') - (y_1' + y_2')^2.$$

利用命题9的 b)，我们得到 $y_1' + y_2' \leq \frac{1}{4}$，并由 (4.6) 得到

$$F(z') = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(y_1' + y_2') - (y_1' + y_2')^2 = (y_1' + y_2')F(z) - (y_1' + y_2')^2 \leq F(z).$$

因此，序列 $F(z^{(n)})$ 单调递减且以下界 0 有界，所以它存在极限，也就是说，它是一个李雅普诺夫函数。此外，根据命题9的 b)

$$F(z') = (x_1' + x_2')(y_1' + y_2') \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

另一方面， $F(z') = x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + y_1^{(2)} + y_2^{(2)} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2$由此可得 $x_1^{(2)} + x_2^{(2)} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2$，$y_1^{(2)} + y_2^{(2)} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2$.因此， $F(z^{(2)}) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2^2}$依此类推。于是，对于任意 $n \geq 1$，都有 $F(z^{(n)}) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2^n}$，这保证了 $F(z^{(n)})$ 的极限收敛于 0。此外，由 $F(z^{(n)}) = (x_1^{(n)} + x_2^{(n)})(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) = x_1^{(n+1)} + x_2^{(n+1)} + y_1^{(n+1)} + y_2^{(n+1)}$可得，$0 \leq x_1^{(n+1)} \leq F(z^{(n)})$ $0 \leq x_2^{(n+1)} \leq F(z^{(n)})$ $0 \leq y_1^{(n+1)} \leq F(z^{(n)})$ $0 \leq y_2^{(n+1)} \leq F(z^{(n)})$，由此完成命题的证明。

□

References

[1] N. Baca¨er，《种群动力学》，Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011年。[2] R.L. Devaney，《混沌动力学》，Westview Press，2003年。[3] I.M.H. Etherington。 *Non associative algebra and the symbolism of genetics*。爱丁堡皇家学会会刊，61：24–42（1941年）。[4] H. Gonshor。 *Special train algebra arising in genetics*。爱丁堡数学学会会刊（1）12：41–53（1960年）。[5] H. Gonshor。 *Special train algebra arising in genetics II*。爱丁堡数学学会会刊，14（4）：333–338（1965年）。[6] H. Gonshor。 *Contributions to genetic algebra II*。爱丁堡数学学会会刊，18（4）：273–279（1973年）。[7] M. Ladra 和 U. A. Rozikov。 *Evolution algebra of a bisexual population*。代数学杂志，378：153–172（2013年）。[8] Y.I. Lyubich，《种群遗传学中的数学结构》，Springer-Verlag，柏林，1992年。[9] U.A. Rozikov，《种群动力学：代数与概率方法》。 *World Sci. Publ*。新加坡，2020年，460页。

[10] U.A. Rozikov、S.K. Shoyimardonov、R. Varro, *Planktons discrete time dynamical systems.*《非线性研究》，28（2）（2021年），585–600。[11] U.A. Rozikov、R. Varro, *Dynamical systems generated by a gonosomal evolution operator*。《不连续性、非线性与复杂性杂志》，5（2）（2016年），173–185。[12] R. Varro, *Gonosomal algebra*,《代数学杂志》，447（1）（2016年），1–30。[13] R. D. Schafer。《非结合代数导论》。1966年原版的校订重印本。Dover Publications, Inc.，纽约，1995年。[14] A. W¨orz-Busekros。 *The zygotic algebra for sex linkage*。《数学生物学杂志》，1：37–46（1974年）。[15] A. W¨orz-Busekros。 *The zygotic algebra for sex linkage II*。《数学生物学杂志》，2：359–371（1975年）。[16] A. W¨orz-Busekros。《遗传学中的代数》。生物数学讲义，36。Springer-Verlag，纽约，1980年。

U.A. Rozikov[a, b, c] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, 9, Universitet str., 100174, Tashkent, [b] New Uzbekistan University, Uzbekistan; 54 100007 Tashkent Uzbekistan; , [c] National University of Uzbekistan 4 Universitet str. 100174 Tashkent Mustaqillik ave., , , , , , , Uzbek-istan.

Email address: rozikovu@yandex.ru

S. K. Shoyimardonov, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, 9, Universitet str., 100174, Tashkent, Uzbekistan.*Email address*: shoyimardonov@inbox.ru

R. Varro, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, Université de Montpellier . Place Eugène Bataillon 34090 Montpellier, France.

Email address: richard.varro@univ-montp3.fr