一个受控状态下三个互联半线性反应扩散偏微分方程的内部稳定化

Constantinos Kitsos、Rami Katz 和 Emilia Fridman,

arXiv:2304.01548v1 [math.OC] 4 Apr 2023

摘要——本文研究以严格前馈形式表示的三个半线性抛物型偏微分方程（PDEs）系统的指数稳定化。假设各扩散系数互不相同，且这些偏微分方程通过反应矩阵和非线性项相互耦合。假设只有一个偏微分方程受到内部控制，因此该系统属于欠驱动系统。对此类欠驱动系统进行构造性且高效的控制是一项非平凡的开放问题，而这一问题近期已在线性情形下得到解决。本文将这些结果推广至半线性情形；由于非线性引入了耦合，这一推广颇具挑战性。本文采用模态分解；由于存在非线性，解的有限维部分与无限维尾部相互耦合。随后，通过变换将有限维部分映射到目标系统，从而能够高效地设计静态线性比例状态反馈控制器。此外，本文采用高增益方法来补偿非线性项。通过 Lyapunov 稳定性分析，得到了可保证以任意衰减率实现指数稳定性的线性矩阵不等式条件。结果表明，只要执行器数量和高增益参数足够大，这些线性矩阵不等式总是可行的。数值示例展示了所提方法的有效性。

索引词——半线性抛物型偏微分方程系统，欠驱动系统，李雅普诺夫稳定化，模态分解。

I. 引言

互联系统中的反应扩散方程广泛应用于科学与工程领域，包括种群动力学和空间生态学模型、化学反应、磁性系统以及演化博弈论（例如参见 [1], [2], 及综述 [3], [4, 第3节3]）。值得注意的是，肿瘤生长模型[5], 、扩散型神经网络 [6] 和核反应堆 [7]均由具有非线性互联关系的抛物型偏微分方程描述，与本文研究的情形相同，且受控状态数量有限（即欠驱动系统）。

对于标量半线性反应扩散方程，文献 [8] 给出了通过分布式或边界有限维控制器实现输出反馈稳定化的构造性方法。此前，文献 [9] 已通过基于线性二次调节器的控制器实现了标量热方程的稳定化。文献 [10] 研究了标量半线性热方程的可控性，并进一步关于非线性偏微分方程稳定化的研究结果见文献 [11]，[12]。

与标量情形相比，对互连欠驱动反应扩散方程组的控制会带来额外的理论挑战。例如，不同扩散系数的存在往往会在系统分析和适当控制律的推导中造成显著的技术困难（参见综述 [13] 及其中的可控性结果）。此外，从实现角度来看，计算控制器增益并实现控制器通常需要较高的计算成本。欠驱动系统的控制问题最早在 [14] 中提出（更全面的文献综述另见 [15] ）。 [15], [16], 首次介绍了具有多个状态且仅有一个受控方程的线性反应扩散偏微分方程的欠驱动系统稳定化，涵盖分布式控制和边界控制。

本研究将 [15], [16] 的结果推广至由未知 Lipschitz 非线性项互联的偏微分方程系统。我们考虑以严格前馈形式表示的系统，其扩散矩阵为对角矩阵且包含互不相同的元素。其余项由反应矩阵和三角形利普希茨非线性项构成。我们假设只有第一个偏微分方程受到控制，且有 N 个执行器在内部作用于状态。为设计稳定化控制律，我们采用模态分解方法（例如，参见 [8], [17] 关于标量半线性偏微分方程的研究，以及 [15] 关于偏微分方程系统的研究），将系统划分为有限维部分和无限维尾部；由于非线性项的作用，这两部分相互耦合。于是，稳定系统面临双重挑战：一方面，欠驱动和扩散系数互不相同，使高效且可扩展的控制器设计更加复杂；另一方面，非线性项将所有模态耦合在一起，从而导致溢出行为 [9]。为应对第一个挑战，我们采用 [16]，最近提出的一种变换，将有限维部分变换为等价的目标系统。所得目标系统使高效且可扩展的状态反馈控制器设计成为可能，并显著降低了计算复杂度。这种变换的无限维对应形式最早见于 [18], [19] ，用于处理更一般的反应项，并对系统解提出更强的正则性假设。在此处，模态分解使系统所需满足的条件更宽松。为克服第二个挑战，我们利用系统的三角结构，将控制器设计与一种受有限维系统启发的高增益方法相结合（例如，参见 [20]

C. Kitsos（constantinos.kitsos@ec-nantes.fr）任职于南特中央理工学院土木工程与机械研究所（CNRS联合研究单位6183）。R. Katz（ramikatz@mail.tau.ac.il）和 E. Fridman（emilia@eng.tau.ac.il）任职于以色列特拉维夫大学电气工程学院。本文得到以色列科学基金会（资助编号673/19）及特拉维夫大学 Chana and Heinrich Manderman讲席的支持。

例如关于高增益观测器的研究）；该方法最初由 [19] 引入无限维系统。我们对闭环系统进行 Lyapunov 稳定性分析，并由此得到线性矩阵不等式。与有限维系统不同，[20]，在这里，高增益参数也会作用于无限维尾部，因此稳定性分析复杂得多。对于任意给定的衰减率，只要执行器数量 N 和高增益参数足够大，就可以证明这些线性矩阵不等式始终可行。所推导的线性矩阵不等式给出了一种具有构造性且可扩展的稳定化算法。

本文结构安排如下。第二节介绍问题表述及相关假设。第三节阐述我们的内部稳定化方法，其中定理 1 是本文的主要结果。第四节给出一个数值示例。第五节总结全文。

记号：对于 $x \in \mathbb{R}^m$，$|x|$ 表示其通常的欧几里得范数。对于矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$，$Q^\top$ 表示其转置，$|Q|$：$= \sigma_{\max}\frac{Q+Q^\top}{2}$ $\sigma_{\min}$ sup $\{|Qw|, |w|=1\}$ 表示其诱导范数，Sym(Q)表示其对称部分，而 ()、()分别表示其最小和最大特征值。用 diag$\{A_1, \ldots, A_m\}$ 表示以 A_1、.....、A_m为对角元素的（分块）对角矩阵。I_m 表示维数为 m 的单位矩阵，$\otimes$ 表示克罗内克积。对于 f、g，若它们属于 $L^2(0, L; \mathbb{R}^m)$，则其内积记为 $\langle f, g\rangle = \int_0^L f^\top(x)g(x)dx$，相应的诱导范数为 $\|\cdot\|_{L^2}$（$L^2(0, L; \mathbb{R}^m)$是由满足 $\|f\|_{L^2} < +\infty$的可测函数 $f: [0, L] \to \mathbb{R}^m$ 构成的等价类空间）。用 $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{R}^m)$表示平方可和序列 $x = (x_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq \mathbb{R}^m$构成的希尔伯特空间。

II. 问题表述

考虑以下由三个耦合抛物型偏微分方程组成的系统，其中对于 $(t, x) \in [0, +\infty) \times (0, L)$:

$$z_t(t,x) = Dz_{xx}(t,x) + Qz(t,x) + f(z(t,x)) + B\sum_{j=1}^{N} b_j(x)u_j(t), \tag{1a}$$

$$\gamma_{11}z(t,0) + \gamma_{12}z_x(t,0) = 0,$$

$$\gamma_{21}z(t,L) + \gamma_{22}z_x(t,L) = 0, \tag{1b}$$

$$z(0,x) = z^0(x). \tag{1c}$$

此处，状态表示为 $z = \text{col}\{z_1, z_2, z_3\}$，扩散矩阵

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

由可能各不相同的系数 d_1、d_2、$d_3 > 0$ 和 Q 组成，反应矩阵按如下方式分解：

$$Q = Q_0 + Q_1;$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ 0 & 0 & q_{3,3} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

非线性项 f 具有如下三角形式：

$$f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z_1, z_2, z_3) \\ f_2(z_2, z_3) \\ f_3(z_3) \end{pmatrix} \tag{3}$$

且 $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为控制系数。边界条件使用常数 $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^{2} \subseteq \mathbb{R}$ 定义，并满足 $\gamma_{i1}^2 + \gamma_{i2}^2 \neq 0, \quad i = 1, 2$。

系统 (1) 表示一个欠驱动系统，其中标量控制输入 $\{u_j\}_{j=1}^N$ 与待在下文确定的 N 相乘，再乘以形状函数 $\{b_j\}_{j=1}^N \subseteq L^2(0, L)$，并仅作用于第一个方程内部。随后，控制输入通过反应矩阵 Q 传播至状态 z_2 和 z_3 对应的方程。非线性项（尤其是 f_1）则将 z_2 和 z_3 与 z_1 相互耦合。

假设1：Q_0 的元素均非零。即，$q_{2,1}$，$q_{3,2} \neq 0$。

假设1保证了(Q_0, B)的可控性。

假设2：函数 f属于 $Lip\left(L^2\left(0, L; \mathbb{R}^3\right)\right)$。更准确地说，存在常数 $\ell_i > 0$、$i = 1$、2、3，使得下列不等式成立：

$$\|f_i(z) - f_i(\bar{z})\|_{L^2} \le \ell_i \|z - \bar{z}\|_{L^2} \tag{4}$$

对于任意 z、$\bar{z} \in L^2\left(0, L; \mathbb{R}^3\right)$. 此外，$f_i(0) \equiv 0$，$i$ =1、2、3。

此处采用上述全局利普希茨假设，是为了简化本已繁琐的推导。然而，该假设可以弱化为局部利普希茨性质，这在反应扩散系统中更为常见。在这种情况下，本文提出的方法能够得到局部稳定化结果，并对吸引域给出显式估计（类似论证参见 [21] ）。

备注1：下文假设 $f_2 \equiv f_3 \equiv 0$，而 f_1 非零，且不对其 Lipschitz 常数 ℓ_1 作任何限制。在此假设下，我们将设计一个控制器，并推导出能够保证闭环系统 L^2稳定性的线性矩阵不等式条件。随后，利用线性矩阵不等式对小扰动的鲁棒性，只要 ℓ_2 和 ℓ_3 足够小，所提出的控制策略在 f_2 和 f_3 非零时也同样适用。未来的工作中，我们将进一步给出 ℓ_2 和 ℓ_3的显式估计，以保持闭环系统的 L^2-稳定性。请注意，z_1、z_2 和z_3 之间的互联在仅 f_1 非零的假设下成立。

考虑以下关于 $i = 1$、2、3的标量 Sturm-Liouville 特征值问题族：

$$\begin{aligned} d_i\varphi''(x) + \bar{\lambda}\varphi(x) &= 0, \quad 0 < x < L, \\ \gamma_{11}\varphi(0) + \gamma_{12}\varphi'(0) &= \gamma_{21}\varphi(L) + \gamma_{22}\varphi'(L) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

¯其特征值构成一个单调递增的简单特征值序列 $\lambda_{n,i} = d_i\lambda_n$，其中 $\lambda_n \propto n^2$（例如参见 [22, 第 3.3 节1]）是满足 $d_i = 1$ 的方程 (5) 的特征值。这些特征值对应于一列特征函数 $(\varphi_n)_{n=1}^{+\infty}$。这些特征函数在 $L^2(0, L)$ 中构成完备的标准正交系。对于 (1) 中的诺伊曼或狄利克雷边界条件（即当某一对 $(\gamma_{1,i}, \gamma_{2,j})$ i 中的一个为 $j = 1$时，2 为

零），特征函数可以显式求得。对于罗宾边界条件，我们仍可采用这种方法：通过数值计算特征值和特征函数，并考虑它们的估计结果（例如参见 [22, 第 3.3 节1]）。

假设 3：回顾形状函数 $\{b_j\}_{j=1}^{N}$。对于任意 $N \in \mathbb{N}$，矩阵

$$\mathcal{B}_{N\times N} := \operatorname{col}\left\{\mathcal{B}_j^{\top}\right\}_{j=1}^{N}, \tag{6}$$

当 $\mathcal{B}_n := \left(b_{1,n} \cdots b_{N,n}\right)^{\top}$ 和 $b_{j,n} := \left\{\langle b_j, \varphi_n\rangle\right\}_{j\ ,n=1}^{N}$ 时是非奇异的。此外，对于所有 $N \in \mathbb{N}$，我们有

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\left[\|b_k\|_{L^2}^2 - |\mathcal{B}_k|^2\right]\right)|\mathcal{B}_{N\times N}^{-1}|^2 \le \eta\lambda_{N+1}^{\beta} \tag{7}$$

其中某些常数 $\eta > 0$ 和 $\beta \in [0,1)$。

备注 2：$\mathcal{B}_{N\times N}$ 的逆将在控制器设计中显式使用。关于标量抛物型偏微分方程的稳定化，已有若干研究采用了类似的假设（例如参见 *[9]*）。然而，条件 (7) 是一项技术性条件，下面将用它来证明所导出线性矩阵不等式的可行性保证。据我们所知，文献中尚未给出能够保证条件 (7) 成立的关于 $\{b_j\}_{j=1}^{N}$ 的一般条件；推导这些条件是一个极具挑战性的问题，因此留待未来研究。注意，对于特殊情形 $b_n(\cdot) = \varphi_n(\cdot)$，假设 3 的条件对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

现在，我们可以描述本文所研究的问题：

问题 1：假设 1–3 成立。给定任意衰减率 $\delta > 0$，求执行器数量 N 以及静态线性比例状态反馈控制律 $\{u_i(t)\}_{i=1}^{N}$，使得对于任意满足边界条件 (1b) 的初始条件 $z^0 \in H^1\left(0, L; \mathbb{R}^3\right)$，由 (1) 得到的闭环系统的解满足

$$\|z(t,\cdot)\|_{L^2} \le Me^{-\delta t}\|z^0(\cdot)\|_{L^2}, \quad t \ge 0 \tag{8}$$

其中某个 $M > 0$。

III. 稳定化方法

利用模态分解和 (5)，我们首先将 (1) 的解表示为

$$z_i(t,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} z_{i,n}(t)\varphi_n(\cdot), \quad i = 1,2,3 \tag{9}$$

其中投影系数 $z_{i,\ n}$ 由下式给出

$$z_{i,n} = \langle z_i, \varphi_n\rangle. \tag{10}$$

对式 (10) 求时间导数，代入动力学方程 (1)，并进行分部积分，可得到以下常微分方程

对于 $z_n = \operatorname{col}\{z_{1,n}, z_{2,n}, z_{3,n}\}$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_n(t) &= \int_0^L z_t(t,x)\varphi_n(x)dx\\ &= \left[Dz_x(\cdot)\varphi_n(\cdot) - Dz(\cdot)\varphi_n'(\cdot)\right]_0^L\\ &+ \left(-\lambda_n D + Q\right)z_n(t) + F_n[z(t)]\\ &+ B\sum_{j=1}^{N} u_j(t)\int_0^L \varphi_n(x)b_j(x)dx,\end{aligned}$$

其中 $F_n[z] := \int_0^L f(z(t,x))\ \phi_n(x)dx$，根据 $\varphi_n(x)$ 和 $z(t, x)$ 的齐次边界条件，可写为:

$$\dot{z}_n(t) = \left(-\lambda_n D + Q\right)z_n(t) + F_n[z(t)] + B\sum_{j=1}^{N} b_{j,n}u_j(t). \tag{11}$$

表示式 (9) 以及式 (11) 的推导，均由下文式 (32) 后导出的闭环系统经典解的存在唯一性所保证。

注 3：与文献 *[16],* 中所述的线性情形不同，式 (11) 表明，由于引入了非线性项 $F_n(t)$，我们无法将解中较慢有限维部分（对应较小特征值）的稳定化与较快的无限维尾部解耦。这些非线性项耦合了所有解模态（这一现象也称为溢出，见 *[9]*）。

采用记号 $z^N = \operatorname{col}\{z_j\}_{j=1}^{N} \in \mathbb{R}^{3N}$，可得有限维部分的常微分方程系统:

$$\dot{z}^N(t) = Az^N(t) + F^N[z(t)] + \tilde{B}u(t), \tag{12}$$

其中 $F^N[z] := \operatorname{col}\{F_j[z]\}_{j=1}^{N}, u(t) := \operatorname{col}\{u_j(t)\}_{j=1}^{N},$

$$A := \operatorname{diag}\{-\lambda_1 D + Q, \ldots, -\lambda_N D + Q\}, \tag{13}$$

且 $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{3N\times N}$ 由下式给出

$$\tilde{B} := \operatorname{col}\{B\mathcal{B}_1, \ldots, B\mathcal{B}_N\} = \left(I_N \otimes B\right)\mathcal{B}_{N\times N}.$$

通过调用 Hautus 引理，容易看出，在假设 3 下，˜对 (*A*, *B*) 是可稳定化的。根据 (12) 和 (13)，一种直接的控制策略是寻找控制器增益 $K \in \mathbb{R}^{1\times 3N}$，使得 $\tilde{A} + \tilde{B}K$ 为 Hurwitz 矩阵。不幸的是，当 N较大时，这种方法的计算开销很高。为此，我们提出利用系统的三角结构和不同的扩散系数，对有限维部分 (12) 施加适当的变换。这类变换最初在 [18], [19, 第 3] 章的一般情形中提出，并在 [16] 中用于通过模态分解解决具有一个受控状态的 m 耦合线性偏微分方程的稳定化问题。其中的变换受一个广义 Sylvester 方程约束，其解已被显式给出。该变换大大简化了控制器增益的设计，将其归结为维数为 3 的线性矩阵不等式，而不是 $3N$（有限维部分的大小）。这是通过稳定化反应矩阵 $Q_0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$的相应分量实现的，与上文介绍的直接方法形成对比。有关此类变换的更多细节见 [15]。

因此，我们应用变换

$$y_n = T_n z_n, \quad n \geq 1 \tag{14}$$

到系统（11），其中 $T_n \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 由下式给出

$$T_n = \begin{cases} I_3 + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & 1 \leq n \leq N, \\ I_3, & n \geq N+1 \end{cases}, \tag{15}$$

其中

$$\kappa := \frac{d_3 - d_2}{q_{2,1}}. \tag{16}$$

注意，$\mathcal{T} := (T_n)_{n=1}^{+\infty} : \ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R}^3) \to \ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R}^3)$ 是一个有界算子，且其逆算子有界。T_n的逆算子为

$$T_n^{-1} = \begin{cases} I_3 - \lambda_n \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & 1 \leq n \leq N, \\ I_3, & n \geq N+1 \end{cases}. \tag{17}$$

此外，

$$\max_{n\in\mathbb{N}} |T_n^{-1}|, \max_{n\in\mathbb{N}} |T_n| \leq \sigma_N := 1 + |\kappa|\lambda_N. \tag{18}$$

请注意，这种变换最早出现在 [16] 中，用于稳定化一个由 m 个线性抛物型偏微分方程组成的级联系统。在该研究中还证明，当不同扩散系数的数量较大时，要构造三角形式（15）的变换 T_n 会更加复杂。对于情形 $m = 3$ 和 $d_2 = d_3$，T_n 化为单位矩阵。因此，本文主要关注 $d_2 \neq d_3$ 的情形。

根据上述变换并回顾式（2），我们将新系统（包括有限维部分和尾部）写为：

$$\begin{cases} \dot{y}_n(t) = (-\lambda_n d_3 I_3 + Q_0 + BG_n + J_n)\, y_n(t) + B\mathcal{B}_n^\top \times \\ \qquad \operatorname{col}\{u_j\}_{j=1}^N + T_n F_n \left[\sum_{k=1}^{+\infty} T_k^{-1} y_k(t)\varphi_k\right], \ n \leq N, \\ \dot{y}_n(t) = (-\lambda_n D + Q)\, y_n(t) + F_n \left[\sum_{k=1}^{+\infty} T_k^{-1} y_k(t)\varphi_k\right] \\ \qquad + B\mathcal{B}_n^\top \operatorname{col}\{u_j\}_{j=1}^N, \ n \geq N+1 \end{cases} \tag{19}$$

其中，$\mathcal{B}_n$ 由（6）给出，并且

$$\begin{aligned} J_n &= T_n Q_1 T_n^{-1}, \\ G_n &= \begin{pmatrix} \lambda_n(d_2 - d_1) & \lambda_n^2 \kappa\,(d_1 - d_3) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

为了获得 $t \geq 0$ 的闭环系统描述，我们引入以下记号

$$\begin{aligned} &y^N(t) = \operatorname{col}\{y_j(t)\}_{j=1}^N \in \mathbb{R}^{3N}, \ \mathcal{J}_N = \operatorname{diag}\{J_j\}_{j=1}^N, \\ &\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_j\}_{j=1}^N, \ \mathcal{G}_N = \operatorname{diag}\{G_j\}_{j=1}^N, \\ &F_j(t) = F_j\left[\sum_{k=1}^{+\infty} T_k^{-1} y_k(t)\varphi_k\right], \ j \geq 1 \end{aligned} \tag{21}$$

并将（19）表示如下：

$$\begin{aligned} \dot{y}^N(t) &= (-d_3\Lambda \otimes I_3 + I_N \otimes Q_0 + (I_N \otimes B)\,\mathcal{G}_N)\, y^N(t) \\ &\quad + \mathcal{J}_N y^N(t) + (I_N \otimes B)\,\mathcal{B}_{N\times N} \operatorname{col}\{u_j\}_{j=1}^N \\ &\quad + \operatorname{col}\{T_j F_j(t)\}_{j=1}^N, \\ \dot{y}_n(t) &= (-\lambda_n D + Q)\, y_n(t) + F_n(t) \\ &\quad + B\mathcal{B}_n^\top \operatorname{col}\{u_j\}_{j=1}^N, \quad n \geq N+1. \end{aligned} \tag{22}$$

由于（Q_0，B）可稳定化，我们进一步选择 $K_0 \in \mathbb{R}^{1\times 3}$，使得 $Q_0 + BK_0$ 为 Hurwitz 矩阵。随后，我们提出如下形式的控制律

$$\begin{aligned} &\operatorname{col}\{u_j\}_{j=1}^N = \mathcal{B}_{N\times N}^{-1}\,[-\mathcal{G}_N + K]\, y^N(t), \\ &K = \operatorname{diag}\{K_j\}_{j=1}^N \in \mathbb{R}^{N\times 3N}, \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $K_j \in \mathbb{R}^{1\times 3}$、$1 \leq j \leq N$ 稍后给出。将（23）代入（22），可得闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{y}^N(t) &= (-d_3\Lambda \otimes I_3 + I_N \otimes Q_0 + (I_N \otimes B)\,K)\, y^N(t) \\ &\quad + \mathcal{J}_N y^N(t) + \operatorname{col}\{T_j F_j(t)\}_{j=1}^N, \\ \dot{y}_n(t) &= (-\lambda_n D + Q)\, y_n(t) + F_n(t) \\ &\quad + B\mathcal{B}_n^\top \mathcal{B}_{N\times N}^{-1}\,[-\mathcal{G}_N + K]\, y^N(t), \quad n \geq N+1. \end{aligned} \tag{24}$$

然后，注意到

$$I_N \otimes Q_0 + (I_N \otimes B)\,K = \operatorname{diag}\{Q_0 + BK_j\}_{j=1}^N$$

并考虑到 $Q_0 + BK_0$ 为 Hurwitz 矩阵，最终我们按如下方式选择增益 K_j：

$$\begin{aligned} &K_j = \gamma^4 K_0 \Gamma^{-1}; \quad \Gamma = \operatorname{diag}\{\gamma^3, \gamma^2, \gamma\} \\ &\Rightarrow K = \gamma^4 \left(I_N \otimes \left[K_0\Gamma^{-1}\right]\right). \end{aligned} \tag{25}$$

这里，$\gamma \geq 1$ 是一个高增益调节参数，稍后确定。将（25）代入（24），我们将所有 $t \geq 0$ 对应的闭环系统改写如下：

$$\begin{aligned} \dot{y}^N(t) &= \left(-d_3\Lambda \otimes I_3 + I_N \otimes \left[Q_0 + \gamma^4 BK_0\Gamma^{-1}\right]\right) y^N(t) \\ &\quad + \mathcal{J}_N y^N(t) + \operatorname{col}\{T_j F_j\}_{j=1}^N, \\ \dot{y}_n(t) &= (-\lambda_n D + Q)\, y_n(t) + F_n + B\mathcal{B}_n^\top \mathcal{B}_{N\times N}^{-1} \times \\ &\quad \left(-\mathcal{G}_N + \gamma^4 \left(I_N \otimes \left[K_0\Gamma^{-1}\right]\right)\right) y^N(t), \quad n \geq N+1. \end{aligned}$$

注 4：在式（25）中引入高增益控制器，是受到非线性有限维系统高增益控制的启发。在这类系统中，三角系统稳定化通过将系统线性部分的稳定化与高增益相结合来实现，而高增益用于补偿非线性项。与有限维系统不同，在我们的情形下，高增益参数也会显式地出现在无限维尾部中，并通过非线性项影响尾部（见式（38））。这使稳定性分析更具挑战性，也使得在证明所推导线性矩阵不等式的可行性保证时，对 γ 的选择需要更加审慎。还需注意，高增益方法最初是在 *[19]* 中，针对耦合偏微分方程的观测器背景下扩展到无限维情形的。

最后，我们针对以下内容引入如下变量变换：

有限维部分：

$$\begin{aligned}&\bar{F}_j(t)=\Gamma^{-1}T_jF_j(t),\quad \bar{y}_j=\Gamma^{-1}y_j,\quad \overline{J}_n=\Gamma^{-1}J_n\Gamma,\\&\bar{y}^N(t)=\operatorname{col}\{\bar{y}_j\}_{j=1}^N=(I_N\otimes\Gamma^{-1})y^N(t),\\&\bar{F}^N(t)=\operatorname{col}\left\{\bar{F}_j(t)\right\}_{j=1}^N,\quad \overline{\mathcal{J}}_N=\operatorname{diag}\left\{\overline{J}_j\right\}_{j=1}^N.\end{aligned}\tag{26}$$

回顾备注1，我们发现

$$\begin{aligned}&\overline{F}_j(t)=\gamma^{-3}F_j(t),\quad 1\le j\le N,\\&\Rightarrow\overline{F}^N(t)=\gamma^{-3}F^N(t).\end{aligned}\tag{27}$$

因此，我们得到关于 $\bar{y}_n(t)$ $1\le n\le N$和 $t\ge0$ 的以下常微分方程：

$$\begin{aligned}\dot{\bar{y}}_n(t)&=\Gamma^{-1}\left[-d_3\lambda_nI_3+Q_0+\gamma^4BK_0\Gamma^{-1}\right]\Gamma\bar{y}_n(t)\\&\quad+\overline{J}_ny_n(t)+\bar{F}_n(t)\\&=\left[-d_3\lambda_nI_3+\gamma Q_0+\gamma^4\Gamma^{-1}BK_0+\overline{J}_n\right]\bar{y}_n(t)+\gamma^{-3}F_n(t)\\&=\left[-d_3\lambda_nI_3+\gamma\left(Q_0+BK_0\right)+\overline{J}_n\right]\bar{y}_n(t)+\gamma^{-3}F_n(t).\end{aligned}$$

考虑后者后，我们得到关于 $t\ge0$ 的以下闭环系统：

$$\begin{aligned}\dot{\bar{y}}^N(t)&=\left(-d_3\Lambda\otimes I_3+\gamma I_N\otimes[Q_0+BK_0]\right)\bar{y}^N(t)\\&\quad+\overline{\mathcal{J}}_N\bar{y}^N(t)+\gamma^{-3}F^N(t),\\\dot{y}_n(t)&=\left(-\lambda_nD+Q\right)y_n(t)+F_n+B\mathcal{B}_n^{\top}\mathcal{B}_{N\times N}^{-1}\times\\&\quad\left(-\mathcal{G}_N+\gamma^4\left(I_N\otimes\left[K_0\Gamma^{-1}\right]\right)\right)\\&\quad\times(I_N\otimes\Gamma)\bar{y}^N(t),\quad n\ge N+1.\end{aligned}\tag{28}$$

回顾式（2）和式（20）中的 J_n，可以验证，对于 $1\le n\le N$

$$\overline{J}_n=\begin{pmatrix}q_{1,1}&\frac{q_{1,2}+\lambda_n\kappa(q_{2,2}-q_{1,1})}{\gamma}&\frac{q_{1,3}+\lambda_n\kappa q_{2,3}}{\gamma^2}\\0&q_{2,2}&\frac{q_{2,3}}{\gamma}\\0&0&q_{3,3}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left|\overline{\mathcal{J}}_N\right|=\max_{1\le n\le N}\left|\overline{J}_n\right|\le\max_{1\le i\le3}|q_{i,i}|+O\left(\frac{\lambda_N}{\gamma}\right).\tag{29}$$

Set

$$\overline{\mathcal{G}}_N=\mathcal{G}_N(I_N\otimes\Gamma)=\operatorname{diag}\{G_j\Gamma\}_{j=1}^N\in\mathbb{R}^{N\times3N}.\tag{30}$$

容易验证，式（20）意味着

$$\gamma^{-4}\left|\overline{\mathcal{G}}_N\right|=\gamma^{-4}\max_{1\le j\le N}|G_j\Gamma|\le\xi_{N,\gamma},\tag{31}$$

$$\xi_{N,\gamma}=\max\left(\frac{\lambda_N\left|d_2-d_1\right|}{\gamma},\left(\frac{\lambda_N}{\gamma}\right)^2\left|\kappa(d_1-d_3)\right|\right)$$

利用式（28）和式（30），我们将闭环系统写为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{y}}^N(t)&=\left(-d_3\Lambda\otimes I_3+\gamma I_N\otimes[Q_0+BK_0]\right)\bar{y}^N(t)\\&\quad+\overline{\mathcal{J}}_N\bar{y}^N(t)+\gamma^{-3}F^N(t),\\\dot{y}_n(t)&=\left(-\lambda_nD+Q\right)y_n(t)+F_n(t)+B\mathcal{B}_n^{\top}\mathcal{B}_{N\times N}^{-1}\times\\&\quad\left(-\overline{\mathcal{G}}_N+\gamma^4I_N\otimes K_0\right)\bar{y}^N(t),\quad n\ge N+1.\end{aligned}\tag{32}$$

在进行 L^2 稳定性分析之前，考虑到 f的利普希茨性质，并假设 $z^0(\cdot)\in H^1\left(0,L;\mathbb{R}^3\right)$，我们可以采用经典论证（例如参见 [4], [23]），证明带有控制律 (23)、(25) 的闭环系统 (1) 存在唯一解 $z(\cdot,\cdot)$，且该解属于 $C^1\left([0,T];L^2\left(0,L;\mathbb{R}^3\right)\right)$ 对某个 $T>0$成立，其中 $z(\cdot,x)$在 $t=0$上连续。结合标准的自举论证，下面的稳定性分析进而保证，对于受稳定化控制器控制的闭环系统解，有 $T=+\infty$。

对于闭环系统 (28) 的 L^2-稳定性分析，我们引入 Lyapunov 泛函 $\mathcal{V}$：$L^2\left(0,L;\mathbb{R}^3\right)\to\mathbb{R}_{\ge0}$作用于 $y(t,\cdot)=\sum_{n=1}^{+\infty}y_n(t)\phi_n(\cdot)$（其中 $y_j=\Gamma\bar{y}_j,j=1,\dots,N$），并定义为：

$$\mathcal{V}[y]:=\frac{1}{2}(\bar{y}^N)^{\top}\bar{P}\bar{y}^N+\frac{\rho}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}|y_n|^2,\tag{33}$$

其中 $0<\rho$ 和 $\bar{P}=I_N\otimes P$ 满足 $0\prec P\in\mathbb{R}^{3\times3}$。注意，借助式 (15) 中的变换 T_n，闭环系统 (28) 中的每个块 $-d_3\lambda_nI_3+\gamma(Q_0+BK_0)$ $n=1,\dots,N$ 都将通过李雅普诺夫矩阵 P 同时得到稳定。事实上，P 通过增益 K_0 稳定矩阵 Q_0，而 $-d_3\lambda_nI_3P\prec0$ 对所有 n 均成立。特别地，P 与 N 无关。

我们定义 $V(t):=\mathcal{V}[y](t)$ $\forall t\in[0,T)$。那么，存在常数$\underline{c}$，$\overline{c}>0$，使得

$$\underline{c}\|z(t,\cdot)\|_{L^2}^2\le V(t)\le\overline{c}\|z(t,\cdot)\|_{L^2}^2,\quad t\in[0,T).\tag{34}$$

事实上，回顾式 (25) 中的 Γ，其中 $\gamma\ge1$，可得

$$\begin{aligned}V(t)&\le\frac{\sigma_{max}(P)}{2}\left|\bar{y}^N(t)\right|^2+\frac{\rho}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}|y_n(t)|^2\\&\overset{(26)}{\le}\max\left(\frac{\sigma_{max}(P)}{2\gamma^2},\frac{\rho}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}|y_n(t)|^2\\&\le\max\left(\frac{\sigma_{max}(P)}{2\gamma^2},\frac{\rho}{2}\right)\sigma_N^2\sum_{n=1}^{\infty}|z_n(t)|^2\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由式 (14)-(18) 得出。令 $\overline{c}=\max\left(\frac{\sigma_{max}(P)2\gamma^2}{2},\frac{\rho}{2}\right)\sigma_N^2$，并应用 Parseval等式，可得式 (34) 中的上界。通过类似的论证，可以确定下界 $\underline{c}=\min\left(\frac{\sigma_{min}(P)2\gamma^6}{2},\frac{\rho}{2}\right)\sigma_N^{-2}$。

备注 5：注意，推导得到的常数 $\underline{c},c$ 以及下文的李雅普诺夫分析表明，式 (8) 中的 M 取决于高增益参数 γ 的幂次。因此，较大的 γ可能导致系统瞬态行为出现显著超调。这种现象在高增益控制器设计中广为人知。

沿着闭环系统 (32) 的解，在 $(0,T)$ 上对 $V(t)$ 求导，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&=(\bar{y}^N(t))^{\top}\left[-d_3\Lambda\otimes P+\bar{P}\overline{\mathcal{J}}_N+\gamma I_N\otimes\right.\\&\left.\operatorname{Sym}\left(P\left[Q_0+BK_0\right]\right)\right]\bar{y}^N(t)+\gamma^{-3}(\bar{y}^N(t))^{\top}\bar{P}F^N(t)\\&+\rho\sum_{n=N+1}^{+\infty}y_n^{\top}(t)\left(-\lambda_nD+\operatorname{Sym}\left(Q\right)\right)y_n(t)\\&+\rho\sum_{n=N+1}^{+\infty}y_n^{\top}(t)\left[F_n(t)+\gamma^4B\mathcal{B}_n^{\top}\mathcal{Q}_{N\times N}\bar{y}^N(t)\right],\end{aligned}\tag{35}$$

其中

$$\mathcal{Q}_{N\times N,\gamma}:=\mathcal{B}_{N\times N}^{-1}\left(-\gamma^{-4}\overline{\mathcal{G}}_N+I_N\otimes K_0\right).\tag{36}$$

满足

$$|\mathcal{Q}_{N\times N,\gamma}| \overset{(31)}{\leq} \left|\mathcal{B}_{N\times N}^{-1}\right| \left[\xi_{N,\gamma} + |K_0|\right]. \tag{37}$$

令 $\alpha_0 > 0$。根据杨氏不等式，有

$$\rho \sum_{n=N+1}^{\infty} y_n^\top(t) F_n(t) \leq \frac{\rho}{2\alpha_0} \sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n(t)|^2 - \frac{\alpha_0\rho}{2}\left|F^N(t)\right|^2 + \frac{\alpha_0\rho}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|F_n(t)|^2$$

进一步应用 Parseval等式，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}|F_n(t)|^2 = \int_0^L \left|F\left[\sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-1} y_n(t)\phi_n(x)\right]\right|^2 dx \\
&\overset{(4),(21)}{\leq} \ell_1 \int_0^L \left|\sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-1} y_n(t)\phi_n(x)\right|^2 dx \\
&= \ell_1 \sum_{n=1}^{\infty}\left|T_n^{-1} y_n(t)\right|^2 \overset{(26)}{=} \ell_1 \sum_{n=1}^{N}\left|T_n^{-1}\Gamma\overline{y}_n(t)\right|^2 \\
&+ \ell_1 \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|T_n^{-1} y_n(t)\right|^2 \overset{(26)}{=} \ell_1 \left(\bar{y}^N(t)\right)^\top \mathcal{M}_{N,\gamma}\bar{y}^N(t) \\
&+ \ell_1 \sum_{n=N+1}^{\infty}|y_n(t)|^2,
\end{aligned} \tag{38}$$

其中$\mathcal{M}_{N,\ \gamma}$是对称矩阵

$$\mathcal{M}_{N,\gamma} = \operatorname{diag}\left\{\Gamma T_j^{-\top} T_j^{-1}\Gamma\right\}_{j=1}^{N} \prec \gamma^6\sigma_N^2 I_{3N}, \tag{39}$$

其中，上述界由 (18) 可直接推出。类似地，对于某个 $\alpha_1 > 0$,

$$\gamma^4 \sum_{n=N+1}^{\infty} y_n^\top(t) B\mathcal{B}_n^\top \mathcal{Q}_{N\times N,\gamma}\bar{y}^N(t) \leq \frac{1}{2\alpha_1}\sum_{n=N+1}^{\infty}|y_n(t)|^2 + \frac{\alpha_1\gamma^8}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|B\mathcal{B}_n^\top \mathcal{Q}_{N\times N,\gamma}\bar{y}^N(t)\right|^2, \tag{40}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|B\mathcal{B}_n^\top \mathcal{Q}_{N\times N,\gamma}\bar{y}^N(t)\right|^2 = \left(Q_{N\times N,\gamma}\bar{y}^N(t)\right)^\top \times \\
&\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\mathcal{B}_n B^\top B\mathcal{B}_n^\top\right)\left(Q_{N\times N,\gamma}\bar{y}^N(t)\right) \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{N+1}^{\infty}|b_{m,n}|^2\right)\left|Q_{N\times N,\gamma}\bar{y}^N(t)\right|^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{N}\left[\|b_k\|_{L^2}^2 - |\mathcal{B}_k|^2\right]\right)\left|Q_{N\times N,\gamma}\bar{y}^N(t)\right|^2.
\end{aligned} \tag{41}$$

最后，设 $\delta > 0$ 为期望的衰减率，并且

$$\eta(t) = \operatorname{col}\left\{\bar{y}^N(t), F^N(t)\right\}.$$

由（35）至（41）可得

$$\dot{V}(t) + 2\delta V(t) \leq \eta(t)^\top \Phi\eta(t) \tag{42}$$

$$+\rho\sum_{n=N+1}^{\infty} y_n^\top(t) W_n y_n(t) \leq 0 \tag{43}$$

若满足

$$\begin{aligned}
W_n &:= -\lambda_n D + \operatorname{Sym}(Q) + \delta I_3 \\
&\quad + \left[\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{\alpha_0\ell_1}{2} + \frac{1}{2\alpha_1}\right] I_3 \prec 0,\ n > N \\
\Phi &= \begin{bmatrix}\phi & \gamma^{-3}\bar{P} \\ * & -\frac{\alpha_0\rho}{2} I_{3N}\end{bmatrix} \prec 0,
\end{aligned} \tag{44}$$

where $\bar{P} = I_N \otimes P$ and

$$\begin{aligned}
\phi &= -d_3\Lambda\otimes P + \gamma I_N \otimes \operatorname{Sym}\left(P\left[Q_0 + BK_0 + \frac{\delta}{\gamma}I_3\right]\right) \\
&+ \frac{\alpha_0\rho\ell_1}{2}\mathcal{M}_{N,\gamma} + \bar{P}\overline{\mathcal{J}}_N \\
&+ \frac{\alpha_1\rho\gamma^8}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}\left[\|b_k\|_{L^2}^2 - |\mathcal{B}_k|^2\right]\right)\mathcal{Q}_{N\times N,\gamma}^\top \mathcal{Q}_{N\times N,\gamma}.
\end{aligned}$$

由 λ_n 的单调性可得，对于所有 $n \geq N+1$，均有 $W_n \leq W_{N+1}$。根据舒尔补，$W_{N+1} \prec 0$ 当且仅当

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{N+1}D + \operatorname{Sym}(Q) + \frac{\alpha_0\ell_1}{2}I_3 & I_3 & I_3 \\ * & -2\alpha_0 I_3 & 0 \\ * & * & -2\alpha_1 I_3 \end{bmatrix} \prec 0. \tag{45}$$

综上，我们得到本文的主要结果：

定理 1：考虑系统 (1)，其中 $f_2 \equiv f_3 \equiv 0$，满足假设 1-3，并采用控制律 (23)、(25)，其中 K_0 使得 $Q_0 + BK_0$ 为 Hurwitz，$\gamma > 1$ 是一个高增益调节参数，且 $N \in \mathbb{N}$。假设初始条件 $z^0(\cdot) \in H^1\left(0, L;\ \mathbb{R}^3\right)$ 满足相应的边界条件。令 $\delta > 0$ 为期望的衰减率。给定 N 和 ρ，$\gamma > 0$，假设存在一个矩阵 $0 \prec P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 及标量 α_0，$\alpha_1 > 0$，使得 $\Phi \prec 0$（其中 Φ 由 (44) 给出）和 (45) 成立。则 (1) 在控制律 (23)、(25) 作用下的解 z 指数稳定，衰减率为 δ，即 (8) 在 M 依赖于 γ 的多项式函数时成立。此外，当 N 和 γ 足够大时，线性矩阵不等式 $\Phi \prec 0$ 和 (45) 总是可行。

证明：线性矩阵不等式 (44) 和 (45) 的可行性意味着

$$\dot{V}(t) + 2\delta V(t) \leq 0 \Rightarrow V(t) \leq e^{-2\delta t}V(0),\ \forall t \in [0, T).$$

借助上述估计，我们可以将解延拓到整个 $\mathbb{R}_{\geq 0}$（这意味着 $T = +\infty$），因此上述稳定性估计对所有 $t \geq 0$ 均成立。将后者与 (34) 结合即可得到 (8)。

接下来，我们证明当 N和 γ足够大时，线性矩阵不等式 (44) 和 (45) 的可行性。回想一下，$Q_0 + BK_0$ 是 Hurwitz 的，首先选择 $P \succ 0$，使得 Sym($P(Q_0 + BK_0)$) $= -I_3$。注意，对于这一选择，Lyapunov 泛函 (33) 中的 $P = I_N \otimes P$ 满足 $\left|\bar{P}\bar{P}^\top\right| = \left|PP^\top\right|$，且与 N 及

γ 无关。令 $\rho=\gamma^{-7}$，可得

$$\begin{aligned}\phi=&-d_3\Lambda\otimes P-\gamma\left[I_{3N}-\frac{\delta}{\gamma}I_N\otimes P\right]+\frac{\alpha_0\ell_1}{2\gamma^7}\mathcal{M}_{N,\gamma}\\&+\frac{\alpha_1\gamma}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}\left[\|b_k\|^2-|\mathcal{B}_k|^2\right]\right)\mathcal{Q}_{N\times N,\gamma}^{\top}\mathcal{Q}_{N\times N,\gamma}+\bar{P}\overline{\mathcal{J}}_N\\&\overset{(7),(37),(39)}{\preceq}\gamma\left[-I_{3N}+\frac{\alpha_1\eta\lambda_{N+1}^{\beta}\left[\xi_{N,\gamma}+|K_0|\right]^2}{2}I_{3N}\right.\\&\left.-\frac{d_3}{\gamma}\Lambda\otimes P+\frac{\alpha_0\ell_1\sigma_N^2}{2\gamma^2}I_{3N}+\frac{\delta}{\gamma}I_N\otimes P+\frac{1}{\gamma}\bar{P}\overline{\mathcal{J}}_N\right]\end{aligned}\tag{46}$$

其中 $\xi_{N,\,\gamma}$ 及其上界由 (31) 给出，且 $\overline{\mathcal{J}}_N$满足 (29)，因此

$$\frac{1}{\gamma}\left|\bar{P}\overline{\mathcal{J}}_N\right|\le\frac{1}{\gamma}|P|\left(\max_{1\le i\le 3}|q_{i,i}|+O\left(\frac{\lambda_N}{\gamma}\right)\right)=O\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

接下来，考虑 Φ 在 (44) 中的情形。由于 $-\frac{\alpha_0\rho}{2}I_{3N}=-\frac{\alpha_0}{2\gamma^7}I_{3N}\prec 0$，由舒尔补和 (46) 可知，若满足以下条件，则线性矩阵不等式 (44) 和 (45) 可行:

$$\begin{aligned}&-\lambda_{N+1}D+\mathrm{Sym}\left(Q\right)+\left[\frac{1}{2\alpha_0}+\frac{\alpha_0\ell_1}{2}+\frac{1}{2\alpha_1}\right]I_3\prec 0,\\&\phi+\gamma^{-6}\bar{P}\left[\frac{2\gamma^7}{\alpha_0}I_{3N}\right]\bar{P}^{\top}\\&\overset{(46)}{\prec}\gamma\left[-I_{3N}+\frac{\alpha_1\eta\lambda_{N+1}^{\beta}\left[\xi_{N,\gamma}+|K_0|\right]^2}{2}I_{3N}+\frac{2}{\alpha_0}\bar{P}\bar{P}^{\top}\right.\\&\left.-\frac{d_3}{\gamma}\Lambda\otimes P+\frac{\alpha_0\ell_1\sigma_N^2}{2\gamma^2}I_{3N}+\frac{\delta}{\gamma}I_N\otimes P+\frac{1}{\gamma}\bar{P}\overline{\mathcal{J}}_N\right]\prec 0.\end{aligned}\tag{47}$$

回顾 (7)，并令 $\beta_1\in(\beta,1)$。设 $\alpha_0=\alpha_1^{-1}=\lambda_{N+1}^{\beta_1}$。代入 (47) 的第一个条件，得到

$$-\lambda_{N+1}D+\mathrm{Sym}\left(Q\right)+\frac{1}{2}\left[\lambda_{N+1}^{-\beta_1}+\left(\ell_1+1\right)\lambda_{N+1}^{\beta_1}\right]I_3\prec 0.\tag{48}$$

由于 $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$，当 N_* 足够大时，后者对所有满足 $N\ge N_*$ 的情形均成立。令 $N\ge N_*$，并考虑 (47) 第二个条件中的中间项，其表达式为

$$\begin{aligned}&\gamma\left[\left(-1+\frac{\eta\left[\xi_{N,\gamma}+|K_0|\right]^2}{2\lambda_{N+1}^{\beta_1-\beta}}+\frac{\lambda_{N+1}^{\beta_1}\ell\sigma_N^2}{2\gamma^2}\right)I_{3N}\right.\\&\left.-\frac{d_3}{\gamma}\Lambda\otimes P+\frac{2}{\lambda_{N+1}^{\beta_1}}\bar{P}\bar{P}^{\top}+\frac{\delta}{\gamma}I_N\otimes P+\frac{1}{\gamma}\bar{P}\overline{\mathcal{J}}_N\right]\prec 0.\end{aligned}\tag{49}$$

考虑到$\left[\xi_{N,\gamma}+|K_0|\right]^2\le 2\xi_{N,\,\gamma}^2+2\left|K_0\right|^2$，其中 K_0 为固定值，我们取足够大的 $N\ge N_*$，使得

$$S:=\left(-1+\frac{\eta\left|K_0\right|^2}{\lambda_{N+1}^{\beta_1-\beta}}\right)I_{3N}+\frac{2}{\lambda_{N+1}^{\beta_1}}\bar{P}\bar{P}^{\top}\prec 0.\tag{50}$$

这里，我们利用 $0<\beta<\beta_1$ 以及 $\left|\bar{P}\bar{P}^{\top}\right|=\left|PP^{\top}\right|$与 N 和 γ无关这一事实。接下来，由 (31) 可知，对于固定的 N，有 $\lim_{\gamma\to+\infty}\xi_{N,\gamma}=0$；而根据 (29)，可得 $\lim_{\gamma\to+\infty}\gamma^{-1}\left|\bar{P}\overline{\mathcal{J}}_N\right|=0$。因此，固定我们的 N，有存在 $\gamma_0>0$，使得对所有 $\gamma>\gamma_0$

$$S+\left(\frac{\eta\xi_{N,\gamma}^2}{\lambda_{N+1}^{\beta_1-\beta}}+\frac{\lambda_{N+1}^{\beta_1}\ell_1\sigma_N^2}{2\gamma^2}\right)I_{3N}+\frac{\delta}{\gamma}I_N\otimes P+\frac{1}{\gamma}\bar{P}\overline{\mathcal{J}}_N\prec 0.$$

由于对于所有 $\gamma>0$ 都有 $-\frac{d_3}{\gamma}\Lambda\otimes P\prec 0$，因此通过将 $\gamma>0$ 取足够大，并考虑到 (50)，可得到 (49)。因此，(47) 成立，证明完毕。■

备注 6：定理 1 的证明可通过更经典（但更保守）的方法，得到能够保持闭环系统稳定性的 N 和 γ 的估计。具体而言，首先可以找到增益 K_0，使矩阵 Q_0 稳定，并使 $P\succ 0$ 满足 Sym $(P(Q_0+BK_0))\prec 0$。其次，可由不等式 (48) 得到执行器数量 N。给定 N，通过确保 (49) 和 (50) 成立，可以估计 γ 的下界。

IV. 数值示例

考虑系统 (1)，其中 $f_2\equiv f_3\equiv 0$、$L=1$，且满足狄利克雷边界条件（即 $\gamma_{12}=\gamma_{22}=0$）。在此情形下，特征值和特征函数分别为 $\lambda_n=\pi^2n^2$ 和 $\varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin(\pi nx)$ $n\ge 1$。我们进一步选择 $N=5$、示性函数 $b_j=\chi_{\left[\frac{j-1}{5},\frac{j}{5}\right)}$ $j=1$、…、5（从而使 (6) 中的 $\mathcal{B}_{N\times N}$ 可逆），并且

$$D=\mathrm{diag}\left\{2,2.5,3\right\},\quad q_{2,1}=q_{3,2}=1,\quad Q_1=0.$$

随后，我们验证定理1中衰减率为 $\delta=1$、稳定化增益为 Q_0 时的线性矩阵不等式，其中增益由下式给出

$$K_0=\begin{pmatrix}-3.708 & -26.329 & -2.222\end{pmatrix}$$

并在网格上选取调节参数 γ 和 ρ，从而得到一个 Lipschitz 常数 ℓ_1，使线性矩阵不等式保持可行。结果表明，当 $\ell_1=15$ 时，线性矩阵不等式可行，相应的调节参数为

$$\gamma=5,\quad \rho=1.24\cdot 10^{-4}.$$

请注意，满足可行性的 Lipschitz 常数值较大。这一数值仿真展示了所提方法的有效性。

V. 结论

本文提出了一种新方法，用于对通过反应矩阵和 Lipschitz 非线性相互连接的抛物型偏微分方程系统进行指数稳定化。该方法包括三个步骤：模态分解、将模态常微分方程变换为等效目标系统，以及设计用于补偿非线性的高增益状态反馈控制器。未来研究可探讨其他类型的抛物型偏微分方程及更一般的互连形式。

参考文献

[1] N. Kopell 和 L. N. Howard，《反应扩散方程的平面波解》，《应用数学研究》，第 52 卷第 4 期，第 291–328 页，1973年。[2] A. Okubo 和 S. A. Levin，《扩散与生态问题：现代视角》。Springer，2001年，第 14 卷。[3] D. Ruiz-Balet 和 E. Zuazua，《生物学与社会科学中反应扩散模型的控制》，Mathematical Control and Related Fields，第 12 卷第 4 期，第 955–1038 页，2022年。

[4] M. Pierre，《反应扩散系统中的整体存在性与质量控制：综述》，Milan Journal of Mathematics，第 78 卷，第 455 页，2010年，417pp. – .[5] O. Gallinato 、 T. Colin 、 O. Saut 和 C. Poignard，《导管癌肿瘤生长模型：从原位阶段到间质侵袭》，Journal of Theoretical Biology，第 429 卷，第 253–266 页，2017年。[6] W.-H. Chen、L. Liu 和 X. Lu，《采用 Razumikhin 技术的混合时滞反应扩散神经网络间歇同步》，Nonlinear Dynamics，第 87 卷，第 535–551 页，2017年。[7] F. Jiang、G. Li 和 J. Zhu，《关于核反应堆中产生的半线性反应扩散系统》，Applicable Analysis，第 93 卷第 12 期，第 2608–2624 页，2014年。[8] R. Katz 和 E. Fridman，《一维抛物型偏微分方程有限维观测器反馈控制的构造方法》，Automatica，第 122 卷，109285 页，2020年。[9] G. Hagen 和 I. Mezic，《耗散演化方程有限维控制与观测器设计中的溢出稳定化》，SIAM Journal on Control and Optimization，第 42 卷第 2 期，第 746–768 页，2003年。[10] C. Fabre、J.-P. Puel 和 E. Zuazua，《半线性热方程的近似能控性》，Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics，第 125 卷第 1 期，第 31–61 页，1995年。[11] P. D. Christofides，《抛物型偏微分方程系统的鲁棒控制》，Chemical Engineering Science，第 53 卷第 16 期，第 2949–2965 页，1998年。[12] J.-M. Coron 和 E. Tr´elat，《一维半线性热方程的全局稳态能控性》，SIAM Journal on Control and Optimization，第 43 卷第 2 期，第 549–569 页，2004年。[13] F. Ammar-Khodja、A. Benabdallah、M. Gonz´alez Burgos 和 M. d. l. L. d. Teresa de Oteyza，《线性耦合抛物型问题可控性的最新成果：综述》，Mathematical Control and Related Fields，1 (3)，267-306.，2011年。[14] J. Lions，《关于不完全数据系统控制的初步说明》，载于《微分方程与应用大会论文集》（CEDYA），马拉加大学，1989年，第 43–54 页。[15] C. Kitsos 和 E. Fridman，《通过分布式驱动或边界驱动稳定化欠驱动线性耦合反应扩散偏微分方程》，审稿中（开放获取：https://arxiv.org/abs/2206.01977），2022年。[16] ——，《通过模态分解实现欠驱动线性抛物型系统的内部稳定化》，载于第 25 届数学网络与系统理论国际研讨会（MTNS），2022年，（扩展版本开放获取：https://arxiv.org/abs/2202.08801）。[17] R. Katz 和 E. Fridman，《通过模态分解和直接李雅普诺夫方法实现一维半线性热方程的全局稳定化》，Automatica，第 149 卷，110809 页，2023年。[18] C. Kitsos，博士学位论文，格勒诺布尔-阿尔卑斯大学，法国。[19] C. Kitsos、G. Besanc¸on 和 C. Prieur，《若干半线性反应扩散系统的高增益观测器设计：一种基于变换的方法》，IEEE Control Systems Letters，第 5 卷，634，2020年 2，629 no. pp. – .[20] H. K. Khalil，《非线性反馈控制中的高增益观测器》。SIAM，2017年。[21] R. Katz 和 E. Fridman，《通过模态分解实现 Kuramoto–Sivashinsky 方程的区域稳定化》，IEEE Control Systems Letters，第 6 卷，第 1814–1819 页，2022年。[22] Y. Orlov，《有限维与无限维中的非光滑李雅普诺夫分析》。Springer，2020年。[23] A. Pazy，《线性算子半群及其在偏微分方程中的应用》。Springer New York，1983年，第 44 卷。