arXiv:2304.01556v2 [math.DG] 1 Aug 2023

SU(1,2) Hitchin 方程的极限构型

XUESEN NA

摘要

我们研究紧致连通黎曼曲面 X 上一族稳定 SU(1,2) Higgs 丛 (L, F, tβ, tγ) 所对应的 Hitchin 方程的解 h_t 在 $t \to \infty$ 时的极限行为，并假设二次微分 $q = \beta \cdot \gamma$ 在 D 处有简单零点。SU(1,2) Higgs 丛 (L, F, β, γ) 的谱数据可表示为 $V = L^{-2}K_X \oplus LK_X$ 上的 Hecke 修改。我们通过一种粘合构造证明，经过适当缩放后，极限由 V 上一个在 D 处奇异的度量给出，该度量由 L 和 K_X 在 D 处适配于抛物结构的调和度量诱导。我们给出确定极限抛物权重的规则。

1. 引言

设 X 为亏格为 $g \geq 2$ 的紧致连通黎曼曲面，配备一个 K¨ahler 形式 ω，且 $R_X \omega = 2\pi$。设 (E, h_0) 为秩为 r 的全纯厄米向量丛，且 $\Phi \in \Omega^{1,0}(\mathrm{End}(E))$。Hitchin 自对偶方程是关于对 (A, Φ) 的方程：

$$i\Lambda_\omega(F_A + [\Phi \wedge \Phi^*]) = \mu,\ \bar{\partial}_A \Phi = 0$$

其中 $\mu = \deg(E)/r$，A 是 h_0-酉联络，Φ^* 是 Φ 的 h_0-伴随。此方程等价于 Hermitian-Yang-Mills 方程

$$i\Lambda_\omega(F_{\nabla_h} + [\Phi \wedge \Phi^{*_h}]) = \mu$$

其中 ∇_h 是 h 的 Chern 联络。Hitchin [Hit**87**] 将其作为自对偶 Yang-Mills 方程的降维问题进行了研究。结合 Simpson [Sim**88**],的工作，其不可约解的规范理论模空间 $\mathcal{M}$（称为 Hitchin 模空间）被识别为稳定 Higgs 丛 (E, Φ) 的模空间。$\mathcal{M}$ 上的丰富结构在代数几何、辛几何与拓扑学等领域之间架起了桥梁。

$\mathcal{M}$ 的一个重要特征是 Hitchin 映射 Hit：$\mathcal{M} \to \mathcal{B}$，它通过取 Φ的特征多项式给出。系数空间 $\mathcal{B} = \oplus_j H^0(X, K_X^j)$ 是一个有限维向量空间。等价地，$\mathcal{B}$ 刻画了谱曲线的空间：对于 $b \in \mathcal{B}$，曲线 $\Sigma_b \subset |K_X|$ 可以被视为标记 Φ的特征值。它由因子 $\det(\lambda - p^*\Phi)$ 给出，其中 $p^*K_X^r$，且 $p : |K_X| \to X$ 是投影，而 $\lambda \in p^*K_X$ 是典范截面。对于 $b \in \mathcal{B}$的一般选择，Σ_b 是光滑的。

Hitchin 模空间 $\mathcal{M}$ 并不紧。根据 Uhlenbeck弱紧性，$\|\Phi\|_{L^2}$ 和 Hitchin 映射都是 proper（见 [Wen**16**]中的证明）。

收到日期：2023年8月2日。

只有当序列 (E_j, Φ_j) 在 $\mathcal{M}$ 上趋于无穷，且 $\|\Phi_j\|_{L^2} \to \infty$ 以及 $\mathrm{Hit}(\Phi_j) \to \infty$ 在 $\mathcal{B}$ 上时，该序列才会逃逸到无穷远。研究稳定 Higgs 丛族 $(E, t\Phi)$ 在 $t \to \infty$ 时的极限行为，是一个有趣的问题。Gaiotto-Moore-Netizkhe [GMN**10**] 猜想，当径向变量 $t \to \infty$ 在 Hitchin 基底上趋于无穷时，自然的超Kähler 度量—— $\mathcal{M}$ 上的 Hitchin 度量——渐近于一个半平坦度量；该度量由 $\mathcal{B}$ 上的特殊 Kähler 结构构造而来。受这项工作的启发，Mazzeo-Swoboda-Weiß-Witt[MSWW**16**] 研究了上述秩二 Higgs 丛族，其中二次微分 $\det\Phi$ 具有简单零点。该条件等价于谱曲线光滑。特别地，他们构造了解 h_∞，称为极限构型，它们满足 Hitchin 方程的解耦版本

$$F^{\perp}_{\nabla_{h_\infty}} = 0,\ [\Phi \wedge \Phi^{*_{h_\infty}}] = 0$$

其中 $\perp$ 是无迹部分。随后他们证明，对于每个 h_∞，都存在一族 $(E,t\Phi)$，其厄米－杨－米尔斯度量 h_t 在远离 $\det\Phi$ 的零点处收敛于该度量，并且收敛意义为 C^∞。Fredrickson [Fre**18**] 将收敛结果推广到了谱曲线光滑的任意秩情形。Mochizuki [Moc**16**] 更一般地证明，对于任意秩二 Higgs 丛，只要 Higgs 场一般地半单，经过适当重标度后也有类似的收敛结果。

在奇异谱曲线情形下，高秩中的极限行为更为复杂，且尚未得到充分研究。因此，选择复李群 $SL(3,\mathbb{C})$ 的实形式 SU(1,2)，自然成为这一研究方向的下一步。在一般情形下，其谱曲线是约化的，由两个在节点奇点处相交的不可约分支组成；而且，与具有相同谱曲线的一般 $SL(3,\mathbb{C})$-Higgs 丛相比，其 Higgs 场的形式受到更多限制。

一个 SU(1,2) Higgs 丛由三元组 (F, β, γ) 给出，或者等价地，由如下形式的 $SL(3,\mathbb{C})$-Higgs 丛给出

$$\left(E = L \oplus F,\ \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}\right) \tag{1}$$

其中 $L = \det F^*$，$q = \gamma \circ \beta \in H^0(X, K_X^2)$ 是一个二次微分，谱曲线 Σ 由 $|K_X|$ 上的因子 $Z(\lambda(\lambda^2 - q))$ 给出。我们假设 q 的所有零点都是简单的，并令 $D = p_1 + \ldots + p_{4g-4}$ 为零点除子。因此 Σ 有 $4g-4$ 个简单节点。本文旨在研究当 $t \to \infty$ 时，这族稳定 SU(1,2) Higgs 丛 $(F, t\beta, t\gamma)$ 的厄米-杨-米尔斯度量 h_t 的极限行为。

为了描述 SU(1,2) 的极限构型，我们需要对 Hitchin 映射 $\mathcal{M}_{SU(1,2)} \to \mathcal{B}_{SU(1,2)} = H^0(X, K_X^2)$ 的 Hitchin 纤维作出恰当描述。作者在 [Na**21**] 中给出了这一描述：固定 L 和 q 后，(F, β, γ) 中的数据等价于 $L^{-2}K_X \oplus LK_X$ 在 D 处的一个全纯 Hecke 修改：一个 $\mathcal{O}_X$-模的单射 $\iota : F \to L^{-2}K_X \oplus K_X$，它在 $X - D$ 上是同构。解耦方程的解 h_∞ 具有如下形式

$$h_\infty = \iota^* \left(h_L^{-2} h_K \oplus h_L h_K\right)$$

配备 h_K（分别为 h_L）度量，使得 K_X（分别为 L）上的诱导度量满足 $|q| \equiv 1$，且 h_L 是适配于带滤过线丛 (L, λ) 的调和度量，其中权重满足 $\sum_j \lambda_j = -\deg L$。两个厄米度量之差是一个自同构。我们记 $h' = h \cdot g$，若 $h'(\sigma,\mu) = h(g\sigma,\mu)$，并称 $h_t \to h_\infty$ 属于

C^∞，若 $h_t = h_\infty \cdot g_t$，且在某个固定的背景度量下 $g_t \to 1$ 属于 C^∞。本文的主要结果如下：

定理 1.1. 固定 $x_0 \in X - D$，$v_0 \in L|_{x_0}$，并令 $X_0 \subset X - D$ 为一个紧集。设 h_t为 (F, tβ, tγ) 的 Hermitian-Yang-Mills 度量，且 $\iota : F \to L^{-2}K_X \oplus LK_X$ 为对应于 (F, β, γ) 的 Hecke 修改。在 $X - D$ 上通过 ι 识别这两个丛，并令 h_t 为 h_t 的规范化（通过一个对角自同构），使得

$$\left|(v_0^{-2}\sqrt{q(x_0)}, 0)\right| = \left|(0, v_0\sqrt{q(x_0)})\right| = 1 .$$

设 $h_\infty = h_L^{-2}, {}_\infty h_K \oplus h_{L,\infty} h_K$，其中 $h_{L,\infty}$ 适配于 (X, D) 上的滤过丛 (L, λ_∞)，使得

- $\lambda_{\infty, j} = 1/4$（分别为 $-1/4$），当 $\beta(p_j) = 0$（分别为 $\gamma(p_j) = 0$）时，并且
- $\lambda_{\infty, j}$ 是一个与 j 无关的常数，适用于 $\beta(p_j)$、$\gamma(p_j)$, 0
- $P_j \lambda_{\infty, j} = -\deg L$

于是我们有

$$\widetilde{h}_t \xrightarrow{in\ C^\infty} h_\infty \quad as \quad t \to \infty$$

证明方法结合了 [MSWW**16**] 和 [Moc**16**] 中的方法。在 [MSWW**16**]，中，作者通过将 D 中各点周围小圆盘上的局部模型解粘合到一个极限构型上，构造了近似解 $h^{app}{}_t$。局部模型解可由 Painlev´e III 型常微分方程的解显式表示；当 $t \gg 1$时，在圆盘之外它渐近于极限构型。随后，他们利用压缩映射原理证明，当 $t \gg 1$ 时，存在一个与 $h^{app}{}_t$ 接近的 Hermitian-Yang-Mills 度量 h_t。令 $\mathcal{H}_t(u) = F_{\nabla_{h'}} + [\Phi \wedge \Phi^{*_{h'}}]$，其中 $h' = h^{app}{}_t \cdot e^u$。关键估计是对算子 L_t 的某些下界；该算子由在 $u = 0$ 处对 $\mathcal{H}_t$ 进行线性化得到。在 [Moc**16**] 中，显式局部模型并不容易获得，因此作者转而依赖 Biquard-Boalch 关于野调和丛的 Hermitian-Yang-Mills 度量存在性定理 [BB**04**]，且并未通过压缩映射原理证明收敛。因此，[Moc**16**] 中没有给出趋于极限构型的收敛速率。

证明定理 1.1 所需的局部模型解构造如下。首先注意，$q = \gamma \circ \beta$的简单零点分为三类：可以是 β的零点、γ 的零点，也可以两者都不是。Hecke 修改映射 $\iota : F \to L^{-2}K_X \oplus LK_X$给出一组局部标架，使 Higgs 场在每类零点附近都具有某种标准局部形式。对于前两类，我们使用以 Painlev´é 超越函数表示的显式局部模型解。当 $t \gg 1$时，这些局部模型在圆盘边界附近渐近于解耦解，其在 L 上的抛物权重为 $\lambda = \pm 1/4$。对于最后一类，我们应用 Biquard-Boalch 定理，并由具有 SU(1,2) 对称性的 $\mathbb{P}^1$ 上的野调和丛构造该解。这些局部模型渐近于解耦解，其抛物权重为 $-1/4 < \lambda < 1/4$。稳定性条件限制了各类零点可能的数量。因此，可容许权重组 $\boldsymbol{\lambda}$ 的空间包含于 $\mathbb{R}^{4g-4}$中一个超平面内的凸多胞体中。满足稳定性条件的 D 中零点划分集合与该多胞体的各面一一对应。

对于固定的 $t \geq 1$，抛物权重 λ 决定了局部模型解中作为 L 上调和度量一部分的首阶项 $\sim \lambda \log|z|$。然而，通过 the

在 Biquard-Boalch 定理的唯一性中，次领头阶也由权重确定。为了通过将局部模型与由权重组 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{4g-4})$ 给出的解耦解粘合，构造一个良好的近似解 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t$，也有必要匹配次领头阶。事实上， [Moc**16**] 也讨论了这个问题，我们调整其证明，表明次领头阶常数 c_λ 连续依赖于 λ，并利用这一点证明：对于对应于可容许权重多面体某个面的零点划分，当 $\mathrm{t} \gg 1$ 时，存在一个匹配次领头阶的族 $\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t})$。此外，我们证明，当 $\mathrm{t} \to \infty$ 时，匹配权重 $\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t}) \to \boldsymbol{\lambda}_\infty$ 由定理 1.1 给出；它也可以刻画为对应面在可容许权重多胞体中的中心。

随后，通过将局部模型解与圆盘外的解耦解进行粘合，构造近似解 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t$。这里精心选择了权重组$\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t})$。由于权重依赖于 t，后续分析（包括 L_t 的关键估计）比 [MSWW**16**] 中的分析复杂得多。这一点以及其他复杂因素（例如，不存在与 t 无关的算子 L_t 的下界，见 §4.2）部分解释了本文篇幅较长的原因。

继续并拓展当前工作的潜在方向有很多。极限构型是紧化 Hitchin 模空间的一类自然对象。阐明更一般的奇异谱曲线的谱数据与解的极限行为之间如何相互作用，是这一研究计划中的重要课题。另一个潜在方向是 G-Higgs 丛模空间上的渐近几何。此外，近期已有一些重要进展（见 [OSWW**20**]），通过非阿贝尔 Hodge 对应，将 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-极限构型与 $\mathbb{H}^3$ 中的等变折面联系起来。将当前工作应用并拓展到非阿贝尔 Hodge 对应另一侧的极限对象研究中，将很有意义；研究对象包括 SU(1,2)，或许还包括其他秩一李群，例如 $\mathrm{SU}(1,\mathrm{n})$（$\mathrm{n} \geq 3$）和 $\mathrm{SO}_0(1,\mathrm{n})$。

最后，我们评述 Mochizuki [MS**23**]的一项近期工作。该工作包含两个关于 $\mathrm{SL}(\mathrm{r},\mathbb{C})$-Higgs 丛族的 h_t 极限行为的结果。第一个结果是，当谱曲线不可约时，极限 h_∞ 与子列的选取无关。第二个结果是，在相应的谱数据由正规化谱曲线上的线丛 $\mathrm{L}\,\mathrm{e}$ 给出这一条件下，h_t 呈指数收敛。令 $\mathrm{n}: \Sigma \to \Sigma$ 为 λ' 的正规化，其中 $\lambda \in \mathrm{p}^*\mathrm{K}_X$ 在 Σ上的拉回。若 Higgs 丛由 $\mathrm{e}\,(\mathrm{E},\Phi) = ((\mathrm{p} \circ \mathrm{n})_*\mathrm{L}, (\mathrm{p} \circ \mathrm{n})_*\lambda')$ 给出，其中 L 是 Σ上的线丛，则满足这一条件。这两个结果都不再要求谱曲线光滑。然而，这两个条件都不适用于本文的情形。对于第一个条件，本文讨论的 SU(1,2)-Higgs 丛的谱曲线 Σ 总是可约的；对于谱曲线为 Σ的第二个结果，由正规化 Σ 上的线丛 L 诱导的 SU(1,2)-Higgs 丛只有严格多半稳定的情形。在这种情况下，极限行为问题便归结为 $\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的情形。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一些记号和约定，并回顾滤过丛的概念，以及如何利用 Hecke 修改描述 SU(1,2) Higgs 丛的谱数据。第 3 节中，我们构造

局部模型和近似解。第 4 节中，我们研究方程的线性化，并证明主定理。

致谢

本文是作者博士论文的一部分。作者谨向导师 Richard Wentworth 教授致谢，感谢他提出这一问题，并在作者博士学习期间给予耐心指导与鼓励。作者还感谢 Brian Collier、Johannes Horn、李琼玲和 Andrew Neitzke 提供的宝贵讨论与意见。作者获马里兰大学 2020—21 年 Patrick and Marguerite Sung 数学奖学金资助。

2. 预备知识

2.1. SU(1,2) Higgs 丛与稳定性条件。我们按照 [Moc**16**] 第 §3 节中的记号，回顾 (G-)Higgs 丛，尤其是 SU(1,2) Higgs 丛的定义、稳定性条件，以及滤过丛的概念。我们还将回顾 [Na**21**] 中对 SU(1,2) Higgs 丛谱数据的描述。在本文中，X 是一个固定的亏格为 g(X) ≥ 2 的闭黎曼曲面。所有向量丛均为全纯丛。

设 G^c 是一个复约化李群。G^c-Higgs 丛是一个二元组 (P, Φ)，其中 P 是 X 上的全纯主 G^c-丛，且 $\Phi \in H^0(X, P \times_{Ad} g^c \otimes K_X)$。对于 $G^c \subset GL(r, \mathbb{C})$，$G^c$-Higgs 丛也可视为秩 r 的 Higgs 丛。著名的非阿贝尔 Hodge 对应 [Don87, Cor88, Hit87, Sim**88**]在多项式稳定 G^c-Higgs 丛的模空间与约化表示 $Hom^+(\pi_1(X), G^c) /\!\!/ G^c$的模空间之间建立了一个同胚。Hitchin[Hit**92**] 利用这一对应研究实表示特征簇的拓扑 $Hom^+(\pi_1(X), PSL(n, \mathbb{R})) /\!\!/ PSL(n, \mathbb{R})$，并构造了 Hitchin 分支。沿着这一思路，文献 [BGG**06**]发展了 G-Higgs 丛的概念。设 G 为连通约化实李群，$H \subset G$ 为极大紧子群，且 $g = h \oplus m$ 为 Cartan 分解。令 H^c 和 m^c 分别表示它们的复化，并令 $\iota : H^c \to GL(m^c)$ 为各向同性表示。

定义 2.1. X 上的 G-Higgs 丛是一个二元组 (P, φ)，其中 P 是 X 上的全纯主 H^c-丛，$\varphi \in H^0(X, P \times_\iota m^c \otimes K_X)$。

G-Higgs 丛的 Hitchin 映射定义如下（例如参见 [GPR**18**]）

$$\mathrm{Hit} : \mathcal{M}_G \to \mathcal{B}_G = \bigoplus_{i=1}^{a} H^0(X, K_X^{m_i})$$

其中 m_i 是 G 的指数，a 是 G 的实秩。

对于 $G^c = SL(3, \mathbb{C})$，在共轭意义下有三种实形式：SU(3)、SU(1,2) 和 $SL(3, \mathbb{R})$。与紧致实形式 SU(3) 对应的 Higgs 丛，其 Higgs 场恒为零。另一方面，实形式 $SL(3, \mathbb{R})$ 不对谱曲线施加任何限制。因此，我们将重点关注实形式 G =SU(1,2)。李代数

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, 2) = \{X \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}) | X^* J + JX = 0,\ \mathrm{tr} X = 0\}$$

其中 $J = \mathrm{diag}(-1,1,1)$，且 X^* 是 X 的共轭转置。$\theta: X \mapsto -X^* = JXJ$ 是 g 上的卡当对合。Cartan 分解 $g = h \oplus m$ 是关于 θ、特征值为 1 和 -1 的特征分解。我们有

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} -\mathrm{tr}Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \middle| Y \in \mathfrak{u}(2) \right\}, \ \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^* & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

定义 2.2. SU(1,2) Higgs 丛是一个三元组 (F, β, γ)：F 是一个秩二向量丛，$\gamma \in H^0(X, \mathrm{Hom}(L, F) \otimes K_X)$，$\beta \in H^0(X, \mathrm{Hom}(F, L) \otimes K_X)$，其中 $L = \det F^*$。

等价地，$\gamma: LK_X^{-1} \to F$，$\beta: F \to LK_X$ 是全纯丛映射。复合映射 $q = \beta \circ \gamma: LK_X^{-1} \to LK_X$ 是一个全纯二次微分。我们称 (F, β, γ) 是与 q 和 L 相关联的 SU(1,2) Higgs 丛。

通过 $G \to G^c = SL(3, \mathbb{C})$，SU(1,2) Higgs 丛也是一个 $SL(3, \mathbb{C})$ Higgs 丛

$$E = L \oplus F, \ \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

相应的（多）稳定性概念是等价的（更一般的陈述见 [BGG**03**] ）。

命题2.3（引理 2.2, [Got**01**]）。设 (E, Φ) 如上，$E' \subset E$ 为一个 Φ-不变子丛。存在子丛 $L' \subset L$ 和 $F' \subset F$，使得 $\mu(E') \leq \mu(L' \oplus F')$。

因此，我们只需对形如 $L' \oplus F'$ 的非零真子丛检验斜率稳定性。由于 $\deg E = 0$，且线丛 L 的子丛只有 0 和 L 本身，所以

命题 2.4。（F, β, γ）稳定当且仅当

- 对于子丛 $0, F' \subsetneq F$，$\beta|_{F'} = 0$ 有 $\deg(F') < 0$，并且
- 对于满足 $\gamma(L) \subset F'' \otimes KX$ 的子丛 $F'' \subsetneq F$，有 $\deg(L \oplus F'') < 0$

在本文中，我们始终作如下假设：$q = \beta \circ \gamma$ 有简单零点。令 $D = p_1 + \ldots + p_{4g(X)-4}$ 为零点除子。

定义 2.5. q 的零点有三种类型：$\beta(p) = 0$、$\gamma(p) = 0$，或两者均不为零。这给出一个划分 $D = D_\beta + D_\gamma + D_r$。令 $d_\beta = \deg D_\beta$，$d_\gamma = \deg D_\gamma$，$d_r = \deg D_r = 4g(X) - 4 - d_\beta - d_\gamma$。记 $D = (D_\beta, D_\gamma, D_r)$，表示将 D 划分为三个有效除子。

托莱多不变量 $\tau = 2\deg L$ 标记了模空间的连通分支。我们有米尔诺–伍德型不等式 $|\tau| < 2(g-1)$。对于 d_β、d_γ，有如下细化。

命题 2.6. (F, β, γ) 稳定当且仅当

$$-(g-1) + \frac{1}{2}d_\beta < d < (g-1) - \frac{1}{2}d_\gamma \tag{2}$$

等价地

$$d_\beta < 2(g - 1 + d) \ \textit{and,} \tag{3}$$

$$d_\gamma < 2(g - 1 - d). \tag{4}$$

特别是，如果 (F, β, γ) 稳定，则 $d_r > 0$。此外，(F, β, γ) 严格多半稳定，当且仅当上述不等式中的 $<$ 改为等式；此时 $F \cong L^{-2}K_X^{-1}(D\beta) \oplus LK_X^{-1}(D\gamma)$】【。

下文中，如果（3）、（4）成立（分别地，如果它们的等式版本成立），我们就称 D 稳定（分别地，严格多半稳定）。

证明。$\mathrm{img}(\gamma)$ 的饱和化给出一个子丛 $F'' \cong LK_X^{-1}(D\gamma)$。这是 F 的唯一真子丛，使得 $\gamma(LK_X^{-1}) \subset F''$。我们有 $\deg F'' = -d - 2(g-1) + d_\gamma$。

另一方面，$\beta : F \to LK_X$ 通过满射层映射 $\beta : e\,F \to LK_X(-D\beta)$分解。我们有 $\ker(\beta) = \ker(\beta)$，从而得到线子丛 $F' \subset F$。这是 F 的唯一非零真子丛，使得 $\beta|_{F'} = 0$。我们有 $\deg F' = \deg F - \deg LK_X(-D\beta) = -2d - 2(g-1) + d_\beta$。关于稳定性的结论现由命题 2.4 得出。

(E, Φ) 的谱曲线（对应于上文的 (F, β, γ)）由截面 $\lambda(\lambda^2 - q) \in \pi^* K_X^3$ 的零点除子给出，其中 $\pi : |K_X| \to X$ 是投影。它有两个不可约分支（其中一个是 $|K_X|$ 中的零截面），分别对应于两个 Φ-不变子丛（其中一个是 $\ker(\beta) \cong L^{-2}K_X^{-1}(D\beta)$）。$(F, \beta, \gamma)$ 是多项式稳定的，当且仅当 E 是这两个子丛的直和，即 $F \cong L' \oplus L^{-2}K_X^{-1}(D\beta)$，且每个子丛都是斜率为 0 的稳定 Higgs 丛。在此识别下，$E \cong (L \oplus L') \oplus L^{-2}K_X^{-1}(D\beta)$，$\Phi = \Phi' \oplus 0$ 其中

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \beta' \\ \gamma' & 0 \end{pmatrix}$$

我们有 $D_\beta = Z(\beta')$、$D_\gamma = Z(\gamma')$、$D = D_\beta + D_\gamma$，且 $\deg L' = d - 2(g-1) + d_\gamma = -d$，$\deg L^{-2}K_X^{-1}(D\beta) = -2d - 2(g-1) + d_\beta = 0$。这推出了 (3)、(4) 中取等号而非$<$ 的结论。反过来，如果 (3)、(4) 中取等号而非 $<$，则 $D = D_\beta + D_\gamma$。我们有 γ 可经由 $s_\gamma : LK_X^{-1} \to F''$ 分解，且在 D_γ处有简单零点，$\beta = s_\beta \circ e\beta$，其中 $s_\beta : LK_X(-D\beta) \to LK_X$ 在 D_β处有简单零点。由于 $\beta \circ \gamma = q : LK_X^{-1} \to LK_X$ e 在 $D = D_\beta + D_\gamma$处有简单零点，复合映射 $F'' \to F \xrightarrow{\beta} LK_X(-D\beta)$ 是一个同构。由于 $O_X(D) \cong K_X^2$ 且 $D = D_\beta + D_\gamma$，我们有 $F'' \cong LK_X^{-1}(D\gamma) \cong LK_X(-D\beta)$。因此 $F \cong F'' \oplus L^{-1}K_X(D\beta)$，其中后一个直和项是 $\ker(\beta)$。由此可知，(E, Φ) 是若干个 Φ-不变的、斜率为 0 的稳定 Higgs 丛的直和。证毕。

2.2. SU(1,2) Hitchin 方程。本节将写出 SU(1,2) Higgs 丛的 Hitchin 方程的整体形式和局部形式。我们还将约定厄米度量局部形式的若干记号，以及其他一些相关对象的记号。

定理 2.1. 对于稳定的 (F, β, γ)，存在 F 上唯一的度量 h，使得

$$F_{\nabla_h} + \gamma^{*_h} \wedge \gamma + \beta \wedge \beta^{*_h} = 0 \tag{5}$$

更一般地，上述结论是 [GGM**12**] 中定理 3.21 的推论。将 SU(1,2) Higgs 丛视为 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$-Higgs 丛，还可以得到一个更直接的证明：

证明。根据 Hitchin 和 Simpson 的存在唯一性定理 [Hit87, Sim**88**], , 存在 E = L⊕F 上唯一的厄米度量 H 满足 Hitchin 方程 $F_{\nabla_H} + [\Phi \wedge \Phi^{*_H}] = 0$，并在 det E = $\mathcal{O}_X$上诱导标准度量。令 $\alpha = 1_L \oplus (-1_F)$，可得 $\alpha^{-1}\Phi\alpha = -\Phi$。由唯一性，$\alpha^*$H = H。因此 H = diag(deth^{-1}, h)，其中 h 是 F 上的厄米度量。通过直接计算可得式 (5)。证毕。

设 s = (s$_1$, . . . , s$_r$) 为局部标架，则矩阵 h$_s$ 由 (h$_s$)$_{ij}$ = h(s$_j$, s$_i$) 定义。对于 $\psi \in$ Hom(E, E′)，给定局部标架 s、u，我们定义矩阵 $\psi_{s,u}$，使得 $\psi s^j = \sum_i u_{ij}(\psi_{s,u})_{ij}$。若 E′ = E、u = s，则记作 ψ_s。设 (E$_i$, h$_i$)，i = 1, 2 为厄米向量丛。设 s$_i$ 为 E$_i$ 的局部标架，且 H$_i$ = (h$_i$)$_{s_i}$。设 $\phi \in$ Hom(E$_1$,E$_2$)，且 M = ϕ_{s_1,s_2}。则在诱导度量下有 $|\phi|^2_{h_1,h_2}$ = tr($\phi\phi^*$) = tr(MH$_1^{-1}$M*H$_2$)。设 A, H ∈ Mat$_n$(ℂ)，其中 H ≥ 0 为厄米矩阵，我们记为

$$|A|_H^2 = \mathrm{tr}\left(AH^{-1}A^*H\right) \tag{6}$$

设 (F, β, γ) 是一个 SU(1,2) Higgs 丛，且 {s$_1$, s$_2$} 是 F 在 (U; z) 上的局部标架，n(s$_1 \wedge$ s$_2$)$^{-1}$o 是 L = det F* 上诱导的标架。令 $\beta_s = \beta_0 dz$、$\gamma_s = \gamma_0 dz$、H = h$_s$，则 (5) 由下式给出

$$\partial_{\bar{z}}\left(H^{-1}\partial_z H\right) = \gamma_0\gamma_0^* H\,(\det H) - (\det H)^{-1}\,H^{-1}\beta_0^*\beta_0 \tag{7}$$

2.3. 滤过丛。下面我们按照 [Moc**16**] 的 §3 回顾滤过丛的概念。设 D ⊂ X 是由 N 个点组成的有限集，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_X(*D)$ 是极点位于 D 的亚纯函数层。设 $\mathcal{E}$ 是一个局部自由的 $\mathcal{O}'$-模。$\mathcal{E}$ 上的度量是指 $\mathcal{E}|_{X-D}$ 上的度量。

定义 2.7. 在 (X,D) 上，$\mathcal{E}$ 的滤过丛结构是由一族相干 $\mathcal{O}$-子模 $\mathcal{P}_*\mathcal{E}$ 构成的族，其标签由元组 a = (a$_P$)$_{P\in D}$ 给出，且 a$_P \in \mathbb{R}$ 满足

- $\mathcal{P}_a\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}' = \mathcal{E}$,
- $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}\mathcal{E}$ 在 p ∈ D 处的茎仅取决于 aP ∈ ℝ，记作 $\mathcal{P}_{a_P}\mathcal{E}$P,
- $\mathcal{P}_a\mathcal{E}$P ⊂ $\mathcal{P}_b\mathcal{E}$P，对于 a ≤ b，且存在 ϱ > 0 使得 $\mathcal{P}_a\mathcal{E}$P = $\mathcal{P}_{a+\epsilon}\mathcal{E}$P,
- $\mathcal{P}_a\mathcal{E}$P $\otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{O}$(nP)P = $\mathcal{P}_{a+n}\mathcal{E}$P 对于 n ∈ ℤ.

滤过 Higgs 丛是一个二元组 $(\mathcal{P}_*\mathcal{E}, \theta)$，其中 $\theta \in$ H^0(X, End($\mathcal{E}$) $\otimes \Omega^1_X$)。如果在每个 P 处都存在一组亚纯函数芽的有限子集，$\mathcal{I}$(P) ⊂ $\mathcal{O}'_P$ with $\mathcal{I}$(P) → $\mathcal{O}_X(*D)_P/\mathcal{O}_{X,P}$ 是单射，并且存在一个分解 $\mathcal{P}_a\mathcal{E}_P = \bigoplus_{f\in\mathcal{I}(P)}\mathcal{P}_a\mathcal{E}_{P,f}$，使得 $(\mathcal{P}_*\mathcal{E}, \theta)$ 是无分歧良好滤过 Higgs 丛。

$$(\theta - (df)\,Id)\mathcal{P}_a\mathcal{E}_{P,f} \subset \mathcal{P}_a\mathcal{E}_{P,f} \otimes \Omega^1_X(\log D)_P$$

对于每个 a ∈ ℝ，令 $\delta\mathcal{P}_a\mathcal{E}_P = \mathcal{P}_a\mathcal{E}_P/\mathcal{P}_{<a}\mathcal{E}_P$。

请注意，根据上述定义中的最后一个性质，$\mathcal{P}^P_{a_P}\mathcal{E}_P/\mathcal{P}^P_{a_P-1}\mathcal{E}_P$ 是向量丛 $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}\mathcal{E}$ 在 P 处的纤维。对于 $-1 < \alpha \le 0$，我们有纤维的滤过 $\mathrm{F}^P_\alpha = \mathcal{P}^P_{a_P-1+\alpha}\mathcal{E}_P/\mathcal{P}^P_{a_P-1}\mathcal{E}_P$。由此，对于任意 a，滤过丛结构 $\mathcal{P}_*\mathcal{E}$ 等价于全纯向量丛 $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}\mathcal{E}$上的抛物结构。

定义 2.8. E 上的度量 h 称为在 (X,D) 上适配于 $\mathcal{P}_*\mathcal{E}$，如果

- $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}\mathcal{E} \cong \mathcal{E}$ *as* $\mathcal{O}$*-module on* $X - D$ *for all* **a**, *and*

• s ∈ $\mathcal{P}_a\mathcal{E}$当且仅当

$$|s|_h = O\left(|z_P|^{-a_P-\epsilon}\right),\quad \forall \epsilon > 0 \tag{8}$$

其中 z_P 是以 P 为中心的全纯坐标。给定 $\mathcal{E}$上的度量 h，第二个条件定义了一个滤过丛结构 $\mathcal{P}^h_*\mathcal{E}$。

对于一个元组 b，定义

$$\deg \mathcal{P}_*\mathcal{E} = \deg \mathcal{P}_{\boldsymbol{b}}\mathcal{E} - \sum_{P\in D}\sum_{b_P-1<a\le b_P} a\cdot \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{P}_a\mathcal{E}_P/\mathcal{P}_{<a}\mathcal{E}_P\right)$$

其中 $\mathcal{P}_{<a}\mathcal{E}_P = \sum_{c<a}\mathcal{P}_c\mathcal{E}_P$。这与 b 的选取无关。对于 $\mathcal{G}\subset\mathcal{E}$ 局部自由的 $\mathcal{O}'$-子模，令 $\mathcal{P}_a\mathcal{G} = \mathcal{P}_a\mathcal{E}\cap\mathcal{G}$。这在$\mathcal{G}$上给出了一个滤过丛结构。令 μ($\mathcal{P}_*\mathcal{E}$) := 度数 $\mathcal{P}_*\mathcal{E}$/ 秩 $\mathcal{E}$。滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}_*\mathcal{E},\theta)$ 是稳定的，如果任何非零真 θ- 不变局部自由 $\mathcal{O}'$-子模 $\mathcal{G}$ 都满足 μ($\mathcal{P}_*\mathcal{G}$) < μ($\mathcal{P}_*\mathcal{E}$)。以下来自 [BB**04**] 的定理，是对闭黎曼曲面上的 [Hit87, Sim**88**]，以及'温和'情形下带穿孔黎曼曲面上的 [Sim **90**]，和抛物向量丛情形下的 [Biq**91**] 的推广。

定理 2.2. 设 $(\mathcal{P}_*\mathcal{E},\theta)$ 是一个稳定的无分歧良滤过 Higgs 丛，且 $\deg\mathcal{P}_*\mathcal{E} = 0$。那么存在 h（在 $\mathbb{R}_+$ 意义下唯一），使其适配于 $(\mathcal{P}_*\mathcal{E},\theta)$，且 $F_{\nabla_h} + [\theta\wedge\theta^{*h}] = 0$ 在 X − D 上。

定理 2.3. 设 $\mathcal{L}$ 是一个线丛，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ 是满足以下条件的实数元组

$$\deg\mathcal{L} + \sum_{j=1}^{N}\lambda_j = 0 \tag{9}$$

设 (U j; z j) 是以 p j ∈D 为中心且互不相交的局部坐标图，并设 s_j 是 U_j 上处处不为零的截面。那么 $\mathcal{L}$ 上存在一个度量 h，在相差正常数倍的意义下唯一，使得 $F_{\nabla_h} = 0$ 在 X − D 上，并且

$$\log|s_j|_h = \lambda_j\log|z_j| + O(1)\ \ as\ \ |z_j|\to 0 \tag{10}$$

我们称 h 为适配于带滤过线丛 $(\mathcal{L},\boldsymbol{\lambda})$ 的调和度量。

证明. 令 e $\mathcal{L} = \mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}'$ 为由 $z^{-m_j}s^j$ 在 U_j 上生成的 $\mathcal{O}$-子模。我们有 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}} = \mathcal{L}\left(\sum_j m_j[p_j]\right)$。令 $\mathcal{P}_{\boldsymbol{b}}e\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\lfloor b_1+\lambda_1\rfloor,\ldots,\lfloor b_N+\lambda_N\rfloor}$。我们有 deg $\mathcal{P}_*e\mathcal{L}$ =e deg $\mathcal{L}$ +$\sum_j\lambda_j$= 0。由定理 2.2，存在 $\mathcal{L}$ 上适配于 e$\mathcal{P}_*\mathcal{L}$ 的调和度量 h，且在相差正常数倍的意义下唯一。

注意，u_j:=log $|s_j|_h$是在 U_j−{p_j}上的调和函数。取 $\xi < \lambda_j$。由于 $s_j\in\mathcal{P}_{-\boldsymbol{\lambda}}$，由 (8) 可知存在某个常数 C，使得 $-u_j+\xi\log|z_j|+C\ge 0$对于足够小的 $|z_j|$成立。根据 Bˆocher 定理（例如参见 [Axl**01**] 定理 3.9），该定理刻画了穿孔圆盘上的正调和函数，因此 u_j =μ log $|z_j|$ +Re(f)，其中 μ ∈ ℝ，且 f ∈ $\mathcal{O}(U_j)$。由 (8)，μ ≥ λ_j。若 μ > λ_j，则存在某个 b，使得 $b_j\mu < -\lambda_j$，从而 $s_j\in\mathcal{P}_{\boldsymbol{b}}$，这就矛盾了。因此 μ = λ_j。证毕。

下面我们给出第二种证明，该证明基于具有指定对数极点的泊松方程的解。

引理 2.9。设 $a=(a_1,\dots,a_N)$, $n=-P\,j\,a_j$，且 $D=\{p_1,\dots,p_N\}$ 是 X 上的有限集。那么存在 $\varphi: X-D\to\mathbb{R}$，在 X 上相差一个常数的意义下唯一，并满足 $\Delta_\partial\varphi=n^-$，其中 $\Delta_\partial=\partial^*\partial+\partial\partial^*=i\Lambda\partial\partial$ 作用于函数，且 $\varphi+2a\,j\log|z_j|$ 在 p j 附近有界。

证明。设 $n=0, N=2$ 且 $a=(1/2,-1/2)$。令 $D=\{p,q\}$，其中 p , q。考虑因子 p–q，并将其对应的线丛记为 $\mathcal{L}$。令 $s\in\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{M}^*$为定义亚纯截面，它在 p 处有一个零点，在 q 处有一个极点，并且在 $X-D$ 上全纯。设 h 为 $\mathcal{L}$ 上的厄米–Einstein度量，即在 $X-D$ 上 $i\Lambda F_{\nabla_h}=0$。设$\varphi=\log|s|_h$。对于以 p（分别以 q）为中心的坐标图 (U; z)（分别为 (V; w)），$\varphi-\log|z|$（分别为$\varphi+\log|w|$）有界，并且在 $X-D$ 上有 $\Delta_\partial\varphi=0$。

对于 $n=1, N=1$ 且 $a=(1)$。令 $D=\{p\}$, $\mathcal{L}$ 为次数为 1 的线丛，h（分别为 h_0）为 $\mathcal{L}$（分别为 $\mathcal{L}(-p)$）上的厄米–Einstein度量，且 $s:\mathcal{L}(-p)\to\mathcal{L}$ 为由 $\mathcal{O}(-p)\subset\mathcal{O}$诱导的包含映射。作为丛映射，s 在 p 处有一个简单零点，并且在 p 之外是同构。通过这一包含映射，我们将 h 视为 $\mathcal{L}(-p)|_{X-D}$ 上的度量，并记 $h=h_0e^{\varphi}$。在 p 之外有 $F_{\nabla_{h_0}}=0$，且在 $X-D$ 上有 $\Delta_\partial\varphi=i\Lambda\partial\partial\varphi=i\Lambda F_{\nabla_h}=1$。

令 σ_0（分别地，σ）为坐标图 (U; z) 上 $\mathcal{L}(-p)$（分别地，$\mathcal{L}$）的平凡化截面，其中坐标图以 p 为中心，则有 $e^{\varphi/2}|\sigma_0|_{h_0}=|\sigma_0|_h=|f|\,|\sigma|_h$，其中 f 是在 p 处有一阶零点的全纯函数。因此，当 $z\to0$ 时，$\varphi=2\log|z|+O(1)$

一般而言，解是上述情形的线性组合。唯一性源于 X 上的调和函数为常数这一事实。证毕。

现在我们给出定理 2.3 的第二个证明:

证明。设 h 是 $\mathcal{L}$ 的厄米-爱因斯坦方程的一个解，即 $i\Lambda F^{\nabla_h}=\deg\mathcal{L}\,id_{\mathcal{L}}$。由上述引理，存在 φ，使得在 X 上 $-D$，且 $\Delta_\partial\varphi=-\deg\mathcal{L}$，并且在 p 处 $\varphi=2\lambda_j\log|z_j|+O(1)_j$。现在很容易验证，$he^{\varphi}$ 是适配于带滤过线丛 $(\mathcal{L},\lambda)$ 的调和度量。证毕。

我们首先在 q 的零点附近固定一些局部坐标图。

定义 2.10. 设 (F,β,γ) 是一个稳定 SU(1,2) Higgs 丛，且 $q=\beta\circ\gamma$、$D=Z(q)=D_\beta+D_\gamma+D_r$ 如定义 2.5 中所述。设 $(\mathbb{D}j;\zeta_j)$ 是以 $p\,j\in D$ 为中心的互不相交坐标图，使得 $q=\zeta j(d\zeta_j)^2$，且 $\mathbb{D}j=n|\zeta_j|<Ro$，其中某个 $R>0$。记为$\mathbb{D}_j^{\times}=\mathbb{D}_j-np\,jo$。令

$$\mathbb{D}'_j=\left\{|\zeta_j|<2R/3\right\},\ \mathbb{D}''_j=\left\{|\zeta_j|<R/3\right\}. \tag{11}$$

上述证明中的构造使我们能够消除正实常数带来的歧义，并给出一族由 λ 参数化、适配于 (L,λ) 的调和度量。这将在之后构造近似解时派上用场。

定义2.11. 固定 $h_{L,HE}$ 为线丛 L 的厄米-爱因斯坦方程的一个解，即 $i\Lambda F^{\nabla_{h_{L,HE}}}=\deg Lid_L$。固定 G_j，对 $1\le j\le N$ 成立（其存在性由引理 2.9 得出），使得

$$\Delta_\partial G_j=\begin{cases}0 & 1\le j\le N-1,\ on\ X-\left\{p_j,p_{j+1}\right\}\\ 1 & j=N,\ on\ X-\{p_N\}\end{cases}$$

and

$$\begin{cases} G_j - 2\log\left|\zeta_j\right| \ \textit{bounded on}\ \mathbb{D}_j^{\times} & 1 \le j \le N \\ G_j + 2\log\left|\zeta_{j+1}\right| \ \textit{bounded on}\ \mathbb{D}_{j+1}^{\times} & 1 \le j \le N-1 \end{cases}$$

对于 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$，令

$$\varphi_{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{\ell=1}^{j} \lambda_\ell \right) G_j \tag{12}$$

定义

$$h^0_{L,\boldsymbol{\lambda}} = h_{L,HE} e^{\varphi_{\boldsymbol{\lambda}}}. \tag{13}$$

这是一个适配于 $(L, \boldsymbol{\lambda})$ 的调和度量，其中

$$\begin{cases} \Delta_\partial \varphi_{\boldsymbol{\lambda}} = -d \\ \varphi_{\boldsymbol{\lambda}} = 2\lambda_j \log|\zeta_j| + O(1) \ as\ \zeta_j \to 0 \end{cases}$$

定义 $\mathbb{D}_\ell$ 上的有界调和函数

$$g_{j\ell} = \begin{cases} G_j - 2\log|\zeta_j| & \ell = j, 1 \le j \le N \\ G_{j+1} + 2\log|\zeta_{j+1}| & \ell = j+1, 1 \le j \le N-1 \\ G_j & otherwise \end{cases}$$

注意，对于滤过线丛，由于 Bˆocher 定理，(8) 中的估计可加强为 ()。对于高秩情形，我们也需要类似的加强。设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{O}$-模的一个局部自由层，且 h 是 $\mathcal{E}$ 在 X − D 上作为向量丛的度量。固定 P ∈ D，并取一个以 P 为中心的坐标图 (U;z)。

$$\mathcal{P}^{\vee}_a \mathcal{E}^*_P = \left\{ s \in \mathcal{E}^*_P \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{for all } c \in \mathbb{R},\ e \in \mathcal{P}^h_c \mathcal{E}, \\ s(e) = O(|z|^{-a-c-\epsilon})\ \forall\ \epsilon > 0 \end{array} \right\}.$$

令 h^* 为 $\mathcal{E}^*$ 上的诱导度量。根据 [Sim**90**] 中的命题 3.1，$_a\ \mathcal{E}^*_P$ 对所有 a ∈ ℝ 均成立。显然，对于非零代表元 e ∈ $\delta\mathcal{P}^h_a\mathcal{E}_P$，存在 s ∈ $\mathcal{P}^{\vee}_{-a}\mathcal{E}^*_P$ 使得 s(e) = 1。以下结果是 [Sim**90**] 中引理 6.2 的证明所推出的。

命题 2.12. 设 $\mathcal{E}$、h 和 (U;z) 如上，并假设在 P 附近的 ∈ D 处有

$$\left|F_{\nabla_h}\right|_h \le f \in L^p$$

Then

$$\log|e|_h = -a\log|z| + O(1) \ \ as\ \ |z| \to 0$$

其中 e　0 ∈ $\delta\mathcal{P}^h_a\mathcal{E}_P$。

证明. 我们将 e ∈ $\delta\mathcal{P}^h_a\mathcal{E}_P$ 视为定义在 U 的某个包含 P 的开子集上的非零截面。对于所有 ϱ > 0，存在 C_ϵ，使得 log (|z|$^{-a}$ |e|$_h$) ≤ ϱ |log |z|| + C_ϵ。取 s ∈ $\mathcal{P}^{\vee}_{-a}\mathcal{E}^*_P = \mathcal{P}^{h^*}_{-\ a}\mathcal{E}^*_P$，使得 s(e) = 1。由柯西-施瓦茨不等式可得 1 = |s(e)| ≤|s|$_{h^*}$ |e|$_h$。对于所有 ϱ > 0，存在 C'_ϵ，使得

$$\log\left(|z|^{-a}|e|_h\right) \ge -\log\left(|z|^a |s|_{h^*}\right) \ge -\epsilon\left|\log|z|\right| - C'_\epsilon.$$

令 g = log (|z|$^{-a}$ |e|$_h$)，于是

$$\left|\frac{g}{\log|z|}\right| \longrightarrow 0 \ \ \text{as}\ \ |z| \longrightarrow 0.$$

令 $\mathbb{D}$ 为以 P 为中心的充分小圆盘。全纯子丛（由 $e \in \mathcal{E}$张成）中的曲率递减这一事实意味着，对于某个 $h \in L^p$，在 x 之外有 $-\Delta g \le h$。令 $u \in L^p_2(\mathbb{D}) \subset C^0(\mathbb{D})$ 为某个有界函数，使得 $\Delta u = h$ 且 $g < u$ 在 $\partial\mathbb{D}$上成立。我们有 $-\Delta(g-u) \le 0$ 在 $\mathbb{D} - \{P\}$上成立。我们有$|(g-u)/\log|z|| \to 0$，当 $|z| \to 0$时成立。根据 [Sim90，引理 2.2]，$-\Delta(g-u) \le 0$在整个 $\mathbb{D}$上弱成立。由极大值原理，$g \le u$，即 g 有上界。将 g 替换为–g，考虑由 $s \in \mathcal{E}^*$张成的全纯子丛，并注意其诱导度量满足 $F^{\nabla_{h^*}} = -F^t_{\nabla_h}$（例如参见 Huy **05**]，命题 4.3.7 (iii) []）。重复上述论证可知，g 也有下界。结论由此得证。证毕。

2.4. 作为 Hecke 修改的 SU(1,2) Higgs 丛。接下来，我们回顾 [Na**21**] 的构造：通过全纯 Hecke 修改，由一个 $q \in H^0(X, K_X^2)$ 和一个线丛 L 关联得到稳定 SU(1,2) Higgs 丛 (F, β, γ)。

$$V = L^{-2}K_X \oplus LK_X\,.$$

全纯向量丛 E 在 $D = \{x_1, \ldots, x_N\}$ 处的 Hecke 修改是一个二元组 $(\hat{}E, s)$，其中 $\hat{}E$ 是一个全纯向量丛，且 $s : \hat{}E\big|_{X-D} \to E|_{X-D}$ 是一个同构，它诱导出同构 $\hat{}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ where $\hat{}\mathcal{E} = \hat{}E \otimes_O O(*D)$, $\mathcal{E} = E \otimes_O O(*D)$。这与 Hecke 算子和 Hecke 特征层有关，它们在几何朗兰兹纲领中扮演着核心角色（例如参见 [Fre**07**]）。 [Hor**22**] 使用 Hecke 修改来参数化 $SL(2,\mathbb{C})$-Higgs 丛的奇异 Hitchin 纤维的非阿贝尔部分。如果 $\hat{}s$ 是全纯丛映射 $E \to E$，则 $(\hat{}E, s)$ 称为全纯 Hecke 修改。在 D 处对 E 进行全纯 Hecke 修改的数据，等价于指定一个与 E 在 $X - D$ 上同构的、秩相同的 O_X-模局部自由子层。我们引入三个配备了若干等价关系的集合。

定义 2.13. 设 $D = (\underline{D}_\beta, D_\gamma, D_r)$ 是有限集 D 的一个划分，并令

$$\mathcal{M}_{L,q,\underline{D}} = \left\{ \begin{array}{l|l} (F,\beta,\gamma) & \det F^* = L,\ \beta\circ\gamma = q \\ SU(1,2)\ Higgs\ bundle & Z(\beta) = D_\beta,\ Z(\gamma) = D_\gamma\,. \end{array} \right\},$$

若存在同构 $\psi : F \to F'$, $\Lambda^2\psi = \mathrm{id}_{L^*}$ with $\beta_1 = \beta_2 \circ \psi$, 且 $\gamma_2 = \psi \circ \gamma_1$，则 $(F,\beta_1,\gamma_1) \sim (F',\beta_2,\gamma_2)$。令

$$\mathcal{H}_{L,q,\underline{D}} = \left\{ (F,\iota) \;\middle|\; \begin{array}{l} \iota : F \to V \ \ injective\ map\ of\ O\text{-}modules,\ isomorphic\ over\ X - D \\ \Lambda^2\iota = q :\ L^{-1} \longrightarrow \det V \\ \iota\left(F|_{p_j}\right) \subseteq L^{-2}K\big|_{p_j} \subset V|_{p_j}\ \ for\ p_j \in D_\beta \\ \iota\left(F|_{p_j}\right) \subseteq LK|_{p_j} \subset V|_{p_j}\ \ for\ p_j \in D_\gamma \\ \iota\left(F|_{p_j}\right) \nsubseteq\ either\ summand\ in\ \ V|_{p_j}\ \ for\ p_j \in D_r \end{array} \right\}$$

若存在同构 $\psi : F \xrightarrow{\sim} F'$, $\Lambda^2\psi = \mathrm{id}_{L^*}$ and $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ 使得，则 $(F,\iota) \sim (F',\iota')$

$$diag\left(\lambda^2, \lambda^{-1}\right) \circ \iota = \iota' \circ \psi \tag{14}$$

对于有限集 $\delta \subset X$ 及 X 上的线丛 L，令

$$\mathcal{F}_{L,\delta} = \prod_{p\in\delta}\left(L^3\big|_p\right)^\times = \left\{ \boldsymbol{b} = \left(b_p\right)_{p\in\delta} \right\}$$

若存在 $\tau \in \mathbb{C}^\times$，使得对所有 $p \in \delta$，均有 $b \sim b'$ $'_p = \tau b_p$。对于 $\delta = D_r$，$b \in \mathcal{F}_{L,D_r}$ 称为相对于 D 的可容许 Hecke 参数。

注意，$\mathcal{M}_{L,q,\underline{D}}$ 中的等价类是与 q 和 L 相关联的稳定 SU(1,2) Higgs 丛的同构类。下面给出这三个集合之间的对应关系；关于相应模空间问题的更多细节，参见 [Na**21**]。

定理 2.4. 存在双射

$$\mathcal{M}_{L,q,\underline{D}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{L,q,\underline{D}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{L,D_r}$$

$$(F,\beta,\gamma) \longmapsto (F,\iota) \longmapsto \boldsymbol{b}$$

并且保持等价关系。对于每个 $b \in \mathcal{F}_{L,\ D_r}$ 以及 $p_j \in D_r$，存在 L 的标架 $s_{0,}j$、$ns_{1,}j$、F 的标架 $s_{\ 2,}jo$，以及 $\sigma_{1,\ }j = \left(\left(s_{0,}j\right)^{-2} d\zeta_j,\ 0\right)$、$\sigma_{2,\ }j = \left(0, s_{0,}jd\zeta_j\right)$，它们是 V 在 $\mathbb{D}j$ 上的标架，并且

- $s_0^{\otimes 3}{}_{,\ }j = bp_j$ 对每个 $p\,j \in Dr$ 均成立，
- ι 的局部形式：$F \to V$ 由 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\zeta j & -1\, j\,! \\ \zeta & 1\end{pmatrix}$ 给出，
- $s_{1,\ }j \wedge s_{2,\ }j = s_0^{-1}{}_{,\ }j$，以及
- β, γ 在 $\mathbb{D}j$ 上的局部形式由 $p\,j \in Dr$ 给出

$$\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\left(\zeta_j \quad 1\right) d\zeta_j,\ \gamma = \left(1/\sqrt{2}\right)\left(1 \quad \zeta_j\right)^T d\zeta_j .$$

我们称 $\sigma j = \left(\sigma_{1,}j, \sigma_{2,\ }j\right)$, $s\,j = \left(s_{1,}j, s_{\ 2,}j\right)$ 由 $L|_{\mathbb{D}_j}$ 的 $ns_{0,}jo$ 诱导。

~证明。对于秩二向量丛 $\mathcal{E}$，记 $\phi_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E}^* \otimes \det\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ with $l \otimes s_1 \wedge s_2 \mapsto l(s_2)\, s_1 - l(s_1) s_2$。这是一个在 $\det\mathcal{E}$ 上诱导恒等映射的同构。

给定 $(F, \beta, \gamma) \in \mathcal{M}_{L,\ q,\ \underline{D}}$，令 $\iota_2 = \beta$，并令 ι_1 为以下复合映射

$$F \xrightarrow{\phi_F} F^* \otimes L^{-1} \xrightarrow{\gamma^T \otimes 1} L^{-1}K \otimes L^{-1} = L^{-2}K .$$

令 $\iota = \iota_1 \oplus \iota_2 : F \to V = L^{-2}K \oplus LK$。设 $\{s_1, s_2\}$ 是 F 在 (U, ζ) 上的局部全纯标架。L 的诱导局部标架由一个处处不为零的全纯截面 $(s_1 \wedge s_2)^{-1}$ 构成。在这些标架下，存在 $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{O}(U)$，使得

$$\beta = \left(\gamma_1 \quad \gamma_2\right) d\zeta,\ \gamma = \left(\beta_1 \quad \beta_2\right)^T d\zeta \tag{15}$$

and

$$\iota = \begin{pmatrix}\gamma_2 & -\gamma_1 \\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}. \tag{16}$$

由此可知，$\iota\left(F|_{p_j}\right)$ 属于第一（分别为第二）个直和项的纤维，当且仅当 $\beta(p_j) = 0$（分别为 $\gamma(p_j) = 0$），因此我们得到一个映射 $\mathcal{M}_{L,q,\underline{D}} \to \mathcal{H}_{L,q,\underline{D}}$。从上述局部形式也显然可知，该映射是一个保持相应等价关系的双射。

给定 $(F, \iota) \in \mathcal{H}_{L,q,\underline{D}}$，我们有一个由 $\mathcal{O}$-模组成的正合序列

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\iota} V = L^{-2}K \oplus LK \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

其中 O_D 是在 D 中各点处茎为 $\mathbb{C}$ 的爆破层的直和，而 π 在 $\mathrm{Aut}_O O_D \cong (\mathbb{C}^\times)^{4g-4}$ 意义下唯一。对于每个 $\mathrm{p} \in \mathrm{D}_r$，$\iota\left(\mathrm{F}|_p\right) = \ker \pi$ for π，0 位于一条直线 $\mathrm{l} \in \mathbb{P}\left(\left(\mathrm{L}^{-2}\mathrm{K}_X\big|_p \oplus \mathrm{LK}_X|_p\right)^*\right)$ 上，该直线对应于给出斜率的 $\mathrm{b}_p \in \mathrm{L}^{\otimes 3}\big|_p$。这给出了从 $\mathcal{H}_{L,q,\underline{D}}$ 到 $\mathcal{F}_{L,D,}$ 的映射（依赖于 D）。同样，容易验证这是一个保持相应等价关系的双射。

设 s'_1、s'_2 是 F 在 $\mathrm{p} \in \mathrm{D}_r$ 附近 $(\mathrm{U};\zeta)$ 上的局部标架。不失一般性，假设 s'_1 在 U 上生成子丛 $\ker\beta$。在 L 的局部标架 $(\mathrm{s}'_1 \wedge \mathrm{s}'_2)^{-1}$ 和 K_X 的 $\mathrm{d}\zeta$ 下，我们有

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}^T$$

其中 $\beta_2\gamma_2 = \zeta$。根据 D_r 的定义，$\beta_2(\zeta = 0), 0$，因此 $\gamma_2(\zeta = 0) = 0$ 且 $\gamma_1(\zeta = 0), 0$。我们可以假设 β_2 在 U 上处处不为零。因此 $\beta_2^{-1} \in O(\mathrm{U})$ 且 $\gamma_2 = \zeta\beta_2^{-1}$。令 c 为非零复数 $\beta_2^2\gamma_1(\zeta = 0)$ 的一个立方根，并设

$$\begin{aligned} s_1 &= \left(\sqrt{2}c^2\beta_2^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}c\beta_2}(\beta_2^2\gamma_1 - c^3)\right)s'_1 + \frac{\zeta}{\sqrt{2}c}s'_2, \\ s_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}c\zeta\beta_2\left(\beta_2^2\gamma_1 - c^3\right)}s'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}c}s'_2 \end{aligned}$$

在 F 的这个局部标架、L 的 $(\mathrm{s}_1 \wedge \mathrm{s}_2)^{-1}$ 和 K_X 的 $\mathrm{d}\zeta$ 下，我们有

$$\beta = (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} \zeta & 1 \end{pmatrix},\ \gamma = (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 & \zeta \end{pmatrix}^T.$$

在 F 中取 $\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2$，在 L 中取 $\mathrm{s}_0 = (\mathrm{s}_1 \wedge \mathrm{s}_2)^{-1}$，在 V 中取 $\sigma_1 = (\mathrm{s}_0^{-2}\mathrm{d}\zeta, 0)$、$\sigma_2 = (0, \mathrm{s}_0\mathrm{d}\zeta)$。由 (16)，$\iota$ 具有陈述中的形式。$\iota\left(\mathrm{F}|_p\right)$ 是 $\mathrm{V}|_p = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{K}_X\big|_p \oplus \mathrm{LK}_X|_p$ 中由 $(-1, 1)^T$ 张成的直线，在 σ_1, σ_2 下。因此显然可得 $\mathrm{b}_p = 1$ 在标架 s_0^3, 下的形式，陈述的其余部分也随之成立。证毕。

值得一提的是，Hecke 参数还有一种等价的解释，在某种意义上与上述构造对偶。给定 $(\mathrm{F}, \beta, \gamma) \in \mathcal{M}_{L,q,\underline{D}}$，F 可以被视为以两种不同方式扩张线丛

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & LK^{-1}\left(D_\gamma\right) & \xrightarrow{(1)} & F & \longrightarrow & L^{-2}K\left(-D_\gamma\right) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow s & & \| & & & & \\ 0 & \longleftarrow & LK\left(-D_\beta\right) & \xleftarrow[(2)]{} & F & \longleftarrow & L^{-2}K^{-1}\left(D_\beta\right) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

其中，(1)（分别为 (2)）由 γ（分别为 β）诱导，且 s 在 D_r 处有简单零点。线丛 $\mathrm{LK}^{-1}\left(\mathrm{D}_\gamma\right)$（分别为 $\ker\beta \cong \mathrm{L}^{-2}\mathrm{K}^{-1}\left(\mathrm{D}_\beta\right)$）在 F 中实现为子丛 $\mathrm{img}\ \gamma$（分别为 $\ker\beta$）。它们的纤维恰好在 D_r 处相交。除一个全局常数外，元组 b 给出了在 F 内 D_r 处匹配它们纤维的方法。这种扩张图景类似于从 Sp(2m) 丛重构 SO(2m + 1) 丛，见 [Hit**07**] 的 §4.2；该工作启发了我们对 SU(1,2) 谱数据的描述。

我们考虑一个 SU(1,2) Higgs 丛的例子，其中 $q \in H^0(X, K_X^2)$ 有简单零点：

$$(17)\qquad \left(F = K^{-1} \oplus K,\ \beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix} q & 1\end{pmatrix},\ \gamma = \left(1/\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & q\end{pmatrix}^T\right).$$

由命题 2.6 可知它是稳定的。(16) 在全局成立，相应的 Hecke 修改 $\iota : F \to V$ 适合于一个短正合列

$$0 \longrightarrow F = K^{-1} \oplus K \xrightarrow{\ \iota\ } V = K \oplus K \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

其中

$$\iota = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} q & -1 \\ q & 1\end{pmatrix}$$

并且 $\pi_p(f_1 d\zeta, f_2 d\zeta)^T = f_1(p) + f_2(p)$，其中 $(U; \zeta)$ 是以 p 为中心的坐标图。相应的元组 $b = (b_p)_{p \in D_r}$ 由 $b_p = 1$ 给出。

对于一个 SU(1,2) Higgs 丛 (F, β, γ) 和 $p \in D_r$，定理 2.4 给出了使 Higgs 场具有标准形式的局部标架。下面给出 D_β 和 D_γ 中各点处类似的标架。根据定理 2.4 中的对应关系，我们通过 ι 将 F 的截面视为 V 的截面。

定义 2.14。对于 $p_j \in D_\beta$，给定 $L|_{\mathbb{D}_j}$ 的标架 $ns_{0,j}o$，定义 V 的一个局部标架为 $\sigma_{1,j} = \left(s_0^{-2} j d\zeta_j, 0\right), \sigma_{2,j} = \left(0, s_{0,j} d\zeta_j\right)$，并令 $s_{1,j} = \zeta_j \sigma_{2,j}$，$s_{2,j} = -\sigma_{1,j}$。这些构成了 F 在 $\mathbb{D}_j$ 上的一个标架。在这些标架下，

$$\beta = \begin{pmatrix}\zeta_j & 0\end{pmatrix} d\zeta_j,\ \gamma = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T d\zeta_j.$$

对于 $p_j \in D_\gamma$，给定 $L|_{\mathbb{D}_j}$ 的标架 $ns_{0,j}o$，定义 V 的局部标架 $\sigma_{1,j}, \sigma_{2,j}$（如上所述），并令 $s_{1,j} = \sigma_{2,j}$，$s_{2,j} = -\zeta_j \sigma_{1,j}$。这些构成 F 在 $\mathbb{D}_j$ 上的一个标架。在这些标架下，

$$\beta = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} d\zeta_j,\ \gamma = \begin{pmatrix}\zeta_j & 0\end{pmatrix}^T d\zeta_j.$$

我们称标架 $\sigma_j = \sigma_{1,j}、\sigma_{2,j}$ 和 $s_j = s_{1,j}、s_{2,j}$ 是由 $ns_{0,j}o$ 诱导的。

值得注意的是，若 $s_{0,j}$ 诱导标架 $s_{1,j}、s_{2,j}$，则对于 $\mathbb{D}_j$ 上处处不为零的全纯函数 f，$f s_{0,j}$ 诱导标架 $f s_{1,j}、f^{-2} s_{2,j}$。此外，注意在 $\mathbb{D}_j^\times$ 上，关于 $\sigma_{1,j}, \sigma_{2,j}$，有

$$(18)\qquad \beta = \begin{pmatrix}0 & \zeta_j^{-1}\end{pmatrix} d\zeta_j,\ \gamma = \begin{pmatrix}0 & \zeta_j^2\end{pmatrix}^T d\zeta_j$$

3. 近似解的构造

设 (F, β, γ) 是一个稳定 SU(1,2) Higgs 丛，$t \geq 1$，并回顾定义 2.10 中的记号。本部分通过将 $X - \coprod_j \mathbb{D}_j$ 上的解耦解与 $\mathbb{D}_j''$ 上的局部模型解粘合，为 $(F, t\beta, t\gamma)$ 的 Hitchin 方程构造一个近似解，其中 $t \gg 1$。在 §3.1 中，我们刻画解耦方程的解。在 §3.2 中，我们描述一族由 $\lambda \in (-1/4, 1/4)$ 参数化的局部模型解，以及另外两个可视为 $\lambda = \pm 1/4$ 情形的局部模型解。在 §3.3 中，我们应用 [Moc**16**] 中的估计，研究这些局部模型解的渐近性质。特别是在 §3.3.4 中，我们证明，λ-族局部解的次领头阶系数关于 $\lambda \in (-1/4, 1/4)$ 连续变化。

在 §3.4 中，我们证明，当 $t \gg 1$ 时，存在一族 $\lambda(t)$，使得我们可以将局部模型解与解耦解粘合。我们利用这族依赖于 t 的抛物权重 λ 构造近似解 $h^{app}{}_t$，并证明它非常接近满足 Hitchin 方程。

3.1. 解耦解。$F|_{X-D}$ 上的度量 h 若满足（5）的解耦形式，

$$F_{\nabla_h} = 0,\ \gamma \wedge \gamma^{\dagger_h} + \beta^{\dagger_h} \wedge \beta = 0 \ \text{ on } X - D. \tag{19}$$

则称为解耦解。令 $\iota : F \to V = L^{-2}K \oplus LK$ 为与 (F, β, γ) 相关联的 Hecke 修改，如定理 2.4 所述。

引理 3.1. $F|_{X-D}$ 上的 h_∞ 是解耦解，当且仅当它具有如下形式

$$h_\infty = \iota^* \left(h_L^{-2} h_K \oplus h_L h_K \right) \tag{20}$$

其中 h_K 是 K 上满足 $|q| \equiv 1$ 的唯一度量（相对于 K 上的诱导度量），而 h_L 是适配于带滤过线丛 (L, λ) 的调和度量，且 $\deg L + P\,j\,\lambda j = 0$。

证明。在 $X - D$ 上，我们用 ι（分别用 $\det \iota$）将 F（分别将 $\det F = L^{-1}$）与 $V = L^{-2}K \oplus LK$（分别与 $\det V = L^{-1}K$）等同，并将 h_∞ 写作 $\iota^* h$，其中 h 是 $V|_{X-D}$ 上的某个度量。在 $X - D$ 上，我们有 $(F, \beta, \gamma) \cong \left(V, b = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & q^2 \end{pmatrix}^T \right)$。局部取 σ（分别取 θ）为 L（分别为 K）的处处非零全纯截面，使得 $\theta^2 = q$。截面 $\sigma_1 = (\sigma^{-2} \otimes \theta, 0)$、$\sigma_2 = (0, \sigma \otimes \theta)$（分别为 $n\ \sigma \otimes \theta^{-2} o$）构成 V（分别为 $\det V^*$）的一个标架。相对于这些标架，Higgs 场为 $b = (0, 1), c = (0, 1)^T$。令 $H = h_\sigma$。方程（19）的第二个等式推出 $cc^* H (\det H) = (\det H)^{-1} H^{-1} b^* b$。由直接计算可得

$$H_{12} = H_{21} = 0,\ H_{11} = H_{22}^{-2}. \tag{21}$$

因此，全纯直和 $V = L^{-2}K \oplus LK$ 也是 h-正交的。我们有 $h = h_1 \oplus h_2$，其中 h_1, h_2 是 $X - D$ 上两个直和项的度量。等价地，它们分别由 L（及 K）上的度量 h_L（及 h_K）诱导。由 ∇_h 的平坦性可知，∇_{h_L} 和 ∇_{h_K} 在 $X - D$ 上都是平坦的。我们有 $H_{11} = |\sigma|_{h_L}^{-4} |\theta|_{h_K} = |\sigma|_{h_L}^{-4} |q|^{1/2}{}_{h_K^2}$，$H_{22} = |\sigma|_{h_L}^2 |q|^{1/2}{}_{h_K}$。因此，$|q|_{h_K^2} = \left(H_{11} H_{22}^2 \right)^{2/3} \equiv 1$。

令 $f = \log |\sigma|_{h_L}$。由于 $F_{\nabla_{h_L}} = 0$ 在 $\mathbb{D}_j^\times$ 上，f 是 $\mathbb{D}_j^\times$ 上的正调和函数。根据 Bˆocher 定理（见定理 3.9 [Axl**01**]），它具有如下形式：$\lambda_j \log |\zeta_j| + f_0$，其中 f_0 在 $\mathbb{D}_j$ 上调和。关于 λ_j 之和的条件现由定理 2.3 得出。证毕。

设 s_0 a 是 L 在以 $p \in D$ 为中心的 $(\mathbb{D}, \zeta)$ 上处处不为零的截面，并设 σ_1, σ_2 是如定理 2.4 的表述中所述诱导得到的标架。在这些标架下，解耦解 $h_\infty = \iota^* \left(h_L^{-2} h_K \oplus h_L h_K \right)$ 为

$$h_\infty = \begin{pmatrix} f^{-2} \rho^{-1} & \\ & f \rho^{-1} \end{pmatrix} \tag{22}$$

其中 $f = |s_0|_{h_L}^2$ and $\rho = |\zeta|$。

3.2. 局部模型。本节中，我们构造一族局部模型解，它们依赖于实参数 λ，在 $\mathbb{D}_j$ 外渐近于引理 3.1 中定义的 h_∞，其中 $\lambda = \lambda_j$。对于 $p_j \in D_r$，该族解将由定义在 $(\mathbb{P}^1, [1:0])$ 上的无分歧良好滤过 Higgs 丛所适配的调和度量给出；对于 $p_j \in D_\beta, D_\gamma$，则通过 Painlev´e III 型方程的解，利用一个显式公式给出。下文将证明，这些滤过 Higgs 丛的稳定性条件等价于

$$\begin{cases} \lambda_j = -1/4 & p_j \in D_\beta \\ \lambda_j = 1/4 & p_j \in D_\gamma \\ |\lambda_j| < 1/4 & p_j \in D_r . \end{cases}$$

满足这些条件的元组 $\boldsymbol{\lambda}$ 将称为相对于 D 的一个划分所容许。我们首先描述这些可容许权重的集合。令

$$\mathscr{P}_{\underline{D}} = \{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \text{ is admissible w.r.t } \underline{D}\} \subset \mathbb{R}^{4g-4} \tag{23}$$

Set

$$\mathscr{P}_{d,g} = \coprod_{\underline{D} \text{ stable}} \mathscr{P}_{\underline{D}} \subset \mathbb{R}^{4g-4} .$$

我们有如下简单事实

引理 3.2. 设 C 是 $\mathbb{R}^{4n}$ 中的立方体，其顶点为 $V = \{(\pm 1/4, \ldots, \pm 1/4)\}$（即 C 是 V 的凸包）；m 是满足 $|m| < n$ 的整数。设 $f(x_1, \ldots, x_{4n}) = P_j x_j$，且 $H = f^{-1}(m)$。对于 $x \in C \cap H$，令 $d_1(x) = \#\{j \mid x_j = 1/4\}$，$d_2(x) = \#\{j \mid x_j = -1/4\}$。则以下两种情况必有其一：(i) $d_1 < 2(n+m)$，$d_2 < 2(n-m)$；或 (ii) $d_1 = 2(n+m)$，$d_2 = 2(n-m)$。后一种情况对应于 x 是一个顶点。

当 $n = g-1$、$m = -\deg L$ 且 $d_1 = d_\gamma$、$d_2 = d_\beta$ 时，由命题 2.6 和上述引理可知，闭包 $\overline{\mathscr{P}_{d,g}}$ 是 $C \cap H$ 的交集。容易证明，立方体 C 的边均不经过 H，因此 $V \cap H$ 是 $C \cap H$ 的极值集。这是一个紧凸多面体，其顶点 $V \cap H = \overline{\mathscr{P}_{d,g}} - \mathscr{P}_{d,g}$ 由 $\mathscr{P}_{\underline{D}}$ 构成，其中 D 严格多半稳定。内部 $\left(\overline{\mathscr{P}_{d,g}}\right)^\circ = \mathscr{P}_{\underline{D}}$ 满足 $d_\beta = d_\gamma = 0$，而 $\mathscr{P}_{\underline{D}}$ 在 D 稳定且 d_β 或 $d_\gamma > 0$ 时，是 $\overline{\mathscr{P}_{d,g}}$ 正维面的内部。

注意，面 $\mathscr{P}_{\underline{D}}$ 的顶点由满足以下条件的元组 $\boldsymbol{\lambda}$ 构成：当 $p_j \in D_\beta$ 时，$\lambda_j = 1/4$；当 $p_j = -1/4$ 且 $p_j \in D_\gamma$ 时，$\#\{j \mid \lambda_j = 1/4,\ p_j \in D_r\} = 2(g-1-d) - d_\beta$，$\#\{j \mid \lambda_j = -1/4,\ p_j \in D_r\} = 2(g-1+d) - d_\gamma$。容易看出，重心由定理 1.1 中列出的条件刻画。

我们先为 D_r 中的点构造局部模型。设 $[x_0 : x_1]$ 为 $\mathbb{P}^1$ 上的齐次坐标，$U_1 = \{x_1 \neq 0\}$（分别为 $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$）是坐标为 $z = x_0/x_1$（分别为 $w = x_1/x_0$）的仿射坐标图。令

$$p : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1,\ [x_0 : x_1] \longmapsto [x_0^2 : x_1^2] \tag{24}$$

并令 $\zeta = z^2$ 为仿射坐标图 $p(U_1)$ 上的坐标，且令 $\rho = |\zeta|$。记 $\mathcal{O}' = \mathcal{O}(*[1:0])$ 和 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$。令 $\mathcal{E} = (\mathcal{O}')^{\oplus 3}$，其自由生成元为 $\{e_0, e_1, e_2\}$。注意 $z \in \mathcal{O}'$，而 $w \notin \mathcal{O}'$，且 $dz \in \mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1_{\mathbb{P}^1}$，如 §2.3 所述。定义

$$\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1},\ \theta = \sqrt{2} z \begin{pmatrix} & z^2 & 1 \\ 1 & & \\ z^2 & & \end{pmatrix} dz . \tag{25}$$

定义 $v_j = T_{k+1,j+1} e_k \in \mathcal{E}$，其中 $j = 0、1、2$，且

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2}z & -\sqrt{2}z & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ z^2 & z^2 & -z^2 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

这些在 $\mathcal{E}$ over U_0, and $\theta v_0 = 2z^2 v_0 \otimes dz$、$\theta v_1 = -2z^2 v_1 \otimes dz$ 和 $\theta v_2 = 0$ 上生成。

设 $m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ 并且

$$\mathcal{F}_{m_0,m_1,m_2} = \left\{ \sum_{j=0}^{2} f_j v_j \middle| \operatorname{ord}_{[1:0]} f_j \geq -m_j \right\}.$$

它是 O 的局部自由子模。截面 e_0, e_1, e_2（分别为 $w^{-m_0}v_0, w^{-m_1}v_1, w^{-m_2}v_2$）平凡化 $\mathcal{F}_{m_0,m_1,m_2}$（分别为 U_1 和 U_0）。相应的过渡矩阵为 $G_{01} = T \cdot \operatorname{diag}(z^{m_1}, z^{m_2}, z^{m_3})$。我们有 $\det G_{01} = (\text{const}) z^{m_1+m_2+m_3+3}$ 是线丛 $\det \mathcal{F}_{m_0,m_1,m_2}$ 的过渡函数。因此，$\deg \mathcal{F}_{m_0,m_1,m_2} = 3 + m_1 + m_2 + m_3$。对于 $c = (c_0, c_1, c_2)$，O-子模的 b-族

$$\mathcal{P}_b^c \mathcal{E} = \mathcal{F}_{\lfloor b-c_0 \rfloor, \lfloor b-c_1 \rfloor, \lfloor b-c_2 \rfloor} \tag{27}$$

在 $\mathcal{E}$ 上定义了一个滤过丛结构，其度为 $\mathcal{P}_*^c \mathcal{E} = 3 - c_0 - c_1 - c_2$。根据定义 2.7, $\left(\mathcal{P}_b^c \mathcal{E}, \theta\right)$ 是一个无分歧良好滤过 Higgs 丛。

对于 $0 \leq i < j \leq 2$，令 $\mathcal{L}_j = O' v_j$ 且

$$\mathcal{S}_{ij} = \left\{ \left(\frac{a_{-1}}{z} + g_1 \right) v_i + \left(-\frac{a_{-1}}{z} + g_2 \right) v_j \middle| g_1, g_2 \in O',\ a_{-1} \in \mathbb{C} \right\}$$

具有诱导的滤过丛结构 $\mathcal{P}_b \mathcal{L}_j = \mathcal{L}_j \cap \mathcal{P}_b^c \mathcal{E}, \mathcal{P}_b \mathcal{S}_{ij} = \mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{P}_b^c \mathcal{E}$。我们有

$$\deg \mathcal{P}_* \mathcal{L}_j = -c_j,\ \deg \mathcal{P}_* \mathcal{S}_{ij} = 1 - c_i - c_j.$$

这些是仅有的非零真 O'-不变子模。设

$$S = \left\{ (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} c_0 + c_1 + c_2 = 3,\ c_j > 0\ \forall\, j, \\ c_i + c_j > 1\ \forall\, i \neq j \end{array} \right\}. \tag{28}$$

我们有，对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，$\left(\mathcal{P}_b^c \mathcal{E}, t\theta\right)$ 是稳定的，且 $\deg \mathcal{P}_*^c \mathcal{E} = 0$ 当且仅当 $c \in S$。

引理 3.3. 对于 $t > 0$, $-1/4 < \lambda < 1/4$，存在唯一的光滑函数 $K = K_{t,\lambda}$: $\mathbb{C}_z \to \mathrm{iu}(2)$，其为正定，并满足

- $$\partial_{\bar{z}} \left(K^{-1} \partial_z K \right) = 4|z|^2 t^2 \left(\gamma_1 \gamma_1^* K \det K - (\det K)^{-1} K^{-1} \beta_1^* \beta_1 \right) \tag{29}$$

with

$$\beta_1 = \left(1/\sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} z^2 & 1 \end{pmatrix},\ \gamma_1 = \left(1/\sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & z^2 \end{pmatrix}^T. \tag{30}$$

- 令

$$\widetilde{K}_{t,\lambda} = \begin{pmatrix} \det K_{t,\lambda}^{-1} & \\ & K_{t,\lambda} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

由 $h(e_i, e_j) = \left(e K_{t,\lambda}\right)_{j+1,i+1}$（其中 $i, j = 0, 1, 2$）定义的度量适配于滤过丛 $\mathcal{P}_*^c \mathcal{E}$，其 $c = (1 + 2\lambda, 1 + 2\lambda, 1 - 4\lambda)$。

设 $\zeta = z^2$。在 z , 0 处，我们有，

$$\partial_{\bar{\zeta}}\left(K^{-1}\partial_{\zeta}K\right) = (4|z|^2)^{-1}\partial_{\bar{z}}\left(K^{-1}\partial_z K\right) = t^2\left(\gamma_1\gamma_1^* K\det K - (\det K)^{-1}K^{-1}\beta_1^*\beta_1\right).$$

证明。我们有 $c = (1+2\lambda, 1+2\lambda, 1-4\lambda) \in S$ 当且仅当 $-1/4 < \lambda < 1/4$，在此情形下 $(\mathcal{P}_*^c\mathcal{E}, t\theta)$ 是稳定的无分歧良滤过 Higgs 丛。根据定理 2.2，存在一个调和度量 $h = h_{t,\lambda}$ 定义在 $\mathcal{E}$ 上并与之相适配，且在 $\mathbb{R}_+$意义下唯一。

令 $g: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 由 $e_0 \mapsto -e_0, e_j \mapsto e_j$ 给出，其中 $j = 1, 2$。我们有 $g(v_0) = v_1, g(v_1) = v_0,$，且 $g(v_2) = v_2$。对于任意 $v \in \mathcal{E}, b \in \mathbb{R}$，有 $v \in \mathcal{P}^{c}{}_{b}\mathcal{E}$ 当且仅当 $g(v) \in \mathcal{P}^{c}{}_{b}\mathcal{E}$。因此，$g^*h$ 也与滤过丛 $\mathcal{P}_*^c\mathcal{E}$相适配。

我们有 $g^{-1}\cdot F^{\nabla_h}\cdot g = F^{\nabla_{g^*h}}$、$g^{-1}[\theta\wedge\theta^{*_h}]g = [\theta^g \wedge (\theta^g)^{*_{(g^*h)}}]$ 以及 $\theta^g = g^{-1}\theta g = -\theta$。因此

$$F_{\nabla_{g^*h}} + t^2\left[(-\theta)\wedge(-\theta)^{*_{(g^*h)}}\right] = 0.$$

由此可得，g^*h 是适配于 $(\mathcal{P}_*^c\mathcal{E}, t\theta)$ 的调和度量。因此存在 $c > 0$ 使得 $g^*h = ch$。对于 $j = 1, 2$，我们有 $-h(e_0, e_j) = h(ge_0, ge_j) = g^*h(e_0, e_j) = ch(e_0, e_j)$。因此，$h(e_0, e_j) = 0$，且 $h = h_{t,\lambda}$ 具有分块对角形式，我们可以将其写为

$$(h_{t,\lambda})_{e} = \begin{pmatrix} \delta_{t,\lambda}^{-1} & \\ & K_{t,\lambda} \end{pmatrix} \tag{32}$$

其中，$K_{t,\lambda}$ 是关于$z \in \mathbb{C}$ 和$\delta_{t,\lambda} > 0$的 2×2 厄米矩阵值函数。注意，$v_0\wedge v_1\wedge v_2 = -4\sqrt{2}z^3 e_0\wedge e_1\wedge e_2$ 且$c_0+c_1+c_2 = 3$。我们有，$|e_0\wedge e_1\wedge e_2|^2_{\det h}$在$U_0$ 上是调和函数，并且在 [1 附近有界： 0] $\in \mathbb{P}^1$。因此，δ_t^{-1},$_{\lambda}$ 行列式 $K_{t,\lambda}$ 是常数。我们可以将其归一化为1，由此得到的$K_{t,\lambda}$, $\delta_{t,\lambda}$ 唯一确定。我们有$\delta_{t,\lambda}$ = 行列式 $K_{t,\lambda}$。(29)由(7)和(25)推出。证毕。

令 B、C（分别为 K）是取值于 $\in \mathbb{C}$ 矩阵（分别为 3×3正定厄米矩阵）的 z 函数。定义

$$R(K) = \partial_{\bar{z}}\left(K^{-1}\partial_z K\right)$$
$$S(K, B, C) = C\,K\,(\det K) - (\det K)^{-1}K^{-1}B,$$

并令 $E_t(K, B, C) = R(K) - t^2 S(K, B, C)$。式 (29) 等价于 $E_t(K, \beta_1^*\beta_1, \gamma_1\gamma_1^*) = 0$。令 $\rho_\phi : z \mapsto e^{i\phi}z$，且

$$g_\phi = \operatorname{diag}\left(e^{i\phi}, e^{-i\phi}\right). \tag{33}$$

容易验证，$R(K) = \rho_\phi^* R\left(\rho_{-\phi}^* K\right)$, $\rho_\phi^* B = g_\phi^* B g_\phi$, $\rho_\phi^* C = g_\phi^{-1} C \left(g_\phi^*\right)^{-1}$，其中 $B = \beta_1\beta_1^*$、$C = \gamma_1^*\gamma_1$，且 β_1, γ_1 如引理 3.3 所示。由此可得 $S(K, B, C) = \rho_\phi^* g_\phi S\left(g_\phi^*\left(\rho_{-\phi}^* K\right)g_\phi, B, C\right)g_\phi^{-1}$。因此

$$E_t(K, B, C) = \rho_\phi^* g_\phi E_t\left(g_\phi^*\left(\phi_{-\phi}K\right)g_\phi, B, C\right)g_\phi^{-1}.$$

因此，$z \mapsto g_\phi^* K_{t,\lambda}(ze^{-i\phi})g_\phi$ 满足（29）。令

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 1 & \\ & g_\phi \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} \sqrt{2}z & -\sqrt{2}z & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ z^2 & z^2 & -z^2 \end{pmatrix}.$$

我们有 $v_j = T_{k+1,j+1}e_k$，其中 j、k = 0、1、2，且 $\rho_\phi^* T = e^{i\phi}\Gamma_\phi T$。与 $z \mapsto g_\phi^* K_{t,\lambda}(ze^{-i\phi})g_\phi$ 相对应的度量在 $\mathcal{E}$ 上定义为

$$T^*\rho_{-\phi}^*\left(\Gamma_\phi^*\begin{pmatrix}\det K_{t,\lambda}^{-1} & \\ & K_{t,\lambda}\end{pmatrix}\Gamma_\phi\right)T = \rho_{-\phi}^*\left(T^*\begin{pmatrix}\det K_{t,\lambda}^{-1} & \\ & K_{t,\lambda}\end{pmatrix}T\right)$$

在 $\{v_0,v_1,v_2\}$ 下。注意，$\mathrm{ord}_{[1:0]} f = \mathrm{ord}_{[1:0]}\rho_\phi^* f$ 且 $\phi \in \mathbb{R}$。由此可知，$v \in \mathcal{P}^c{}_b\mathcal{E}$ 当且仅当 $\rho_\phi^* v \in \mathcal{P}_b^c\mathcal{E}$。因此，$z \mapsto g_\phi^* K_{t,\lambda}(ze^{-i\phi})g_\phi$ 是一个满足引理 3.3 中性质的光滑函数 $\mathbb{C} \to \mathrm{iu}(2)$。由唯一性可知

$$K_{t,\lambda}(ze^{i\phi}) = g_\phi^* K_{t,\lambda}(z) g_\phi\,. \tag{34}$$

对于 $t > 0$，令 $\eta_t : z \mapsto t^{1/3}z$，并且

$$\Gamma_t = \mathrm{diag}\left(t^{1/3}, t^{-1/3}\right). \tag{35}$$

我们有

$$R(K) = t^{2/3}\eta_t^* R\left(\eta_{t^{-1}}^* K\right) = t^{2/3}\eta_t^*\Gamma_t R\left(\Gamma_t^* \cdot \eta_{t^{-1}}^* K \cdot \Gamma_t\right)\Gamma_t^{-1}$$

并且

$$\eta_t^* B = t^{4/3}\Gamma_t^* B\Gamma_t,\ \eta_t^* C = t^{4/3}\Gamma_{t^{-1}} C\Gamma_{t^{-1}}^*\,.$$

由此可得 $S(K,B,C) = t^{-4/3}\eta_t^* S\left(\eta^*{}_{t^{-1}}H,\ \Gamma_t B\Gamma_t^*, \Gamma^*{}_{t^{-1}}C\Gamma_{t^{-1}}\right)$。通过直接计算，我们得到

$$E_t(K,B,C) = t^{2/3}\eta_t^*\Gamma_t \cdot E_1\left(\Gamma_t^*\left(\eta_{t^{-1}}^* K\right)\Gamma_t, B, C\right)\cdot\Gamma_t^{-1}\,.$$

因此，$z \mapsto \Gamma_t^* K_{t,\lambda}(t^{-1/3}z)\Gamma_t$ 满足（29）。另一方面，

$$\eta_t^* T = t^{1/3}\begin{pmatrix}1 & \\ & \Gamma_t^{-1}\end{pmatrix}T\,.$$

由此可知，由 $z \mapsto \Gamma_t^* K_{t,\lambda}\left(t^{-1/3}z\right)\Gamma_t$ 给出的度量在 $\mathcal{E}$ 上关于$\{v_0,v_1,v_2\}$ 具有如下局部形式：

$$T^*\begin{pmatrix}1 & \\ & \Gamma_t^*\end{pmatrix}\cdot\eta_{-t}^*\begin{pmatrix}\det K_{t,\lambda}^{-1} & \\ & K_{t,\lambda}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \\ & \Gamma_t\end{pmatrix}T = t^{2/3}\eta_{-t}^*\left(T^*\begin{pmatrix}\det K_{t,\lambda}^{-1} & \\ & K_{t,\lambda}\end{pmatrix}T\right).$$

对于 $f_j \in \mathcal{O}'$，我们有 $P_j f_j v_j \in \mathcal{P}_b^c\mathcal{E}$ 当且仅当 $P_j t^{2/3}\eta_{-t}^* f_j v_j \in \mathcal{P}_b^c\mathcal{E}$。因此，$z \mapsto \Gamma_t^* K_{t,\lambda}(t^{-1/3}z)\Gamma_t$ 给出了一个与 $\mathcal{P}_*^c\mathcal{E}$ 相适配的调和度量。由引理 3.3 的唯一性可得：

$$K_{1,\lambda}(t^{1/3}z) = \Gamma_t^* K_{t,\lambda}(z)\Gamma_t\,. \tag{36}$$

由（34）和（36）可知，$K_{t,\lambda}$ 具有如下形式：

$$K_{t,\lambda}(re^{i\theta}) = \begin{pmatrix} t^{-2/3} f_1\left(t^{1/3}r\right) & f_3\left(t^{1/3}r\right)e^{-2i\theta} \\ \overline{f_3\left(t^{1/3}r\right)}e^{2i\theta} & t^{-2/3} f_2\left(t^{1/3}r\right)\end{pmatrix},$$

其中，f_j 关于 j = 1, 2, 3 是定义在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的光滑函数，且每个分量都是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑函数。显然，存在函数 $H_{t,\lambda} : \mathbb{C} \to \mathrm{iu}(2)$，使得对所有 $z \in \mathbb{C}$，均有 $K_{t,\lambda}(z) = H_{t,\lambda}(z^2)$。由 $K_{t,\lambda}$ 的连续性和正定性可知，在原点的一个有界邻域内，$\det H_{t,\lambda}$ 有正的下界。此外，不难看出 $f_j \in C^\infty([0,\infty))$，其中 $f'_j(0) = 0$，且 $f_3(0) = 0$。直接计算表明，$\partial_z F, \partial_{\bar z} F = O(|z|)$，当 $z \to 0$ 时。如 $\zeta = z^2$，我们有 $\partial_\zeta = (2z)^{-1}\partial_z$，并且

$\partial_{\bar{\zeta}} = (2^{-}z)^{-1}\partial_{\bar{z}}$。 $\partial_{\zeta}H_{t,\ \lambda}$, $\partial_{\bar{\zeta}}H_{t,\ \lambda}$ 的各个分量在原点处有界。因此， $\partial_{\zeta}\left(\det H_{t}^{-1},\right.$ $\left._{\lambda}\right)$ 和 $\partial_{\bar{\zeta}}\left(\det H_{t}^{-1},\ _{\lambda}\right)$ 也同样有界。令

$$M := \begin{pmatrix} \det H_{t,\lambda}^{-1} & \\ & H_{t,\lambda} \end{pmatrix}.$$

由（29）可知，M 满足方程。

$$\partial_{\bar{\zeta}}\left(M^{-1}\partial_{\zeta}M\right) - [\varphi, M^{-1}\varphi^{*}M] = 0\,,$$

on $\mathbb{C}^{\times}$ with

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \zeta & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

且对于任意有界的 $0 \in \Omega$， $M \in C^{\infty}(\Omega^{\times}) \cap L_{1}^{\infty}(\Omega)$，其中 $\Omega^{\times} = \Omega - \{0\}$。

Let

$$\begin{aligned} D : M &\longmapsto M\left(\partial_{\bar{\zeta}}\left(M^{-1}\partial_{\zeta}M\right) - [\varphi, M^{-1}\varphi^{*}M]\right) \\ &= \frac{1}{4}\Delta M - \mathcal{T}_{1}(M) - \mathcal{T}_{2}(M) \end{aligned}$$

其中 $\Delta = 4\partial_{\bar{\zeta}}\partial_{\zeta}$ 是拉普拉斯算子，并且

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1}(M) &= \left(\partial_{\bar{\zeta}}M\right)M^{-1}\left(\partial_{\zeta}M\right), \\ \mathcal{T}_{2}(M) &= M[\varphi, M^{-1}\varphi^{*}M]\,. \end{aligned}$$

自举论证可用于改进我们对 M 在 0 处正则性的了解。考虑两个中间开邻域： $0 \in \Omega$ $'' \Subset \Omega' \Subset \Omega$。由椭圆正则性估计（参见例如 [DK**90**] 附录 III），存在某个 $C > 0$ 使得

$$\|M\|_{L_{2}^{2}(\Omega'')} \leq C\left(\left\|\frac{1}{4}\Delta(M)\right\|_{L^{2}(\Omega')} + \|M\|_{L^{2}(\Omega'')}\right).$$

要证明 $M \in L_{2}^{2}$ 在原点附近，只需对 $\left\|\frac{1}{4}\Delta(M)\right\|_{L^{2}} \leq \|\mathcal{T}_{1}(M)\|_{L^{2}} + \|\mathcal{T}_{2}(M)\|_{L^{2}}$ 作出界。利用柯西-黎曼算子 $\partial_{\bar{\zeta}}$ 的椭圆正则性，我们有 $C' > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \left\|M^{-1}\partial_{\zeta}M\right\|_{L_{1}^{2}(\Omega')} &\leq C'\left(\left\|\partial_{\bar{\zeta}}\left(M^{-1}\partial_{\zeta}M\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)} + \left\|M^{-1}\partial_{\zeta}M\right\|_{L^{2}(\Omega')}\right) \\ &= C'\left(\left\|\left[\varphi, M^{-1}\varphi^{*}M\right]\right\|_{L^{2}(\Omega)} + \left\|M^{-1}\partial_{\zeta}M\right\|_{L^{2}(\Omega')}\right). \end{aligned}$$

由上可知，$M^{\pm 1}$ 在 0 处有界，且 $\left\|\partial_{\zeta}M\right\|_{L^{2}(\Omega)} < \infty$。根据 Sobolev 嵌入 $L_{1}^{2} \subset L^{4}$， $\left\|\partial_{\zeta}M\right\|_{L^{4}(\Omega')}$ 有界。这意味着 $\left\|\partial_{\bar{\zeta}}M\right\|_{L^{4}(\Omega')}$ 上也有相同的界，因为$\partial_{\bar{\zeta}}M = \left(\partial_{\zeta}\right.$ $\left.M^{*}\right)^{*} = \left(\partial_{\zeta}M\right)^{*}$。因此存在 $C'' > 0$ 使得

$$\|\mathcal{T}_{1}(M)\|_{L^{2}(\Omega')} \leq C''\,\|M\|_{L_{1}^{4}(\Omega')}^{2} < \infty\,.$$

由 $M^{\pm 1}$ 上的 L^{∞} 界以及 $\varphi, \|\mathcal{T}_{2}(M)\|_{L^{2}(\Omega')} < \infty$， 可得 $M \in L_{2}^{2}(\Omega'')$。

假设对于某个 k， $M \in L_{k+1}^{2}(\Omega_{k})$，且 $0 \in \Omega_{k}' \Subset \Omega_{k}$。根据椭圆估计，存在 $C > 0$ 使得

$$\|M\|_{L_{k+2}^{2}(\Omega_{k}')} \leq C\left(\|\mathcal{T}_{1}(M)\|_{L_{k}^{2}(\Omega_{k})} + \|\mathcal{T}_{2}(M)\|_{L_{k}^{2}(\Omega_{k})} + \|M\|_{L^{2}(\Omega_{k}')}\right).$$

用 ∇ 表示 ∂_ζ 或 $\partial_{\bar\zeta}$，而 ∇^ℓ 表示满足 $l_1+l_2=l$ 的 $\partial_\zeta^{\ell_1}\partial_{\bar\zeta}^{\ell_2}$。那么$\nabla^k\mathcal{T}_1(M)$ 是以下形式各项之和

$$(*)\qquad M^{n_1}\left(\nabla^{\ell_1}M\right)M^{n_2}\dots M^{n_m}\left(\nabla^{\ell_m}M\right)M^{n_{m+1}}$$

其中 $n_j\in\mathbb{Z}$ 且 $l_j\geq 0$, $\sum_{j=1}^m l_j=k+2$，并且对于至少两个指标 j，有 $l_j\geq 1$。对于所有 j 均满足 $l_j\leq k$ 的项，取 $p_1,\dots,p_m>2$，使得 $1/2=\sum_j p_j^{-1}$，则有：

$$\|(*)\|_{L^2(\Omega_k)}\leq\prod_{j=1}^m\left\|\nabla^{\ell_j}M\right\|_{L^{p_j}}\leq\prod_{j=1}^m\|M\|_{L^{p_j}_{\ell_j}}.$$

我们有 $l_j-\frac{2}{p_j}\leq l_j\leq k$。因此，根据索伯列夫嵌入定理（例如 [DK**90**]附录 IV），存在常数 $C'>0$，使得 $\|M\|_{L^{p_j}l_j}\leq C'\|M\|_{L^2_{k+1}(\Omega_k)}<\infty$。剩下的项只有形如 $\left(\nabla^{k+1}M\right)M^{-1}(\nabla M)$ 或 $(\nabla M)\,M^{-1}\left(\nabla^{k+1}M\right)$ 的项。由于 M^{-1} 和 ∇M 的各项在 0 处有界，并且根据假设 $M\in L^2_{k+1}(\Omega_k)$，这些项的 $L^2(\Omega_k)$ 范数有限。由此，对 k 归纳并应用索伯列夫嵌入定理可得 $M\in C^\infty$。

综上所述，我们证明了以下结论。

命题 3.4. 对于 $-1/4<\lambda<1/4$，存在一个光滑函数 $H_{t,\lambda}:\mathbb{C}\to iu(2)$，使得 $K_{t,\lambda}(z)=H_{t,\lambda}(z^2)$，其中 $K_{t,\lambda}$ 是引理 3.3 中的函数。特别地，

$$(37)\qquad H_{t,\lambda}\left(\rho e^{i\psi}\right)=\begin{pmatrix}\rho f_{1,\lambda}\left(t^{2/3}\rho\right) & f_{3,\lambda}\left(t^{2/3}\rho\right)e^{-i\psi}\\ f_{3,\lambda}\left(t^{2/3}\rho\right)e^{i\psi} & \rho^{-1}f_{2,\lambda}\left(t^{2/3}\rho\right)\end{pmatrix},$$

其中 $f_{j,\lambda}$ 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的光滑函数，且 $H=H_{t,\lambda}$ 满足

$$(38)\qquad \partial_{\bar\zeta}\left(H^{-1}\partial_\zeta H\right)=t^2\left(\gamma_0\gamma_0^*H\det H-(\det H)^{-1}H^{-1}\beta_0^*\beta_0\right)$$

with

$$\beta_0=\left(1/\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix}\zeta & 1\end{pmatrix},\ \gamma_0=\left(1/\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix}1 & \zeta\end{pmatrix}^T.$$

设 (F,β,γ) 是一个稳定的 SU(1,2) Higgs 丛。回顾定义 2.10 中的记号，并设 s_0 是 L 在以 $p\in D_r$ 为中心的坐标圆盘 $(\mathbb{D};\zeta)$ 上的一个平凡化截面，令 $s=\{s_1,s_2\}$（分别为 $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\}$）是由定理 2.4 陈述中的 s_0 所诱导的 F（分别为 V）在 D 上的标架。我们固定与上述厄米矩阵值函数相对应的厄米度量的记号。

定义 3.5. 记 $h_{t,\lambda}$ 为 D 上 F 的度量，其中 $h_{t,\lambda}=(H_{t,\lambda})_s$，$H_{t,\lambda}$如命题 3.4 所述。记 $eh_{t,\lambda}$为 $\mathcal{E}$ 上的度量，定义为 $eh_{t,\lambda}(e_{i+1},e_{k+1})=\left(eK_{t,\lambda}\right)ki\,e$，其中 i、$k=0$ 取 1、2，且 $K_{t,\lambda}$ 如引理 3.3 所述。

通过直接计算可得

$$(39)\qquad (h_{t,\lambda})_{\boldsymbol{\sigma}}=t^{2/3}M_\lambda\left(t^{2/3}\rho\right)$$

其中

$$(40)\qquad M_\lambda=(S^*)^{-1}H_{1,\lambda}S^{-1},\ S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\zeta & -1\\ \zeta & 1\end{pmatrix}$$

特别地，我们有如下显式表达式。

$$M_\lambda(\rho)=\frac{1}{2\rho}\begin{pmatrix} f_{1,\lambda}+f_{2,\lambda}-f_{3,\lambda}-\overline{f_{3,\lambda}} & f_{1,\lambda}-f_{2,\lambda}+f_{3,\lambda}-\overline{f_{3,\lambda}} \\ f_{1,\lambda}-f_{2,\lambda}-f_{3,\lambda}+\overline{f_{3,\lambda}} & f_{1,\lambda}+f_{2,\lambda}+f_{3,\lambda}+\overline{f_{3,\lambda}} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

因此，$H_{t,\lambda}$ 由厄米矩阵值径向函数 M_λ确定。或者，M_λ 是 $\left(\mathrm{eh1}_{,\lambda}\right)_{\bar\sigma}$的一个子矩阵，其中 $\mathcal{E}$ 上的标架由 $\mathrm{e}\sigma_j$给出，$j=0,1,2$，其中 $\mathrm{e}\sigma_j=\mathrm{P}^2_{\ell=0}(\mathrm{T}_{e\sigma})_{\ell+1,j+1}\,\mathrm{e}_\ell$其中

$$T_{e\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & z^{-2} & z^{-2}\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}. \tag{42}$$

我们有

$$\left(\widetilde{h}_{t,\lambda}\right)_{\bar\sigma}=\begin{pmatrix} t^{-4/3}|z|^{-4}\,m_\lambda\left(t^{2/3}|z|^2\right)^{-1} & \\ & t^{2/3}M_\lambda\left(t^{2/3}|z|^2\right)\end{pmatrix}, \tag{43}$$

其中 $m_\lambda=$ 是 M_λ的行列式。后面会用到，我们有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{h}_{1,\lambda}(v_2,v_2)=2|z|^4\,(M_\lambda)_{11}(|z|^2),\ \widetilde{h}_{1,\lambda}(v_0,v_2)=2|z|^4\,(M_\lambda)_{12}(|z|^2)\\
&\widetilde{h}_{1,\lambda}(v_0,v_0)=2|z|^2\left(|z|^2\,(M_\lambda)_{22}(|z|^2)+|z|^{-4}m_\lambda(|z|^2)^{-1}\right),\\
&\widetilde{h}_{1,\lambda}(v_0,v_1)=2|z|^2\left(|z|^2\,(M_\lambda)_{22}(|z|^2)-|z|^{-4}m_\lambda(|z|^2)^{-1}\right).
\end{aligned} \tag{44}$$

注意，λ 在 $H_{t,\lambda}$ 中由以下条件刻画：当 $c<-2\lambda$ 时，$\det H_{t,\lambda}(\zeta)=O(|\zeta|^c)$；当 $c>-2\lambda$时，$\det H_{t,\lambda}(\zeta)$, $O(|\zeta|^c)$ $\zeta\to 0$。

对于 D_β, D_γ中各点附近的局部模型，将 (25) 中的 θ 替换为

$$\theta=2z\begin{pmatrix}0&1&0\\ z^2&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}dz,\ \text{resp.}\ \theta=2z\begin{pmatrix}0&z^2&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}dz$$

并令 $v_j\in\mathcal{E}$满足 $j=0$、1、2，使得 $\theta v_0=\sqrt{2}v_0\otimes dz$、$\theta v_1=-\sqrt{2}zv_1\otimes dz$，且 $\theta v_2=0$。如上所述的相同步骤定义了一个无分歧良好滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}^{\varsigma}_{*}\mathcal{E},\theta)=\left(\mathcal{P}^{(c_0,c_*\quad{}^1\mathcal{E}')},\theta_1\right)\oplus(\mathcal{O}'e_2,0)$，其中 $\mathcal{E}'=\mathcal{O}'e_0\oplus\mathcal{O}'e_1$。类似地讨论可知，当 $c_0,c_1>0$ 且 $c_0+c_1=1$时，秩二直和项是稳定的。通过与引理 3.3 的证明类似的论证，相应的度量具有局部形式 (31) 当且仅当 $c_0=c_1=1/2$。事实上，在这些情形下，还可以用 Painlev´é III 型常微分方程的一个光滑解，给出类似于 [MSWW**16**] 局部模型中的局部基准解的更显式公式:

$$(x\partial_x)^2\psi=\frac{x^2}{2}\sinh(2\psi). \tag{45}$$

根据 [MTW**77**] （[Wid**00**] 中给出了一个简化的证明），存在唯一解 ψ，具有以下性质

$$\begin{cases}\psi(x)\sim-\log\left(x^{1/3}\sum_j a_j x^{4j/3}\right), & x\to 0\\ \psi'(x)<0, & x>0\\ \psi(x)=O\left(x^{-1/2}e^{-cx}\right), & x\to+\infty\end{cases}. \tag{46}$$

适配于严格多半稳定良好滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}_*^c\mathcal{E},\theta)$ 的调和度量在每个直和分量上唯一到正标量倍。因而，以下结果可通过直接计算得出：验证 H_t 确实满足式 (38)，其中分别取 β_0,γ_0，并且下文定义的 ψ_P 在原点处光滑。

命题 3.6. 设 ns1, j, s 2, jo 是 F 在 (ℂj; ζ_j) 上的一个标架，其以 p j 为中心，如定义 2.14 所述。那么

$$H_t(\zeta_j)=\begin{cases} diag\left(c^{-1}\rho^{1/2}e^{\psi_P},c^2\right) & p_j\in D_\beta \\ diag\left(c\rho^{-1/2}e^{-\psi_P},c^2\right) & p_j\in D_\gamma \end{cases},$$

其中 c $\in\mathbb{C}^\times$，并且

$$\psi_P=\psi\left(\frac{8}{3}t\rho^{3/2}\right) \tag{47}$$

（其中 ψ 是上述唯一的解，而 $\rho=|\zeta|$ 满足方程 (38)，且

$$\beta_0=\begin{cases}\begin{pmatrix}\zeta & 0\end{pmatrix} & p_j\in D_\beta \\ \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} & p_j\in D_\gamma\end{cases},\quad \gamma_0=\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T & p_j\in D_\beta \\ \begin{pmatrix}\zeta & 0\end{pmatrix}^T & p_j\in D_\gamma\end{cases}$$

并且当 $\zeta\to 0$ 趋于 $\lambda=-1/4$ 时，$\log\det H_t(\zeta)=-2\lambda_j\log|\zeta|+O(1)$，其中 p j $\in D_\beta$（分别地，$p_j\in D_\gamma$ 时为 $\lambda=-1/4$）。此外，满足上述渐近估计的解在 c $\in\mathbb{C}^\times$ 的选取范围内唯一。

下文将 ψ_P 称为 Painlev´e 函数。下面的估计可由 (46) 直接推出，稍后将会用到。

引理 3.7. 存在 C_1, $c_1>0$ 和 $x_1>0$，使得对所有 $x\geq x_1$，以及 $k=0,1,2$,

$$\left|\partial_x^k\psi(x)\right|\leq C_1e^{-c_1x}.$$

注意，Painlev´e 函数也为命题 3.4 中的 $H_{t,\lambda}$ 提供了显式公式，其中 $\lambda=0$:

$$H_{t,0}\left(\rho e^{-\psi}\right)=\mathrm{diag}\left(\rho e^{2\psi_P},\rho^{-1}e^{-2\psi_P}\right). \tag{48}$$

3.3. 局部模型的渐近行为。为了使粘合构造顺利进行，有必要了解函数 M_λ 在大半径处的行为，并在某个区间内对 λ 给出一致的界。我们固定一个足够小的 $\delta>0$，并令 $I=(-1/4+\delta,1/4-\delta)$。若某个不等式对所有 $\lambda\in I$ 都成立，则称其中的常数与 λ 无关。（这些常数仍可能依赖于 δ 的选取。）特别地，我们将证明:

命题 3.8. 存在 $\rho_0>1$ 和 $C_1,C_2>0$，使得对所有 $\lambda\in I$ 以及$\rho\geq\rho_0$，都有

$$\begin{aligned}&\left|M_\lambda(\rho)-M_{\infty,\lambda}(\rho)\right|,\ \left|\partial_\rho\left(M_\lambda(\rho)-M_{\infty,\lambda}(\rho)\right)\right|,\ \left|\rho^{-1}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\left(M_\lambda(\rho)-M_{\infty,\lambda}(\rho)\right)\right)\right|,\\ &\left|\rho^2m_\lambda(\rho)-\mu_\lambda(\rho)\right|,\ \left|\partial_\rho\left(\rho^2m_\lambda(\rho)-\mu_\lambda(\rho)\right)\right|,\ \left|\rho^{-1}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\left(\rho^2m_\lambda(\rho)-\mu_\lambda(\rho)\right)\right)\right|\\ &\leq C_1e^{-C_2\rho}\end{aligned}$$

其中 $M_{\infty,\lambda}=\mathrm{diag}\left(\rho^{-1}\mu_\lambda^2,\rho^{-1}\mu_\lambda^{-1}\right)$ 满足

$$\mu_\lambda(\rho)=4c_\lambda^{-1}\rho^{-2\lambda}. \tag{49}$$

其中 $\lambda\mapsto c_\lambda$ 是连续的。

系数 c_λ 将在粘合构造中发挥核心作用。下文估计中的常数不依赖于 $\lambda \in I$，通常会通过 c_λ 的连续函数依赖于它。此外，上述结果给出了定义 3.5 中定义的度量 $eh1_{,\lambda}$ 的渐近行为。因此，由 (48) 可得 $c_0 = 4$。

这些估计将基于 [Moc**16**] 中的相关结果。我们首先回顾这些结果。接着，我们利用 $h1_{,\lambda}$ 在 $e\sigma$ 下的局部形式以及命题 2.12，得到相应的估计。梯度估计依赖于与 [Moc**16**] 中引理 3.12 和 3.13 类似的结果。c 的连续性以及常数 C_1, C_2 在 I 上的一致性，与 [Sim**88**] 中利用恒等映射得到的 15 [Moc**16**] 命题 3. 类似。

3.3.1. Mochizuki 的渐近估计。$\left(E, \bar\partial_E, \theta, h\right)$ 称为调和丛¯，如果 $\partial_E\theta = 0$ 且 h 满足 Hitchin 方程 $F_{\nabla_h} + [\theta \wedge \theta^{*_h}] = 0$。以下内容综合了 [Moc**16**] 中的命题 2.1、2.3、2.10、2.12 及推论 2.6。

定理 3.1. 设 $\left(E, \bar\partial_E, \theta\right.$ 是一个秩为 N 的调和丛，其全纯分解为 $\left(E, \bar\partial_E, \theta\right) = \mathrm{L}_{N}\mathrm{j}_{=1}\left(E\,\mathrm{j}, \bar\partial_{E_j}, \theta_j\right)$，定义在坐标图 $(\mathbb{D}; z) \subset X$ 上，其中 $\mathbb{D} = \{|z| < R\}$，且 $E\,\mathrm{j}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的线丛。设 $\theta_j = f\,\mathrm{j}dz$ 和 $M > 0$ 满足 $\left|f_j\right| < M$ 在 $\mathbb{D}$ 上成立。假设 $d = \min \mathrm{n}\left|f_i - f_j\right| : i\,,\mathrm{jo} \geq 1$。那么，对于任意 $0 < r < R$，令 $\mathbb{D}' = \{|z| < r\}$，存在仅依赖于 R、r、M/d 和 N 的 C、$c > 0$，使得

$$\left|F_{\nabla_h}\right|_{h,g_{\mathbb{C}}}, \left|F_{\nabla_{h_j}}\right|_{h_j,g_{\mathbb{C}}}, \left|\partial_h \pi_j\right|_{h,g_{\mathbb{C}}} \leq Ce^{-cd} \text{ on } \mathbb{D}' \tag{50}$$

$$h(s_i, s_j) \leq Ce^{-cd}\,|s_i|_h \left|s_j\right|_h \text{ on } \mathbb{D}' \text{ for } s_i \in E_i,\ s_j \in E_j,\ i \neq j \tag{51}$$

其中，h_j 是 h 在 $E\,\mathrm{j}$ 上的限制，$\pi\mathrm{j}$ 是到 $E\,\mathrm{j}$ 上的全纯投影，$g_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的欧几里得度量。

以下结论用范数的梯度来界定协变导数。这是 [Moc**16**] 中引理 3.12 的一个轻微推广。

引理 3.9。记号同定理 3.1，其中 $N \geq 2$，并假设 $Ce^{-cd} < 10^{-2}N^{-3/2}$。那么，对于任意非零截面 $v_j \in E\,\mathrm{j}$，我们在 $\mathbb{D}'$ 上有

$$\left|\partial_h v_j\right|_{h,g_{\mathbb{C}}} \leq 10\left|v_j\right|_h \left(\left|\partial_\zeta \log |v_j|_h^2\right| + Ce^{-cd}\right).$$

证明。根据假设 $Ce^{-cd} < 1/(2N)$。设 $w = \mathrm{P}_{j=1}^{N} c_j v_j$ 是截面，且 $v_j \in E\,\mathrm{j}$，由 (51) 得 $1\ 2\ \mathrm{P}_{N\,i=1}\,|c_i|^2\ |v_i|_h^2 \leq |w|_h^2 \leq \frac{3}{2}\mathrm{P}_{N\,i=1}\,|c_i|^2\ |v_i|_h^2$。

对于一个 σ，定义算子 ∂ 为 $\partial_h\sigma = (\partial\sigma)d\zeta$，其中 ∂_h 是诱导度量的 Chern 联络的 (1,0) 部分。设 $\partial v = \mathrm{P}\,1\,c_\ell v_\ell$，则

$$\begin{aligned}
&\sum_i |v_i|_h^{-1}\left|h\left(\partial v_j, v_i\right)\right| \geq \sum_i |v_i|_h^{-1}\left(|c_i|\,|v_i|_h^2 - \left|\sum_{\ell\neq i} c_\ell h\left(v_\ell, v_i\right)\right|\right) \\
&\geq \sum_i |c_i|\,|v_i|_h - \sum_i \sum_{\ell\neq i} Ce^{-cd}\,|c_\ell|\,|v_\ell|_h \geq \frac{1}{2}\sum_i |c_i|\,|v_i|_h \geq \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\partial_h v_j\right|_h .
\end{aligned} \tag{52}$$

P $_i$ |v$_i$|$_h^{-1}$ |h $\left(\partial$v$_j$中的 i $=$ j 项, v$_i$)| 为 $\left|v_j\right|_h\left|\partial_\zeta \log \left|v_j\right|_h^2\right|$; 而 i, j 项由 (50) 可得,

$$
\begin{aligned}
&\left|v_i\right|_h^{-1}\left|h\left(\partial v_j, v_i\right)\right| \leq\left|v_i\right|_h^{-1}\left(\left|h\left(\left(\partial \pi_j\right) v_j, v_i\right)\right|+\left|h\left(\pi_j\left(\partial v_j\right), v_i\right)\right|\right) \\
&\leq C e^{-c d}\left(\left|\partial \pi_j\right|_h\left|v_j\right|_h+\left|\pi_j\left(\partial v_j\right)\right|_h\right) \leq\left(C e^{-c d}\right)^2\left|v_j\right|_h+C e^{-c d}\left|c_j\right|\left|v_j\right|_h
\end{aligned} \tag{53}
$$

我们有

$$
\left|c_j\right|\left|v_j\right|_h \leq \sum_i\left|c_i\right|\left|v_i\right|_h \leq \sqrt{N}\left|\partial v_j\right|_h . \tag{54}
$$

我们有 N$\sqrt{\text{NC}}$e^{-cd} ≤ 1/100。因此由 (52)、(53)

$$
\left|\partial v_j\right|_h \leq \sqrt{6}\left(\left|v_j\right|_h\left|\partial_\zeta \log \left|v_j\right|_h^2\right|+\frac{1}{2} C e^{-c d}\left|v_j\right|_h+\frac{1}{100}\left|\partial v_j\right|_h\right) .
$$

证毕

3.3.2. 度量的渐近行为。回顾 §3.2 中坐标 z 和 w $=$ z^{-1} 的定义。考虑定义于 $\{|w|<1\} \subset \mathbb{P}^1$ 上的调和丛 $\left(\mathcal{E}, \theta, \text{eh1}, \lambda\right)$, 其中 eh1, λ 在定义 3.5 中定义。我们有 $(\mathcal{E}, \theta)$ $=$L$_{2j=0}\left(\mathcal{O}'\right.$v $_j$, f $_j$dz$\left.\right)$, 其中 $\mathcal{O}'$ $=$ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$(∗[1: 0]), 且 e e (f$_1$, f $_2$, f$_3$) = 2z (z, –z, 0)。下文中我们用 h 表示 h1, λ。如果存在 $\rho_0>1$, 使得某个估计对 $\rho \geq \rho_0$成立, 则称该估计对 $\rho \gg 1$ 成立。注意, 特征值之间的距离

$$
d=\min _{i \neq j}\left(\left|f_i-f_j\right|\right)=2|z|^2 \geq 1
$$

有下界, 且 L $=$max$_j$ |f $_j$| = 2|z|^2。特别地, L/d $=1$与|z|无关。对于 h $_j$ $=$eh $\left|_{\mathcal{L}_j}\right.$, $\left|\left(\text{F}_{\nabla_{h_j}}\right)\right|_{h_j, g_{\mathbb{C}}}$ $=\left|\partial_z \partial_{\bar{z}} \log \right.$ |v$_j$|$_{\widetilde{h}}$|, 由定理 3.1, 存在与 λ 无关的 C、c >0, 使得 $\left|\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} \log \right.$ |v$_j$|$_{\widetilde{h}}$| ≤Ce$^{-c|\zeta|}$, 并且

$$
\left|\widetilde{h}\left(v_i, v_j\right)\right| \leq C\left|v_i\right|_{\widetilde{h}}\left|v_j\right|_{\widetilde{h}} e^{-c \rho}, \ 0 \leq i \neq j \leq 2 . \tag{55}
$$

此外, 根据定理 3.1 |F$^{\nabla_{\widetilde{h}}}$|^2 $\sim_h$ 在 [1 : 0] 附近由一个 L^p 函数控制。由命题 2.12, 存在常数 $0<\text{C}_1<\text{C}_2,$, 它们可能依赖于 λ, 使得

$$
\begin{aligned}
&C_1 \rho^{1+2 \lambda} \leq\left|v_j\right|_{\widetilde{h}}^2 \leq C_2 \rho^{1+2 \lambda}, \ j=0,1 \\
&C_1 \rho^{1-4 \lambda} \leq\left|v_2\right|_{\widetilde{h}}^2 \leq C_2 \rho^{1-4 \lambda} .
\end{aligned} \tag{56}
$$

我们可以利用以下结果改进范数估计并给出梯度估计。该结果可由 [Moc**16**] 中的命题 3.10 轻易推出。

引理 3.10. 设 f >0 是 $\{|\zeta| \geq 1\}$ 上的一个光滑径向函数, 且存在 C$_1$,c$_1>0$, 使得

$$
\left|\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} \log f\right| \leq C_1 e^{-c_1|\zeta|^\ell} \tag{57}
$$

对于某个 $\text{l} \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, 存在 C$_2$,C$_2'>0$, 使得

$$
C_2|\zeta|^\alpha \leq f \leq C_2'|\zeta|^\alpha . \tag{58}
$$

于是存在与 α 无关的 b $=$b(α, f) >0 和 C$_3$, c$_3>0$, 使得

$$
\left|\log f-\log b|\zeta|^\alpha\right|,\left|\zeta \partial_\zeta \log f-\alpha / 2\right| \leq C_3 e^{-c_3|\zeta|^\ell} .
$$

应用上述结果和（44），存在与 λ、$c_\lambda^{(1)}$ 和 $c_\lambda^{(2)}$ 无关的 $C_3, c_3 > 0$，使得

$$\left|\log\left(2\rho^2 (M_\lambda)_{11}(\rho)\right) - \log\left(c_\lambda^{(2)}\rho^{1-4\lambda}\right)\right|,\ \left|\zeta\partial_\zeta \log\left(2\rho^2 (M_\lambda)_{11}(\rho)\right) - (1-4\lambda)/2\right|,$$
$$\left|\log\left(2\rho^2 (M_\lambda)_{22}(\rho) + 2\rho^{-1} m_\lambda(\rho)^{-1}\right) - \log\left(c_\lambda^{(1)}\rho^{1+2\lambda}\right)\right|,$$

(59)

$$\left|\zeta\partial_\zeta \log\left(2\rho^2 (M_\lambda)_{22}(\rho) + 2\rho^{-1} m_\lambda(\rho)^{-1}\right) - (1+2\lambda)/2\right| \le C_3 e^{-c_3\rho}.$$

对于 $(i, j) = (0, 1)$ 分别为 (0,2) 在 (55) 中，根据 (56)，存在与 $\lambda \in I$ 无关的 $C_4, c_4 > 0$，使得对于 $\rho \gg 1$,

$$\left|(M_\lambda)_{22}(\rho) - \rho^{-3} m_\lambda(\rho)^{-1}\right| \le C_4 c_\lambda^{(1)} \rho^{2\lambda-1} e^{-c_4\rho}$$
$$|(M_\lambda)_{12}(\rho)| \le C_4 \left(c_\lambda^{(1)} c_\lambda^{(2)}\right)^{1/2} \rho^{-\lambda-1} e^{-c_4\rho}.$$

利用 $|x-1| \le (\text{常数})|\log x|$ 对于较小的 $|x|$，由 (59) 可知，存在连续依赖于 $c^{(1)}(\lambda)$ 和 $c^{(2)}(\lambda)$ 的 C_5 和 $c_5 > 0$，使得对于 $\rho \gg 1$,

$$\left|M_\lambda(\rho) - \operatorname{diag}\left(c_\lambda^{(2)}\rho^{-4\lambda-1}/2, c_\lambda^{(1)}\rho^{2\lambda-1}/4\right)\right|,\ \left|m_\lambda(\rho) - 4\left(c_\lambda^{(1)}\right)^{-1}\rho^{-2\lambda-2}\right| \le C_5 e^{-c_5\rho}.$$

下文记 $c_\lambda = c_\lambda^{(1)}$。由 $m_\lambda = \det M_\lambda$，我们有 $c_\lambda^{(2)} = 32 c_\lambda^{-2}$。对于 $M_{\infty,\lambda}$ 和命题 3.8 中的 $\mu_\lambda(\rho)$，存在连续依赖于 c_λ 的 $C_5', c_5' > 0$，使得对于 $\rho \gg 1$,

$$\left|M_\lambda(\rho) - M_{\infty,\lambda}(\rho)\right|,\ \left|\rho^2 m_\lambda(\rho) - \mu_\lambda(\rho)\right| \le C_5' e^{-c_5'\rho}. \tag{60}$$

在 §3.3.2 的其余部分中，若未另行说明，不等式中的常数（引理中的除外）将连续依赖于 c_λ。

由于 $M_{\infty,\lambda}$ 是对角矩阵，其对角元形如 $c\rho^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ 和 $c > 0$，因此对于 $\rho \gg 1$，$|M_\lambda M_{\infty,\lambda}^{-1} - I| = O\left(e^{-(\text{const})\rho}\right)$。对于 $\rho \gg 1$，我们也有 $C_5'', c_5'' > 0$，使得 $|M_{\infty,\lambda} M_\lambda^{-1} - I| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(I - M_{\infty,\lambda}^{-1} M_\lambda\right)^k\right| \le C_5'' e^{-c_5''\rho}$。对 m_λ 作类似但更简单的论证，可得对于 $\rho \gg 1$，存在 $C_5''', c_5''' > 0$，使得

$$\left|M_\lambda(\rho)^{-1} - M_{\infty,\lambda}(\rho)^{-1}\right|,\ \left|\rho^2 m_\lambda(\rho)^{-1} - \mu_\lambda(\rho)^{-1}\right| \le C_5''' e^{-c_5'''\rho} \tag{61}$$

3.3.3. 度量的一阶和二阶导数的渐近行为。我们将需要以下初等引理。

引理 3.11. 假设 f 是定义在 $\{\rho > 1\}$ 上的函数，并且 $C_j > 0$、$j = 1$、2、3、c_1, c_2 和 $c_3 > 0$ 满足 $\left|\rho\partial_\rho(\log f - \log g)\right| \le C_1 e^{-c_1\rho}$，其中 $g(\rho) = C_2\rho^{c_2}$，且 $|f - g| \le C_3 e^{-c_3\rho}$。那么存在 $C_4, c_4, \rho_0 > 0$，它们取决于前述常数，使得对于 $\rho \gg 1$,

$$\left|\rho\partial_\rho (f - g)\right| \le C_4 e^{-c_4\rho}.$$

注意，在径向函数上 $\zeta\partial_\zeta = \frac{1}{2}\rho\partial_\rho$ 和 $\rho\partial_\rho \log \rho^\alpha = \alpha$。由引理 3.11 和 (59)，我们有 $C_6, c_6 > 0$，其中

$$\left|\rho\partial_\rho\left((M_\lambda)_{22}(\rho) + \rho^{-3} m_\lambda(\rho)^{-1} - c_\lambda\rho^{-1+2\lambda}/2\right)\right|,$$
$$\left|\rho\partial_\rho\left((M_\lambda)_{11}(\rho) - 16 c_\lambda^{-2}\rho^{-1-4\lambda}\right)\right| \le C_6 e^{-c_6\rho}. \tag{62}$$

为了界定非对角元素的一阶导数，我们对 $|v_j|_{\bar{h}}$ 应用引理 3.10，并且鉴于 $|\lambda| < 1/4$，对于 $|\zeta| \gg 1$，存在一个与 $\lambda \in I$ 无关的 $C_7 > 0$，使得 $\left|\partial_\zeta \log |v_j|^2_{\bar{h}}\right| \leq C_7 |\zeta|^{-1}$。这为引理 3.9 陈述中不等式右侧的第一项提供了一个界。另一项由 $e^{-(\text{const})\rho}$ 所界，并且显然当 $\rho \gg 1$ 时，它也由第一项所界。因此，对于 $\rho \gg 1$，存在一个与 $\lambda \in I$ 无关的 $C_8 > 0$，使得

$$|\partial_{\bar{h}} v_j|_{\bar{h}_{1,\lambda}, g_{\mathbb{C}}} \leq C_8 \rho^{-1} |v_j|_{\bar{h}}$$

由于 $|v_j|_{\bar{h}}$ 满足 (58)，根据引理 3.9 证明中的 (53)、(54) 以及上文，存在 C_9 和 $c_9 > 0$，使得 $\left|z\partial_z e h\left(v_i, v_i\right)\right| = \left|z e h\left(\partial_{\bar{h}} v_i, v_i\right)\right| \leq C_9 e^{-c_9|\zeta|^2}$，其中 i、j。对于 (i, j) = (0, 1) 和 (0, 2)，根据 (60)，存在 C_9' 和 $c_9' > 0$，使得

$$\left|\rho\partial_\rho (M_\lambda)_{12}(\rho)\right|, \ \left|\rho\partial_\rho \left((M_\lambda)_{22}(\rho) - \rho^{-3} m_\lambda(\rho)^{-1}\right)\right| \leq C_9' e^{-c_9'\rho}. \tag{63}$$

此时，我们证明了存在 C_9''、$c_9'' > 0$，使得

$$\left|\partial_\rho \left(M_\lambda(\rho) - M_{\infty,\lambda}(\rho)\right)\right| < C_9'' e^{-c_9''\rho}. \tag{64}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\left(M_\lambda^{-1}\partial_\rho\left(M_\lambda - M_{\infty,\lambda}\right)\right) + \operatorname{tr}\left(\left(M_\lambda^{-1} - M_{\infty,\lambda}^{-1}\right)\partial_\rho M_{\infty,\lambda}\right) \\
&= m_\lambda^{-1}\partial_\rho\left(m_\lambda - \rho^{-2}\mu_\lambda\right) + \left(\rho^2\mu_\lambda^{-1} - m_\lambda^{-1}\right)\partial_\rho\left(\rho^{-2}\mu_\lambda\right).
\end{aligned}$$

由 (61)、(64)，存在 C_9'''、$c_9''' > 0$，使得对于 $\rho \gg 1$，

$$\left|\partial_\rho\left(\rho^2 m_\lambda(\rho) - \mu_\lambda(\rho)\right)\right| \leq C_9''' e^{-c_9'''\rho}.$$

接下来，我们估计二阶导数之差。对于 i、j，我们有

$$\begin{aligned}
\left|\partial_{\bar{z}}\partial_z \widetilde{h}\left(v_i, v_j\right)\right| &\leq \left|h\left(\partial_h v_i, \partial_h v_j\right)\right| + \left|h\left(F_{\nabla_h} v_i, v_j\right)\right| \\
&\leq \left|\widetilde{h}\left(\left(\partial_{\bar{h}}\pi_i v_i\right), \left(\partial_{\bar{h}}\pi_j v_j\right)\right)\right| + \left|\widetilde{h}\left(\left(\partial_{\bar{h}}\pi_i\right) v_i, \pi_j\left(\partial_{\bar{h}} v_j\right)\right)\right| \\
&+ \left|\widetilde{h}\left(\pi_i\left(\partial_{\bar{h}} v_i\right), \left(\partial_{\bar{h}}\pi_j\right) v_j\right)\right| + \left|\widetilde{h}\left(\pi_i\left(\partial_{\bar{h}} v_i\right), \pi_j\left(\partial_{\bar{h}} v_j\right)\right)\right|,
\end{aligned}$$

其中 π_j 是到 $O'v_j$ 的全纯投影。令 $\partial_{\bar{h}} v_i = \sum_\ell c_\ell v_\ell$，由引理 3.9 的证明可得，

$$\left|\pi_i\left(\partial_{\bar{h}} v_i\right)\right|_{\bar{h}} = |c_i| \, |v_i|_{\bar{h}} \leq \sqrt{2}\left|\partial_{\bar{h}} v_i\right|_{\bar{h}}.$$

由 (50)、(51)，存在 C_{10} 和 $c_{10} > 0$，使得对于 $|z| \gg 1$，

$$\left|\partial_{\bar{z}}\partial_z \widetilde{h}\left(v_i, v_j\right)\right| \leq C_{10} e^{-c_{10}|z|^2}.$$

对于 (i, j) = (0, 1)、(0, 2)，由 (63) 可知，存在 $C_{11}, c_{11} > 0$，使得对于 $\rho \gg 1$，

$$\left|\partial_{\bar{\zeta}}\partial_\zeta (M_\lambda)_{12}(\rho)\right|, \ \left|\partial_{\bar{\zeta}}\partial_\zeta\left((M_\lambda)_{22}(\rho) - \rho^{-3} m_\lambda(\rho)^{-1}\right)\right| \leq C_{11} e^{-c_{11}\rho}. \tag{65}$$

根据 (50) 中沿 $O'v_j$ 的曲率估计（其中 j = 0、2），存在与 λ 无关的 $C_{12}, c_{12} > 0$，使得对于 $\rho \gg 1$，

$$\left|\partial_{\bar{\zeta}}\partial_\zeta \log\left(\frac{(M_\lambda)_{22}(\rho) + \rho^{-3} m_\lambda(\rho)^{-1}}{c_\lambda \rho^{2\lambda-1}/2}\right)\right|, \ \left|\partial_{\bar{\zeta}}\partial_\zeta \log\left(\frac{(M_\lambda)_{11}(\rho)}{16 c_\lambda^{-2}\rho^{-4\lambda-1}}\right)\right| \leq C_{12} e^{-c_{12}\rho}.$$

我们需要以下初等引理。

引理 3.12. 设 f(ρ) 在 $\rho > 1$ 上，g(ρ) $= C_1\rho^{c_1}$，$C_2, c_2 > 0$ 满足

$$|f-g|, \left|\partial_\rho (f-g)\right| \le C_2 e^{-c_2\rho}.$$

设 $D := \rho^{-1}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right)$，并假设 $\left|D\ (\log f - \log g)\right| \le C_2 e^{-c_2\rho}$。那么存在依赖于先前常数的 $C_3, c_3 > 0$，使得对于 $\rho \gg 1$,

$$|D(f-g)| \le C_3 e^{-c_3\rho}.$$

由 (60)、(62) 和引理 3.12，存在 C_{13} 和 $c_{13} > 0$，使得对于 $\rho \gg 1$,

$$\left|\partial_{\bar\zeta}\partial_\zeta\left((M_\lambda)_{22}(\rho) + \rho^{-3}m_\lambda(\rho)^{-1} - c_\lambda\rho^{-1+2\lambda}/2\right)\right|,$$

$$\left|\partial_{\bar\zeta}\partial_\zeta\left((M_\lambda)_{11}(\rho) - 16c_\lambda^{-2}\rho^{-1-4\lambda}\right)\right| \le C_{13}e^{-c_{13}\rho}.$$

结合 (65)，存在 C'_{13} 和 $c'_{13} > 0$，使得对于 $\rho \gg 1$,

$$\left|\partial_{\bar\zeta}\partial_\zeta\left((M_\lambda)_{22}(\rho) - c_\lambda\rho^{1-2\lambda}/4\right)\right| \le C'_{13}e^{-c'_{13}\rho}.$$

结合 (65)，存在 C'_{13} 和 $c'_{13} > 0$，使得

$$\left|\partial_{\bar\zeta}\partial_\zeta\left((M_\lambda)_{22}(\rho) - c_\lambda\rho^{1-2\lambda}/4\right)\right| \le C'_{13}e^{-c'_{13}\rho}.$$

至此，我们已证明如下结论：

命题 3.13。命题 3.8 中的所有估计均成立，其中 $C_1, C_2 > 0$ 关于 c_λ 连续变化。

3.3.4. Hermitian-Yang-Mills 度量族的一致有界性。本节完成命题 3.8 的证明，这可由命题 3.13 及以下结论推出：

命题 3.14。函数 $\lambda \mapsto c_\lambda$ 连续。

e 这说明 $\lambda \mapsto h1,\lambda$ 中的次领头阶具有连续性。我们沿用 [Moc**16**] 中秩二情形下命题 3.15 的证明。注意，只要能够证明对于任意 $\lambda_0 \in (-1/4, 1/4)$ 在 $\{\rho \ge 1\}$, $\rho^{2(\lambda_0-\lambda)}m^{\lambda_0}m_\lambda^{-1-1} \to 1$，其一致成立（当 $\lambda \to \lambda_0$ 时），结论便可得出。我们有

$$\left|c_{\lambda_0}c_\lambda^{-1} - 1\right| \le \left|\rho^{2(\lambda-\lambda_0} + 2\mu_{\lambda_0}^{-1}\left(\rho^{-2}\mu_\lambda - m_\lambda\right)\right| + \left|\rho^2\mu_{\lambda_0}^{-1}m_{\lambda_0}\left(\rho^{2(\lambda-\lambda_0}m_\lambda m_{\lambda_0}^{-1} - 1\right)\right| + \left|\rho^2\mu_{\lambda_0}^{-1}m_{\lambda_0} - 1\right|$$

将这三项记为 I、II 和 III。由命题 3.13，存在 $C_I(\lambda)$、$c_I(\lambda)$、C_{II}、C_{III}、$c_{III} > 0$，使得 $I \le C_I(\lambda)e^{-c_I\rho}$，$III \le C_{III}e^{-c_{III}\rho}$，且 $\left|\rho^2\mu_{\lambda_0}^2 m_{\lambda_0}\right| \le C_{II}$。因此，先取 $\rho \to \infty$，便有 $c_\lambda \to c_{\lambda_0}$（当 $\lambda \to \lambda_0$ 时）。

令 $I_0 \Subset (-1/4, 1/4)$ 包含 λ_0。以下不等式中的所有常数仅依赖于 I_0，除非另有说明。考虑一个辅助族 eh_λ^0，其中 $\lambda \in I_0$，满足：(1) $eh_{\lambda_0}^0 = eh1,\lambda_0$；(2) $deteh_\lambda^0 = deteh1,\lambda \equiv 1$ 平凡丛上的标准度量；(3) $eh_\lambda^0 \to eh1,\lambda_0$ 在任意 $K \Subset \mathbb{P}^1 - \{[1 上关于 0]\}$ 一致地收敛于 C^∞ 意义下，当 $\lambda \to \lambda_0$；(4) 在 $\{|z| \ge 1\}$

$$\widetilde{H}_\lambda^0 = \Gamma_\lambda^* \widetilde{H}_{1,\lambda_0}\Gamma_\lambda$$

其中 $eH1,\lambda = \left(eh1,\lambda\right)_{\bar\sigma}, \sigma$ 在（42）中定义，$eH_\lambda^0 = \left(eh_\lambda^0\right)_{\bar\sigma}$ 和

$$\Gamma_\lambda = \mathrm{diag}\left(|z|^{2(\lambda-\lambda_0)}, |z|^{4(\lambda_0-\lambda)}, |z|^{2(\lambda-\lambda_0)}\right).$$

即 eh_λ^0 具有与 $\mathrm{h1}_{,\lambda}$ 在 [1 附近相同的首阶渐近行为： 0]。在 $\mathbb{P}^1$上固定一个 $\mathrm{g}_{\mathbb{P}^1}$ K¨ ahler 度量。

引理 3.15. 设 $\mathbb{F}_\lambda = \mathrm{F}_{\nabla_h} + [\theta, \theta^{*_h}]$，其中 $\mathrm{h} = \mathrm{eh}_\lambda^0$。存在与 λ 无关的 $\mathrm{C} > 0$，使得

$$|\mathbb{F}_\lambda|_{h, g_{\mathbb{P}^1}} \leq C$$

证明。设 $\mathrm{G}_\lambda \in$ 自同构群$(\mathcal{E})$，使得 $(\mathrm{G}_\lambda)_{\widetilde{\sigma}} = \Gamma_\lambda$。在 $\mathrm{e}\sigma$ 下，对于 $|\mathrm{z}| \geq 1$, $[\theta, \theta^{*}{}_{h_\lambda^0}] = \Gamma_\lambda^{-1}[\theta, \theta^{*}{}_{h_{1,\lambda_0}}]\Gamma_\lambda$。对于 $\psi \in$端同态$(\mathcal{E})$，其中 $\Psi = \psi_{\widetilde{\sigma}}$，我们有 $|\psi|^2{}_h$ $= \mathrm{tr}\left(\Psi\left(\mathrm{eH}_\lambda^0\right)^{-1}\Psi^*\,\mathrm{eH}_\lambda^0\right) = \left|\Gamma_\lambda \psi \Gamma_\lambda^{-1}\right|^2{}_{h_{1,\lambda_0}}$。由定理 3.1，存在 $\mathrm{C}_1 > 0$，使得对于 | z| ≫ 1,

$$\left\|\left[\theta, \theta^*_{h_\lambda^0}\right]\right\|^2_{h_\lambda^0, g_{\mathbb{P}^1}} = \left|\Gamma_\lambda^{-1}\left[\theta, \theta^*_{h_{1,\lambda_0}}\right]\Gamma_\lambda\right|^2_{h_\lambda^0, g_{\mathbb{P}^1}} = \left\|\left[\theta, \theta^*_{h_{1,\lambda_0}}\right]\right\|_{h_{1,\lambda_0}, g_{\mathbb{P}^1}} \leq C_1 .$$

我们有

$$\begin{aligned}
\left(F_{\nabla_{h_\lambda^0}}\right)_{\widetilde{\sigma}} &= \partial_{\bar{z}}\left(\left(\widetilde{H}_\lambda^0\right)^{-1}\partial_z \widetilde{H}_\lambda^0\right) d\bar{z}\wedge dz \\
&= \partial_{\bar{z}}\left(\Gamma_\lambda^{-1}\left(\widetilde{H}_{1,\lambda_0}\right)^{-1}\left(\Gamma_\lambda^*\right)^{-1}\partial_z\left(\Gamma_\lambda^*\right)\widetilde{H}_{1,\lambda_0}\Gamma_\lambda\right) d\bar{z}\wedge dz \\
&+ \partial_{\bar{z}}\left(\Gamma_\lambda^{-1}\left(\widetilde{H}_{1,\lambda_0}\right)^{-1}\partial_z\left(\widetilde{H}_{1,\lambda_0}\right)\Gamma_\lambda\right) d\bar{z}\wedge dz + \partial_{\bar{z}}\left(\Gamma_\lambda^{-1}\partial_z\Gamma_\lambda\right) d\bar{z}\wedge dz .
\end{aligned}$$

注意， $\partial_{\bar{z}}\left(\Gamma_\lambda^{-1}\partial_z\Gamma_\lambda\right) = 0$ 并利用

$$\partial(A^{-1}BA) = [A^{-1}BA, A^{-1}\partial A] + A^{-1}(\partial B)A$$

其中 $\partial = \partial_z$ 或 $\partial_{\bar{z}}$，可得

$$\begin{aligned}
\left(F_{\nabla_{h_\lambda^0}}\right)_{\widetilde{\sigma}} &= \Gamma_\lambda^{-1}\partial_{\bar{z}}\left(\widetilde{H}_{1,\lambda_0}^{-1}\partial_z\widetilde{H}_{1,\lambda_0}\right)\Gamma_\lambda + [\Gamma_\lambda^{-1}\widetilde{H}_{1,\lambda_0}^{-1}\left(\partial_z\widetilde{H}_{1,\lambda_0}\right)\Gamma_\lambda, \Gamma_\lambda^{-1}(\partial_{\bar{z}}\Gamma_\lambda)] \\
&+ [\Gamma_\lambda^{-1}\widetilde{H}_{1,\lambda_0}^{-1}\left(\Gamma_\lambda^*\partial_z\Gamma_\lambda^*\right)\widetilde{H}_{1,\lambda_0}\Gamma_\lambda, \Gamma_\lambda^{-1}\widetilde{H}_{1,\lambda_0}^{-1}\partial_{\bar{z}}\left(\widetilde{H}_{1,\lambda_0}\Gamma_\lambda\right)] .
\end{aligned}$$

回顾可知，我们有

$$\widetilde{H}_{1,\lambda_0} = \begin{pmatrix} |z|^{-4} m_{\lambda_0}\left(|z|^2\right)^{-1} & \\ & M_{\lambda_0}\left(|z|^2\right) \end{pmatrix} .$$

要估计交换子项，只需估计非对角元素。由命题 3.13， $\mathrm{eH}_{\mathrm{l}}^{-1}{}_{,\lambda_0}\left(\partial_z\,\mathrm{eH1}_{,\lambda_0}\right)$ 以及 $\Gamma_\lambda^{-1}\mathrm{eH}_{\mathrm{l}}^{-1}{}_{,\lambda_0}\left(\partial_z\,\mathrm{eH1}_{,\lambda_0}\right)\Gamma_\lambda$ 中的非对角元素均由 $\mathrm{C}_2\mathrm{e}^{-c_2\rho}$ 控制，其中 $\mathrm{C}_2, \mathrm{c}_2 > 0$。另一方面， $|\partial_{\bar{z}}\left(\mathrm{eH}_{\mathrm{l}}^{-1}{}_{,\lambda_0}\partial_z\,\mathrm{eH1}_{,\lambda_0}\right)| \leq \mathrm{C}_3\mathrm{e}^{-c_3\rho}$，其中 C_3,$\mathrm{c}_3 > 0$。证毕。

令 k_λ 由 $\mathrm{eh1}_{,\lambda} = \mathrm{eh}_\lambda^0\mathrm{k}_\lambda$给出。我们有 k_λ 是自伴的（相对于两种度量）且为正定。因此，对于某个常数 $\mathrm{C} > 0$，有 $|\mathrm{k}_\lambda| \leq \mathrm{Ctr}\mathrm{k}_\lambda^{2/1} \leq \mathrm{Ctr}\,(\mathrm{k}_\lambda)$。由于 $\det \mathrm{k}_\lambda = 1$， $\mathrm{tr}\,\mathrm{k}_\lambda \geq 3$，且当且仅当 $\mathrm{k}_\lambda = \mathrm{Id}$ 时等号成立。根据 eh_λ^0 的设计，对所有 λ, $\sup_{\mathbb{P}^1}|\mathrm{k}_\lambda| < \infty$。

证明的其余部分与 [Moc16 的命题 3.17] 几乎完全相同。为完整起见，我们仍在此给出证明。以下恒等映射引自 [Sim**88**] 中的命题 3.1

它表达了与两种不同度量 $\partial+\theta$ 相关的两个度量联络¯的曲率之差:

$$i\Lambda_{g_{\mathbb{P}^1}}\bar{\partial}\partial \operatorname{tr} k_\lambda = i\Lambda_{g_{\mathbb{P}^1}}\operatorname{tr}(k_\lambda \mathbb{F}_\lambda) - \left|\left(\left(\bar{\partial}+\theta\right)k_\lambda\right)k_\lambda^{-1/2}\right|^2_{\bar{h}^0_\lambda, g_{\mathbb{P}^1}} . \tag{66}$$

我们还需要引用 [Sim**88**] 中命题 2.1 的以下结果。

引理 3.16. 设 (X, g) 是紧致 K¨ahler 流形，且 $b \in L^p(X, g)$，其中 $p > \dim X$。则存在 $C = C(b) > 0$，使得对 X 上任意有界函数 f，只要 $\Delta_g f \le b$，就有 $\sup_X |f| \le C \|f\|_{L^1(X,g)}$。

引理 3.17. $k_\lambda \to 1$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上一致

证明。记作 $\|\cdot\|_{L^q} = \|\cdot\|_{\bar{h}^0_\lambda, g_{\mathbb{P}^1}, L^q}$，并固定 $p > 2$。如上所述，只需证明 $\operatorname{tr} k_\lambda \to 3$ 一致。对固定的 $\lambda, \mathbb{F}_\lambda$，$k_\lambda$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上有界，因此 $|\Lambda_{g_{\mathbb{P}^1}}\operatorname{tr}(F_\lambda k_\lambda)| \in L^p$，其中 L^p-范数可能依赖于 λ。令 $s_\lambda = k_\lambda / \|k_\lambda\|$，其中 $\|k_\lambda\| = \|k_\lambda\|_{L^p}$。由 (66)

$$i\Lambda_{g_{\mathbb{P}^1}}\bar{\partial}\partial \operatorname{tr} s_\lambda \le \left|\Lambda_{g_{\mathbb{P}^1}}\operatorname{tr}(\mathbb{F}_\lambda s_\lambda)\right| . \tag{67}$$

现在右端关于 λ L^p 有一致有界性。存在 $\phi_\lambda \in L^p_2 \subset C^0, C_6 > 0$，满足 $\sup |\phi_\lambda| \le C_6$，和 $C_7 > 0$，使得

$$i\Lambda_{g_{\mathbb{P}^1}}\bar{\partial}\partial(\operatorname{tr} s_\lambda - \phi_\lambda) \le C_7 .$$

由引理 3.16，存在 $C_8, C_8' > 0$，使得

$$\sup_{\mathbb{P}^1}|s_\lambda| \le C_8' |s_\lambda|_{L^1, \bar{h}^0_\lambda, g_{\mathbb{P}^1}} \le C_8 .$$

我们有 $\mathbb{F}_\lambda \to 0$ 在紧集上一致收敛，当 $\lambda \to \lambda_0$ 时成立。由 (66)、(67) 以及 $\sup |s_\lambda|$ 的一致有界性，当 $\lambda \to \lambda_0$ 时有

$$\left\|\left(\bar{\partial}+\theta\right)s_\lambda\right\|_{L^2} \to 0 .$$

由此可得 $\left\|\bar{\partial} s_\lambda\right\|_{L^2} = \|\partial_h s_\lambda\|_{L^2} \to 0$，其中 $h = e h^0_\lambda$。因此，$\|s_\lambda\|_{L^2_1}$ 关于 λ 一致有界。选取 $s_{\lambda_n} \rightharpoonup s_\infty$ 在 L^2_1 中弱收敛。我们有 $\|s_\infty\|_{L^p} = 1 > 0$，$s_\infty$ 是一个与 θ 对易的非零全纯自同态。由 $\left(\mathcal{P}^{\mathbb{C}}_* e\mathcal{E}\right.$ 的稳定性，$\left.\theta\right)$, s_∞ 必须是恒等映射的非零倍数。由于 $\det k_\lambda = 1$，我们有 $\lim_{n\to\infty} \det s_{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \left\|k_{\lambda_n}\right\|^{-3} = \det s_\infty , 0$。

假设 $\|k_\lambda\|$ 在 λ_0附近没有一致的下界。则存在一个序列 $\left\|k_{\lambda_n}\right\|^{-3} \to 0$（当 $n \to \infty$时），对任意进一步抽取的子序列同样成立，从而导致矛盾。因此，$\|k_\lambda\|$ 在 λ中一致有界。由此可知，$k_\lambda = \|k_\lambda\| s_\lambda$ 在 L^2_1中一致有界。对于一个满足当 $n \to \infty$时 $\lambda_n \to \lambda_0$ 的序列，存在一个弱 L^2_1收敛的子序列 $k^{\lambda_{n_\ell}} \rightharpoonup k_\infty$（当 $l \to \infty$ 时）。通过同样的论证，k_∞ 是恒等映射的非零倍数。此外，由于 $\det k_\lambda \equiv 1$, 有 $k_\infty = \mathrm{Id}$。因此，$k_\lambda \to \mathrm{Id}$在 L^2_1中弱收敛。

我们有

$$i\Lambda_{g_{\mathbb{P}^1}}\bar{\partial}\partial(\operatorname{tr} k_\lambda - 3) = i\Lambda_{g_{\mathbb{P}^1}}\bar{\partial}\partial k_\lambda \le \left|\Lambda_{g_{\mathbb{P}^1}}\operatorname{tr}(\mathbb{F}_\lambda s_\lambda)\right| \|k_\lambda\|$$

它在 L^p 中有界，且关于 λ 一致有界。由引理 3.16，存在 $C_{10} > 0$，使得 $\sup(\operatorname{tr} k_\lambda - 3) \le C_{10}\|\operatorname{tr} k_\lambda - 3\|_{L^1}$。对于任意满足 $\lambda_n \to \lambda_0$ 的序列 k^{λ_n}（当 $n \to \infty$ 时），我们可以取一个如上所述的子序列 $k^{\lambda_{n_k}}$，使得 $\operatorname{tr} k_{\lambda_{n_k}} \to 3$ 属于 L^2，从而属于 L^1。上述

不等式表明 $k_{\lambda_{n_k}} \to 3$ 一致有界，因此 $k^{\lambda_{n_k}} \to Id$ 一致有界。因此，我们有 $k_\lambda \to Id$ 在 $\lambda \to \lambda_0$ 时于 $\mathbb{P}^1$ 上一致成立。证毕。

推论 3.18. 命题 3.4 中定义的矩阵值函数 $H_{1,\lambda}$ 族关于 λ 在任意有界 Ω 上的 $C^0(\Omega)$ 连续。此外，对于 $I_0 \Subset (-1/4, 1/4)$，存在 $C = C(k, I_0, \Omega) > 0$ 使得

$$\sup_K \left|\partial_\zeta^\ell \partial_{\bar\zeta}^m H_{1,\lambda}\right| \le C$$

对于任意 $l + m = k$ 和 $\lambda \in I_0$。

证明。对于 $\lambda_0 \in I_0$, ，由命题 3.14 的证明可知:

- $eh_\lambda^0 \to eh1_{,\lambda_0}$ 在 $\Omega \Subset \mathbb{P}^1 - \{[1 : 0]\}$ 上关于 C^∞ 一致地收敛;
- $k_\lambda \to Id$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上一致地收敛于 $\lambda \to \lambda_0$。

由此可知，当 $\lambda \to \lambda_0$ 时，$eh1_{,\lambda} = eh_\lambda^0 k_\lambda \to eh1_{,\lambda_0}$ 一致收敛。由于 $H1_{,\lambda}(z^2) = K1_{,\lambda}(z)$，我们可知，由 $\lambda \mapsto H1_{,\lambda}$ 给出的映射 $(-1/4, 1/4) \to C^0(\Omega, iu(2))$ 是连续的。

回忆引理 3.3，$eK1_{,\lambda} = \left(eh1_{,\lambda}\right)_e$ 满足 Hitchin 方程的局部形式

$$\partial_{\bar z}\left(\widetilde K_{1,\lambda}^{-1}\partial_z \widetilde K_{1,\lambda}\right) = \left[\theta, \widetilde K_{1,\lambda}^{-1}\theta^* \widetilde K_{1,\lambda}\right], \quad \theta = \begin{pmatrix} & \beta_1 \\ \gamma_1 & \end{pmatrix}.$$

在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{P}^1 - \{[1 : 0]\}$ 上，$eh1_{,\lambda}$ 在 L_1^2 和 C^0 中一致有界。因此，$\left\|eK1_{,\lambda}^{\pm 1}\right\|_{L^\infty}(\Omega)$ 和 $\left\|\nabla eK1_{,\lambda}\right\|_{L^2}(\Omega)$ 一致有界。由柯西-黎曼算子的内部椭圆估计可知，在 $\Omega' \Subset \Omega$ 上存在 $C > 0$ 使得

$$\left\|\widetilde K_{1,\lambda}^{-1}\partial_z \widetilde K_{1,\lambda}\right\|_{L_1^2(\Omega')} \le C\left(\left\|[\theta, \widetilde K_{1,\lambda}^{-1}\theta^* \widetilde K_{1,\lambda}]\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\widetilde K_{1,\lambda}^{-1}\partial_z \widetilde K_{1,\lambda}\right\|_{L^2(\Omega')}\right).$$

由 Sobolev 嵌入 $L_1^2 \subset L^4$, ，我们得知 $\left\|\nabla eK1_{,\lambda}\right\|_{L^4}(\Omega')$ 一致有界。在 $\Omega'' \Subset \Omega$ 上，由拉普拉斯算子的内部椭圆估计以及

$$\partial_{\bar z}\partial_z \widetilde K_{1,\lambda} = \left(\partial_{\bar z}\widetilde K_{1,\lambda}\right)\widetilde K_{1,\lambda}^{-1}\left(\partial_z \widetilde K_{1,\lambda}\right) + \widetilde K_{1,\lambda}\left[\theta, \widetilde K_{1,\lambda}^{-1}\theta^* \widetilde K_{1,\lambda}\right],$$

存在 C' 和 $C'' > 0$，使得

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde K_{1,\lambda}\right\|_{L_2^2(\Omega'')} &\le C'\left(\left\|\left(\partial_{\bar z}\widetilde K_{1,\lambda}\right)\widetilde K_{1,\lambda}^{-1}\left(\partial_z \widetilde K_{1,\lambda}\right)\right\|_{L^2(\Omega')} + \left\|\widetilde K_{1,\lambda}\right\|_{L^2(\Omega'')}\right) \\ &\le C''\left(\left\|\widetilde K_{1,\lambda}\right\|_{L^4(\Omega')}^2 + \left\|\widetilde K_{1,\lambda}\right\|_{L^2(\Omega'')}\right),\end{aligned}$$

在 $\lambda \in I_0$ 上一致有界。接下来，采用与命题 3.4 的证明类似的论证，即可得出第二个结论，这一结论由索伯列夫嵌入定理推出。证毕。

3.4. 粘合。在这一部分中，我们为稳定 SU(1,2) Higgs 丛族 $(F, t\beta, t\gamma)$ 构造 Hitchin 方程的一个 t-族近似解。我们将使用定义 2.10 中的记号以及 (11)，并令 $b = (b_p)_{p \in D_r}$ 为定义 2.13 中相应的 Hecke 参数。令 g_X 为 X 上的一个度量，其在 $(\mathbb{D}_j; \zeta_j)$ 上限制为欧几里得度量，K¨ahler 形式为 $\omega = i2\, d\zeta_j \wedge d\,\bar\zeta_j$。

3.4.1. 圆盘中的粘合。对于每个 j，我们将定义 $F|_{\mathbb{D}_j}$ 上的一个度量，使其在局部模型解与解耦解之间平滑插值。具体做法是在圆盘 $\mathbb{D}'_j$ 上通过微分同胚拉回函数 M_λ。

$$\mathbb{D}'_j \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$$

其在 $\mathbb{D}''_j$ 上限制为恒等映射。该度量将在 $\partial\mathbb{D}'_j$ 处奇异，随后通过一个规范变换得到补偿，使其连续地连接到 $\mathbb{D}_j - \mathbb{D}'_j$ 上的解耦解。

设 λ 是关于 D 的可容许权重（见 §3.2）。与前几节一样，我们固定 $I \Subset (-1/4, 1/4)$，并且常数将与 $\lambda \in I$ 无关，除非另有说明。我们称某个不等式对 $t \gg 1$ 成立，是指存在 $t_0 \geq 1$，使得该不等式对所有 $t \geq t_0$ 都成立。回顾我们对矩阵 $|M| = \max_{i,j}|M_{ij}|$ 的定义。对于 A, B $n \times n$，我们有 $|AB| \leq n|A||B|$。

在 $\mathbb{D}_j$ 上定义

$$\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda} := t^{2/3} G_\lambda(\chi)^* M_\lambda\left(t^{2/3}\chi^{-1}\rho\right) G_\lambda(\chi), \quad \text{on } \mathbb{D}'_j \tag{68}$$

$$\widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda} := t^{2/3} M_{\infty,\lambda}\left(t^{2/3}\rho\right) \quad \text{on } \mathbb{D}_j - \mathbb{D}'_j \tag{69}$$

其中 $M_{\infty,\lambda}$ 如命题 3.8 中所述，且 $\lambda = \lambda_j$,

$$G_\lambda(y) = \mathrm{diag}\left(y^{-2\lambda-1/2}, y^{\lambda-1/2}\right), \tag{70}$$

以及 $\chi(\zeta) := \chi_0(|\zeta|/R)$，其中 $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})$，使得 $\chi_0 \equiv 1$ 在 $[0, 1/3]$ 上，且 $\chi_0 \equiv 0$ 在$[2/3, +\infty)$ 上。注意，存在 $C_1, C_2 > 0$，其中 $|\partial_\rho \chi| < C_1 R^{-1}$ 且 $|\partial^2_\rho \chi| < C_2 R^{-2}$。令

$$\widetilde{H}^{\mathrm{app}}_{t,\lambda}(\zeta_j) := \begin{cases} \widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda}(\zeta_j) & |\zeta_j| < 2R/3 \\ \widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda}(\zeta_j) & 2R/3 \leq |\zeta_j| \leq R \end{cases}. \tag{71}$$

注意，$H^{\mathrm{ext}}_t(\zeta_j)$ 可以自然地延拓到 $0 < |\zeta_j| < 2R/3$，其中

$$\widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda}(\zeta_j) = t^{2/3} M_{\infty,\lambda}\left(t^{2/3}\rho\right) = t^{2/3} G_\lambda(\chi)^* M_{\infty,\lambda}\left(t^{2/3}\chi^{-1}\rho\right) G_\lambda(\chi).$$

令 $a_\lambda = \max(2\lambda, -\lambda)$。我们有 $|G_\lambda(\chi)| < \chi^{-(a_\lambda + \frac{1}{2})}$ 和

$$\left|\partial_\rho G_\lambda(\chi)\right| \leq \left(a_\lambda + \frac{1}{2}\right) C_1 R^{-1} \chi^{-a_\lambda - \frac{3}{2}},$$

$$\left|\partial^2_\rho G_\lambda(\chi)\right| \leq \left(a_\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(a_\lambda + \frac{3}{2}\right) C_1^2 R^{-2} \chi^{-a_\lambda - \frac{5}{2}} + \left(a_\lambda + \frac{1}{2}\right) C_2 R^{-2} \chi^{-a_\lambda - \frac{3}{2}}.$$

注意，$\chi^{-1} \geq 1$。由命题 3.8，在 $\mathbb{D}'_j - \mathrm{np}_j\mathrm{o}$ 中的一个紧集上，存在 C、$c > 0$，使得对于 $t \gg 1$,

$$\begin{aligned} &\left|\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda}(\zeta) - \widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda}(\zeta)\right|, \ \left|\partial_\rho\left(\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda}(\zeta) - \widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda}(\zeta)\right)\right|, \\ &\left|\partial_\zeta\partial_{\bar\zeta}\left(\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda}(\zeta) - \widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda}(\zeta)\right)\right| \leq C e^{-ct^{2/3}}. \end{aligned} \tag{72}$$

类似地，在 $\mathbb{D}'_j - \mathrm{np}_j\mathrm{o}$ 的紧集上，存在 C'、$c' > 0$，使得对于 $t \gg 1$,

$$\begin{aligned} &\left|\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda}(\zeta) - \widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda}(\zeta)\right|, \ \left|\partial_\rho\left(\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda}(\zeta) - \widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda}(\zeta)\right)\right|, \\ &\left|\partial_\zeta\partial_{\bar\zeta}\left(\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda}(\zeta) - \widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda}(\zeta)\right)\right| \leq C' e^{-c'\chi^{-1}}. \end{aligned} \tag{73}$$

根据 $M_{\infty,\lambda}$的正则性以及 (73)，$eH^{app}_{t,\lambda} \in C^0(\mathbb{D}_j) \cap C^2(\mathbb{D}_j^\times)$。（由于标架在 p_j σ 处奇异，因此它在该点也将是奇异的。）我们将需要以下关于矩阵范数的基本估计。

引理 3.19. 设 A、B 满足 $|A|, |A - B| \le M$。则存在 $C_1, C_1' > 0$，使得

$$|\det A - \det B| \le C_1 M |A - B| \tag{74}$$

$$|(\det A) A - (\det B) B| \le C_1' M^2 |A - B| \tag{75}$$

设 A、B 如上，且 $|\det A| \ge \varrho > 0$ 并且 $|A - B| < \varrho/(2C_1M)$。那么存在 $C_2 > 0$ 使得

$$\left|A^{-1} - B^{-1}\right| \le C_2 \epsilon^{-1} \left(1 + M\epsilon^{-2}\right) |A - B| \tag{76}$$

$$\left|(\det A)^{-1} A^{-1} - (\det B)^{-1} B^{-1}\right| \le C_2 \epsilon^{-2} \left(1 + M^4 \epsilon^{-2}\right) |A - B| \tag{77}$$

Set

$$\mathcal{H}_{t,\beta_0,\gamma_0}(H) := \partial_{\bar\zeta}\left(H^{-1}\partial_\zeta H\right) - t^2 \gamma_0 \gamma_0^* H (\det H) + t^2 (\det H)^{-1} H^{-1} \beta_0^* \beta_0 . \tag{78}$$

$\mathcal{H}_{t,\beta_0,\gamma_0}(H) = 0$ 给出了 Hitchin 方程的局部形式，其中 $\beta = \beta_0 d\zeta$、$\gamma = \gamma_0 d\zeta$。

引理 3.20. 对于 $p_j \in D_r$，存在 C、$c > 0$，使得当 $t \gg 1$ 时，在 $\mathbb{D}_j' - \mathbb{D}_j''$ 上，

$$\left|\mathcal{H}_{t,\beta_0,\gamma_0}\left(\widetilde{H}^{int}_{t,\lambda}\right)\right| \le Ce^{-ct^{2/3}},$$

其中，$\beta_0 = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_j^{-1} \end{pmatrix}$ $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_j^2 \end{pmatrix}^T$ 是在（18）中 $\mathbb{D}_j^\times$ 上关于 σ 的局部形式。

证明。设 $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_{t,\beta_0,\gamma_0}$，$H_1 := eH^{int}_{t,\lambda}$，$H_2 := eH^{ext}_{t,\lambda}$。注意，$H_2$ 及其延拓都满足 Hitchin 方程的局部形式，即 $\mathcal{H}_t(H_2) = 0$。我们有 $C_0, c_0 > 0$，使得当 $t \gg 1$ 时，

$$|H_1 - H_2|, \left|\partial_{\bar\zeta}(H_1 - H_2)\right| = \left|\partial_\zeta (H_1 - H_2)\right|, \left|\partial_{\bar\zeta}\partial_\zeta (H_1 - H_2)\right| \le C_0 e^{-c_0 t^{2/3}}$$

另一方面，存在 $C_1 > 0$，使得当 $t \gg 1$ 时，$|H_2|$，$\left|\partial_{\bar\zeta} H_2\right| = \left|\partial_\zeta H_2\right|$，$\left|\partial_{\bar\zeta}\partial_\zeta H_2\right| \le C_1 t^{2a'_\lambda/3}$，其中 $a'_\lambda = \max(-2\lambda, \lambda) \ge 0$。由引理 3.19，当 $t \gg 1$ 时，$\left|\partial_{\bar\zeta} H_1\right| \le 2\left|\partial_{\bar\zeta} H_2\right|$ 且 $\left|H_1^{-1}\right| \le 2\left|H_2^{-1}\right|$。另请注意

$$\partial_{\bar\zeta}\left(H_j^{-1}\partial_\zeta H_j\right) = -H_j^{-1}\left(\partial_{\bar\zeta} H_j\right) H_j^{-1}\left(\partial_\zeta H_j\right) + H_j^{-1}\partial_{\bar\zeta}\partial_\zeta H_j .$$

对于某个 $a' < a$，当 $n \ge 0$ 且 $x \gg 1$ 时，有 $x^n e^{-ax} \le e^{-a'x}$。由 (72) 可知，存在 $C_2, c_2 > 0$，使得当 $t \gg 1$时，

$$\left|\partial_{\bar\zeta}\left(H_1^{-1}\partial_\zeta H_1\right) - \partial_{\bar\zeta}\left(H_2^{-1}\partial_\zeta H_2\right)\right| \le C_2 e^{-c_2 t^{2/3}} \tag{79}$$

存在 $C_3 > 0$，使得当 $t \gg 1$时，$|\det H_2| \ge C_3 t^{-4\lambda/3}$。由引理 3.19 可知，存在 $C_4, c_4 > 0$，使得在 $\mathbb{D}_j' - \mathbb{D}_j''$上，当 $t \gg 1$时，

$$\left|(\det H_1)^{-1} H_1^{-1}\beta_0^*\beta_0 - (\det H_1)^{-1} H_1^{-1}\beta_0^*\beta_0\right| \le C_4 e^{-c_4 t^{2/3}}$$

$$\left|\gamma_0\gamma_0^* H_1 (\det H_1) - \gamma_0\gamma_0^* H_2 (\det H_2)\right| \le C_4 e^{-c_4 t^{2/3}}$$

结论由此及式 (79) 得出。 证毕。

定义

$$\begin{cases} H_t^{\mathrm{int},\beta} = \mathrm{diag}\left(\rho^{1/2}\exp\left(\chi(\rho)\psi_P\left(\frac{8}{3}t\rho^{3/2}\right)\right),1\right) & \text{for } p_j \in D_\beta \\ H_t^{\mathrm{int},\gamma} = \mathrm{diag}\left(\rho^{-1/2}\exp\left(-\chi(\rho)\psi_P\left(\frac{8}{3}t\rho^{3/2}\right)\right),1\right) & \text{for } p_j \in D_\gamma \end{cases} \tag{80}$$

其中，$\rho = |\zeta_j|$ 和 ψ_P 是 Painlev´e 函数。注意，对于任意 l，我们有：对于 $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}'_j$，$\lim_{\zeta\to\zeta_0}\partial^\ell\chi = 0$，其中 $|\zeta_0| = 2R/3$，$\partial = \partial_\zeta$ 或 $\partial_{\bar\zeta}$。

引理 3.21. 对于 $p_j \in D_\beta$ 或 D_γ，存在 C、$c > 0$，使得在 $\mathbb{D}'_j - \mathbb{D}''_j$ 上，当 $t \gg 1$ 时，

$$\left|\mathcal{H}_{t,\beta_0,\gamma_0}\left(H_t^{int,\beta}\right)\right| \quad or \quad \left|\mathcal{H}_{t,\beta'_0,\gamma'_0}\left(H_t^{int,\gamma}\right)\right| \le Ce^{-ct},$$

where $\beta_0 = \begin{pmatrix}\zeta_j & 0\end{pmatrix}, \beta'_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, \gamma_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T, \gamma'_0 = \begin{pmatrix}\zeta_j & 0\end{pmatrix}^T$

证明。对于 $p_j \in D_\gamma$，定义 $H^{\mathrm{ext},\gamma} = \mathrm{diag}\left(\rho^{-1/2},1\right)$ 在 $\mathbb{D}''_j - \mathbb{D}'_j$ 上，其中 $\rho = |\zeta_j|$ 满足局部形式的解耦方程，且 $\beta = \beta'_0 d\zeta_j$、$\gamma = \gamma'_0 d\zeta_j$。根据引理 3.7 中 $\psi = \psi_P$ 的性质，存在 $C_3, C_4 > 0$，使得当 $t \gg 1$ 时，

$$\left|H_t^{\mathrm{int},\gamma} - H^{\mathrm{ext},\gamma}\right|,\ \left|\partial_\rho\left(H_t^{\mathrm{int},\gamma} - H^{\mathrm{ext},\gamma}\right)\right|,\ \left|\partial_{\bar\zeta}\partial_\zeta\left(H_t^{\mathrm{int},\gamma} - H^{\mathrm{ext},\gamma}\right)\right| \le C_3e^{-C_4t}.$$

其余估计可由引理 3.19 和引理 3.20 的证明推出。$p_j \in D_\beta$ 的情形类似。证毕。

引理 3.22. 设 $p_j \in D_r$。函数族 $H^{int}_{1,\lambda}$ 关于 $\lambda \in I$ 在 $C^0(\mathbb{D}'_j)$ 中连续。

证明。根据推论 3.18，$H^{\mathrm{int}}_{1,\lambda} = H1,\lambda$ 在 $\mathbb{D}''_j$ 上关于 $\lambda \in I$ 在 $C^0(\mathbb{D}''_j)$ 中连续。我们将聚焦于环域 $\Omega = \mathbb{D}'_j - \mathbb{D}''_j$。

令 $D_\lambda = \mathrm{diag}\left(4c_\lambda^{-1}, c_\lambda^{1/2}/2\right)$。我们有 $M_{\infty,\lambda}(\rho) = (D_\lambda G_\lambda(\rho))^*(D_\lambda G_\lambda(\rho))$，其中 G_λ 如 (70) 所示。令

$$F_\lambda(\rho) := (D_\lambda^*)^{-1}(G_\lambda(\rho)^*)^{-1}M_\lambda(\rho)G_\lambda(\rho)^{-1}D_\lambda^{-1}.$$

由于 $G_\lambda(a)G_\lambda(b) = G_\lambda(ab)$，我们有：

$$\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{1,\lambda} = G_\lambda(\rho)^*D_\lambda^*F_\lambda\left(\chi^{-1}\rho\right)D_\lambda G_\lambda(\rho).$$

我们有 $H^{\mathrm{int},\lambda} = S^* eH^{\mathrm{int},\lambda}S$，其中

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\zeta & -1\\ \zeta & 1\end{pmatrix}$$

其各项在 Ω 上有界。此外，注意到 $G_\lambda(\rho)^{-1}D_\lambda^{-1}$ 关于 $\lambda \in I$ 在 $C^0(\Omega)$ 中连续。因此，只要 $\zeta \mapsto F_\lambda(|\zeta|)$ 在 $C^0(\mathbb{R}^2 - B(0,R/3))$ 上连续，结论便成立。

对于 $\varrho > 0$，根据命题 3.8，存在 $\rho_1 = \rho_1(\varrho) \ge \max(\rho_0, R/3)$，使得对于 $\rho \ge \rho_1$ 和所有 $\lambda, \lambda_0 \in I$，$|F_\lambda(\rho) - F_{\lambda_0}(\rho)| \le \varrho$。另一方面，根据推论 3.18，存在 $\delta = \delta(\rho_1) > 0$，使得对于 $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ 和 $R/3 \le \rho \le \rho_1$，$|F_\lambda(\rho) - F_{\lambda_0}(\rho)| \le \varrho$。注意，$\delta$ 仅依赖于 $\varrho > 0$。因此，我们有 $F_\lambda \to F_{\lambda_0}$ in $C^0(\mathbb{R}^2 - B(0, R/3))$。

证毕。

3.4.2. 全局构造。在本节中，我们将通过粘合 §3.4.1 中定义在 $F|_{\mathbb{D}_j}$ 上的度量与 $X - \coprod_j \mathbb{D}_j$ 上的解耦解，为权重 $\boldsymbol{\lambda}$ 的选取在 F 上组装一个度量 $h^{app}{}_{t,\boldsymbol{\lambda}}$。显然，为了保证在 $\partial\mathbb{D}_j$ 处的连续性，我们需要谨慎地选择解耦解，即权重 $\boldsymbol{\lambda}$。我们将使用定义 2.11 中的记号 $\varphi_{\boldsymbol{\lambda}}$、$h^0{}_{L,\boldsymbol{\lambda}}$、$h_{L,\mathrm{HE}}$ 和 $g^{\ell j}$。

对于一个稳定 SU(1,2) Higgs 丛 (F, β, γ)，令 b 为相应的 Hecke 参数，如定义 2.13 所述。对于每个 $p_j \in D$，我们固定一个 $L|_{\mathbb{D}_j}$ 的平凡化截面 $ns_0^{(0)}{}_j o$，使得 $\left(s_0^{(0)}{}_j(0)\right)^{\otimes 3} = b_{p_j}$，若 $p_j \in D_r$。令 $\boldsymbol{\lambda}$ 为关于 D 的可容许权重（见 §3.2）。

—

定义3.23. 对于 $t \geq 1, \boldsymbol{\lambda}$，若对每个 $p_j \in D_r$，存在 $L|_{\mathbb{D}_j}$ 的一个平凡化 $s_{0,j}$，使得...

- (1) $s_0^{\otimes 3}{}_j(0) = b_{p_j}$,
- (2) 存在一个适配于 $(L, \boldsymbol{\lambda})$ 的调和度量 h_L，使得在 $\mathbb{D}_j$ 上，

$$\left(h_L^{-2} h_K \oplus h_L h_K\right)_{\boldsymbol{\sigma}} = t^{2/3} M_{\infty,\lambda_j}(t^{2/3}\rho) \text{ for all } p_j \in D_r \tag{81}$$

其中 $\rho = |\zeta_j|$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 由 $s_{0,j}$ 诱导，如定理 2.4 所述。

注意，(81) 正是 (69) 中的 $H_t^{ext}{}_{,\lambda_j}$。此外，条件 (2) 等价于

- (3) 对任意选取的 $\{s_{0,j}\}_{p_j \in D_r}$ 满足 $s_{0,j} \in L|_{\mathbb{D}_j}$ 且 $s_{0,j}(0)^3 = b_{p_j}$ 时，存在一个调和度量 h_L 与 $(L, \boldsymbol{\lambda})$ 相适配，

$$\left|s_{0,j}\right|^2_{h_L} / \left(4c_{\lambda_j}^{-1} t^{4\lambda_j/3} \left|\zeta_j\right|^{2\lambda_j}\right) \xrightarrow{\zeta_j \to 0} 1 \tag{82}$$

注意，通过直接计算可得 (2) $\Rightarrow$ (3)。接下来我们证明 (3)$\Rightarrow$(2)，并引入一些记号。

假设 (3) 成立，并将调和度量记为 $h_{L,\boldsymbol{\lambda},t}$。对于每个 $p_j \in D_r$,

$$\log\left|s_{0,j}^{(0)}\right|^2_{h_{L,\boldsymbol{\lambda},t}} = \log\left(c_{\lambda_j}/4\right) + (4/3)(\log t)\lambda_j + 2\lambda_j \log\left|\zeta_j\right| + o(1) \tag{83}$$

如 $\zeta_j \to 0$。我们有 $\log\left|s_0^{(0)}{}_j\right|^2_{h^0{}_{L,\boldsymbol{\lambda}}} = \log\left|s_0^{(0)}{}_j\right|^2_{h_{L,\mathrm{HE}}} + \varphi_{\boldsymbol{\lambda}}$。根据唯一性，存在 $\eta_{\boldsymbol{\lambda},t} \in \mathbb{R}$ 使得

$$h_{L,\boldsymbol{\lambda},t} = h^0_{L,\boldsymbol{\lambda}} e^{\eta_{\boldsymbol{\lambda},t}} = h_{L,\mathrm{HE}} e^{\varphi_{\boldsymbol{\lambda}} + \eta_{\boldsymbol{\lambda},t}} \tag{84}$$

因此 $\log\left|s_0^{(0)}{}_j\right|^2_{h_{L,\boldsymbol{\lambda},t}} = \eta_{\boldsymbol{\lambda},t} + \log\left|s_0^{(0)}{}_j\right|^2_{h^0{}_{L,\boldsymbol{\lambda}}}$。因此，对于所有 j

$$\log\left|s_{0,j}^{(0)}\right|^2_{h_{L,\boldsymbol{\lambda},t}} = \eta_{\boldsymbol{\lambda},t} + \log\left|s_{0,j}^{(0)}(0)\right|^2_{h_{L,\mathrm{HE}}} + \sum_{\ell=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{\ell}\lambda_k\right) g_{\ell j} + 2\lambda_j \log\left|\zeta_j\right| \tag{85}$$

比较 (83) 和 (85)，我们得到对所有 $p_j \in D_r$

$$\eta_{\boldsymbol{\lambda},t} = (4/3)(\log t)\lambda_j + \log\left(c_{\lambda_j}/4\right) - \log\left|s_{0,j}^{(0)}(0)\right|^2_{h_{L,\mathrm{HE}}} - \sum_{\ell=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{\ell}\lambda_k\right) g_{\ell j}(0) \tag{86}$$

由于 $\mathbb{D}_j$是单连通的，存在唯一的全纯函数 ξ_j 和 $f_{\ell j}$定义在 $\mathbb{D}_j$上，使得

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\xi_j = \log\left|s_{0,j}^{(0)}\right|^2_{h_{L,\mathrm{HE}}} - \log\left|s_{0,j}^{(0)}(0)\right|^2_{h_{L,\mathrm{HE}}} \\ &\mathrm{Re}f_{\ell j} = g_{\ell j} - g_{\ell j}(0) \end{aligned} \tag{87}$$

和 $\xi_j(0) = f_{\ell j}(0) = 0$. 令

$$F_{\lambda,j} = \xi_j + \sum_{\ell=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{\ell}\lambda_k\right) f_{\ell j}\,. \tag{88}$$

定义 3.24. 对于每个 $p_j \in D_r$，令

$$s_{0,j}^{\lambda} = e^{-F_{\lambda,j}/2}\, s_{0,j}^{(0)}\,. \tag{89}$$

对所有 j（分别为 $p_j \in D_r$），令 $\sigma^{(0)} = \{\sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)}\}$ 和 $s^{(0)} = \{s_1^{(0)}, s_2^{(0)}\}$（分别为 $\sigma_j^{\lambda} = \{\sigma_{1,j}^{\lambda}, \sigma_{2,j}^{\lambda}\}$ 和 $s_j^{\lambda} = \{s_{1,j}^{\lambda}, s_{2,j}^{\lambda}\}$）为定理 2.4 中由标架 $\{s_0^{(0)}\}$（分别由标架 $\{s_{0,j}^{\lambda}\}$）诱导的标架。注意，标架 $\sigma = \sigma_j^{\lambda}$ 满足 (81)。

由上可知，条件 (3) 也等价于

- (4) 存在 $\eta \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $p_j \in D_r$，我们有

$$\eta + \psi_j(\lambda) = \log\left(c_{\lambda_j}^{1/2}/2\right) + (2/3)(\log t)\,\lambda_j \tag{90}$$

where $\psi_j(\lambda) = \log\left|s_{0,j}^{(0)}(0)\right|_{h_{L,\mathrm{HE}}} + (1/2)\sum_{\ell=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{\ell}\lambda_k\right) g_{\ell j}(0)$ is an affine function in λ_j with $p_j \in D_r$.

对于 (17) 中的例子，$L \cong K_X$、$b = (1, \ldots, 1)$，而 $h_{L,\mathrm{HE}}$ 可取为 K_X 上的平凡度量。回顾 $c_{\lambda=0} = 4$。因此，对于所有 t，$\lambda = (0, \ldots, 0)$ 都与 b t-相容。还要注意，在这种情况下，(86) 中的 $c_{0,t}$ 与 t 无关。

命题 3.25. 存在 $C > 0$、$t_0 \geq 1$，使得对于 $t \gg 1$，存在一个可容许权重 $\lambda(t) \in \mathscr{P}_{\underline{D}}$，与 b t-相容，并且满足

$$|\lambda(t) - \lambda_\infty| \leq \frac{C}{\log t} \tag{91}$$

其中 λ_∞ 在定理 1.1 中定义。

证明。令 $\lambda_c = -\left(\deg L + (d_\beta - d_\gamma)/4\right)/d_r$，它是 $p_j \in D_r$ 时 $\lambda_{\infty,j}$ 的值。设

$$\widetilde{\mathscr{P}}_{\underline{D}} = \left\{\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{d_r}) \,\middle|\, \mu_k + \lambda_c \in (-1/4, 1/4),\ \sum_k \mu_k = 0\right\} \subset H \subset \mathbb{R}^{d_r}\,,$$

H 中的一个开子集 $= \{\mu \mid \sum_k \mu_k = 0\}$，即 $\mathbb{R}^{d_r}$ 中的一个超平面。由命题 2.6，$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathscr{P}_{\underline{D}}$。令 $\pi : \mathbb{R}^{d_r} \to H, \mu \mapsto \left(\mu_k - d_r^{-1}\sum_{\ell=1}^{d_r}\mu_\ell\right)_{k=1}^{d_r}$。我们有，$\pi(\mu - \mu') = 0$ 当且仅当存在常数 c，使得对所有 k，$\mu_k = \mu'_k + c$。

Set

$$G_t : \widetilde{\mathscr{P}}_{\underline{D}} \to \mathbb{R}^{d_r},\ G_t(\boldsymbol{\mu}) = (3/2)(\log t)^{-1}\left(\psi_{i_k}(\boldsymbol{\lambda}) - \log\left(c_{\lambda_c+\mu_k}^{1/2}/2\right)\right)_{k=1}^{d_r}\,,$$

其中 $1 \le i_1 < \ldots < i_{d_r} \le 4g-4$ 是满足 $p^{i_j} \in D_r$ 的指标，而 λ 是一个元组，其中 $\lambda_{i_k} = \lambda_c + \mu_k$，并令 $F_t = \pi \circ G_t$。我们可以将 (90) 改写为

$$\mu_k = G_t(\boldsymbol{\lambda}) + ((3/2)(\eta/\log t) - \lambda_c) .$$

也就是说，λ 与 b 相容当且仅当

$$F_t(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu} .$$

由命题 3.14，$f F_t$ 连续。存在 $r_0 > 0$，使得 $H \cap B(0, r_0) \Subset \mathscr{P}_{\underline{D}}$，且 $F_t : H \cap B(0, r_0) \to H \cap B(0, r_0)$。于是结论由布劳威尔不动点定理得出。证毕。

令 $r_0 > 0$ 如证明中所述，并设 $I = [\lambda_c - r0, \lambda_c - r_0]$。令

$$\mathcal{I} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{P}_{\underline{D}} \middle| \lambda_j \in I \text{ for } p_j \in D_r \right\} . \tag{92}$$

我们固定一族 $\lambda(t) \in \mathcal{I}$，其中 $t \gg 1$，且与 b 相容。

定义 3.26. 令 $\boldsymbol{\sigma}^{(0)} j$（分别地，$s^{(0)} j$）为定义 3.24 中定义的 $V|_{\mathbb{D}_j}$（分别地，$F|_{\mathbb{D}_j}$）的标架。令 $h^{app} t$ 为 F 上由分段表达式定义的厄米内积

$$\begin{cases} \left(h_t^{app}\right)_{\boldsymbol{\sigma}_j^{(0)}} = T^*_{\boldsymbol{\lambda}(t),j} \widetilde{H}^{app}_{t,\lambda_j(t)} T_{\boldsymbol{\lambda}(t),j} & on\ \mathbb{D}_j,\ p_j \in D_r \\ \left(h_t^{app}\right)_{s_j^{(0)}} = \left(T'_{\boldsymbol{\lambda}(t),j,t}\right)^* H_t^{int,\beta} T'_{\boldsymbol{\lambda}(t),j,t} & on\ \mathbb{D}_j\ p_j \in D_\beta \\ \left(h_t^{app}\right)_{s_j^{(0)}} = \left(T'_{\boldsymbol{\lambda}(t),j,t}\right)^* H_t^{int,\gamma} T'_{\boldsymbol{\lambda}(t),j,t} & on\ \mathbb{D}_j\ p_j \in D_\gamma \\ h_t^{app} = h_{\infty,t} & on\ X - \coprod_j \mathbb{D}_j \end{cases}$$

其中

$$h_{\infty,t} = \iota^* \left(h^{-2}_{L,\boldsymbol{\lambda}(t),t} h_K \oplus h_{L,\boldsymbol{\lambda}(t),t} h_K \right)$$

其中 $\iota : F \to V = L^{-2}K_X \oplus LK_X$ 是与 §2 中的 (F, β, γ) 相对应的 Hecke 修改，而 $eH^{app} t, \lambda$（分别为 $H^{int, \beta} t$、$H^{int, \gamma} t$）定义见 (71)（分别见 (80)），并且

$$\begin{aligned} T_{\boldsymbol{\lambda},j} &= diag\left(e^{-F_{\lambda,j}}, e^{F_{\lambda,j}/2}\right), \\ T'_{\boldsymbol{\lambda},j,t} &= diag\left(\tau^{-1/2}_{\boldsymbol{\lambda}(t),t}, \tau_{\boldsymbol{\lambda}(t),t}\right) , \end{aligned} \tag{93}$$

其中 $F\lambda, j$ 定义见 (88)，并且

$$\tau_{\boldsymbol{\lambda},t} = 4c^{-1}_{\lambda_{j_0}} t^{-4\lambda_{j_0}/3} e^{-\widetilde{F}_{\lambda,j}}$$

其中 j_0 是一个固定指标，使得 $p_{j_0} \in D_r$（回顾命题 2.6，我们有 $D_r, \emptyset$），并且

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{\boldsymbol{\lambda},j} &= F_{\boldsymbol{\lambda},j} - \log \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\lambda},j} , \\ \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\lambda},j} &= \frac{\left|s^{(0)}_{0,j_0}\right|^2_{h_{L,HE}}}{\left|s^{(0)}_{0,j}\right|^2_{h_{L,HE}}} \exp\left(\sum_{\ell=1}^{4g-4} \left(\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k \right) \left(g_{\ell j_0}(0) - g_{\ell j}(0) \right) . \right) \end{aligned}$$

鉴于（89）以及 $\mathbb{D}_j$ 上 $h^{app}{}_t$ 的形式，其中 $p_j \in D_r$，不难验证，对于 $p_j \in D_r$，我们有

$$\left(h_t^{app}\right)_{\sigma_j^1} = t^{2/3} M_{\lambda_j}(t^{2/3}\rho) \ \text{ on } \mathbb{D}''_j \text{ for } p_j \in D_r .$$

因此，根据定义 3.5 和（39），在 $\mathbb{D}_j''$、$\left(\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t\right)_{s^{\lambda(t)}j} = \mathrm{H}_{t,\lambda_j}$（$t$）上，局部模型解见命题 3.4。特别地，我们看到 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t$ 在 $\mathrm{D}r$ 处光滑且非奇异。

Define $\boldsymbol{s}_{j,t}^{\boldsymbol{\lambda}} = \left\{s_{1,j,t}^{\boldsymbol{\lambda}}, s_{2,j,t}^{\boldsymbol{\lambda}}\right\}$ on $F|_{\mathbb{D}_j}$ by

$$\begin{cases} s_{1,j,t}^{\boldsymbol{\lambda}} = \tau_{\boldsymbol{\lambda},t}^{1/2} s_{1,j}^{(0)} \\ s_{2,j,t}^{\boldsymbol{\lambda}} = \tau_{\boldsymbol{\lambda},t} s_{2,j}^{(0)} \end{cases} . \tag{94}$$

通过对 D-可容许权重 $\boldsymbol{\lambda}$进行直接计算，

$$\left(h_t^{\mathrm{app}}\right)_{s_{j,t}^{\boldsymbol{\lambda}}} = \begin{cases} H_t^{\mathrm{int},\beta} & \text{for } p_j \in D_\beta, \\ H_t^{\mathrm{int},\gamma} & \text{for } p_j \in D_\gamma \end{cases} . \tag{95}$$

我们有

$$(h_{\infty,t})_{s_{j,t}^{\boldsymbol{\lambda}}} = \begin{cases} \mathrm{diag}\left(\rho^{1/2}, 1\right) & p_j \in D_\beta \\ \mathrm{diag}\left(\rho^{-1/2}, 1\right) & p_j \in D_\gamma \end{cases} .$$

根据 (80) 中 $\mathrm{H}^{\mathrm{int},\beta}{}_t$ 和 $\mathrm{H}^{\mathrm{int},\gamma}{}_t$ 的定义，以及命题 3.6 中的渐近性质 ψ_P，我们有 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t$ 在 $\mathrm{p}_j \in \mathrm{D}\beta$ 和 $\mathrm{D}\gamma$ 处是 C^2。另一方面，我们在 §3.4.1 中看到，$\mathrm{eH}^{\mathrm{app}}{}_{t,\lambda_j}(t)$ 属于 $\mathrm{C}^2\left(\mathbb{D}_j^{\times}\right)$。根据定义 3.23 中的条件 (2)，我们看到 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t$ 在 $\mathbb{D}_j - \mathbb{D}_j'$ 上与 $\mathrm{h}_{\infty,t}$ 相同。因此，它在 $\mathrm{p}_j \in \mathrm{D}r$ 处也为 C^2。这就证明了下述命题中的第一条陈述。

命题 3.27. 如上所述，$\mathrm{h} = \mathrm{h}^{app}\,\mathrm{t}$ 是 F 上 X 的一个 C^2 度量。存在 C、c > 0，使得对于 t $\gg 1$,

$$\left|F_{\nabla_h} + t^2\gamma \wedge \gamma^{*_h} + t^2\beta^{*_h} \wedge \beta\right|_{h_{t_0}^{app}} \leq Ce^{-ct^{2/3}}$$

证明。根据定义，h 除了在 $\mathbb{D}_j' - \mathbb{D}_j''$ 处以外处处满足 Hitchin 方程。注意，(87) 中的 ξ、$\mathrm{f}_{\ell j}$ in 与 t 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 无关。存在 $\mathrm{C}_0 > 0$，使得对所有$\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{I}$, $\left|\mathrm{F}_{\lambda,\ j}\right| \leq \mathrm{C}_0$ 在 $\mathbb{D}_j$ 上对 $\mathrm{p}_j \in \mathrm{D}r$ 成立。因此，存在 $\mathrm{C}_1 > 0$，使得 $\left|\mathrm{T}_{\lambda,\ j}\right|, \left|\mathrm{T}_{\lambda}^{-1},{}_j\right| < \mathrm{C}_1$。存在 $\mathrm{C}_2 > 0$，使得对所有 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{I}$,

$$\left|\mathcal{H}_{t,\beta_0,\gamma_0}\left(T_{\boldsymbol{\lambda},j}^* \widetilde{H}_{t,\lambda_j}^{\mathrm{app}} T_{\boldsymbol{\lambda},j}\right)\right| = \left|T_{\boldsymbol{\lambda},j}^{-1} \mathcal{H}_{t,\beta_0,\gamma_0}\left(\widetilde{H}_{t,\lambda_j}^{\mathrm{app}}\right) T_{\boldsymbol{\lambda},j}\right| \leq C_2 \left|\mathcal{H}_{t,\beta_0,\gamma_0}\left(\widetilde{H}_{t,\lambda_j}^{\mathrm{app}}\right)\right| ,$$

其中 $\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta_j \quad 1\right)$, $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 \quad \zeta_j\right)^T$。另一方面，由于 $\mathrm{T}'_{\lambda,\ j,\ t}$、$\mathcal{H}_{t,\ \beta_0',\ \gamma_0'}$ 以及$\mathcal{H}_{t,\ \beta_0'',\ \gamma_0''}$（其中 $\beta_0' = \left(1 \quad 0\right)$、$\beta_0'' = \left(\zeta_j \quad 0\right)$、$\gamma_0' = \left(\zeta_j \quad 0\right)^T$ 和 $\gamma_0'' = \left(1 \quad 0\right)^T$）都是对角的，因此有

$$\mathcal{H}_{t,\beta,\gamma}\left(\left(T'_{\boldsymbol{\lambda},j,t}\right)^* \widetilde{H}_{t,\lambda_j}^{\mathrm{app}} T'_{\boldsymbol{\lambda},j,t}\right) = \left(T'_{\boldsymbol{\lambda},j,t}\right)^{-1} \mathcal{H}_{t,\beta,\gamma}\left(\widetilde{H}_{t,\lambda_j}^{\mathrm{app}}\right) T'_{\boldsymbol{\lambda},j,t} = \mathcal{H}_{t,\beta,\gamma}\left(\widetilde{H}_{t,\lambda_j}^{\mathrm{app}}\right)$$

对于 $\beta = \beta_0'$（分别为 β_0''）和 $\gamma = \gamma_0'$（分别为 γ_0''）。结论由结合引理 3.20、3.21 以及 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_{t_0}$ 与 t 无关这一事实得出。证毕。

下述结论将由式 (72) 和下一截面中的引理 4.19 推出。

命题 3.28。在 $\mathrm{X}_0 \subset \mathrm{X} - \mathrm{D}$ 紧的情况下，存在 C、c > 0，使得对于所有 t $\gg 1$,

$$\| g_t - Id \|_{L_2^2(X_0), h_{t_0}^{app}} \leq Ce^{-ct^{2/3}}$$

其中，g_t 由 $\mathrm{h}^{app}\,\mathrm{t} = \mathrm{h}_{\infty,\ t} \cdot \mathrm{g}_t$ 和 $\|\cdot\|_{L_2^2(\mathrm{X}_0),}$ h 在 (100) 中定义。

为便于后续查阅，下面汇总 $h^{\mathrm{app}}{}_{t}$ 在不同区域和标架中的局部形式。

区域	标架	h^{app} 的局部形式
$\mathbb{D}_j - \mathrm{np\,jo}$, $\mathrm{p\,j} \in D_r$	$\sigma_j^{\lambda(t)}$	$\mathrm{eH}^{\mathrm{app}}{}_{t,\lambda_j(t)}$，见 (71)
$\mathbb{D}_j - \mathrm{np\,jo}$, $\mathrm{p\,j} \in D_r$	$\sigma_j^{(0)}$	$T^*_{\lambda(\mathrm{t}),\,\mathrm{j}}\ \mathrm{eH}^{\mathrm{app}}{}_{t,\lambda_j(t)} T_{\lambda(t),j}$ 参见定义 3.26
$\mathbb{D}_j$, $\mathrm{p\,j} \in D_r$	$s_j^{\lambda(t)}$	$S^*\,\mathrm{eH}^{\mathrm{app}}{}_{t,\lambda_j(t)} S$，其中 S 在式 (133) 中定义
$\mathbb{D}_j$, $\mathrm{p\,j} \in D_r$	$s_j^{(0)}$	$S^* T^*_{\lambda(\mathrm{t}),\,\mathrm{j}} \widetilde{H}^{\mathrm{app}}{}_{\mathrm{t},\lambda_j(\mathrm{t})} T_{\lambda(t),j} S$
$\mathbb{D}'_j - \mathrm{np}_j\mathrm{o}$, $\mathrm{p}_j \in D_r$	$\sigma_j^{\lambda(t)}$	$\mathrm{eH}^{\mathrm{int},\ \lambda_j(t)}$，见式 (68)
$\mathbb{D}''_j - \mathrm{np}_j\mathrm{o}$, $\mathrm{p}_j \in D_r$	$\sigma_j^{\lambda(t)}$	$\mathrm{t}^{2/3}\mathrm{M}_{\lambda_j(t)}\left(\mathrm{t}^{2/3}\left\vert\zeta_j\right\vert\right)$，见式（41）
$\mathbb{D}''_j$, $\mathrm{p}_j \in D_r$	$s_j^{\lambda(t)}$	$\mathrm{H}_{t,\ \lambda_j(t)}$，见命题 3.4
$\mathbb{D}_j - \mathbb{D}'_j$, $\mathrm{p\,j} \in D_r$	$\sigma_j^{\lambda(t)}$	$\mathrm{t}^{2/3}\mathrm{M}_{\infty,\ \lambda_j}\left(\mathrm{t}^{2/3}\left\vert\zeta_j\right\vert\right)$，见命题 3.8
$\mathbb{D}_j$, $\mathrm{p\,j} \in D_\beta$	$s_{j,t}^{\lambda(t)}$	$\mathrm{H}^{\mathrm{int},\ \beta}{}_t$，见式 (80)
$\mathbb{D}_j$, $\mathrm{p\,j} \in D_\beta$	$s_j^{(0)}$	$\left(T_{\lambda(t),\ j,\ t}\right)^* \mathrm{H}^{\mathrm{int},\ \beta t}\left(T_{\lambda(t),\ j,\ t}\right)$，见定义 3.26
$\mathbb{D}_j$, $\mathrm{p\,j} \in D_\gamma$	$s_{j,t}^{\lambda(t)}$	$\mathrm{H}^{\mathrm{int},\ \gamma}{}_t$，见（80）
$\mathbb{D}_j$, $\mathrm{p\,j} \in D_\gamma$	$s_j^{(0)}$	$\left(T_{\lambda(t),\ j,\ t}\right)^* \mathrm{H}^{\mathrm{int},\ \gamma t}\left(T_{\lambda(t),\ j,\ t}\right)$，见定义 3.26

4. 主定理的证明

4.1. 线性化。在本节中，我们将 Hitchin 方程在 $h^{\mathrm{app}}{}_{t,\lambda}$ 处对应的算子进行线性化，并使用压缩映射原理在其附近寻找一个解。我们首先定义稍后将使用的各种范数。设 g_X 为 §3.4 中定义的 K¨ahler 度量。对于矩阵值 L^2 函数 M 以及开子集 $\Omega \subset X$，在不会引起歧义时，我们交替使用 L^2-范数的两种等价定义：

$$\|M\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega \mathrm{tr}\,(M^*M)\,\mathrm{dvol}_{g_X}\right)^{1/2}, \tag{96}$$

$$\|M\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega \sup_{i,j} \left\vert M_{ij}\right\vert^2 \mathrm{dvol}_{g_X}\right)^{1/2}, \tag{97}$$

当 $\Omega = X$ 时，记作 $\|\ldots\|_{L^2}$。设 F 为稳定 SU(1,2) Higgs 丛 (F, β, γ) 中的秩二向量丛。在 X 上固定一个有限图册 $(U_\alpha; z_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$，使得 F 在其上由全纯标架 s_α 平凡化。固定一个光滑单位分解 $0 \le \rho_\alpha \le 1$，满足 $\mathrm{supp}\rho_\alpha \subset U^\alpha$ 且 $\mathrm{P}_\alpha \rho_\alpha = 1$。F 上度量的差异将通过如下形式的自同构来度量：$g = e^u$，其中 $u \in \mathrm{End}(F)$。对于局部形式为 $u_{s_\alpha} \in C^k(U_\alpha)$ 的 u，定义

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{j=0}^{k} \max_\alpha \sup_{U_\alpha} \max_{i_1,\ldots,i_k = z_\alpha, \bar{z}_\alpha} \left\vert \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} u_{s_\alpha}\right\vert \tag{98}$$

对于 $u_{s_\alpha} \in L^2(U_\alpha)$ 以及 F 上的度量 h，定义

$$\|u\|_{L^2,h} = \left(\int_X |u|_h^2 \,\mathrm{dvol}_{g_X}\right)^{1/2} = \left(\int_X \mathrm{tr}\,(uu^{*_h})\,\mathrm{dvol}_{g_X}\right)^{1/2}. \tag{99}$$

注意，对于固定的 h，范数

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \left|u_{s_\alpha}\right|^2 dx_\alpha dy_\alpha$$

等价于 $\|\cdot\|_{L^2,h}$。归纳地定义两个等价范数，

$$\|u\|_{L_k^2,h}^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sum_{\ell+m=k} \left|\partial_{\bar z_\alpha}^\ell \partial_{z_\alpha}^m u_{s_\alpha}\right|_{h_{s_\alpha}}^2 \mathrm{dvol}_{g_X} + \|u\|_{L_{k-1}^2,h}^2, \tag{100}$$

$$\|u\|_{L_k^2}^2 = \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sum_{\ell+m=k} \left|\partial_{\bar z_\alpha}^\ell \partial_{z_\alpha}^m u_{s_\alpha}\right|^2 \mathrm{dvol}_{g_X} + \|u\|_{L_{k-1}^2}^2. \tag{101}$$

给定 F 上的度量 h 和 $u \in \mathrm{End}(F)$，定义

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_{t,h} : \mathrm{Herm}\,(F,h) \longrightarrow \Omega^{1,1}\,(\mathrm{End}(F)) \\ &u \longmapsto F_{\nabla_{h\cdot g}} + t^2\gamma\wedge\gamma^{*_{h\cdot g}} + t^2\beta^{*_{h\cdot g}}\wedge\beta \end{aligned} \tag{102}$$

其中 $g = e^u$。注意，由 Sobolev 嵌入可知，若 $u \in L_2^2(\Omega)$，则 $g = e^u \in L_2^2$ 也成立。我们有

$$\mathcal{H}_{t,h} : L_2^2\,(\mathrm{Herm}(F,h)) \longrightarrow L^2\left(\Omega^{1,1}\,(\mathrm{End}(F))\right).$$

这在 $u = 0$ 处的 Fr´echet 导数为

$$D\mathcal{H}_{t,h} : u \longmapsto \bar\partial\partial_h u + t^2\,(\gamma\wedge\gamma^{*_h}\,\hat u - \hat u\beta^{*_h}\wedge\beta),$$

其中 $\hat u = u + (\mathrm{tr}\,u)\,\mathrm{Id}$。注意，$\mathcal{H}_{t,\,h}(u)$ 关于 $h\cdot e^u$ 是厄米的，而不是关于 h。我们转而考虑 $u \mapsto g^{1/2}\mathcal{H}_{t,\,h}\,(u)\,g^{-1/2}$，其中 $g^{1/2} = e^{u/2}$。

定义 4.1. 对于 F 上的 L_2^2 度量 h 和 $t \geq 1$，令

$$\begin{aligned} &L_t^{(h)} : L_2^2\,(Herm(F,h)) \longrightarrow L^2\,(Herm(F,h)) \\ &u \longmapsto i\Lambda\,(2D\mathcal{H}_{t,h}(u) + [u, \mathcal{H}_{t,h}(0)]). \end{aligned}$$

直接计算可得，$L_t(u)$ 是

$$u \mapsto 2i\Lambda g^{1/2}\mathcal{H}_{t,h}(u)g^{-1/2}$$

在 $u = 0$ 处的 Fr_t échet 导数。利用 K¨ahler 恒等式 $[i\Lambda, \partial_h] = -\left(\bar\partial\right)^*, [i\Lambda, \bar\partial] = (\partial_h)^*$ 以及 Kodaira-Nakano 恒等式 $\Delta'' - \Delta' = [iF_{\nabla_h}, \Lambda]$（例如参见 [Dem**86**]），我们可以得到 L_t 的一个更方便的形式。

命题4.2. 我们有

$$L_t^{(h)}(u) = \Delta_h u + t^2\left\{\psi_{\beta,\gamma,h}, \hat u\right\} \tag{103}$$

其中 $\{A, B\} := AB + BA$，$\hat u = u + (\mathrm{tr}u)\,\mathrm{Id}$，$\Delta_h = d_h\,(d_h)^* + (d_h)^*\,d_h$，其中 $d_h = \partial + \partial_h((\cdot)^*$ 是相对于 h 和 g 的形式伴随$_X)$，并且

$$\psi_{\beta,\gamma,h} := i\Lambda\,(\gamma\wedge\gamma^{*_h} - \beta^{*_h}\wedge\beta). \tag{104}$$

定义 4.3. 设 h 是 F 上的度量。它诱导出逐点配对 $\langle u, v\rangle_h = \mathrm{tr}(v^{*_h}u)$，其中 $u, v \in \mathrm{End}(F)$。定义

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle_h := \langle u, \hat{v}\rangle_h = \langle \hat{u}, v\rangle_h$$

其中 $\hat{u} = u + (\mathrm{tr}\, u)\mathrm{Id}$，并记 $((u, v))_h := \int_X \langle\langle u, v\rangle\rangle_h \omega$。

下面的引理可通过直接计算容易验证。

引理 4.4。对于 $u \in L^2_2(\mathrm{Herm}(F,h))$，有

$$Q_t^{(h)}(u) := ((L_t u, u))_h = \|d(tr\, u)\|^2 + 2\|\bar{\partial} u\|^2 + 2t^2\|\hat{u} \circ \gamma\|^2 + 2t^2\|\beta \circ \hat{u}\|^2 \tag{105}$$

其中 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2, h, g_X}$。

由上述引理可知 $\ker L_t = 0$。为此，假设 $L^{(h)}{}_t u = 0$，则 $Q^{(h)}{}_t(u) = 0$。因此 $\mathrm{tr}\, u = c$ 为常数。正如引理 3.1 的证明中所指出的，在 $X - D$ 上，$(F, \beta, \gamma) \cong (V, \begin{pmatrix} 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q^2 \end{pmatrix}^T)$ 在定理 2.4 的 Hecke 修改 ι 下。由于 $\hat{u}\gamma, \beta\hat{u} = 0$，我们有 $u = \mathrm{diag}(2c, -c)$。根据命题 2.6 中 (F, β, γ) 的稳定性，$d_r > 0$。利用局部形式，例如 (15)、(16)，并在 $\mathbb{D}_j$ 上对 $p_j \in D_r$ 进行计算，可得 $c = 0$。请注意，最后这一步至关重要。事实上，限制到 $X - D$ 上时，算子 L_t 确实具有由 $\mathrm{diag}(2c, -c)$ 张成的非平凡核。

令 $h = h^{\mathrm{app}}{}_t$ 为定义 3.26 中的近似解。下文记 $L_t = L^{(h)}{}_t$，并省略下标，写作 $\langle\langle u, v\rangle\rangle, ((u, v))$。

主定理的证明将按以下步骤进行。首先，我们证明当 $t \gg 1$ 时，L_t 存在一个依赖于 t 的下界。特别地，我们证明存在 $C, p > 0$ 使得 $\|L_t u\|_{L^2} \geq Ct^p \|u\|_{L^2_2}$。记 $h = h^{\mathrm{app}}{}_t$，$g = e^u$，并将余项 R_t 定义为

$$2i\Lambda g^{1/2}\mathcal{H}_{t,h}(u)\, g^{-1/2} = 2i\Lambda g^{1/2}\mathcal{H}_{t,h}(0)\, g^{-1/2} + L_t(u) + R_t(u)\,. \tag{106}$$

一个不动点

$$u \longmapsto -L_t^{-1}\left(2i\Lambda g^{1/2}\mathcal{H}_{t,h}(0)g^{-1/2} + R_t(u)\right).$$

是 Hitchin 方程的一个解。我们证明 R_t 的相关上界，并利用压缩映射原理证明相应的迭代序列收敛到一个不动点。

值得指出的是，尽管证明的概要与[MSWW**16**], 的工作相似，但二者存在一些显著差异。例如，[MSWW**16**] 中类似算子 L_t 的全局估计是通过局部估计与区域单调性原理相结合得到的。正如我们上文所见，这种方法不再适用于我们的情形，因为在 $X - \coprod_j \mathbb{D}_j$ 上，算子 L_t 具有非平凡的核。此外，与 [MSWW**16**], 中的命题 5.2 (i) 和引理 6.3 相比，L_t 不存在与 t 无关的 $L^2 \to L^2$ 下界。我们在命题 4.9 中给出了一个依赖于 t 的下界，该下界随 $t \to \infty$。分析还因 $h^{\mathrm{app}}{}_t$ 中权重 $\lambda(t)$ 对 t 的依赖而进一步复杂化。

4.2. L^2 的 L_t 下界。我们将需要以下技术引理。设 $\mathbb{D}$ 为单位圆盘，并在 $L^2_1(\mathbb{D})$ 上定义，

$$Q_t^{(0)}(u) = \|du\|^2_{L^2(\mathbb{D})} + (F_t u, u)_{L^2(\mathbb{D})}$$

其中 $F_t(\zeta) = t^2F(t\zeta)$，且 $F \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 是一个非负函数，满足存在 $A > 0$ 和 $0 < \delta < 1$，使得 $F \geq A > 0$ 在 $B(0,\delta)$ 上成立。若存在 $t_0 \geq 1$，使得当 $t \geq t_0$ 时不等式成立，则称该不等式对 $t \gg 1$ 成立。

引理 4.5. 存在 $C > 0$，使得对所有 $u \in L^2_1(\mathbb{D})$ 和 $t \gg 1$，都有

$$Q_t^{(0)}(u) \geq \frac{C}{\log t}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{D})}$$

证明. 令 $G_t(\zeta) = t^2G(t\zeta)$，其中 $G(\zeta) = A$（当 $|\zeta| < \delta$ 时），其他情况下为零。令

$$P_t(u) := \|du\|^2_{L^2(\mathbb{D})} + (G_tu, u)_{L^2(\mathbb{D})} = \|du\|^2_{L^2(\mathbb{D})} + A^2t^4\|u\|^2_{L^2(B(0,t^{-1}\delta))}$$

我们有 $F_t \geq G_t$，因此 $Q^{(0)}{}_t(u) \geq P_t(u)$，只需从下方估计 P_t。根据 Rayleigh 定理，

$$\lambda_1 = \lambda_1(t) := \inf_{u\in L^2_1(\mathbb{D})-\{0\}} \frac{P_t(u)}{\|u\|^2_{L^2(\mathbb{D})}} \tag{107}$$

它是自伴算子 $u \longmapsto -\Delta u + G_tu$ 在 $L^2(\mathbb{D})$ 上、满足边界条件 $\partial_r u = 0$ 于 $\partial\mathbb{D}$ 的首个特征值。

对于 $t > 0$，我们有 $\lambda_1(t) > 0$。为证明这一点，假设存在一个序列 $u_n \in L^2_1(\mathbb{D})$，满足 $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{D})} = 1$，且当 $n \to \infty$ 时 $P_t(u_n) \to 0$。由此可知，当 $n \to \infty$ 时 $du_n \to 0$ 属于 $L^2(\mathbb{D})$。因此，u_n 在 $L^2_1(\mathbb{D})$ 范数下有界。再次记 u_n 为一个子序列，使得 $u_n \to u_\infty$ 在 $L^2_1(\mathbb{D})$ 中弱收敛，并在 $L^2(\mathbb{D})$ 中强收敛。我们有 $\|u_\infty\|_{L^2(\mathbb{D})} = 1$，并且

$$\|u_\infty\|_{L^2_1(\mathbb{D})} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^2_1(\mathbb{D})} = 1$$

因此 $du_\infty = 0$，且 u_∞ 是一个非零常数。于是我们有 $0 < P_t(u_\infty) \leq \liminf_{n\to\infty} P_t(u_n) = 0$，这导致矛盾。

接下来注意到 $\lambda_1(t) \to 0$ 当 $t \to \infty$。这是因为存在一个在原点处无界的 $L^2_1(\mathbb{D})$ 函数，例如 $\zeta \mapsto \log\log(2 + 1/|\zeta|)$。事实上，存在常数 $C > 0$ 使得

$$\lambda_1(t) \leq \frac{C}{\left(\log\log\frac{t}{2\delta}\right)^2}. \tag{108}$$

为此，令 $\alpha_t = 1/\log\log\left(2 + \delta^{-1}t\right) \leq 1/\log\log(t/(2\delta))$，并考虑以下函数族

$$u_t(\zeta) = \max\left(1 - \alpha_t \log\log\left(2 + \rho^{-1}\right), 0\right),$$

其中 $\rho = |\zeta|$。我们有 $u_t = 0$ 在 $B(0, t^{-1}\delta)$ 上成立，因此 $G_tu_t \equiv 0$。由于 u_t 是 Lipschitz 函数，它属于 $L^2_1(\mathbb{D})$。由于 $1 = u_t + (1 - u_t) \leq u_t + \alpha_t \log\log(2 + 1/\rho)$，当 t 足够大时，我们有

$$\|u_t\|_{L^2(\mathbb{D})} \geq \|1\|_{L^2(\mathbb{D})} - \alpha_t \left\|\log\log(2 + 1/\rho)\right\|_{L^2(\mathbb{D})} \geq \frac{1}{2}\|1\|_{L^2(\mathbb{D})}.$$

另一方面，我们有 $C > 0$，使得

$$\|du_t\|_{L^2(\mathbb{D})} \leq \alpha_t \left\|d\log\log(2 + 1/\rho)\right\|_{L^2(\mathbb{D})} \leq C\alpha_t.$$

估计式 (108) 由上述结果和 (107) 得出。

假设 $u \in L^2_1(\mathbb{D})$ 满足

$$-\Delta u + G_tu = \lambda_1 u$$

根据 $-\Delta+G_t$ 的椭圆估计（例如参见 [GT83, 定理 9.11]）以及索伯列夫不等式，对于任意 $\Omega \Subset \mathbb{D}$，存在 C 和 $C'>0$ 使得

$$\|u\|_{L_2^4(\Omega)} \le C\|\lambda_1 u\|_{L^4(\mathbb{D})} + \|u\|_{L^4(\mathbb{D})} \le C'\|u\|_{L_1^2(\mathbb{D})} < \infty$$

根据索伯列夫嵌入定理（见 [DK90, (A.9) AppendixIV]），有 $u \in L_2^4(\Omega) \subset C^1(\Omega)$。在 G_t 光滑的区域 $D - \partial B(0,\delta)$ 中反复应用内部椭圆正则性估计，可得 $u \in C^1(\mathbb{D}) \cap C^\infty(\mathbb{D} - \partial B(0,\delta))$。

对于某个 $t \ge 1$，设 $u \in C^1(\mathbb{D}) \cap C^\infty(\mathbb{D} - \partial B(0,\delta))$ 是自伴算子 $-\Delta+G_t$ 在诺伊曼边界条件下对应首个特征值的实值特征函数。根据 Courant 节域定理（见 [CH53, §VI.6]），u 在 $\mathbb{D}$ 中没有节点，即我们可以假设 $u > 0$。显然，任何在 $L^2(\mathbb{D})$ 中与 u 正交的函数都不可能具有确定的符号。因此，λ_1的特征空间是一维的。由此，根据 G_t的旋转对称性可知，u 是径向函数。令 v 为

$$u(\zeta) = v(|\zeta|)\,.$$

我们有，v 在 $\rho \in [0,1]$ 上满足边值问题：

$$\begin{cases} v'' + \rho^{-1}v' - G_t u = -\lambda u \text{ on } [0,1] \\ v'(1) = 0 \end{cases} \tag{109}$$

因此，(109) 的最低特征值为 $\lambda_1(t)$。不妨设 $\delta = 1$。注意，当 $t > 1$ 时，(109) 分段表示为

$$v'' + \rho^{-1}v' - \left(At^2 - \lambda\right)u = 0 \text{ on } [0, t^{-1}]$$
$$v'' + \rho^{-1}v' + \lambda u = 0 \text{ on } [t^{-1}, 1]$$

对于 $t \gg 1$，我们有 $\lambda_1 < At^2$, ，且存在 c_0, c_1, c_2 使得

$$v(\rho) = c_0 I_0\left(\sqrt{At^2 - \lambda}\rho\right) \text{ for } 0 \le \rho \le t^{-1}$$
$$v(\rho) = c_1 J_0\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) + c_2 Y_0\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) \text{ for } t^{-1} \le \rho \le 1$$

其中，J_n 和Y_n 分别是第一类和第二类贝塞尔函数，I_n 是第一类修正贝塞尔函数。其定义和性质参见 [AS72，第 9] 章。注意，I_0 和K_0 构成区间$(0, t^{-1}]$上解空间的一组基，且K_0 在原点处无界。v和v′ 在 $\rho = 1/t$处的连续性，以及边界条件$v'(1) = 0$，意味着

$$c_0 I_0\left(\sqrt{At^2 - \lambda}t^{-1}\right) = c_1 J_0\left(\sqrt{\lambda}t^{-1}\right) + c_2 Y_0\left(\sqrt{\lambda}t^{-1}\right)$$
$$c_0\sqrt{At^2 - \lambda} I_1\left(\sqrt{At^2 - \lambda}t^{-1}\right) = -c_1\sqrt{\lambda} J_1\left(\sqrt{\lambda}t^{-1}\right) - c_2\sqrt{\lambda} Y_1\left(\sqrt{\lambda}t^{-1}\right)$$
$$c_1 J_1\left(\sqrt{\lambda}\right) + c_2 Y_1\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0\,.$$

当且仅当 λ 是一个特征值时，c_0, c_1, c_2 的系数矩阵是奇异的。因此，(109) 的特征值恰好是以下表达式的零点

$$\delta_t(\lambda) := \det\begin{pmatrix} 0 & J_1\left(\sqrt{\lambda}\right) & Y_1\left(\sqrt{\lambda}\right) \\ -I_0\left(\sqrt{At^2 - \lambda}\,t^{-1}\right) & J_0\left(\sqrt{\lambda}\,t^{-1}\right) & Y_0\left(\sqrt{\lambda}\,t^{-1}\right) \\ \sqrt{At^2 - \lambda} I_1\left(\sqrt{At^2 - \lambda}\,t^{-1}\right) & \sqrt{\lambda} J_1\left(\sqrt{\lambda}\,t^{-1}\right) & \sqrt{\lambda} Y_1\left(\sqrt{\lambda}\,t^{-1}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \sqrt{\lambda} I_0\left(\sqrt{A - \lambda t^{-2}}\right) g_t(\lambda) + t\sqrt{A - \lambda t^{-2}} I_1\left(\sqrt{A - \lambda t^{-2}}\right) f_t(\lambda)$$

其中

$$g_t(\lambda) := J_1\left(\sqrt{\lambda}\right) Y_1\left(\sqrt{\lambda}\, t^{-1}\right) - J_1\left(\sqrt{\lambda}\, t^{-1}\right) Y_1\left(\sqrt{\lambda}\right)$$
$$f_t(\lambda) := J_1\left(\sqrt{\lambda}\right) Y_0\left(\sqrt{\lambda}\, t^{-1}\right) - J_0\left(\sqrt{\lambda}\, t^{-1}\right) Y_1\left(\sqrt{\lambda}\right)$$

利用相关贝塞尔函数的渐近行为（见 [AS72，第 9 章，(9.1.7)、(9.1.8) 和 (9.1.9)]）

$$J_1(x) \sim \frac{x}{2},\ Y_0(z) \sim \frac{2}{\pi}\log\frac{x}{2},\ J_0(x) \sim 1,\ Y_1(x) \sim -\frac{2}{\pi}\frac{1}{x}$$

其中，当 $x \to 0$ 时，若 $f_1/f_2 \to 1$，则 $f_1(x) \sim f_2(x)$。我们有，当 $\lambda > 0$ 足够小时且 $t \geq 1$ 时，

$$J_1\left(\sqrt{\lambda}\right) Y_0\left(\sqrt{\lambda} t^{-1}\right) \geq 2\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)\left(\frac{2}{\pi}\log\frac{\sqrt{\lambda}t^{-1}}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\log\frac{\sqrt{\lambda}}{2t}$$
$$-J_0\left(\sqrt{\lambda}t^{-1}\right) Y_1\left(\sqrt{\lambda}\right) \geq \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}$$
$$J_1\left(\sqrt{\lambda}\right) Y_1\left(\sqrt{\lambda}t^{-1}\right) \geq -2\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)\left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\lambda}t^{-1}}\right) = -\frac{2t}{\pi}$$
$$-J_1\left(\sqrt{\lambda}t^{-1}\right) Y_1\left(\sqrt{\lambda}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\lambda}t^{-1}}{2}\right)\left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{2\pi t},$$

因此

$$f_t(\lambda) \geq \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\left(1 + 2\lambda\log\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2t}\right)\right)$$
$$g_t(\lambda) \geq -\frac{2}{\pi}t + \frac{1}{2\pi t} \geq -t.$$

也容易看出，当 $\lambda > 0$ 足够小时且 $t \geq 1$ 时，存在 C、$C' > 0$，使得

$$I_0\left(\sqrt{A - \lambda/t^2}\right) \leq C,\ \sqrt{A - \lambda/t^2} I_1\left(\sqrt{A - \lambda/t^2}\right) \geq C'$$

因此，当 $t \geq 1$ 且 λ 足够小时，我们有

$$\delta_t(\lambda) \geq -Ct\sqrt{\lambda} + C'\frac{t}{\pi\sqrt{\lambda}}\left(1 + 2\lambda\log\frac{\sqrt{\lambda}}{2t}\right)$$
$$= \frac{2C't\sqrt{\lambda}}{\pi}\left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}\log\lambda - \log(2t) - \frac{\pi C}{2C'}\right)$$
$$\geq \frac{2C't\sqrt{\lambda}}{\pi}\left(\frac{1}{2\lambda} - \log\left(2C''t\right)\right)$$

其中 $C'' = e^{-\pi C/(4C')}$。由式（108）可知，对于 $t \gg 1$，上述不等式以 $\lambda = \lambda_1(t)$ 成立，因此

$$\frac{1}{2\lambda_1(t)} - \log\left(2C''t\right) \leq \frac{\pi}{2C't\sqrt{\lambda_1(t)}}\delta_t\left(\lambda_1(t)\right) = 0,$$

并且当 t 足够大时，

$$\lambda_1(t) \geq \frac{1}{2\log\left(2C''t\right)}.$$

证毕。

接下来，我们证明 Q_t 的 L 下界，其中 h_t 按照 (105) 中的定义。为此，我们需要以下三个初等引理。除其中一个外，其余证明均略去。

引理 4.6。设 $x_1, \ldots, x_{N_1} \in L^2(\Omega)$，且 $A = \left(A_{ij}\right) N_2 \times N_1$ 的元素属于 L^∞，使得对于几乎处处的 $x \in \Omega$，A 的奇异值对所有 j 均满足 $\lambda_j \leq 1$。则

$$\sum_{j=1}^{N_1} \|x_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \sum_{j=1}^{N_2} \left\| \sum_{\ell=1}^{N_1} A_{j\ell} x_\ell \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

引理4.7。存在 $C > 0$，使得对于 A、$B > 0$、2×2 厄米矩阵，且$|A - B| \leq |A|/2$，$|A| \leq L$，有 $|A^{1/2} - B^{1/2}| \leq C|A - B|$。

回顾一下，对于正定厄米矩阵 A，我们用 $A^{1/2}$ 表示其唯一的正定厄米平方根。我们有：

引理 4.8。设 A 为 2×2 正定厄米矩阵，且 $B = A^{1/2}$。则，

$$B_{12} = \frac{A_{12}}{tr\, B}$$

证明。设 $a = a_0 I + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$，其中 σ_j 在 (117) 中定义，且 $a_j \in \mathbb{R}$，使得

$$A = e^a = e^{a_0}\left((\cosh r)\, I + \frac{\sinh r}{r}\,(a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3)\right)$$

其中 $r = q\, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$。特别地，$A_{12} = e^{a_0}(a_1 - ia_2)\sinh(r)/r$。我们还有 $B = e^{a/2}$，且 $\operatorname{tr} B = 2e^{a_0/2}\cosh(r/2)$。由于 $B_{12} = e^{a_0/2}(a_1 - ia_2)\sinh(r/2)/r$，结论得证。证毕。

命题 4.9。存在 $C > 0$，使得对于 $u \in L^2_1$, $t \gg 1$

$$Q_t(u) \geq \frac{C}{\log t}\|u\|^2_{L^2, h_t^{app}}.$$

证明。回顾定义 3.26 中定义的权重组 $\lambda = \lambda(t) \in \mathcal{I}$，当 t 足够大且满足 $\lambda \in \mathcal{I}$ 和 $\lambda_j(t) \in I_j$ 时，该权重组成立。我们称不等式中的常数关于 λ 是一致的，如果该不等式对所有 $\lambda \in \cup_j I_j$ 均成立。

我们首先关注 $Q_t(u)$ 中与 Higgs 场相关的项。令

$$Q_t^{\mathrm{Higgs}}(u) = 4t^2\|\hat{u} \circ \beta\|^2_{L^2, h_t^{\mathrm{app}}} + 4t^2\|\gamma \circ \hat{u}\|^2_{L^2, h_t^{\mathrm{app}}}. \tag{110}$$

将上述表达式中的 L^2 替换为 $L^2(\Omega)$，记所得结果为 $Q^{\mathrm{Higgs}}{}_{t,\Omega}(u)$。我们有

$$Q_t^{\mathrm{Higgs}}(u) = Q_{t, X - \coprod_{j=1}^{4g-4} \mathbb{D}'_j}(u) + \sum_{j=1}^{4g-4} Q_{t, \mathbb{D}'_j}(u).$$

首先考虑 $\mathbb{D}'_j$ 当 $p_j \in D_r$ 时。我们构造一个 $h^{\mathrm{app}}{}_t$-酉标架，并相对于该标架对 u 进行分解。随后，我们将 $Q^{\mathrm{Higgs}}{}_{t,\mathbb{D}'_j}(u)$ 从下方估计为形如 $\||f_\ell u_\ell\|^2{}_{L^2}$ 的各项之和，其中 u_ℓ 是分解中的分量。当 $t \gg 1$ 时，除了其中一项外，f_ℓ 的下界将与 t 无关。类似地，对于 $p_j \in D\beta$、$D\gamma$，可以得到 $Q^{\mathrm{Higgs}}{}_{t,\mathbb{D}'_j}(u)$ 与 t 无关的下界；对于除一项外的所有项，也可以得到 $Q^{\mathrm{Higgs}}{}_{t,X-\coprod_j \mathbb{D}'_j}(u)$ 的此类下界

其余各项的下界以及其导数的 L^2-范数将由引理 4.5 得出。

令 $p_j \in D_r$，并设 $\zeta = \zeta_j$，$\lambda = \lambda_j$。令 N_λ（分别为 $N_{\infty,\lambda}$）为满足下列条件的唯一正定厄米矩阵

$$N_\lambda^2 = M_\lambda, \quad \text{resp. } N_{\infty,\lambda}^2 = M_{\infty,\lambda}. \tag{111}$$

其中 M_λ（分别为 $M_{\infty,\lambda}$）定义于式（39）（分别见命题 3.8）。与（68）和（69）中的 $eH_t^{int}{}_{,\lambda}$ 及 $eH_t^{ext}{}_{\lambda,}$类似，设

$$\begin{aligned} E_{t,\lambda}^{\text{int}} &= t^{-1/3} G_\lambda(\chi)^{-1} N_\lambda(t^{2/3}\chi\rho) \text{ on } \mathbb{D}_j' \\ E_{t,\lambda}^{\text{ext}} &= t^{-1/3} N_{\infty,\lambda}(t^{2/3}\rho) \text{ on } \mathbb{D}_j - \mathbb{D}_j' \end{aligned} \tag{112}$$

其中 $\rho = |\zeta|$、χ和 G_λ 定义于 §3.4。注意，$E_t^{ext}{}_{,\lambda}$ 可延拓至 $\mathbb{D}_j'$，其中我们有 $E_t^{ext}{}_{,\lambda}(\zeta) = t^{-1/3} G_\lambda(\chi) N_{\infty,\lambda}(t^{2/3}\chi\rho)$。分段函数

$$E_{t,\lambda_j(t)}^{\text{app}} = \begin{cases} E_{t,\lambda_j(t)}^{\text{int}} & \text{on } \mathbb{D}_j' \\ E_{t,\lambda_j(t)}^{\text{ext}} & \text{on } \mathbb{D}_j - \mathbb{D}_j' \end{cases} \tag{113}$$

在 $\partial\mathbb{D}_j'$ 处是 C^2。令 $e_{i,j,t} = \sum_{k=1}^2 \left(E_{t,\lambda_j(t)}^{\text{app}}\right)_{ki} \sigma^{\lambda(t)}{}_{k,j}$，其中 $1 \le j \le 4g-4$ 且 $i = 1, 2$；标架 $\sigma^{\lambda(t)}{}_j$ 由定义 3.24 给出。注意，在 $\mathbb{D}_j - \mathbb{D}_j'$ 上我们有

$$\begin{aligned} e_{1,j,t} &= (1/4) c_{\lambda_j(t)} \rho^{2\lambda_j(t)+1/2} t^{4\lambda_j/3} \sigma_{1,j}^{\lambda(t)} \\ e_{2,j,t} &= 2 c_{\lambda_j(t)}^{-1/2} \rho^{-\lambda_j(t)+1/2} t^{-2\lambda_j/3} \sigma_{2,j}^{\lambda(t)}. \end{aligned}$$

我们有，$e_{j,t}$是 F 在 $\mathbb{D}_j$ 上的 $h^{app}{}_t$-酉标架。令 $e\rho = t^{2/3}\chi^{-1}\rho$，并设

$$\begin{aligned} n_{ij,\lambda}(\widetilde{\rho}) &= (N_\lambda)_{ij}(\widetilde{\rho}), \quad j = 1, 2 \\ n_\lambda(\widetilde{\rho}) &= \widetilde{\rho}^{-1} \det N_\lambda(\widetilde{\rho}). \end{aligned} \tag{114}$$

令 $\beta = \beta_0 d\zeta$ 且 $\gamma = \gamma_0 d\zeta$。在 $\mathbb{D}_j'$ 上，满足 $\lambda_j = \lambda_j(t)$,

$$\begin{aligned} (\beta_0)_{e_{j,t}} &= t^{-1/3}\chi^{1/2} n_{\lambda_j} \begin{pmatrix} \overline{n_{12,\lambda_j}} & n_{22,\lambda_j} \end{pmatrix}, \\ (\gamma_0)_{e_{j,t}} &= t^{-1/3}\chi^{1/2} n_{\lambda_j}^{-2} \begin{pmatrix} -n_{12,\lambda_j} & n_{11,\lambda_j} \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \tag{115}$$

对于 $u \in \text{Herm}(F, h^{app}{}_t)$，记

$$(u)_{e_{j,t}} = u_0\sigma_0 + u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3 \tag{116}$$

其中

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = i\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \tag{117}$$

注意，σ_1、σ_2、σ_3 是泡利矩阵（2×2 无迹厄米矩阵空间的一组基）；根据 §4.1 末尾的评述，σ_0 在限制于 $X - D$ 时张成非平凡的 $\ker L_t$。

回想一下，我们有 $g_X = d\zeta_j \cdot d\bar{\zeta}_j$ on $\mathbb{D}_j$，因此 $|d\zeta|^2 = 2$。于是 $\|\beta\hat{}u\|^2{}_{h^{app}{}_t} = 2\|\beta_0\hat{}u\|^2{}_{h^{app}{}_t}$，并且 $\|\hat{}u\gamma\|^2{}_{h^{app}{}_t} = 2\|\hat{}u\gamma_0\|^2{}_{h^{app}{}_t}$。根据上述分解，

$$Q_{t,\mathbb{D}_j'}^{\text{Higgs}}(u) = 4t^2\left(\|\hat{u}\beta\|^2_{L^2(\mathbb{D}_j'),h_t^{\text{app}}} + \|\gamma\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{D}_j'),h_t^{\text{app}}}\right) = 4t^{4/3}\left(\sum_{\ell=1}^4 \|S_{\ell,j}\|^2_{L^2(\mathbb{D}_j')}\right) \tag{118}$$

其中

$$S_{1,j} = \chi^{1/2}\left[\left(-n_{\lambda_j}^{-2}n_{12,\lambda_j}\right)(3u_0+u_3)+\left(n_{\lambda_j}^{-2}n_{11,\lambda_j}\right)(u_1-iu_2)\right]$$
$$S_{2,j} = \chi^{1/2}\left[\left(n_{\lambda_j}n_{12,\lambda_j}\right)(3u_0+u_3)+\left(n_{\lambda_j}n_{22,\lambda}\right)(u_1-iu_2)\right]$$
$$S_{3,j} = \chi^{1/2}\left[\left(n_{\lambda_j}^{-2}n_{11,\lambda_j}\right)(-u_3)+\left(-n_{\lambda_j}^{-2}\overline{n_{12,\lambda_j}}\right)(u_1+iu_2)\right]$$
$$S_{4,j} = \chi^{1/2}\left[\left(n_{\lambda_j}n_{22,\lambda_j}\right)(-u_3)+\left(n_{\lambda_j}\overline{n_{12,\lambda_j}}\right)(u_1-iu_2)\right]$$

Let

$$B = \begin{pmatrix} \chi^{-1/2}n_\lambda^3 & \chi^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{-1/2}n_\lambda^3 & \chi^{-1/2} \\ -n_\lambda^3 n_{22,\lambda} & n_{11,\lambda} & n_\lambda^3 n_{12,\lambda} & n_{12,\lambda} \end{pmatrix}$$

矩阵 B*B 的特征多项式为

$$\mathrm{char}_{B^*B}(t) = t\left(t-\chi^{-1}\left(1+n_\lambda^6\right)\right)\left(t^2-\nu_\lambda^{-2}t+\chi^{-1}\left(n_{11,\lambda}+n_{22,\lambda}\right)^2 n_\lambda^6\right)$$

其中

$$\nu_\lambda = \left(\chi^{-1}\left(1+n_\lambda^6\right)+\left(n_{11,\lambda}^2+|n_{12,\lambda}|^2+n_\lambda^6\left(n_{22,\lambda}^2+|n_{12,\lambda}|^2\right)\right)\right)^{-1/2} \tag{119}$$

矩阵 B*B 的最大特征值不超过 $1/\nu_\lambda^2$。令 $A = \nu_\lambda B$，直接计算可得，

$$\sum_{\ell=1}^4 A_{k\ell}S_\ell = \begin{cases} \nu_\lambda n_\lambda(n_{11,\lambda}+n_{22,\lambda})(u_1-iu_2) & k=1, \\ \sum_{\ell=1}^4 A_{2\ell}S_\ell = -\nu_\lambda n_\lambda(n_{11,\lambda}+n_{22,\lambda})u_3 & k=2, \\ \sum_{\ell=1}^4 A_{3\ell}S_\ell = 3\nu_\lambda\chi^{1/2}n_\lambda n_{12,\lambda}\left(n_{11,\lambda}+n_{22,\lambda}\right)u_0 & k=3\,. \end{cases}$$

注意到 $\chi \equiv 1$ on $\mathbb{D}_j''$，根据引理 4.6

$$Q_{t,\mathbb{D}_j'}^{\mathrm{Higgs}}(u) \geq 4t^{4/3}\left\|\nu_\lambda n_\lambda(n_{11,\lambda}+n_{22,\lambda})(u_1-iu_2)\right\|_{L^2(\mathbb{D}_j')}^2$$
$$+\,4t^{4/3}\left\|\nu_\lambda n_\lambda(n11,\ \lambda+n22,\ \lambda)u_3\right\|_{L^2(\mathbb{D}_j')}^2+4t^{4/3}\left\|3n12,\ \lambda\nu n_\lambda(n11,\ \lambda+n22,\ \lambda)u_0\right\|_{L^2(\mathbb{D}_j'')}^2 \tag{120}$$

其中 $\lambda = \lambda_j(t)$。

接下来，我们为正函数 $\nu_\lambda n_\lambda(n11,\ \lambda+n22,\ \lambda)$ 给出一个关于 λ 的一致下界。固定 $\rho_1 \in [R/3, 2R/3)$，并分别考察 $\rho \in (\rho_1, 2R/3)$ 和 $(0,\rho_1]$。对于第一个区域，我们使用命题 3.8 中的渐近行为。对于第二个区域（它在 $\mathbb{D}_j'$ 中相对紧），我们利用推论 3.18 中 λ 的连续性。由命题 3.8 以及引理 3.19、4.7，存在 C、c > 0，使得对于 $\rho \gg 1$ 和 $\lambda \in I$,

$$\left|N_\lambda - N_{\infty,\lambda}\right| \leq Ce^{-c\rho} \tag{121}$$

注意，$N_\infty(\rho) = \mathrm{diag}\left(c_\lambda\rho^{2\lambda+1/2}/4,\ 2c_\lambda^{1/2}\rho^{-\lambda+1/2}\right)$。对于 $\rho \gg 1$，$t \geq 1$，我们有$\chi^{-1} = t^{-2/3}\rho^{-1}e\rho \leq \rho_0^{-1}e\rho$。因此，由 (119) 得，

$$\nu_\lambda^{-2} \leq \rho_0^{-1}\widetilde{\rho}\left(1+n_\lambda^6\right)+\left(n_{11,\lambda}^2+|n_{12,\lambda}|^2+n_\lambda^6\left(n_{22,\lambda}^2+|n_{12,\lambda}|^2\right)\right)$$

由式 (121)，存在与 λ 无关的 $e\rho_0$、$C_1, C_2 > 0$，使得对所有 $e\rho \geq e\rho_0$,

$$\nu_\lambda \geq C_1\widetilde{\rho}^{-\frac{1}{2}-3a_\lambda},\quad n_\lambda(n_{11,\lambda}+n_{22,\lambda}) \geq C_2\widetilde{\rho}^{\frac{1}{2}+3a_\lambda}$$

其中 $a_\lambda = \max(0,\lambda)$。对于 $\lambda \in I$，我们有

$$\nu_\lambda n_\lambda(n_{11,\lambda}+n_{22,\lambda}) \geq C_1C_2 > 0 \ \text{ for } \widetilde{\rho} \geq \widetilde{\rho}_0\,. \tag{122}$$

注意， $\rho \mapsto e\rho = t^{2/3}\rho\chi(\rho)^{-1}$ 给出了一个微分同胚 $(0, 2R/3) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$。令 ρ_1 满足 $e\rho(\rho_1) = e\rho_0$，对于 $0 \le \rho \le \rho_1$，存在常数 $\chi_0 > 0$ 使得 $\chi \ge \chi_0$。我们有

$$\nu_\lambda^{-2} \le \chi_0^{-1}\left(1 + n_\lambda^6\right) + \left(n_{11,\lambda}^2 + |n_{12,\lambda}|^2 + n_\lambda^6\left(n_{22,\lambda}^2 + |n_{12,\lambda}|^2\right)\right). \tag{123}$$

通过使用 (40) 直接计算，$\mathrm{tr}\, M_\lambda(\rho) = \rho^{-2}(H1,\lambda)_{11} + (H1,\lambda)_{22}$，行列式 $M_\lambda(\rho) = \rho^{-2}$ 行列式 $H1,\lambda$。令 $x_1, x_2 > 0$ 为 M_λ 的两个特征值，则

$$\begin{aligned}&(n_{11,\lambda}(\rho) + n_{22,\lambda}(\rho))^2 = \left(x_1^{-1/2} + x_2^{-1/2}\right)^2\\ &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{1}{\det H_{1,\lambda}}\left((H_{1,\lambda})_{11} + 2(\det H_{1,\lambda})^{1/2}\rho + (H_{1,\lambda})_{22}\rho^2\right)\end{aligned} \tag{124}$$

并且 $n_\lambda(\rho) = (\text{行列式 } H1,\lambda)^{-1/2}$。根据推论 3.18，存在一个关于 λ 一致的 $C_3 > 0$，使得对于 $e\rho \le e\rho_0$，$n_\lambda(n11,\lambda + n22,\lambda) \ge C_3$。根据同一推论，$n_\lambda$ 在 $\lambda \in I = I_j$ 上有一致的上界。因此存在一个关于 λ 一致的 $C_3' > 0$，使得在 $e\rho \le e\rho_0$ 上，$\nu_\lambda^{-2} \le C_3'(n211,\lambda + n222,\lambda + |n12,\lambda|^2 + 1)$。此外，由于 $\det N_\lambda > 0$，我们有 $|n12,\lambda|^2 < n11,\lambda n22,\lambda \le (n211,\lambda + n222,\lambda)/2$。因此存在一个关于 λ 一致的 $C_4 > 0$，使得对于 $e\rho \le e\rho_0$，$\nu_\lambda \ge C_4$。因此

$$\nu_\lambda n_\lambda\left(n_{11,\lambda} + n_{22,\lambda}\right) \ge C_3 C_4 \quad \text{for } \widetilde{\rho} \le \widetilde{\rho}_0.$$

因此，在 $\mathbb{D}_j'$

$$\nu_\lambda n_\lambda\left(n_{11,\lambda} + n_{22,\lambda}\right) \ge C_5 = \min\{C_1 C_2, C_3 C_4\}$$

其中 C_5 关于 λ 一致。

由 (120) 和上述估计，对于 $t \ge 1$，我们有，

$$Q_{t,\mathbb{D}_j'}^{\mathrm{Higgs}} \ge 4C_5^2\left(\|u_1\|_{L^2(\mathbb{D}_j')}^2 + \|u_2\|_{L^2(\mathbb{D}_j')}^2 + \|u_3\|_{L^2(\mathbb{D}_j')}^2\right) + 4C_5^2 t^{4/3}\|3n_{12,\lambda_j(t)}u_0\|_{L^2(\mathbb{D}_j'')}^2 \tag{125}$$

由 (37) 和 (41)，我们得到

$$\left(M_\lambda^{-1}\right)_{12}(\rho) = \frac{1}{2\det H_{1,\lambda}}\left((H_{1,\lambda})_{11} - 2\rho\mathrm{Re}\left(f_{3,\lambda}(\rho)\right) - \rho^2(H_{1,\lambda})_{22}\right)$$

由推论 3.18，这给出了一个在 λ 中取值的 $C^0(\mathbb{D}_j')$ 连续族。由于 $H1,\lambda$ 在原点处是正则的，$f3,\lambda(\rho) \to 0$ 当 $\rho \to 0$。我们有

$$\left(M_\lambda^{-1}\right)_{12}(\rho) \to \frac{(H_{1,\lambda})_{11}(0)}{2\det H_{1,\lambda}(0)} > 0$$

当 $\rho \to 0$ 时。由 (124) 和推论 3.18，$\mathrm{tr}N_\lambda = n11,\lambda + n22,\lambda$ 在原点附近关于 λ 一致有界。由引理 4.8 和推论 3.18，存在 $A > 0$ 和 $0 < \delta < R/3$，它们关于 λ 一致，使得对于 $\rho \le \delta$，

$$\left|n_{12,\lambda}(\rho)\right| = \frac{\left|\left(M_\lambda^{-1}\right)_{12}\right|}{n_{11,\lambda} + n_{22,\lambda}} \ge A.$$

对于 $\rho \le R/3, \chi(\rho) = 1$。因此，当 $t \ge 1$ 时，$e\rho \le \delta$ 当且仅当 $\rho \le t^{-2/3}\delta$。定义函数 y_j，使得当 ζ_j 时，$y_j(\zeta_j) = A$（适用于 $|\zeta_j| \le \delta$），其他情况下为零。由（125）可知，C_6 关于 λ 一致，

$$Q_{t,\mathbb{D}_j'}^{\mathrm{Higgs}} \ge C_6\left(\|u_1\|_{L^2(\mathbb{D}_j')}^2 + \|u_2\|_{L^2(\mathbb{D}_j')}^2 + \|u_3\|_{L^2(\mathbb{D}_j')}^2\right) + C_6\sum_{p_j \in D_r}\left(y_{j,t}u_0, u_0\right)_{L^2(X)}^2 \tag{126}$$

其中 $y_{j,t} = t^{4/3}y_j\left(t^{2/3}\zeta_j\right)$ 在 $\mathbb{D}_j'$ 处成立，其他地方为零。

接下来，我们考虑项 $Q^{\mathrm{Higgs}}_{t,\mathbb{D}'_j}$，其中 $p_j \in D_\gamma$。令 $s^{\lambda(t)}_{j,t}$ 为式 (94) 中定义的标架，并令 $e1,_{j,t} = s_2$, j,t, $e2,_{j,t} = as_1$, j,t, 其中 $a = \rho^{1/4} e^{\chi\psi_P}/2$，且 ψ_P 为 §3.2 中定义的 Painlev´e 函数。由 (80) 和 (95)，标架 $e_{j,t} = ne_{1,}$ j,t, e 2, j,to 是 h^{app} t-酉的，并且 $(\beta_0)_{e_t} = \left(0\ a^2\right)$, $(\gamma_0)_{e_t} = \left(0\ a^{-2}\zeta\right)^T$。按 (116) 写出 $u_{e_t} = u_0\sigma_0 + u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3$，我们得到

$$(\beta_0 \cdot \hat{u})_{e_t} = \left(a^2(u_1 + iu_2) \quad -a^2u_3\right),\ (\hat{u} \cdot \gamma_0)_{e_t} = \left(a^{-2}\zeta(u_1 - iu_2) \quad -a^{-2}\zeta u_3\right)^T$$

通过直接计算可得

$$Q^{\mathrm{Higgs}}_{t,\mathbb{D}'_j}(u) = 4t^2\left(\|f\,u_1\|^2 + \|f\,u_2\|^2 + \|f\,u_3\|^2\right)$$

其中 $\|\cdot\| = \|\cdots\|_{L^2(\mathbb{D}'_j)}$，且 $f = (2\rho\cosh(2\chi\psi_P))^{1/2}$。根据 [MTW77], , 存在如下形式的渐近展开

$$e^{-\psi(x)} \sim x^{1/3}\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{4j/3} \quad \text{as } x \to 0\,.$$

特别地，存在 $C_0 > 0$，使得当 x 足够小时，$e^{2\psi_P}(x) \geq C_0 x^{-2/3}$。另一方面，$\psi_P \to 0$ 随 $t \to \infty$呈指数变化。因此，存在 $C > 0$，使得当 $t \gg 1$时，$f \geq Ct^{-1/3}$，于是 $t^2\left\|f\,u_j\right\|^2 \geq C^2t^{4/3}\left\|u_j\right\|^2 \geq C^2\left\|u_j\right\|^2$。存在 $C' > 0$，使得

$$Q^{\mathrm{Higgs}}_{t,\mathbb{D}'_j}(u) \geq C'\left(\|u_1\|^2_{L^2(\mathbb{D}'_j)} + \|u_2\|^2_{L^2(\mathbb{D}'_j)} + \|u_3\|^2_{L^2(\mathbb{D}'_j)}\right). \tag{127}$$

类似的论证也表明，$p_j \in D_\beta$ 情形下同样成立。

对于最后一个区域，考虑 Q^{Higgs}t,X-⊔j $\mathbb{D}'_j$。设 $\{(W_\alpha; w_\alpha)\}$是由满足 $q = (dw_\alpha)^2$的坐标图构成的 $X - \coprod_j \mathbb{D}'_j$的有限图册。与引理 3.1 的证明类似，将 F 通过 Hecke 修改与 $V = L^{-2}K_X \oplus LK_X$ 识别后，我们在 W_α上有 $\beta = \left(0\ q^{-1}\right)$, $\gamma = \left(0\ q^2\right)^T$。在此区域上，$h^{\mathrm{app}}\,t = \iota^*\left(h_L^{-2}h_K\right) \oplus (h_Lh_K)$，其中 $h_L = h_{L,\lambda(t),t}$ 和 h_K 都具有平坦Chern联络。显然，存在 $\sigma \in O_{W_\alpha}$ 使得 $|\sigma|_{h_L} \equiv 1$。令 $e_1 = \left(\sigma^{-2}dw_\alpha, 0\right)$, $e_2 = (0, \sigma dw_\alpha)$。标架 $e = \{e_1, e_2\}$ 既是全纯的，也是 h^{app} t-酉的。按式 (116) 写出 $u_e = u_0\sigma_0 + u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3$。直接计算可得，

$$(\beta_0 \cdot \hat{u})_e = \left(u_1 + iu_2 \quad -u_3\right),\ (\hat{u} \cdot \gamma_0)_e = \left(u_1 - iu_2 \quad -u_3\right)^T.$$

我们有

$$Q^{\mathrm{Higgs}}_{t,W_\alpha}(u) = 8t^2\left(\|u_1\|^2_{L^2(W_\alpha)} + \|u_2\|^2_{L^2(W_\alpha)} + \|u_3\|^2_{L^2(W_\alpha)}\right). \tag{128}$$

并且

$$Q^{\mathrm{Higgs}}_{t,X-\coprod_j \mathbb{D}'_j}(u) \geq \sum_\alpha Q^{\mathrm{Higgs}}_{t,W_\alpha}(u)\,. \tag{129}$$

根据上述关于覆盖整个 X 的区域的讨论，我们定义了依赖于 t 的标架 $e_{j,\ t}$，其定义在 $\mathbb{D}'_j$ 上，其中 $p_j \in D$；以及定义在 $W_\alpha \subset X - \mathbb{D}'_j$ 上的 e，它们给出了 F 的一个光滑分解

$$F \cong L_1 \oplus L_2 \tag{130}$$

使得在 X $-\mathbb{D}'_j$ 上，L_1（分别为 L_2）与 V 中的 $L^{-2}K$（分别为 LK）直和项重合，这里的识别如定理 2.4 中的 ι 所示。令 $\sigma_0 = \mathrm{diag}(2,-1)$ 对应于 (130)。由此得到一个分解

$$\mathrm{End}F = \langle\sigma_0\rangle \oplus \mathrm{End}_0 F\,.$$

对于 $u \in \mathrm{Herm}(F, h^{\mathrm{app}}{}_t)$，记

$$u = (\mathrm{tr}\,u)\,\sigma_0 + v$$

其中 $\mathrm{tr}\,v = 0$ 与 (116) 以及每个区域上的类似分解相容。由 (126)、(127)、(128) 和 (129) 中的估计，存在 $C_7 > 0$，使得对所有 $t \gg 1$,

$$Q_t^{\mathrm{Higgs}}(u) \geq C_7 \|v\|^2_{L^2,h_t^{\mathrm{app}}} + C_7 \sum_{j=1}^{d_r} \left(y_{j,t}\mathrm{tr}\,u, \mathrm{tr}\,u\right)_{L^2,h_t^{\mathrm{app}}}$$

其中 $y_{j,\,t}$ 在 (126) 下方定义。回顾命题 2.6，(F, β, γ) 的稳定性意味着 $D_r > 0$。固定一个指标 j_0，使得 $p_{j_0} \in D_r$。对于 $t \gg 1$，存在 $C_8 > 0$，使得

$$Q_t(u) \geq C_8 \left(Q_t^{(1)}(\mathrm{tr}\,u) + \|v\|^2_{L^2,h_t^{\mathrm{app}}}\right) \tag{131}$$

with

$$Q_t^{(1)}(f) = \|df\|^2_{L^2} + (y_t f, f)_{L^2} \tag{132}$$

其中 $y_t = y_{j_0,\,t}$。

由一致化定理，$X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$，其中 Γ 是一个福克斯群；将商映射记为 $p : \mathbb{H} \to X$。此外，存在一个基本多边形 $\Pi \in \mathbb{H}$，用于 Γ 在 $\mathbb{H}$ 上的作用，其边数有限，且顶点处的角为正（例如参见[Sti**92**]）。我们可以安排使得 p_{j_0} 的一个提升位于 Π的内部。因此，存在有限多个 $g \in \Gamma$，使得 $g(\Pi)$ 与 Π相邻；将这些集合与 e $e\Pi$ 的并记为 Π。考虑满足 $\partial\Omega$ 光滑且 $\Pi \Subset \Omega \Subset \Pi$的 Ω。由黎曼映射定理~，存在一个双全纯映射 $r : \mathbb{D} \to \Omega$，将原点映到商空间 Π中对应于 p_{j_0} 的唯一点。由 Painlev´e 的一个结果（见 [Bell**90**]），r 可光滑延拓至 $\partial\mathbb{D}$。上述识别对应于 X 上的一个常曲率度量 g'_X。注意，g_X 和 g'_X 均与 t 无关；我们将交替使用它们来定义范数。我们用 $\gtrsim$（分别用 $\sim$）表示相差至多为与 t 无关且省略的 e 常数的等式（不等式）。令 $F_t := (p \circ r)^* y_t$，并令

$$Q_t^{(0)}(\phi) = \|d\phi\|^2_{L^2(\mathbb{D})} + \left(\widetilde{F}_t\phi, \phi\right)^2_{L^2(\mathbb{D})}$$

存在一个非负函数 $F \in L^\infty(\Omega)$，使得 $eF_t \geq F_t$，其中 $F_t(\zeta) = t^2F(t\zeta)$。由引理 4.5，对于 $t \gg 1$

$$Q_t^{(0)}(\phi) \gtrsim (\log t)^{-1} \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{D})}$$

因此,

$$\begin{aligned} Q_t^{(1)}(f) &\sim \|d(p^*f)\|^2_{L^2(\widetilde{\Omega})} + ((p^*y_t f), p^*f)_{L^2(\widetilde{\Omega})} \\ &\gtrsim \|d(p^*f)\|^2_{L^2(\Omega)} + ((p^*y_t f), p^*f)_{L^2(\Omega)} \gtrsim Q_t^{(0)}(\phi) \\ &\gtrsim (\log t)^{-1} \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \gtrsim (\log t)^{-1} \|p^*f\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\gtrsim (\log t)^{-1} \|f\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

其中 $\phi = (\mathrm{p} \circ \mathrm{r})^* \mathrm{f}$。令 ζ（分别为 z）为 $\mathbb{H}$（上半平面）上的坐标（分别为 $\mathbb{D}$（单位圆盘）上的坐标），我们还使用了上文的事实：对于映射 $\mathrm{r}^{-1}: \zeta \mapsto \mathrm{z}, \left|\partial_\zeta \mathrm{z}\right|^2$，其在 $\mathbb{D}$ 上有上下界。

结合（131），对于 $\mathrm{t} \gg 1$，我们有:

$$\begin{aligned} Q_t(u) &\gtrsim (\log t)^{-1} \left(\|\mathrm{tr}\, u\|^2_{L^2} + \|v\|^2_{L^2, h_t^{\mathrm{app}}} \right) \\ &\gtrsim (\log t)^{-1} \left(\|(\mathrm{tr}\, u)\sigma_0\|^2_{L^2, h_t^{\mathrm{app}}} + \|v\|^2_{L^2, h_t^{\mathrm{app}}} \right) \gtrsim (\log t)^{-1} \|u\|^2_{L^2, h_t^{\mathrm{app}}} . \end{aligned}$$

q.e.d.

注意，由 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 给出的逐点范数彼此有界。下面给出如下结论。

推论 4.10. 存在常数 $\mathrm{C} > 0$，使得对于 $\mathrm{u} \in \mathrm{L}_2^2\left(\mathrm{Herm}\left(\mathrm{F}、\mathrm{h}^{app}\mathrm{t}\right)\right)$ 且 $\mathrm{t} \gg 1$

$$\|L_t u\|_{L^2, h_t^{app}} \geq \frac{C}{\log t} \|u\|_{L^2, h_t^{app}} .$$

4.3. L_2^2 对 L_t 的下界。基于推论 4.10 中的不等式，我们将证明关于 L_t 的以下依赖于 t 的椭圆估计。

命题 4.11. 固定 $\mathrm{t}_0 \geq 1$。存在 $\mathrm{C} > 0$，使得对于 $\mathrm{u} \in \mathrm{L}_2^2\left(\mathrm{Herm}\left(\mathrm{F}、\mathrm{h}^{app}\mathrm{t}\right)\right)$和 $\mathrm{t} \gg 1$,

$$\|L_t u\|^2_{L^2, h_{t_0}^{app}} \geq C t^{-38} \|u\|^2_{L_2^2, h_{t_0}^{app}}$$

证明结合了对 $\Delta_{h^{\mathrm{app}}{}_{t0}}$ 的椭圆估计，以及对 $\left\|\Delta_{h^{\mathrm{app}}{}_{t}} - \Delta_{h^{\mathrm{app}}{}_{t_0}}\right\|$ 和$\|\{\psi, \hat{\mathrm{u}}\}\|$的界。注意，与推论 4.10 不同，上述不等式中的范数由固定度量 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_{t_0}$ 给出。我们先证明一个比较结果（引理 4.15），比较由 $\|\cdot\|_{h^{\mathrm{app}}{}_{t0}}$ 和 $\|\cdot\|_{h^{\mathrm{app}}{}_{t}}$ 诱导的范数。对于一个 $\mathrm{r} \times \mathrm{r}$ 矩阵 M 和同维数的正定厄米矩阵 H，回忆在 (6) 中定义的范数 $|\mathrm{M}|_H^2 = \mathrm{tr}\left(\mathrm{MH}^{-1}\mathrm{M}^*\mathrm{H}\right)$。我们需要以下三个关于由不同厄米矩阵关联的矩阵范数的比较引理。

引理 4.12. 设 $\mathrm{H} > 0$ 是一个 2×2 厄米矩阵，其特征值为 $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$，那么对于 $\mathrm{L} > 0$，以下条件等价

- 对于任意 A，$\mathrm{L}^{-1}|\mathrm{A}|^2\mathrm{I} \leq |\mathrm{A}|^2\mathrm{H} \leq \mathrm{L}|\mathrm{A}|^2\mathrm{I}$
- $\alpha_2/\alpha_1 \leq \mathrm{L}$

引理 4.13. 存在 $\varrho_0 > 0$ 和 $\mathrm{C} \geq 1$，使得对于 2×2 厄米矩阵 $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1 > 0$，满足

$$\left| H_1^{-1/2} (H_0 - H_1) H_1^{-1/2} \right| \leq \epsilon_0$$

对于一个 2×2 矩阵 A，有：

$$|A|_{H_0}^2 \le C\,|A|_{H_1}^2 .$$

证明。我们有 $A\ 0, |A|_{H_0}^2/|A|_{H_1}^2 = |B|_M/|B|_I^2$，其中 $B = H_1^{1/2}\,AH_1^{-1/2}$，且 $M = H_1^{-1/2}\,H_0H_1^{-1/2}$。存在 $\varrho_0, C_0 > 0$，使得对于任意带有$|X - I| < \varrho_0$ 的 2×2 矩阵 X，我们有 $\left|X^{-1} - I\right| < C_0\varrho_0$。假设 $|M - I| < \varrho_0$，且不妨设 $|B|_I^2 = 1$。存在 $C_1 > 0$，使得

$$\left||B|_M^2 - |B|_I^2\right| \le \left|\mathrm{tr}\left(B\left(M^{-1} - I\right)B^*M\right)\right| + |\mathrm{tr}\,(BB^*(M-I))| \le C_1\epsilon_0 .$$

因此存在 $C_2 > 0$，使得 $|B|_M^2 \le C_2$。 q.e.d.

引理 4.14. 设 $H > 0$ 为一个 2×2 厄米矩阵，其两个特征值为 $0 < \alpha_1 \le \alpha_2$。存在常数 $C \ge 1$，使得对于任意 A 和 T， 2×2 若 T 为非奇异矩阵，则有

$$\frac{\alpha_1^2}{C\alpha_2^2}\frac{|A|_H^2}{|T|^2\left|T^{-1}\right|^2} \le |A|_{T^*HT}^2 \le \frac{C\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\,|T|^2\left|T^{-1}\right|^2|A|_H^2$$

证明. 令 $B = =H^{1/2}AH^{-1/2}$，则有

$$\frac{|A|_{T^*HT}^2}{|A|_H^2} = \frac{\left|H^{1/2}TH^{-1/2}BH^{1/2}T^{-1}H^{-1/2}\right|_I^2}{|B|_I^2} \le \left|H^{1/2}\right|_I^4\left|H^{-1/2}\right|_I^4|T|_I^2\left|T^{-1}\right|_I^2$$

注意，$\left|H^{1/2}\right|^2{}_I = \mathrm{tr}H = \alpha_1 + \alpha_2 \le 2\alpha_2$，且 $\left|H^{-1/2}\right|^2{}_I = \mathrm{tr}\ H^{-1} = \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} \le 2\alpha_1^{-1}$。结论由与引理 4.13 类似的论证得出。证毕。

引理 4.15. 存在常数 $C \ge 1$，使得对于 $u \in \mathrm{End(F)}$ 和 $t \gg 1$,

$$C^{-1}t^{-13}\,|u|_{h_{t_0}^{app}}^2 \le |u|_{h_t^{app}}^2 \le Ct^{13}\,|u|_{h_{t_0}^{app}}^2$$

证明。我们考虑覆盖 X 的四类区域，以及 F 的局部标架，并通过研究 $h^{app}{}_t$ 的局部形式来证明该断言：

- (1) for $p_j \in D_r$, $\widetilde{\mathbb{D}}_{j,t} = \left\{\rho < \rho_0 t^{-2/3}\right\}$ with ρ_0 as in Prop 3.8;
- (2) for $p_j \in D_r$, $\mathbb{D}_j' - \widetilde{\mathbb{D}}_{j,t}$,
- (3) $\mathbb{D}_j'$ for $p_j \in D_\beta$ or D_γ, and
- (4) $X - \coprod_j \mathbb{D}_j'$.

在 (1)、(2)、(3) 上，我们使用 §3.4.2 中定义的全纯标架 $s^{(0)}{}_j$。我们用一个有限图册覆盖 (4)，在该图册上 L 和 K 均可平凡化，并取关于度量 $\iota^*\left(h_L^{-2}h_K \oplus h_Lh_K\right)$ 的酉标架，其中 $h_L = h^0{}_{L,\lambda}(t_0)$。由引理 4.12，只需界定 $\alpha_2(H)/\alpha_1(H)$ 的比值，其中 $0 < \alpha_1(H) \le \alpha_2(H)$ 是 H 的特征值，而 H 是 $h^{app}{}_t$ 的局部形式。

区域 (1)：注意，对于 $t \gg 1, \rho_0 t^{-2/3} < R/3$ 和 $e\mathbb{D}_{j,t} \subset \mathbb{D}_j''$。由 (36) 和定义 3.5 可得

$$H_{t,\lambda}(\zeta) = (\Gamma_t^*)^{-1}\,H_{1,\lambda}\left(t^{2/3}\zeta\right)\Gamma_t^{-1}$$

其中 $\Gamma_t = \mathrm{diag}\left(t^{1/3},\ t^{-1/3}\right)$。因此，定义在 $e\mathbb{D}_{j,t}$ 上的矩阵值函数 $\left(h^{app}{}_t\quad\right)_{s^{\lambda(t)}{}_j}$（其中标架 $s^{\lambda(t)}{}_j$ 由定义 3.24 定义）由 $H_{t,\lambda_j}(t)(t^{-2/3}\zeta') = (\Gamma_t^*)^{-1}\,H1_{,\lambda_j}(t)(\zeta')\Gamma_t^{-1}$ 给出，

其中 $\zeta' = t^{2/3}\zeta \in K = \overline{B(0,\rho_0)}$ 是一个固定的紧集。特征值是下列方程的根 $0 < \alpha_{1,\lambda} \le \alpha_{2,\lambda}$

$$x^2 - \left(t^{2/3}(H_{1,\lambda})_{11} + t^{-2/3}(H_{1,\lambda})_{22}\right)x + \det H_{1,\lambda} = 0$$

对于 $\lambda = \lambda_j(t)$。由推论 3.18，存在 $C_0 > 0$，使得对所有 $\lambda \in I$,

$$\frac{\alpha_{2,\lambda}}{\alpha_{1,\lambda}} \le C_0 t^{4/3}$$

因此，存在 $C_1 > 1$，使得对 $\mathbb{D}_{j,t}$ 上的所有 A,

$$C_1^{-1} t^{-4/3} |A|_I^2 \le |A|_{(h_t^{\mathrm{app}})_{s_j^\lambda}} \le C_1 t^{4/3} |A|_I^2$$

区域 (2)：令 $H_0 = eH^{\mathrm{int}}(t,\lambda_j(t))$ 和 $H_1 = eH^{\mathrm{ext}}(t,\lambda_j(t))$。由 (72) 可知，存在 $C_2, C_2 > 0$，使得 $|H_0 - H_1| \le C_2 e^{-c_2 t^{2/3}}$。根据 $eH_{t\lambda}^{\mathrm{ext}}$ 的定义，结合 (69) 和命题 3.14，存在 $C_3 > 0$，使得 $|H_1| \le C_3 t^{4a'_\lambda/3}$，其中 $a'_\lambda = \max(-2\lambda, \lambda)$ 且 $\lambda = \lambda_j(t)$。当 $t \gg 1$ 时，我们有 $|H_0| \le 2C_3 t^{4a'_\lambda/3}$。因此，若 ϱ_0 如引理 4.13 中所述，则当 $t \gg 1$ 时，

$$\left|H_0^{-1/2}(H_0 - H_1)H_0^{-1/2}\right|, \left|H_1^{-1/2}(H_0 - H_1)H_1^{-1/2}\right| \le \epsilon_0,$$

并且存在 $C_4 \ge 1$，使得 $C_4^{-1}|A|_{H_1}^2 \le |A|_{H_0}^2 \le C_4 |A|_{H_1}^2$。由命题 3.14，存在 $C_5 > 0$，使得 $\alpha_2(H_1)/\alpha_1(H_1) \le C_5 t^{4|\lambda_j(t)|} \le C_5 t$。结合以上结果，由引理 4.12，存在 $C_6 > 1$，使得在 $\mathbb{D}'_j - e\mathbb{D}_{j,t}$ 上，对于 $t \gg 1$，有 $C_6^{-1} t^{-1} |A|_I^2 \le |A|_{H_0}^2 \le C_6 t |A|_I^2$，对所有 A 均成立。

根据（68）以及定义 3.26、3.24，我们有

$$\left(h_t^{\mathrm{app}}\right)_{s_j}^{\lambda} = S^* \widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda_j(t)} S, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta_j & -1 \\ \zeta_j & 1 \end{pmatrix} \tag{133}$$

存在 $C_7 > 0$，使得在 $\mathbb{D}'_j - e\mathbb{D}_{j,t}$，$|S| \le C_7$，且 $|S^{-1}| < C_7 t^{2/3}$。因此，根据引理 4.14，存在 $C_8 > 1$，使得

$$C_8^{-1} t^{-10/3} |A|_{H_0}^2 \le |A|_{S^* H_0 S}^2 = |A|^2_{(h_t^{\mathrm{app}})^{(0)}_{s_j}} \le C_8 t^{10/3} |A|_{H_0}^2 .$$

结合区域（1）和（2）的结果：在 $\mathbb{D}'_j$ 上，存在 $C_9 > 1$，使得对所有 A,

$$C_9 t^{-13/3} |A|_I^2 \le |A|^2_{(h_t^{\mathrm{app}})_{s_j^\lambda}} \le C_9 t^{13/3} |A|_I^2 \tag{134}$$

注意，根据定义 3.26，$\left(h^{\mathrm{app}}{}_t\right)_{s^{(0)}j} = \left(S^{-1}T_{\lambda,j}S\right)^* \left(h^{\mathrm{app}}{}_t\right)_{s_j^\lambda} \left(S^{-1}T_{\lambda,j}S\right)$。直接计算可得

$$S^{-1}T_{\lambda,j}^{\pm 1}S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{\pm F} + e^{\mp F/2} & \zeta^{-1}\left(-e^{\pm F} + e^{\mp F/2}\right) \\ \zeta\left(-e^{\pm F} + e^{\mp F/2}\right) & e^{\pm F} + e^{\mp F/2} \end{pmatrix}, \tag{135}$$

其中，$F = F_{\lambda(t),j}$ 在（88）中定义，是固定全纯函数 ξ_j 和 $f_{\ell j}$ 的线性组合，其系数关于 $\lambda \in \mathcal{I}$ 为线性的。特别地，$\xi_j(0) = f_{\ell j}(0) = 0$。因此存在 $C_{10} > 0$，使得对于 $\lambda \in \mathcal{I}$,

$$\left|S^{-1}T_{\lambda,j}^{\pm 1}S\right| \le C_{10} . \tag{136}$$

根据引理 4.14，存在 $C_{11} > 1$，使得对于 $\mathbb{D}'_j$ 上的任意 $u \in \mathrm{End}(F)$ 和 $t \gg 1$,

$$C_{11}^{-1} t^{-13} |u|^2_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} \le |u|^2_{h_t^{\mathrm{app}}} \le C_{11} t^{13} |u|^2_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}}$$

区域（3）：注意，根据命题 3.6 ψ_P 的性质，存在 $C_{12} > 0$，使得$\left|H^{\mathrm{int},\beta t}\right|$，$\left|H^{\mathrm{int},\gamma t}\right| \le C_{12}$。根据（93）和命题 3.14，存在 $C_{13} > 0$，使得

$$\alpha_2(H)/\alpha_1(H) \le C_{13}t^{4|\lambda_{j_0}(t)|} \le C_{13}t$$

其中 $H = \left(h^{\mathrm{app}\,t}\right)_{s^{(0)}j}$。由引理 4.12，存在 $C_{14} > 1$，使得当 t 足够大时，在 $\mathbb{D}'_j$ 上有：

$$C_{14}^{-1}t^{-1}|u|^2_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} \le |u|^2_{h_t^{\mathrm{app}}} \le C_{14}t|u|^2_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} \tag{137}$$

区域 (4)：由定义 3.23、2.11 可得 $h_{L,\lambda,t} = h^0{}_{L,\lambda}e^{\eta_{\lambda,t}}$ 以及 $h^0{}_{L,\lambda} = h_{L,\mathrm{HE}}e^{\varphi_\lambda}$，其中 φ_λ 是由固定函数 G_j 的线性组合，这些函数在 $X - \coprod_j \mathbb{D}'_j$ 上有界，且系数关于 λ 呈线性。由命题 3.14，存在 C_{15} 和 $C'_{15} > 0$，使得对所有 $t \gg 1$，

$$\left|\eta_{\lambda,t} - (4/3)\lambda_{j_0}\log t\right| \le C_{15},\ |\varphi_\lambda| \le C'_{15}$$

H 是 $h^{\mathrm{app}\,t}$ 的局部形式。由定义 3.26，存在 $C''_{15} > 0$ 使得 $\alpha_2(H)/\alpha_1(H) \le C'''_{15}t^{4|\lambda_{j_0}|} \le C'''_{15}t$。因此，存在 $C_{16} > 1$，使得当 $t \gg 1$ 时，在 $X - \coprod_j \mathbb{D}'_j$ 上有：

$$C_{16}^{-1}t^{-1}|u|^2_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} \le |u|^2_{h_t^{\mathrm{app}}} \le C_{16}t|u|^2_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}}\ . \tag{138}$$

q.e.d.

引理 4.16. 存在 $C > 0$，使得对于 $t \gg 1$，$u \in L^2_2\left(\mathrm{Herm}(F,h^{app}t)\right)$，我们有

$$\left\|\Delta_{h_t^{app}}u - \Delta_{h_{t_0}^{app}}u\right\|^2_{L^2,h_{t_0}^{app}} \le Ct^4\left(\left\|d_{h_{t_0}^{app}}u\right\|^2_{L^2,h_{t_0}^{app}} + \|u\|^2_{L^2,h_{t_0}^{app}}\right),$$

其中 $d_h = \partial_h + \bar\partial$ 是相对于 Chern 联络 ∇_h 的外协变导数。

证明. 设 H（分别是 U）为度量 h（分别是端omorphism u）相对于坐标图 (V;z) 上的全纯标架的局部形式。除去一个与 h 无关的正标量，$\Delta_h u = i\Lambda_\omega\left(\bar\partial\partial_h u - \partial_h\bar\partial u\right)$ 的局部形式为

$$-4\partial_{\bar z}\partial_z U - 4\left[H^{-1}\partial_z H, \partial_{\bar z}U\right] - 2\left[\partial_{\bar z}\left(H^{-1}\partial_z H\right), U\right]. \tag{139}$$

固定与引理 4.15 的证明中相同的局部全纯标架。由于第一项$-4\partial_{\bar z}\partial_z U$ 与 H 无关，只需对 $H^{-1}\partial_\zeta H$、$\partial_{\bar\zeta}\left(H^{-1}\partial_\zeta H\right)$ 的差进行估计，其中 H 分别由引理 4.15 证明开头列出的四类区域上的 $h^{\mathrm{app}\,t}$ 和 $h^{\mathrm{app}\,t_0}$ 给出。注意，第二项与曲率 F_{∇_h} 成正比，而在 $\mathbb{D}'_j$ 之外，$h^{\mathrm{app}\,t}$ 和 $h^{\mathrm{app}\,t_0}$ 的曲率均为零。

区域 (1)：在 $e^{\mathbb{D}_j,t}$ with $p_j \in D_r$ 上，记 $T_1 = S^{-1}T_{\lambda(t)}$, jS（参见 (133) 和定义 3.26）、$T_0 = S^{-1}T_{\lambda(t_0)}$, jS、$H_1 = H_{t,\lambda_j}(t)$ 和 $H_0 = H_{t_0,\lambda_j}(t_0)$。令 $H'_\ell = T^{*l}H_\ell T_\ell$，其中 $l = 0, 1$。我们有 $\left(h^{\mathrm{app}\,t}\right)_{s^{(0)}j} = H'_1$ 和 $\left(h_0^{\mathrm{app}}\right)_{t\,s^{(0)}j} = H'_0$。注意到 $\partial_{\bar\zeta}T_\ell = 0$，根据直接计算，

$$\begin{aligned}\left(H'_\ell\right)^{-1}\partial_\zeta H'_\ell &= T_\ell^{-1}\left(H_\ell^{-1}\partial_\zeta H_\ell\right)T_\ell + T_\ell^{-1}\partial_\zeta T_\ell,\\ \partial_{\bar\zeta}\left(\left(H'_\ell\right)^{-1}\partial_\zeta H'_\ell\right) &= T_\ell^{-1}\partial_{\bar\zeta}\left(H_\ell^{-1}\partial_\zeta H_\ell\right)T_\ell.\end{aligned} \tag{140}$$

由 (36) 和定义 3.5，我们有

$$H_1^{-1}\partial_\zeta H_1 = t^{2/3}\Gamma_t\left(H_{1,\lambda_j(t)}^{-1}\partial_\zeta H_{1,\lambda_j(t)}\Big|_{t^{2/3}\zeta}\right)\Gamma_t^{-1},$$
$$\partial_{\bar\zeta}\left(H_1^{-1}\partial_\zeta H_1\right) = t^{4/3}\Gamma_t\partial_{\bar\zeta}\left(\zeta\mapsto H_{1,\lambda_j(t)}^{-1}\partial_\zeta H_{1,\lambda_j(t)}\Big|_{t^{2/3}\zeta}\right)\Gamma_t^{-1},$$

其中 $\Gamma_t = \mathrm{diag}(t^{1/3}, t^{-1/3})$。我们有 $|\Gamma_t A\Gamma_t^{-1}| \lesssim t^{2/3}|A|$。在 $e\mathbb{D}_{j,t}$ 上，我们有 $|\zeta| \le \rho_0 t^{-2/3}$，因此 $\overline{t^{2/3}\zeta} \in B(0,\rho_0)$ 是一个与 t 无关的紧集。根据推论 3.18，存在 $C_0, C_0', C_1, C_1' > 0$，使得当 $t \gg 1$ 时，

$$\left|H_1^{-1}\partial_\zeta H_1\right| \le C_0 t^{4/3},\ \left|H_0^{-1}\partial_\zeta H_0\right| \le C_0',$$
$$\left|\partial_{\bar\zeta}\left(H_1^{-1}\partial_\zeta H_1\right)\right| \le C_1 t^2,\ \left|\partial_{\bar\zeta}\left(H_0^{-1}\partial_\zeta H_0\right)\right| \le C_1'.$$

与引理 4.15 的证明类似，存在 $C_2 > 0$ 使得 $|T_\ell^{\pm 1}|, |T_\ell^{-1}\partial_\zeta T_\ell| \le C_2$ 对于 $l = 0, 1$ 和 $t \gg 1$。因此存在 $C_3, C_3' > 0$ 使得

$$\left|(H_1')^{-1}\partial_\zeta H_1' - \left(H_0'\right)^{-1}\partial_\zeta H_0'\right| \le C_3 t^{4/3},$$
$$\left|\partial_{\bar\zeta}\left((H_1')^{-1}\partial_\zeta H_1' - \left(H_0'\right)^{-1}\partial_\zeta H_0'\right)\right| \le C_3' t^2. \tag{141}$$

在区域 (2) 中：在 $\mathbb{D}_j' - \mathbb{D}_{j,t}$ 上，取 $p_j \in D_r$，根据 §3.4.2 开头定义的标架、定义 3.24 和 3.26，我们有 $\left(h^{\mathrm{app}}(t)\right)s^{(0)}(j) = S_*T_{\lambda(t),j}^*(t), j\left(h^{\mathrm{app}}(t)\right)_{\sigma^{\lambda(t)}(j)} T_{\lambda(t),j} S$，并且 $\left(h^{\mathrm{app}}(t)\right)_{\sigma^{\lambda(t)}(j)} = eH_t^{\mathrm{int}},_{\lambda_j}(t)$。令 $H_0 = eH_{t_0}^{\mathrm{int}},_{\lambda_j}(t_0), H_1 = eH_t^{\mathrm{int}},_{\lambda_j}(t), T_0 = T_{\lambda(t_0)}, jS, T_1 = T_{\lambda(t),j}S, e$，并令 $H_\ell' = T_\ell^* H_\ell T_\ell$。(140) 中的计算仍然适用。令 $H_{\infty,1} = H_t^{\mathrm{ext}},_{\lambda_j}(t)$。注意，在 $\mathbb{D}_j' - e\mathbb{D}_{j,t}$ 上有 $\rho_0 t^{-2/3} \le \rho \le 2R/3$。利用 (69)、(49) 和命题 3.14 直接计算可得，存在 $C_{14}, C_{14}' > 0$ 使得

$$C_{14}R^{-1} \le \left|H_{\infty,1}^{-1}\partial_\zeta H_{\infty,1}\right| \le C_{14}' t^{2/3}\rho_0^{-1}$$

由 (73)，存在 $C_5, C_5' > 0$，使得

$$\left|H_1^{-1}\partial_\zeta H_1 - H_{\infty,1}^{-1}\partial_\zeta H_{\infty,1}\right| \le C_5 \le C_5'\left|H_{\infty,1}^{-1}\partial_\zeta H_{\infty,1}\right|$$

因此，存在 $C_6, C_6' > 0$，使得

$$\left|H_1^{-1}\partial_\zeta H_1\right| \le (1 + C_6)\left|H_{\infty,1}^{-1}\partial_\zeta H_{\infty,1}\right| \le C_6' t^{2/3} \tag{142}$$

由于 $\partial_{\bar\zeta}\left(H_{\infty,1}^{-1}\partial_\zeta H_{\infty,1}\right) = 0$，再次由给定的 (73)，存在 $C_7 > 0$，使得

$$\left|\partial_{\bar\zeta}\left(H_1^{-1}\partial_\zeta H_1\right)\right| \le C_7$$

由 (133)，存在 C_8 和 $C_8' > 0$，使得 $|S| \le C8, |S^{-1}| \le C_8' t^{2/3}$ 在 $\mathbb{D}_j' - e\mathbb{D}_{j,t}$ 上。因此，存在 $C_9, C_9', C_9'' > 0$，使得 $|T_1| \le C9, |T_1^{-1}| \le C_9' t^{2/3}$ 且 $|T_1^{-1}\partial_\zeta T_1| \le C_9'' t^{2/3}$。注意，$H_0'$ 与 t 无关。由 (140)，存在 $C_{10}, C_{10}' > 0$ 使得 $e$on $\mathbb{D}_j' - \mathbb{D}_{j,t}$,

$$\left|(H_1')^{-1}\partial_\zeta H_1' - \left(H_0'\right)^{-1}\partial_\zeta H_0'\right| \le C_{10} t^{4/3},$$
$$\left|\partial_{\bar\zeta}\left((H_1')^{-1}\partial_\zeta H_1' - \left(H_0'\right)^{-1}\partial_\zeta H_0'\right)\right| \le C_{10}' t^{2/3} \tag{143}$$

区域（3）：在 $\mathbb{D}'_j$ 上，令 $\mathrm{p\,j} \in \mathrm{D}\gamma$，$\mathrm{H_0 = H^{int},\gamma t_0}$ ，$\mathrm{H_1 = H^{int},\gamma t}$，$\mathrm{T_0 = T}\,\acute{\lambda}\,(\mathrm{t_0}), \mathrm{j}, \mathrm{t_0}$，$\mathrm{T_1 = T}\,\acute{\lambda}(\mathrm{t}), \mathrm{j}, \mathrm{t}$。令 $\mathrm{H'_\ell = T^{*}l\,H_\ell T_\ell}$，其中 $\mathrm{l = 0, 1}$。我们有 $\mathrm{H'_0 = \left(h_0^{app}\right) t\,s^{(0)} j}$，且 $\mathrm{H'_1 = \left(h^{app} t\right) s^{(0)} j}$。注意，$\mathrm{H_\ell^{\pm l}}$, $\partial_\zeta \mathrm{H_\ell}$ 和 $\mathrm{T^{\pm l}l}$ 均为对角矩阵，由 (140) 可得 $\left(\mathrm{H'_\ell}\right)^{-1}\partial_\zeta \mathrm{H'_\ell} = \mathrm{H_\ell^{-1}\partial_\zeta H_\ell + T^{-l}l}\ \partial_\zeta \mathrm{T_\ell}$ 以及 $\partial_{\bar\zeta}\left(\left(\mathrm{H'_\ell}\right)^{-1}\partial_\zeta \mathrm{H'_\ell}\right) = \partial_{\bar\zeta}\left(\mathrm{H_\ell^{-1}\partial_\zeta H_\ell}\right)$。后者除 (1,1) 项外均为零。通过直接计算，

$$H_1^{-1}\partial_\rho H_1 = \mathrm{diag}\left(-\chi'\psi_P - (2\rho)^{-1}\left(1 + 2\chi\rho\partial_\rho\psi_P\right), 0\right)$$

其中 ψ_P 是 Painlev´e 函数（见（47））。我们有 $1 + 2\rho\partial_\rho\psi_P = 8\eta_P$ 其中

$$\eta_P = \eta\left((8/3)t\rho^{3/2}\right),\quad \eta(x) = (1 + 3x\psi'(x))/8\,. \tag{144}$$

根据 [MSWW**16**], 的引理 3.4，我们有 $\eta(\mathrm{x}) \le \mathrm{C_{11}x^{4/3}}$，其中 $\mathrm{x} \ll 1$，且对所有 $\mathrm{x} \ge 0$，$0 \le \eta(\mathrm{x}) \le 1/8$。对于 $\mathrm{t} \gg 1$，令 ρ_1 满足 $\mathrm{t^{-2/3}\rho_1 < R/3}$，因此对于 $\rho \le \rho_1$，$\chi(\rho) = 1$，并且存在 $\mathrm{C_{11} > 0}$ 使得

$$(2\rho)^{-1}\left|1 + 2\chi\rho\partial_\rho\psi_P\right| = 4\rho^{-1}\eta_P \le C_{11}t^{2/3}\,.$$

另一方面，对于 $\mathrm{t^{-2/3}\rho_1 \le \rho \le 2R/3}$，我们有 $2\chi\rho\left|\partial_\rho\psi_P\right| \le 2\rho\left|\partial_\rho\psi_P\right| = |\eta_P - 1| \le 1$。由此可得

$$(2\rho)^{-1}\left|1 + 2\chi\rho\partial_\rho\psi_P\right| \le \rho^{-1} \le \rho_1^{-1}t^{2/3}\,.$$

注意到 χ' 仅支撑于 $\mathbb{D}'_j - \mathbb{D}''_j$ 上，其中 $\mathrm{(8/3)t\rho^{3/2} \ge (8/3)(R/3)^{3/2}}$。由于 $\psi_P > 0$ 单调递减，存在 $\mathrm{C_{12} > 0}$，使得在 $\mathbb{D}'_j$ 上 $|\chi'\psi_P| \le \mathrm{C_{12}}$。根据定义 3.26 中 $\mathrm{T}\,\acute{\lambda},\ j,\ t$ 的形式，存在 $\mathrm{C_{13} > 0}$，使得 $\left|\mathrm{T_1^{\pm l}}\right|$，$\left|\mathrm{T_1^{-1}\partial_\zeta T_1}\right| \le \mathrm{C_{13}}$。

根据 (140)，由于 $\mathrm{H'_0}$ 与 t 无关，存在 $\mathrm{C_{14} > 0}$，使得当 $\mathrm{t} \gg 1$ 时，在 $\mathbb{D}'_j$ 上，

$$\left|(H'_1)^{-1}\partial_\zeta H'_1 - \left(H'_0\right)^{-1}\partial_\zeta H'_0\right| \le C_{14}t^{4/3}\,. \tag{145}$$

在 $\mathbb{D}''_j, \chi \equiv 1$ 因此

$$\left|\left(\partial_{\bar\zeta}\left(H_1^{-1}\partial_\zeta H_1\right)\right)_{1,1}\right| = \left|(4\rho)^{-1}\left(\partial_\rho\psi_P + \rho\partial_\rho^2\psi_P\right)\right| = \left|2t^2\rho\sinh(2\psi_P)\right|$$

根据 $\psi_P(\mathrm{x})$ 在 $\mathrm{x} \to 0$ 时的渐近展开，存在 $\mathrm{C_{15} > 0}$，使得 $\mathrm{\sinh(2\psi_P) \le C_{15}x^{-2/3}}$。因此存在 $\mathrm{C'_{15} > 0}$，满足

$$\left|\partial_{\bar\zeta}\left(H_1^{-1}\partial_\zeta H_1\right)\right| \le \left|2t^2\rho\sinh(2\psi_P)\right| \le C'_{15}t^{4/3}$$

在 $\mathbb{D}'_j - \mathbb{D}''_j$，我们有 $\mathrm{C_{16}, C'_{16} > 0}$，使得

$$\begin{aligned}&\left|\left(\partial_{\bar\zeta}\left(H_1^{-1}\partial_\zeta H_1\right)\right)_{1,1}\right| \le (\chi/(4\rho))\left|\partial_\rho\psi_P + \rho\partial_\rho^2\psi_P\right| + \left|\chi'\right|(4\rho)^{-1}\left(|\psi_P| + 2\rho\left|\partial_\rho\psi_P\right|\right) + (1/4)\left|\chi''\right||\psi_P| \\ &\le C_{16}\left((4\rho)^{-1}\left|\partial_\rho\psi_P + \rho\partial_\rho^2\psi_P\right| + |\psi_P| + 2\rho\left|\partial_\rho\psi_P\right|\right) \\ &= C_{16}\left(\left|2t^2\rho\sinh(2\psi_P)\right| + |\psi_P| + |8\eta_P - 1|\right) \le C'_{16}t^{4/3}\,,\end{aligned} \tag{146}$$

这里我们用到了 η_P 的性质，以及 ψ_P 单调递减这一事实。

综合上述估计，存在常数 $\mathrm{C_{17} > 0}$，使得在 $\mathbb{D}'_j$ 上，当 $\mathrm{t} \gg 1$ 时，

$$\left|\partial_{\bar\zeta}\left((H'_1)^{-1}\partial_\zeta H'_1 - \left(H'_0\right)^{-1}\partial_\zeta H'_0\right)\right| \le C_{17}t^{4/3} \tag{147}$$

注意，$\mathrm{H}^{\mathrm{int},\,\beta\,t}=\left(\mathrm{H}^{\mathrm{int},\,\gamma\,t}\right)^{-1}$。对于 $\mathrm{p}_j\in\mathrm{D}\beta$，在 $\mathbb{D}'_j$ 上也有相同的估计。

在区域 (4)：固定一个有限图册 $(\mathrm{U}\alpha,\mathrm{z}\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$，使线丛 L of $\mathrm{X}-\coprod_j\mathbb{D}'_j$ 平凡化。令 $\mathrm{s}\alpha$ 为由 $\mathrm{L}|_{U_\alpha}$ 的全纯标架以及 $\mathrm{dz}\alpha$ 诱导的 $\mathrm{V}|_{U_\alpha}$ 的全纯标架，并通过 ι 在每个 $\mathrm{U}\alpha$ 上将 F 与 V 识别。令 H_0（分别为 H_1）表示 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_{t_0}$（分别为 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_{t}$）相对于该标架在 $\mathrm{U}\alpha$上的局部形式。由定义 2.11 和 §3.4.2，我们有 $\mathrm{h}_{L,\lambda(t),t}=\mathrm{h}^0{}_{L,\lambda}(\iota)\mathrm{e}^{\eta_{\lambda(t),t}}=\mathrm{h}_{L,\mathrm{HE}}\mathrm{e}^{\varphi_{\lambda(t)}+\eta_{\lambda(t),t}}$。我们有

$$\left(\iota^*\left(h_{L,\mathrm{HE}}^{-2}h_K\oplus h_{L,\mathrm{HE}}h_K\right)\right)_{\boldsymbol{s}_\alpha}=\mathrm{diag}\left(h_0^{-2},h_0\right)\tag{148}$$

其中 $\mathrm{h}_0>0$ on $\mathrm{U}\alpha$。由此可得

$$H_0=\mathrm{diag}\left(h_0^{-2}e^{-2\varphi_{\lambda(t_0)}-2\eta_{\lambda(t_0),t_0}},h_0e^{\varphi_{\lambda(t_0)}+\eta_{\lambda(t_0),t_0}}\right),$$
$$H_1=\mathrm{diag}\left(h_0^{-2}e^{-2\varphi_{\lambda(t)}-2\eta_{\lambda(t),t}},h_0e^{\varphi_{\lambda(t)}+\eta_{\lambda(t),t}}\right).$$

其中 φ_λ 是由固定函数 G_ℓ 组成的线性组合，其系数关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 是线性的。因此存在 $\mathrm{C}_{18}>0$，使得对于所有 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{I}$ 和 α，在 $\mathrm{U}\alpha$ 上有，

$$\left|\partial_{z_\alpha}\varphi_\lambda\right|\le C_{18}$$

因此存在 $\mathrm{C}'_{18}>0$ 使得

$$\max_\alpha\sup_{U_\alpha}\left|H_1^{-1}\partial_{z_\alpha}H_1-H_0^{-1}\partial_{z_\alpha}H_0\right|\le C'_{18}\tag{149}$$

结合 (141)、(145)、(147) 和 (149)，存在 C、$\mathrm{C}'>0$，使得对于 $\mathrm{u}\in\mathrm{L}_2^2\left(\mathrm{Herm}\left(\mathrm{F}、\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t\right)\right)$ 和 $\mathrm{t}\gg1$,

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_{h_t^{\mathrm{app}}}u-\Delta_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}}u\right\|^2_{L^2,h_{t_0}^{\mathrm{app}}}\le C'\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\int_{U_\alpha}\left\|\left[H_1^{-1}\partial_{z_\alpha}H_1-H_0^{-1}\partial_{z_\alpha}H_0,\partial_{\bar z_\alpha}u_{\boldsymbol{s}_\alpha}\right]\right\|^2\\
&+C'\sum_{j=1}^{4g-4}\int_{\mathbb{D}'_j}\left\|\left[H_1^{-1}\partial_{\zeta_j}H_1-H_0^{-1}\partial_{\zeta_j}H_0,\partial_{\bar\zeta_j}u_{\boldsymbol{s}_j^{(0)}}\right]\right\|^2\\
&+C'\sum_{j=1}^{4g-4}\int_{\mathbb{D}'_j}\left\|\left[\partial_{\bar\zeta_j}\left(H_1^{-1}\partial_{\zeta_j}H_1\right)-\partial_{\bar\zeta_j}\left(H_0^{-1}\partial_{\zeta_j}H_0\right),u_{\boldsymbol{s}_j^{(0)}}\right]\right\|^2\\
&\le Ct^4\left(\left\|d_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}}u\right\|^2_{L^2,h_{t_0}^{\mathrm{app}}}+\|u\|^2_{L^2,h_{t_0}^{\mathrm{app}}}\right)
\end{aligned}$$

其中 H_0（分别为 H_1）是 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_{t_0}$（分别为 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_{t}$）的局部形式；在最后一步中，我们用到了如下事实：存在 $\mathrm{C}''>0$，使得对于 $\mathrm{t}\gg1$,

$$\int_{U_\alpha}\left|\partial_{\bar z_\alpha}u_{\boldsymbol{s}_\alpha}\right|^2,\ \int_{\mathbb{D}'_j}\left|\partial_{\bar\zeta_j}u_{\boldsymbol{s}_j^{(0)}}\right|^2\le C''\left(\left\|d_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}}u\right\|^2_{L^2,h_{t_0}^{\mathrm{app}}}+\|u\|^2_{L^2,h_{t_0}^{\mathrm{app}}}\right).$$

证毕。

由上述证明中的 (141)、(143) 和 (147)，可得：

引理 4.17。存在 $\mathrm{C}>0$，使得对于 $\mathrm{t}\gg1$,

$$|F_\nabla|^2_{h_{t_0}^{app}}\le Ct^4$$

其中 $\nabla=\nabla_{h^{app}{}_t}$。

引理 4.18. 存在 C > 0 使得 u ∈ L²₂(Herm(F, h^app t)) 且 t 足够大,

$$\|\{\psi,\hat{u}\}\|_{L^2,h_{t_0}^{app}} \le Ct^{11/3}\|u\|_{L^2,h_{t_0}^{app}}$$

其中 $\psi=\psi_{\beta,\gamma,h^{app}t}$ 定义见命题 4.2。

证明。与引理 4.15 的证明一样，我们将 X 分解为四种类型的区域，并在 §3.4.2 中使用由 L 的全纯标架 $s^{(0)}{}_j$ 在 $\mathbb{D}'_j-e\mathbb{D}_{j,t}$、$e\mathbb{D}_{j,t}$ 上以及由 K 的 dz_α 诱导的 U_α 上的标架 s_α。令 H（分别为 U）表示 $h^{app}{}_t$（分别为 u）相对于相应全纯标架的局部形式，并令 $\hat{U}=U+(\mathrm{tr}\,U)\,\mathrm{Id}$。$\{\psi,\hat{u}\}$ 的局部形式为

$$\left\{\gamma_0\gamma_0^*H\det H+(\det H)^{-1}H^{-1}\beta_0^*\beta_0,\hat{U}\right\}$$

区域 (1)：由 (36) 和定义 3.5 可得 $H_{t,\lambda}(\zeta)=(\Gamma_t^*)^{-1}H1_{,\lambda}\left(t^{2/3}\zeta\right)\Gamma_t^{-1}$，其中 $\Gamma_t=\mathrm{diag}\left(t^{1/3},t^{-1/3}\right)$。当 $t\gg1$ 时，$e\mathbb{D}_{j,t}$ 上的 $H_{t,\lambda}$ 由固定紧集 $B(0,\rho_0)$ 上 $H1_{,\lambda}$ 的取值决定。我们有 $\left|\Gamma_tA\Gamma_t^{-1}\right|\lesssim t^{2/3}|A|$，其中 A 是一个 2×2 矩阵。因此存在 $C_0>0$，使得当 $t\gg1$

$$\left|H^{\pm1}_{t,\lambda_j(t)}\right|\le C_0t^{2/3},\ \left|\det H^{\pm1}_{t,\lambda_j(t)}\right|\le C_0.$$

此外，存在 $C_1>0$ 使得 $\left|H^{\pm1}_{t,\lambda_j(t)}\right|\le C_1t^{2/3}$。令 $H=\left(h^{app}{}_t\right)_{s^{(0)}{}_j}$，则有 $H=\left(S^{-1}T_{\lambda(t),j}S\right)^*H_{t,\lambda_j(t)}\left(S^{-1}T_{\lambda(t),j}S\right)$，其中 S 由 (133) 给出。根据 (136)，存在 $C_2>0$ 使得

$$|H\det H|,\ \left|H^{-1}\det H^{-1}\right|\le C_2t^{2/3}$$

区域 (2)：在 $\mathbb{D}'_j-e\mathbb{D}_{j,t}$ 令 $H'=\left(h^{app}{}_t\right)_{s^{(0)}{}_j}$，

则有

$$H'=\left(T_{\lambda(t),j}S\right)^*\widetilde{H}^{int}_{t,\lambda_j(t)}\left(T_{\lambda(t),j}S\right)$$

根据 (133) 和 (135) 下方的论证，存在 $C_4>0$，使得对于 $t\gg1$，$\left|T_{\lambda(t),j}S\right|$，行列式 $\left(T_{\lambda(t),j}S\right)\le C4$，$\left|S^{-1}T_{\lambda^{-1}(t),j}\right|$，行列式 $\left(S^{-1}T_{\lambda(t),j}\right)^{-1}\le C_4t^{2/3}$。根据引理 3.20 的证明中的论证，并应用引理 3.19 和 (72)，存在 $C_5,c_5>0$，使得在 $\mathbb{D}'_j-\mathbb{D}_{j,t}$ 上对于 $t\gg1$,

$$\left|\left(\widetilde{H}^{int}_{t,\lambda_j(t)}\det\widetilde{H}^{int}_{t,\lambda_j(t)}\right)^{\pm1}-\left(\widetilde{H}^{ext}_{t,\lambda_j(t)}\det\widetilde{H}^{ext}_{t,\lambda_j(t)}\right)^{\pm1}\right|\le C_5e^{-c_5t^{2/3}}.$$

通过直接计算和命题 3.14，存在 $C_6>0$ 使得

$$\left|\left(\widetilde{H}^{ext}_{t,\lambda_j(t)}\det\widetilde{H}^{ext}_{t,\lambda_j(t)}\right)^{\pm1}\right|\le C_6t^{4|\lambda_j(t)|}\le C_6t$$

因此，存在 $C'_6>0$ 使得 $\left|\left(eH^{int}_{t,\lambda_j(t)}\det eH^{int}_{t,\lambda_j(t)}\right)^{\pm1}\right|\le C'_6t$。结合上述 e，可得存在 $C_7,C'_7>0$，使得在 $\mathbb{D}'_j-\mathbb{D}_{j,t}$ 上，

$$\left|H'\det H'\right|\le C_7t,\ \left|(H')^{-1}\det(H')^{-1}\right|\le C'_7t^{11/3}.$$

区域（3）：在 $\mathbb{D}'_j=\{\rho\le2R/3\}$ 上，对于 $p_j\in D\beta$ 或 $D\gamma$，通过直接计算可得，

$$\left(H^{int,\gamma}_t\right)\det H^{int,\gamma}_t=\mathrm{diag}\left(\rho^{-1}e^{-2\chi\psi_P},\rho^{-1/2}e^{-\chi\psi_P}\right)=\left(H^{int,\beta}_t\right)^{-1}\left(\det H^{int,\beta}_t\right)^{-1}.$$

在 $\mathbb{D}_{j,t}$ 上，我们有 $\rho^{-1}e^{-2\psi_P} = t^{2/3} f(t^{2/3}\rho)$，其中 $f(x) = x^{-1}e^{-2\psi(s_3 x^{3/2})}$，而 ψ_P、ψ 与（47）中相同。根据命题 3.6 中 ψ_P 的性质，存在 $C_8 > 0$ 使得 $|f|$、$|f^{-1}| \le C_8$ 对于 $0 \le x \le \rho_0$ 成立。因此存在 $C_8' > 0$，使得在 $\mathbb{D}_{j,t}$ 上有 $|\rho^{-1}e^{-2\chi\psi_P}| \le C_8' t^{2/3}$、$|\rho e^{2\chi\psi_P}| \le C_8'$。

对于 $p \in \mathbb{D}_j' - \mathbb{D}_{j,t} \in D_\beta$ 上的情形，由于 $\chi\psi_P > 0$，我们有 $|\rho^{-1}e^{-2\chi\psi_P}| \le |\rho^{-1}| \lesssim t^{2/3}$。另一方面，由于 ψ_P 单调递减，$\chi\psi_P$ 也单调递减。因此，存在 $C_9 > 0$ 使得 $|\rho e^{2\chi\psi_P}| \le C_9$。

因此，对于 $\mathbb{D}_j'$ 上的 $p_j \in D_\beta$ 或 D_γ，存在 $C_{10} > 0$，

$$\left|H_t^{\mathrm{int},\gamma} \det H_t^{\mathrm{int},\gamma}\right|,\ \left|\left(H_t^{\mathrm{int},\beta} \det H_t^{\mathrm{int},\beta}\right)^{-1}\right| \le C_{10} t^{2/3},$$
$$\left|\left(H_t^{\mathrm{int},\gamma} \det H_t^{\mathrm{int},\gamma}\right)^{-1}\right|,\ \left|H_t^{\mathrm{int},\beta} \det H_t^{\mathrm{int},\beta}\right| \le C_{10}.$$

通过直接计算，存在 $C_{11} > 0$ 使得 $|T'_\lambda(t), j, t| \le C_{11} t^{2a'_{\lambda_{j_0}(t)}/3}$, $\left|\left(T'_\lambda(t), j, t\right)^{-1}\right| \le C_{11} t^{2a_{\lambda_{j_0}(t)}/3}$, $|\det T'_\lambda(t), j, t| \le C_{11} t^{-2\lambda_{j_0}(t)/3}$, $\left|\left(\det T'_\lambda(t), j, t\right)^{-1}\right| \le C_{11} t^{-2\lambda_{j_0}(t)/3}$，其中 $a_\lambda = \max(2\lambda, -\lambda)$，$a'_\lambda = \max(-2\lambda, \lambda)$。令 $H = \left(h^{\mathrm{app}} t\right) s^{(0)} j$，由定义 3.26 可得

$$H = \begin{cases} \left(T'_{\lambda(t),j,t}\right)^* H_t^{\mathrm{int},\beta} T'_{\lambda(t),j,t} & p_j \in D_\beta \\ \left(T'_{\lambda(t),j,t}\right)^* H_t^{\mathrm{int},\gamma} T'_{\lambda(t),j,t} & p_j \in D_\gamma \end{cases}$$

结合上述估计，存在常数 $C_{12} > 0$，使得当 $p_j \in D_\gamma$ 时，

$$|H \det H| \le C_{12} t^{5/3},\ \left|H^{-1} \det H^{-1}\right| \le C_{12} t$$

且当 $p_j \in D_\beta$ 时，

$$|H \det H| \le C_{12} t,\ \left|H^{-1} \det H^{-1}\right| \le C_{12} t^{5/3}$$

区域 (4)：在 $X - \coprod_j \mathbb{D}_j'$ 上，令 H 为 $h^{\mathrm{app}}{}_t$ 的局部形式。对于 $s = \pm 1$，我们有，

$$(H \det H)^s = \mathrm{diag}\left(h_0^{3s} e^{s\left(3\varphi_{\lambda(t)} + 3\eta_{\lambda(t),t}\right)}, 1\right).$$

由命题 3.14，存在常数 $C_{13} > 0$，使得当 $t \gg 1$ 时，$\left|\eta_{\lambda(t),t} - \frac{4}{3}\lambda_{j_0}(t) \log t\right| \le C_{13}$。因此，存在常数 $C_{14} > 0$，使得对于所有 α，我们在 U_α 上有

$$\left|(H \det H)^{\pm 1}\right| \le C_{14} t$$

结合上述所有估计即可得出结论。 q.e.d.

现在我们可以证明命题 4.11。

证明。若存在与 $t \gg 1$ 无关的常数 $C > 0$，使得当 $t \gg 1$ 时 $f \le Cg$，则记 $f \lesssim g$。由命题 4.2 以及引理 4.16 和 4.18，对于 $u \in L_2^2\left(\mathrm{Herm}\left(F, h^{\mathrm{app}}{}_t\right)\right)$、$\varrho > 0$，有 $t \gg 1$，

$$\begin{aligned} \left\|\Delta_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} u\right\|^2 &\le \|L_t u\|^2 + \left\|\Delta_{h_t^{\mathrm{app}}} u - \Delta_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} u\right\|^2 + \left\|t^2 \left\{\psi_{\beta,\gamma,h_t^{\mathrm{app}}}, \hat{u}\right\}\right\|^2 \\ &\lesssim \|L_t u\|^2 + t^4 \left\|d_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} u\right\|^2 + t^{22/3+4} \|u\|^2 \le \|L_t u\|^2 + t^4 \left(\Delta_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} u, u\right) + t^{11} \|u\|^2 \\ &\lesssim \|L_t u\|^2 + \frac{\epsilon t^4}{2} \left\|\Delta_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} u\right\|^2 + \frac{t^4}{2\epsilon} \|u\|^2 + t^{11} \|u\|^2 \end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2,\ h^{\mathrm{app}}{}_{t0}}$，$(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2,\ h^{\mathrm{app}}{}_{t0}}$，下文将记作 $\|\cdot\|_t = \|\cdot\|_{L^2,\ h^{\mathrm{app}}{}_{t}}$。令 $\varrho = t^{-4}$，可得

$$\left\|\Delta_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} u\right\|^2 \lesssim \|L_t u\|^2 + t^{13}\|u\|^2$$

根据 End(F) 截面上的 $\Delta_{h^{\mathrm{app}}{}_{t0}}$ 椭圆估计，我们有

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L_2^2,h_{t_0}^{\mathrm{app}}} &\lesssim \left\|\Delta_{h_{t_0}^{\mathrm{app}}} u\right\|^2 + \|u\|^2 \lesssim \|L_t u\|^2 + t^{11}\|u\|^2 \lesssim \|L_t u\|^2 + t^{11+13}\|u\|_t^2\\ &\lesssim \|L_t u\|^2 + t^{24}(\log t)^2\|L_t u\|_t^2 \lesssim \left(1 + t^{24+13}(\log t)^2\right)\|L_t u\|^2 \lesssim t^{38}\|L_t u\|^2\ ,\end{aligned}$$

其中我们应用引理 4.15 来比较 $\|\cdot\|_t^2$ 与 $\|\cdot\|^2$，并应用推论 4.10，结论由此得出。证毕。

4.4. 余项估计。本节中，我们证明对式 (106) 中定义的余项的一个上界，

$$\begin{aligned}R_t(u) &= 2i\Lambda e^{u/2}\mathcal{H}_{t,h}e^{-u/2} - 2i\Lambda\mathcal{H}_{t,h} - L_t(u)\\ &= 2i\Lambda e^{u/2}F_{\nabla_{h\cdot e^u}}e^{-u/2}\\ &+ 2it^2\Lambda e^{u/2}\left(\beta\wedge\beta^{*_{h\cdot e^u}}\right)e^{-u/2} - 2it\Lambda\left(\beta\wedge\beta_h\right)\\ &- \Delta_h u - t^2\left\{\psi_{\beta,\gamma,h},\hat{u}\right\} - 2i\Lambda F_{\nabla_h}\\ &+ 2it^2\Lambda e^{u/2}\left(\gamma^{*_{h\cdot e^u}}\wedge\gamma\right)e^{-u/2} - 2it^2\Lambda\left(\gamma^{*_{h\cdot e^u}}\wedge\gamma\right),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{h} = \mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t$。对于度量 h 和 $\mathrm{g}\in\mathrm{Aut(F)}$，我们有

$$\begin{aligned}\beta\wedge\beta^{*_{h\cdot g}} &= \left(\beta\wedge\beta^{*_h}\right)\circ\widetilde{g}\\ \gamma^{*_{h\cdot g}}\wedge\gamma &= \left(\widetilde{g}\right)^{-1}\circ\left(\gamma^{*_h}\wedge\gamma\right)\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{eg} = (\det \mathrm{g})\,\mathrm{g}$。我们有

$$R_t(u) = R_t^{(0)}(u) + R_t^{(1)}(u) + R_t^{(2)}(u) \tag{150}$$

with

$$\begin{aligned}R_t^{(0)}(u) &= i\Lambda S_t(u)\\ S_t(u) &= 2e^{u/2}F_{\nabla_h}e^{-u/2} - 2F_{\nabla_h} + 2e^{u/2}\bar{\partial}\left(e^{-u}\partial_h e^u\right)e^{u/2} - \bar{\partial}\partial_h u + \partial_h\bar{\partial}u\\ R_t^{(1)}(u) &= 2t^2e^{\hat{u}/2}B_t e^{\hat{u}/2} - 2t^2B_t - t^2\{B_t,\hat{u}\}\\ R_t^{(2)}(u) &= 2t^2e^{-\hat{u}/2}C_t e^{-\hat{u}/2} - 2t^2C_t + t^2\{C_t,\hat{u}\}\end{aligned} \tag{151}$$

and

$$B_t = i\Lambda\beta\wedge\beta^{*_h},\ C_t = i\Lambda\gamma^{*_h}\wedge\gamma$$

给定 \(u\) $\in$ End(F)，令

$$f_j(u) = \sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{k!}u^k \tag{152}$$

下面的引理可由索伯列夫不等式轻易得到。

引理 4.19。给定 $0 < \mathrm{r} < 1$，且 $\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1 \in \mathrm{B}(0,\mathrm{r}) \subset \mathrm{L}_2^2\left(\mathrm{Herm}\left(\mathrm{F},\ \mathrm{h}^{app}\,\mathrm{t}\right)\right)$，对于每个 $\mathrm{j} \geq 1$，存在 $\mathrm{C}_j > 0$ 使得

$$\left\|f_j(u_0) - f_j(u_1)\right\|_{L_2^2,h_{t_0}^{app}} \leq C_j r^{j-1}\|u_0 - u_1\|_{L_2^2,h_{t_0}^{app}}$$

引理 4.20。存在 C > 0，使得对于 u ∈ $L_2^2\left(\mathrm{Herm}\left(\mathrm{F},\ \mathrm{h}^{app}\mathrm{t}\right)\right)$，k = 1、2 和 t ≫ 1

$$\left\|\partial_{h_t^{app}} u\right\|^2_{L^2_{k-1},h^{app}_{t_0}} \le Ct^4 \left\|u\right\|^2_{L^2_k,h^{app}_{t_0}}$$

证明。我们按照引理 4.15、4.16、4.18 的证明，在将 X 分解得到的四类区域上证明该估计。根据 (100) 和 (101) 中 L_k^2 范数的等价定义，以及相对于局部全纯标架的 ∂_hu 的局部形式，结论将由以下各项的界推出

$$H^{-1}\partial_z H,\ \partial_{\bar z}\left(H^{-1}\partial_z H\right),\ \partial_z\left(H^{-1}\partial_z H\right), \tag{153}$$

其中 H 是 $\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t$ 的局部形式。注意，引理 4.16、4.17 的证明中的 (141)、(143)、(145) 和 (149) 已经为前两项提供了适当的界。

区域 (1)：在 $\mathrm{e}\mathbb{D}_{j,t}$ 当 $\mathrm{p}_j \in \mathrm{D}_r$ 时，令 H = $\left(\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t\right)_{s^{(0)}{}_j}$，我们有 H = $\left(\mathrm{eT}\right)^* \mathrm{H}_{t,\lambda_j(t)}\,\mathrm{eT}$，其中 eT = $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{T}_{\lambda(t),j}\mathrm{S}$。我们有

$$\begin{aligned}
H^{-1}\partial_\zeta H &= \widetilde{T}^{-1}\left(H^{-1}_{t,\lambda_j(t)}\partial_\zeta H_{t,\lambda_j(t)}\right)\widetilde{T} + \widetilde{T}^{-1}\partial_\zeta\widetilde{T}\\
\partial_\zeta\left(H^{-1}\partial_\zeta H\right) &= \widetilde{T}^{-1}\partial_\zeta\left(H^{-1}_{t,\lambda_j(t)}\partial_\zeta H_{t,\lambda_j(t)}\right)\widetilde{T} + \partial_\zeta\left(\widetilde{T}^{-1}\right)\left(H^{-1}_{t,\lambda_j(t)}\partial_\zeta H_{t,\lambda_j(t)}\right)\widetilde{T},\\
&\quad + \widetilde{T}^{-1}\left(H^{-1}_{t,\lambda_j(t)}\partial_\zeta H_{t,\lambda_j(t)}\right)\partial_\zeta\left(\widetilde{T}\right) + \partial_\zeta\left(\widetilde{T}^{-1}\partial_\zeta\widetilde{T}\right),
\end{aligned} \tag{154}$$

其中 ζ = ζ_j，并且我们使用了 $\partial_{\bar\zeta}$eT = 0。由 (36) 和定义 3.5，$\partial_\zeta\left(\mathrm{H}_t^{-1},_\lambda\partial_\zeta \mathrm{H}_{t,\lambda}\right)$ = $\mathrm{t}^{4/3}\Gamma_t\partial_\zeta\left(\zeta\mapsto \mathrm{H}_1^{-1},_\lambda\partial_\zeta \mathrm{H}1,_\lambda\big|_{t^{2/3}\zeta}\right)\Gamma_t$on $\mathrm{e}\mathbb{D}$j,t，其中 Γ_t = diag $\left(\mathrm{t}^{1/3}, \mathrm{t}^{-1/3}\right)$。引理 4.16 的证明中采用了相同的论证。对于任意 2 × 2 矩阵 A，我们有 $\left|\Gamma_t \mathrm{A}\,\Gamma_t^{-1}\right| \lesssim \mathrm{t}^{2/3}|\mathrm{A}|$。由推论 3.18 和 (136)，存在一个与 λ ∈ I 无关的 $\mathrm{C}_1 > 0$，使得对于 t ≫ 1, $\left|\partial_\zeta\left(\mathrm{H}_t^{-1},_\lambda\partial_\zeta \mathrm{H}_{t,\lambda}\right)\right| \le \mathrm{C}_1\mathrm{t}^2$, $\left|\mathrm{H}_t^{-1},_\lambda\partial_\zeta \mathrm{H}_{t,\lambda}\right| \le \mathrm{C}_1\mathrm{t}^{4/3}$。另一方面，引理 4.16 的证明中的论证表明，存在一个 $\mathrm{C}_2 > 0$，使得对于 t ≫ 1

$$\left|\widetilde{T}^{\pm1}\right|,\ \left|\partial_\zeta\left(\widetilde{T}^{\pm1}\right)\right|,\ \left|\partial_\zeta\left(\widetilde{T}^{-1}\partial_\zeta\widetilde{T}\right)\right| \le C_2$$

结合这些结果，存在 $\mathrm{C}_3 > 0$ 使得

$$\left|\partial_\zeta\left(H^{-1}\partial_\zeta H\right)\right| \le C_3 t^2 \tag{155}$$

区域 (2)：在 $\mathbb{D}'_j$–$\mathrm{e}\mathbb{D}_{j,t}$ 上，令 T′ = $\mathrm{T}_{\lambda(t),j}$S，H = $\left(\mathrm{h}^{\mathrm{app}}{}_t\right)_{s^{(0)}{}_j}$，我们有 H = $(\mathrm{T}')^*\,\mathrm{eH}_t^{\mathrm{int}},_{\lambda_j(t)}\mathrm{T}'$。如同在利用命题 3.14 证明引理 4.16 时那样，存在 C_4 和 $\mathrm{C}'_4 > 0$ 使得对于 t ≫ 1

$$\left|\partial_\zeta\left(\left(\widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda_j(t)}\right)^{-1}\partial_\zeta\left(\widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda_j(t)}\right)\right)\right| \le C'_4 t^{4/3}$$

由 (72) 以及引理 3.20 证明中的论证，存在 $\mathrm{C}_5, \mathrm{c}_5 > 0$ 使得 eon $\mathbb{D}'_j - \mathbb{D}_{j,t}$,

$$\left|\partial_\zeta\left(\left(\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda_j(t)}\right)^{-1}\partial_\zeta\left(\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda_j(t)}\right)\right) - \partial_\zeta\left(\left(\widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda_j(t)}\right)^{-1}\partial_\zeta\left(\widetilde{H}^{\mathrm{ext}}_{t,\lambda_j(t)}\right)\right)\right| \le C_5 e^{-c_5 t^{2/3}}$$

由此可知，存在 $\mathrm{C}_6 > 0$ 使得

$$\left|\partial_\zeta\left(\left(\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda_j(t)}\right)^{-1}\partial_\zeta\left(\widetilde{H}^{\mathrm{int}}_{t,\lambda_j(t)}\right)\right)\right| \le C_6 t^{4/3}$$

根据引理 4.16 证明中的论证，存在 $C_8 > 0$ 使得 $|T'|, |\partial_\zeta T'| \le C8, |(T')^{-1}|, |(T')^{-1}\partial_\zeta(T')| \le C_8 t^{2/3}$，并且 $\left|\partial_\zeta\left((T')^{-1}\right)\right|, \left|\partial_\zeta\left((T')^{-1}\partial_\zeta T'\right)\right| \le C_8 t^{4/3}$。结合这些估计以及 (142)，其中 $H_1 = eH_t^{\mathrm{int}}$, $\lambda_j(t)$，存在 $C_9 > 0$ 使得当 $t \gg 1$

$$\left|\partial_\zeta\left(H^{-1}\partial_\zeta H\right)\right| \le C_9 t^2 . \tag{156}$$

区域（3）：对于 $p_j \in D\gamma$，回顾 $H^{\mathrm{int},\gamma t} = \mathrm{diag}\left(\rho^{-1/2}e^{-\chi\psi_P}\right.$，其中 ψ_P 是 Painlev´e 函数（见（47））。在 $\mathbb{D}_j''$、$\chi \equiv 1$ 和

$$\left|\partial_\zeta\left(\left(H_t^{\mathrm{int},\gamma}\right)^{-1}\partial_\zeta H_t^{\mathrm{int},\gamma}\right)\right| \le (\rho^{-2}/4)\left|1 + \rho\partial_\rho\psi_P - \rho^2\partial_\rho^2\psi_P\right| = 2\left|-t^2\rho\sinh(2\psi_P) + \rho^{-2}\eta_P\right|$$

其中 $\eta_P = (1 + 2\rho\partial_\rho\psi_P)/8$ 如引理 4.16 的证明中所定义。回顾 $\rho^{-2}\eta_P \lesssim t^{4/3}$，并且有 $t^2\rho\sinh(2\psi_P) \,.\, t^{4/3}$。因此存在 $C_{10} > 0$，使得在 $\mathbb{D}_j''$ 上，

$$\left|\partial_\zeta\left(\left(H_t^{\mathrm{int}}\right)^{-1}\partial_\zeta H_t^{\mathrm{int}}\right)\right|_{H_1^{\mathrm{int}}} \le C_{10}t^{4/3}$$

由（146），在 $\mathbb{D}_j' - \mathbb{D}_j''$ 上，存在 C_{11} 和 $C_{11}' > 0$，使得当 $t \gg 1$

$$\left|\partial_\zeta\left(\left(H_t^{\mathrm{int}}\right)^{-1}\partial_\zeta H_t^{\mathrm{int}}\right)\right|_{H_1^{\mathrm{int}}} \le \left(\chi/(4\rho^2)\right)\left|1 + \rho\partial_\rho\psi_P - \rho^2\partial_\rho^2\psi_P\right| + \left(\chi'/(4\rho)\right)\left(|\psi_P| + 2\rho\left|\partial_\rho\psi_P\right|\right)$$
$$+ (\chi''/4)|\psi_P| \le C_{11}\left(\left|-2t^2\rho\sinh(2\psi_P) + 2\rho^{-2}\eta_P\right| + |\psi_P| + |8\eta_P - 1|\right) \le C_{11}' t^{4/3} .$$

由（93），存在 $C_{12} > 0$ 使得

$$\left|\left(T'_{\lambda(t),j,t}\right)^{-1}\partial_\zeta T'_{\lambda(t),j,t}\right|, \left|\partial_\zeta\left(\left(T'_{\lambda(t)*j,t}\right)^{-1}\partial_\zeta T'_{\lambda(t),j,t}\right)\right| \le C_{12} .$$

设 $H = \left(h^{\mathrm{app}}{}_t\right)_{s^{(0)}j}$，我们有 $H = \left(T\hat{\lambda}(t)_{,j,t}\right) H^{\mathrm{int},\gamma}{}_t T\hat{\lambda}(t)_{,j,t_0}$。根据（154）的计算以及（145）中对 $\left|\left(H^{\mathrm{int},\gamma t}\right)^{-1}\partial_\zeta H^{\mathrm{int},\gamma t}\right|$ 的估计，存在 $C_{13} > 0$，使得对于 $t \gg 1$

$$\left|\partial_\zeta\left(H^{-1}\partial_\zeta H\right)\right| \le C_{13}t^{4/3} . \tag{157}$$

由于 $H^{\mathrm{int},\beta t} = H^{-1}$，对于 $\mathbb{D}_j'$ 且 $p_j \in D\beta$，我们对（153）中的最后一个量有相同的界。

区域（4）：在 $X - \coprod_j \mathbb{D}_j'$ 上，采用引理 4.16 的证明中的记号，我们有

$$\partial_{z_\alpha}\left(H^{-1}\partial_{z_\alpha}H\right) = \mathrm{diag}\left(-2\partial_{z_\alpha}^2\log h_0 - 2\partial_{z_\alpha}^2\varphi_{\lambda(t)}, \partial_{z_\alpha}^2\log h_0 + \partial_{z_\alpha}^2\varphi_{\lambda(t)}\right)$$

其中，h_0 由（148）给出。φ_λ 是一个系数关于 λ 呈线性的线性组合，存在 $C_{14} > 0$ 使得

$$\max_\alpha \sup_{U_\alpha}\left|\partial_{z_\alpha}\left(H^{-1}\partial_{z_\alpha}H\right)\right| \le C_{14} \tag{158}$$

现在，由（155）、（156）、（157）和（158）可得（153）中最后一个量的全局界。 q.e.d.

命题4.21。存在 $C > 0$，使得对于 $0 < r < 1$，$u_0, u_1 \subset B(0,r) \in L_2^2\left(\mathrm{Herm}(F, h^{app}t)\right)$ 且 $t \gg 1$

$$\|R_t(u_0) - R_t(u_1)\|_{L^2, h_{t_0}^{app}} \le Crt^{17/3}\|u_0 - u_1\|_{L_2^2, h_{t_0}^{app}} .$$

证明。我们有

$$R_t^{(1)}(u) = 2t^2\{B_t, f_2(\hat{u}/2)\} + 2t^2 f_1(\hat{u}/2) B_t f_1(\hat{u}/2),$$

其中 $R^{(1)}{}_t$ 在（151）中定义，并且我们使用了 $e^{\hat{u}/2} = 1 + f_1(\hat{u}/2) = 1 + \hat{u}/2 + f_2(\hat{u}/2)$，其中 f_j 在（152）中定义。由索伯列夫嵌入定理，存在 $C_j > 0$，使得 $\sup_X |f_j(u_0)|, |f_j(u_1)| \le C_j r_j$，其中 $j \ge 1$。作为引理 4.18 的证明的推论，$\sup_X |B_t|, \sup_X |C_t| \lesssim t^{11/3}$。因此，由引理 4.19，存在 $C_0 > 0$，使得当 $t \gg 1$

$$\left\|R_t^{(1)}(u_0) - R_t^{(1)}(u_1)\right\|_{L^2} \le C_0 t^{17/3} r \|u_0 - u_1\|_{L_2^2} \tag{159}$$

类似地，存在 $C_0' > 0$，使得当 $t \gg 1$

$$\left\|R_t^{(2)}(u_0) - R_t^{(2)}(u_1)\right\|_{L^2} \le C_0' t^{17/3} r \|u_0 - u_1\|_{L_2^2}, \tag{160}$$

其中 $R^{(2)}{}_t$ 由 (151) 给出。只要对 $S_t(u_0) - S_t(u_1)$ 得到类似的界，结论便随之成立。消去线性项后，我们得到

$$\begin{aligned}
S_t(u) &= 2F_{\nabla_h} f_2\left(-\frac{u}{2}\right) + 2f_2\left(-\frac{u}{2}\right) F_{\nabla_h} + 2f_1\left(\frac{u}{2}\right) F_{\nabla_h} f_1\left(-\frac{u}{2}\right) + 2\bar{\partial}_h f_2(u) \\
&+ 2\bar{\partial}\left(f_1(-u)\partial_h f_1(u)\right) + [u, \bar{\partial}\partial_h f_1(u)] + [u, \bar{\partial}\left(f_1(-u)\partial_h f_1(u)\right)] + 2\left(\bar{\partial}\partial_h f_1(u)\right) f_2\left(-\frac{u}{2}\right) \\
&+ 2\bar{\partial}\left(f_1(-u)\partial_h f_1(u)\right) f_2\left(-\frac{u}{2}\right) + 2f_2\left(\frac{u}{2}\right)\left(\bar{\partial}\partial_h f_1(u)\right) + 2f_2\left(\frac{u}{2}\right)\bar{\partial}\left(f_1(-u)\partial_h f_1(u)\right) \\
&+ 2f_1\left(\frac{u}{2}\right)\left(\bar{\partial}\partial_h f_1(u)\right) f_1\left(-\frac{u}{2}\right) + 2f_1\left(\frac{u}{2}\right)\bar{\partial}\left(f_1(-u)\partial_h f_1(u)\right) f_1\left(-\frac{u}{2}\right)
\end{aligned}$$

其中 $h = h^{app}{}_t$。由引理 4.17，$|F_{\nabla_h}| \lesssim t^2$。利用 $\bar{\partial}(A\partial_h B) = \left(\bar{\partial}A\right) \wedge (\partial_h B) + A\bar{\partial}\partial_h B$，可以进一步展开相关项，其中 $A、B \in \Omega^0$(端同态 (F))。对于包含 $\bar{\partial}(\cdot)$ 或 $\partial_h(\cdot)$ 乘积的项，我们使用有界嵌入 $L_1^2 \times L_1^2 \subset L^4 \times L^4 \subset L^2$，；对于所有其他项，使用有界嵌入 $L_2^2 \subset C^0$，并应用引理 4.20 和 4.19。例如，对于以下第一类项，我们有：

$$\begin{aligned}
&\left\|\bar{\partial}\left(f_1(-u_0) - f_1(-u_1)\right) \wedge \partial_h f_1(u_1)\right\|_{L^2} \le \left\|\bar{\partial}\left(f_1(-u_0) - f_1(-u_1)\right)\right\|_{L^4} \|\partial_h f_1(u_1)\|_{L^4} \\
&\lesssim \left\|\bar{\partial}\left(f_1(-u_0) - f_1(-u_1)\right)\right\|_{L_1^2} \|\partial_h f_1(u_1)\|_{L_1^2} \lesssim t^2 \|f_1(-u_0) - f_1(-u_1)\|_{L_1^2} \|f_1(u_1)\|_{L_1^2} \\
&\lesssim t^2 r \|u_0 - u_1\|_{L_2^2}
\end{aligned}$$

由这些逐项估计可知，存在 $C_1 > 0$，使得当 $t \gg 1$ 时，

$$\|S_t(u_0) - S_t(u_1)\|_{L^2} \le C_1 t^2 r \|u_0 - u_1\|_{L_2^2} \tag{161}$$

由分解 (150)，结合 (159)、(160) 和 (161)，即可得出结论。证毕。

4.5. 定理 1.1 的证明。在 L_2^2(End(F)) 上定义

$$\mathcal{F}_t : u \longmapsto -L_t^{-1}\left(2i\Lambda e^{u/2}\mathcal{H}_{t,h^{app}_{t,\mathcal{A}(t)}}(0)e^{-u/2} + R_t(u)\right) \tag{162}$$

对于 $t \gg 1$，借助命题 4.21、4.11 和 3.27，我们利用压缩映射原理找到一个不动点。

定理 4.1. 存在 $C_1, C_2 > 0$，使得对于 $t \gg 1$,

$$\|g_t - Id\|_{L_2^2} \leq C_1 e^{-C_2 t^{2/3}}$$

其中，$h_t = h^{app}\, t \cdot g_t$ 是与 $(F, t\beta, t\gamma)$ 相关的 SU(1,2) Hitchin 方程的唯一解。

证明。由命题 4.21、4.11，存在 $C_3, C_4 > 0$，使得当 $0 < r < 1$ 且 $u_0, u_1 \in B(0, r)$ 时，$t \gg 1$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_t(u_0) - \mathcal{F}_t(u_1)\|_{L_2^2, h_{t_0}^{app}} &\leq C_3 t^{19} \|R_t(u_0) - R_t(u_1)\|_{L^2, h_{t_0}^{app}} \\ &\leq C_4 t^{19+17/3} r \|u_0 - u_1\|_{L_2^2, h_{1,A_0}^{app}} .\end{aligned}$$

由命题 3.27，存在 $C_5, C_6, C_7 > 0$，使得当 $t \gg 1$ 时，

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_t(0)\|_{L_2^2, h_{t_0}^{app}} &= \left\| L_t^{-1} \left(2i\Lambda \mathcal{H}_{t, h_t^{app}}(0) \right) \right\|_{L_2^2, h_{t_0}^{app}} \\ &\leq C_5 t^{19} \left\| \mathcal{H}_{t, h_t^{app}}(0) \right\|_{L^2, h_{t_0}^{app}} \leq C_6 t^{19} e^{-C_7 t^{2/3}}\end{aligned}$$

取 $t_1 \gg 1$，使上述估计成立，并且

$$2C_6 t^{19} e^{-C_7 t^{2/3}} < (2C_4)^{-1} t^{-19-17/3} < 1$$

当 $t \geq t_1$ 时成立，且下文假设 $t \geq t_1$。取 r，使得 $2C_6 t^{19} e^{-C_7 t^{2/3}} < r < C_4^{-1} t^{-19-17/3}/2$。对于 $u_0, u_1 \in B(0, r) \subset L_2^2\left(\mathrm{Herm}\left(F,\ h^{app}{}_t\right)\right)$，有 $\|\mathcal{F}_t(u_0) - \mathcal{F}_t(u_1)\| \leq (1/2)\, \|u_0 - u_1\|$。另一方面，$B(0, r') \subset B(0, r)$，其中 $r' = (1 - C_4 t^{19+17/3})^{-1} \|\mathcal{F}_t(0)\|$。对于任意 $n \geq 0$,

$$\left\|\mathcal{F}_t^n(0)\right\| = \left\|\mathcal{F}_t^n(0) - 0\right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\|\mathcal{F}_t^{k+1}(0) - \mathcal{F}_t^k(0)\right\| \leq (1 - 2^{-n})\, r' \leq r'$$

序列 $\{\mathcal{F}_{nt}(0)\}_n$ 收敛到满足 $\mathcal{F}_t(u_{\infty,t}) = u_{\infty,t}$ 的 $u_{\infty,t} \in B(0, r')$。根据 (162) 中 $\mathcal{F}_t$ 的定义，以及 (106) 和 (102)，我们可知 $h_t = h^{app}{}_t \cdot g_t$，其中 $g_t = e^{u_{\infty,t}}$ 是与 $(F, t\beta, t\gamma)$ 相关联的 SU(1,2) Hitchin 方程的一个解。由引理 4.19，存在 $C_1, C_2 > 0$，使得当 $t \geq t_1$,

$$\|g_t - \mathrm{Id}\|_{L_2^2, h_{t_0}^{app}} \leq r' \leq C_6 t^{19} e^{-C_7 t^{2/3}} \leq C_1 e^{-C_2 t^{2/3}}$$

证毕。

推论 4.22. 对于任意紧集 $X_0 \Subset X - D$ 且 $k \geq 0$，存在 $t_{1,k}$、C_k、$c_k > 0$，使得对于所有 $t \geq t_{1,k}$,

$$\|g_t - Id\|_{C^k(X_0)} \leq C_k e^{-c_k t^{2/3}}$$

其中 $h_t = h_{\infty,t} \cdot g_t$，$h_{\infty,t} = \iota^*\left(h^{-2}\, L, \lambda(t), t h_K \oplus h_{L, \lambda(t), t} h_K\right)$，且 h_t 是与 $(F, t\beta, t\gamma)$ 相关联的 SU(1,2) Hitchin 方程的唯一解。

证明。由命题 3.28 和上述定理，我们有 $C_0, c_0 > 0$，并且存在 $t_{1,0}$，使得对于 $t \geq t_{1,0}$，

$$\|g_t - \mathrm{Id}\|_{L_2^2(X_0)} \leq C_0 e^{-c_0 t^{2/3}} . \tag{163}$$

这证明了 $k = 0$ 的结论，其余证明将是一个标准的自举论证。设 $\{(U_{\alpha,k}; z_\alpha)\}_{\alpha \in \mathscr{A}, k \geq 0}$ 是一列图册，其中 $U_{\alpha,\ell} \subseteq U_{\alpha,k}$ 对于 $l \geq k$ 成立，并且 F 在 $U_{\alpha,0}$ 上平凡化。在每个 $U_{\alpha,}$ 0<style> 上选取局部标架。

并且，关于相应的标架，$H^{(\alpha)}{}_t$（分别地，$H^{(\alpha)}{}_{t,\infty}$, $\varphi^{(\alpha)}dz_\alpha$）是在 $U_{0,\alpha}$ 上的 h_t（分别地，$h_{t,\infty}$, Φ）的局部形式。我们有 $H = H^{(\alpha)}{}_t$ 或 $H^{(\alpha)}{}_{t,\infty}$，并且 $\varphi = \varphi^{(\alpha)}$ 满足

$$\partial_{\bar z}\partial_z H = (\partial_{\bar z} H)\, H^{-1}\, (\partial_z H) + t^2 H\left[\varphi, H^{-1}\varphi^* H\right]$$

其中 $z = z_\alpha$。假设对于 $0 \le l \le k+1$，存在 C'_ℓ、$c'_\ell > 0$ 和 $t_{1,\ell+1} \ge t_{1,0}$，使得对于所有 $\alpha \in \mathscr{A}$，$t \ge t_{1,\ell+1}$，$H_t = H^{(\alpha)}{}_t$ 以及 $H_{t,\infty} = H^{(\alpha)}{}_{t,\infty}$ 满足

$$\left\|H_t - H_{t,\infty}\right\|_{L^2_\ell(U_{\alpha,\ell})} \le C'_\ell e^{-c'_\ell t^{2/3}}. \tag{164}$$

注意到 $k = 0$ 的情形由（163）推出。根据 Hitchin 方程的局部形式，对于 $z = z_\alpha$，我们有：

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar z}\partial_z (H_t - H_{t,\infty}) &= \partial_{\bar z}(H_t - H_{t,\infty})\, H_t^{-1}\, (\partial_z H_t) + (\partial_{\bar z} H_{t,\infty})\left(H_t^{-1} - H_{t,\infty}^{-1}\right)(\partial_z H_t)\\
&+ (\partial_{\bar z} H_{t,\infty})\, H_{t,\infty}^{-1}\partial_z (H_t - H_{t,\infty})\\
&+ t^2 (H_t - H_{t,\infty})\left[\varphi, H_t^{-1}\varphi^* H_t\right] + t^2 H_{t,\infty}\left[\varphi, \left(H_t^{-1} - H_{t,\infty}^{-1}\right)\varphi^* H_t\right]\\
&+ t^2 H_{t,\infty}\left[\varphi, H_{t,\infty}^{-1}\varphi^*(H_t - H_{t,\infty})\right].
\end{aligned} \tag{165}$$

由内部椭圆正则性估计，存在 $C > 0$，使得对于所有 α,

$$\left\|H_t - H_{t,\infty}\right\|_{L^2_{k+2}(U_{\alpha,k+2})} \le C\left(\left\|\partial_{\bar z}\partial_z (H_t - H_{t,\infty})\right\|_{L^2_k(U_{\alpha,k+1})} + \left\|H_t - H_{t,\infty}\right\|_{L^2(U_{\alpha,k+2})}\right).$$

在（165）中，我们展开每一项的高阶导数，得到如下形式的项之和

$$\nabla^m\left(\partial_{\bar z}(H_t - H_{t,\infty})\, H_t^{-1}\, (\partial_z H_t)\right), \ldots, \nabla^m\left(t^2 H_{t,\infty}\left[\varphi, H_{t,\infty}^{-1}\varphi^*(H_t - H_{t,\infty})\right]\right),$$

其中 $0 \le m \le k$。按照证明命题 3.4 中的归纳论证，并注意到当 $c > 0$ 时，$t^2 e^{-ct^{2/3}} \to 0$ 随 $t \to 0$，我们对所有 $l \ge 0$ 都有（164）。结论由对每个 $l' \ge 0$ 的有界嵌入 $L^2_{\ell+2} \subset C^{\ell'}$ 得出。

证毕。

结合上述所有分析，即可得到定理 1.1。我们将其更详细地重述如下。

定理 4.2。固定 $x_0 \in X - D$，$v_0 \in L|_{x_0}$，以及 $X_0 \subset X - D$ 中的一个紧集。设 h_t 是 $(F, t\beta, t\gamma)$ 的 Hermitian-Yang-Mills 度量，且 $\iota : F \to V$ 是如定理 2.4 中所述、对应于 (F, β, γ) 的 Hecke 修改。对于 $a, 0$，令 $S_a = \iota^{-1} \circ \mathrm{diag}(a^2, a^{-1}) \circ \iota$，e 为 $F|_{X-D}$ 的一个端omorphism。令 $h_t = S^*_{|} v_{0|_k} h_t$，其中 k_t 是 $L|_{X-D} = \det F^*|_{X-D}$ 上由 h_t 诱导的度量。令 $X_0 \Subset X - D$ 为一个紧集。令 $h_\infty = \iota^*\left(h_L^{-2}, \infty h_K \oplus h_{L,\infty} h_K\right)$，其中 $h_{L,\infty}$ 是 (X, D) 上适配于滤过丛 (L, λ_∞) 的调和度量，使得 $|v^0|_{h_{L,\infty}} = 1$ 并且

$$\lambda_{\infty,j} = \begin{cases} 1/4 & p_j \in D_\beta \\ -1/4 & p_j \in D_\gamma \\ -d_r^{-1}\left(\deg L + \frac{1}{4}\left(d_\beta - d_\gamma\right)\right) & p_j \in D_r \end{cases}. \tag{166}$$

e 设 ψ_t 由 $h_t = h_\infty \cdot \psi_t$ 给出。那么对于每个 $k \ge 0$，存在 C_k 使得

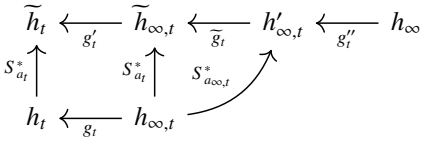
$$\|\psi_t - Id\|_{C^k(X_0)} \le \frac{C_k}{\log t}.$$

证明。设 $\mathrm{h}_{\infty,t}=\iota^*\left(\mathrm{h}_{L^{-2},\lambda(t),t}\mathrm{h}_K\oplus\mathrm{h}_{L,\lambda(t),t}\mathrm{h}_K\right)$，并设 g_t 如推论 4.22 中所述。我们将首先在 $\mathrm{F}|_{X_0}$ 上定义若干辅助度量及关联这些度量的自同构。

设 k_t（分别为 $\mathrm{k}_{\infty,t}$）是由 h_t（分别为 $\mathrm{h}_{\infty,t}$）诱导的 $\mathrm{L}|_{X-D}$ 上的度量。设 $\mathrm{a}_t=|\mathrm{v}_0|_{k_t}$并

$$a_{\infty,t}=|v_0|_{k_{\infty,t}}=|v_0|_{h_{L,\lambda(t),t}} \tag{167}$$

e e设 $\mathrm{h}_t=\mathrm{S}^*\mathrm{a}_t\mathrm{h}_t$，$\mathrm{h}_{\infty,t}=\mathrm{S}^*\mathrm{a}_t\mathrm{h}_{\infty,t}$，且 $\mathrm{h}'_{\infty,t}=\mathrm{S}^*\mathrm{a}_{\infty,t}\mathrm{h}_{\infty,t}$。设 g'_t（分别为 eg_t）由 $\mathrm{h}_t=\mathrm{h}_{\infty,t}\cdot\mathrm{g}'_t$（分别为 $\mathrm{h}_{\infty,t}=\mathrm{h}'_{\infty,t}\cdot\mathrm{eg}_t$）定义。设 g''_t由 $\mathrm{h}'_{\infty,t}=\mathrm{h}_{\infty}\cdot\mathrm{g}''_t$定义。相关度量与自同构群总结如下图所示。特别地，$\psi_t=\mathrm{g}''_t\cdot\mathrm{eg}_t\cdot\mathrm{g}'_t$。



再由命题 2.6 回忆 $\mathrm{d}_r>0$。设 j_0 为一个固定指标，使得 $\mathrm{p}_{j_0}\in\mathrm{D}_r$。由 (167) 和 (84)，我们有

$$a_{\infty,t}=|v_0|_{h_{L,\mathrm{HE}}}\,e^{(\varphi_{\lambda(t)}+\eta_{\lambda(t),t})/2}.$$

不失一般性，我们可以假设 $|\mathrm{v}0|_{h_{L,\ \mathrm{HE}}}=1$。由命题 3.14、3.25 以及 (86)，对 $\mathrm{j}=\mathrm{j}_0,$，存在 $\mathrm{C}_0>0$，使得当 $\mathrm{t}\gg1$

$$\left|\eta_{\lambda(t),t}-\frac{4}{3}\lambda_{j_0}\log t\right|\le C_0.$$

由定义 2.11 可知，φ_λ 是 X_0 上固定光滑函数 G_j 的线性组合，其系数是 $\lambda(\mathrm{t})$ 的线性函数。另注意，对所有 $\mathrm{t}\ge1$，$\left|\lambda_{j_0}(\mathrm{t})\right|<1/4$。因此存在 $\mathrm{C}_1>1$，使得当 $\mathrm{t}\gg1$ 时，$\mathrm{C}_1^{-1}\mathrm{t}^{-1/3}\le\mathrm{e}^{\varphi_{\lambda(t)}+\eta_{\lambda(t),t}}\le\mathrm{C}_1\mathrm{t}^{1/3}$。因此存在 $\mathrm{C}_2>0$，使得当 $\mathrm{t}\gg1$ 时，$\mathrm{a}_{\infty,t}\le\mathrm{C}_2\mathrm{t}^{1/6}$。我们有 $\mathrm{a}_t=\mathrm{a}_{\infty,t}(\det\mathrm{g}_t(\mathrm{p}_0))^{-1/2}$。由推论 4.22，存在 $\mathrm{C}'_2>0$，使得当 $\mathrm{t}\gg1$ 时，$\mathrm{a}_t\le\mathrm{C}'_2\mathrm{a}_{\infty,t}\le\mathrm{C}'_2\mathrm{C}_2\mathrm{t}^{1/6}$。注意，$\mathrm{g}'_t=\mathrm{S}^{-1}\mathrm{a}_t\circ\mathrm{g}_t\circ\mathrm{S}\,\mathrm{a}_t$。由推论 4.22 可知，对 $\mathrm{k}\ge0$，存在 $\mathrm{C}3,_k$、$\mathrm{c}3,_k>0$，使得当 $\mathrm{t}\gg1$

$$\left\|g'_t-\mathrm{Id}\right\|_{C^k(X_0)}\le C_{3,k}e^{-c_{3,k}t^{2/3}}. \tag{168}$$

我们有

$$\widetilde{g}_t=\iota^{-1}\circ\mathrm{diag}\left(\det g_t(p_0)^{-1},(\det g_t(p_0))^{1/2}\right)\circ\iota.$$

注意，对于 (98) 中 X_0，上标架的任意两种选择，所得范数都是等价的。在与分解 $\mathrm{V}=\mathrm{L}^{-2}\mathrm{K}\oplus\mathrm{LK}$ 相容的标架下，eg_t 的局部形式是常数。因此，由推论 4.22 可知，存在 C_4，$\mathrm{c}_4>0$，使得对于 $\mathrm{t}\gg1$,

$$\|\widetilde{g}_t-\mathrm{Id}\|_{C^k(X_0)}=\|\widetilde{g}_t-\mathrm{Id}\|_{C^0(X_0)}\le C_4e^{-c_4t^{2/3}}. \tag{169}$$

设 $\mathrm{h}_{L,\ \infty,\ t}$ 为 L 上的度量，其中 $\mathrm{h}'_{\infty,\ t}=\iota^*\left(\mathrm{h}_{L^{-2},\ \infty,\ t}\mathrm{h}_K\oplus\mathrm{h}_{L,\ \infty,\ t}\mathrm{h}_K\right)$。我们有

$$\begin{aligned}h_{L,\infty}&=h_{L,\infty,t}\exp\left(\varphi_{\lambda_\infty}-\varphi_{\lambda(t)}+\varphi_{\lambda_\infty}(p_0)-\varphi_{\lambda(t)}(p_0)\right)\\&=h_{L,\infty,t}\exp\left(\sum_{j=1}^{4g-4}\sum_{\ell=1}^{j}(\lambda_{\infty,\ell}-\lambda_\ell(t))\left(G_j-G_j(p_0)\right)\right).\end{aligned}$$

对于 $k \geq 0$，存在 $C5,_k > 0$ 使得 $\|G_j - G_j(p_0)\|_{C^k(X_0)} \leq C5,_k$。由命题 3.25 及上述结果，对于 $k \geq 0$，存在 $C6,_k > 0$，使得当 t 足够大时

$$\|g_t'' - \mathrm{Id}\|_{C^k(X_0)} \leq \frac{C_{6,k}}{\log t}. \tag{170}$$

结论由 (168)、(169) 和 (170) 得出。

证毕。

最后，我们讨论定理 1.1 的一个特殊情形，在此情形下收敛速率有所提高。对于 (17) 中的 SU(1,2) Higgs 丛 $(F = K^{-1} \oplus K, t\beta, t\gamma)$，有 $b = (1, \ldots, 1)$。根据命题 3.25 中的讨论，$\lambda = (0, \ldots, 0)$ 对所有 $t \geq 1$ 都与 b t-相容，并且 $\eta_{\lambda(t),t}$（定义于 (84) 中）与 t 无关。由证明可知，a_t 关于 t 一致有界，且 $C^k(X_0)$ 中的收敛可改进为关于 t 的指数收敛。

事实上，这也可直接从 SL(2, ℂ)-Hitchin 方程情形得出。相应的 Hitchin 方程化为一个标量偏微分方程，其解由 F 上的度量 $h_t^{-1} \oplus h_t$ 给出，其中 $h^{1/2}{}_t$ 是与 SL(2, ℂ) Higgs 丛相关的 Hitchin 方程的唯一解

$$\left(E = K_X^{1/2} \oplus K_X^{-1/2}, \Phi = t\begin{pmatrix} & 1 \\ q & \end{pmatrix}\right).$$

这样，$_t \to h_K(h_K$（在引理 3.1 中定义）关于 t 的指数收敛，直接源于 [MSWW**16**] 中的结果。

参考文献

[AS72] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun，《数学函数手册》，Dover Publications, Inc., 纽约，1972，MR1225604，Zbl 1198.00002。[Axl01] S. Axler、P. Bourdon、R. Wade，《调和函数论》。第二版。《数学研究生教材》第137卷。Springer-Verlag，纽约，（2001），MR1805196，Zbl 0959.31001。[BB04] O. Biquard、P. Boalch，曲线上的野非阿贝尔霍奇理论，Compos. Math. 140（2004），第1期，179-204，MR2004129，Zbl 1051.53019。[Bell90] S. Bell，复分析中的映射问题及 $\bar{\partial}$-问题，Bull. Amer. Math. Soc.（新系列）22（1990）233-259，MR1040388，Zbl 0702.32024。[BGG03] S. B. Bradlow、O. Garc´ıa-Prada、P. B. Gothen，曲面群表示与 U(p,q)-Higgs 丛，J. Differential Geom. 64（2003），第1期，111-170，MR2015045，Zbl 1070.53054[BGG06] S. B. Bradlow、O. Garc´ıa-Prada、P. B. Gothen，经典厄米对称空间等距变换群中的极大曲面群表示，Geom. Dedicata 122，（2006），185-213，MR2295550，Zbl 1132.14029。[Biq91] O. Biquard，稳定抛物丛与平坦奇异联络，Bull. Soc. Math. France 119（1991），第2期，231–257，MR1116847，Zbl 0769.53013。[CH53] R. Courant、D. Hilbert，《数学物理方法》。第I卷。Interscience Publishers, Inc.，纽约，N. Y.，1953，MR0065391，Zbl 0053.02805。

[Cor88] K. Corlette，具有典范度量的平坦 G-丛，J. Differential Geom. 28（1988），第3期，361–382，MR0965220，Zbl 0676.58007。[Dem86] J. Demailly，厄米几何中的 Bochner-Kodaira-Nakano 恒等式，P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda 分析研讨会，1983/1984年，88-97。《数学讲义》第1198卷，MR0874763，Zbl 0594.32031。[DK90] S. Donaldson、P. B. Kronheimer，《四维流形几何》，牛津数学专著。牛津科学出版物。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，（1990），MR1079726，Zbl 0820.57002。[Don87] S. K. Donaldson，扭曲调和映射与自对偶方程，《伦敦数学会会刊》（第3辑）55（1987），第1期，127–131，MR0887285，Zbl 0634.53046。[DT87] A. Domic、D. Toledo，对称域 K¨ahler 类的 Gromov 范数。《数学年刊》276（1987），第3期，425–432，MR0875338，Zbl 0595.53061。[Dup78] J. L. Dupont，平坦丛特征数的界，《代数拓扑》，奥胡斯 1978（奥胡斯大学研讨会论文集，奥胡斯，1978），第109–119页，《数学讲义》第763卷，施普林格，柏林，1979，MR0561216，Zbl 0511.57018。[Fre07] E. Frenkel，朗兰兹纲领与共形场论讲座，《数论、物理与几何前沿》第二卷，387–533，施普林格，柏林，（2007），MR2290768，Zbl 1196.11091。[Fre18] L. Fredrickson，SL(n,©)-Higgs 丛模空间的一般端，arXiv:1810.01556[math.DG] (2018年)[GGM12] O. Garc´a-Prada、P. B. Gothen、I. Mundet i Riera，Hitchin-Kobayashi 对应、Higgs 对与曲面群表示，arXiv:0909.4487v3 [math.DG, math.AG] (2012年)[GMN10] D. Gaiotto、G. W. Moore、A. Neitzke，通过三维场论研究四维墙穿越，《数学物理通讯》299（2010），第1期，163–224，MR2672801，Zbl 1225.81135。[Got01] P. B. Gothen，表示空间的连通分支与稳定三元组，《拓扑学》40（2001）823-850，MR1851565，Zbl 1066.14012。[GPR18] O. Garc´ıa-Prada、A. Pe´on-Nieto、S. Ramanan，实群的 Higgs 丛与 Hitchin-Kostant-Rallis 截面。《美国数学会汇刊》370（2018），第4期，2907–2953，MR3748589，Zbl 1395.14029。[GT83] D. Gilbarg、N. S. Trudinger，二阶椭圆型偏微分方程。重印1998年版。《数学经典》。Springer-Verlag，柏林，（2001），MR1814364，Zbl 1042.35002。[Hit87] N. J. Hitchin，黎曼曲面上的自对偶方程，《伦敦数学会会刊》（第3辑）55（1987），第1期，59–126，MR0887284，Zbl 0634.53045。[Hit92] N. Hitchin，李群与 Teichm¨üller 空间，《拓扑学》31（1992），第3期，449–473，MR1174252，Zbl 0769.32008。[Hit07] N. Hitchin，朗兰兹对偶与 G_2 谱曲线。《数学季刊》58（2007），第3期，319-344，MR2354922，Zbl 1144.14034。[Hor22] J. Horn，SL(2,©)-Hitchin 系统奇异纤维的半阿贝尔谱数据。《国际数学研究通知》IMRN（2022），第5期，3860-3917。MR4387179，Zbl 1482.14040。

[Huy05] D. Huybrechts, 《复几何：导论》。（2005），Springer-Verlag，柏林，MR2093043，Zbl 1055.14001。[Moc16] T. Mochizuki, 《黎曼曲面上某些调和丛族的渐近行为》，J. Topol. 9 (2016)，第4期，1021–1073，MR3620459，Zbl 1381.53047。[MS23] T. Mochizuki，S. Szab´o, 《高秩 Hitchin 方程的大尺度解的渐近行为》，arXiv:2303.04913 [math.DG, math.AG](2023)[MSWW16] R. Mazzeo，J. Swoboda，H. Weiß，F. Witt, 《Higgs 丛模空间的端》，Duke Math. J. 165 (2016)，第12期，2227–2271，MR3544281，Zbl 1352.53018。[MTW77] B. M. McCoy，C. A. Tracy，T. T. Wu, 《第三类 Painlev´e 函数》，J. Mathematical Phys. 18 (1977)，第5期，1058–1092，MR0473322，Zbl 0353.33008。[Na21] X. Na, 《SU(1,2) Higgs 丛的谱数据》，arXiv:2111.00733 [math.AG] (2021)。[OSWW20] A. Ott，J. Swoboda，R. Wentworth, 《Higgs 丛、调和映射与褶皱曲面》，arXiv:2004.06071。[math.DG](2020)[Sim88] C. T. Simpson, 《利用 Yang-Mills 理论构造 Hodge 结构变分及其在一致化中的应用》，J.Amer. Math. Soc. 1 (1988)，第4期，867–918，MR0944577，Zbl 0669.58008。[Sim90] **3** 1990 3, C. 713 770, 1040197, 0713 58012 T. Simpson, 《非紧曲线上的调和丛》，J. Amer. Math. Soc. ( )，第 – 期，MR Zbl 。[Sti92] Stillwell, 《曲面几何》，Universitext。Springer-Verlag，纽约，（1992），MR1171453，Zbl 0752.53002。[Wen16] Wentworth，R., 《黎曼曲面上的 Higgs 丛与局部系统》。《模空间的几何与量子化》。基于2012年3月至6月在西班牙巴塞罗那举办的4门课程。第165–219页。（2016），MR3675465，Zbl 1388.30052。[Wid´00] **3** 2000 4, 375 384, 1845357, 0987 34076 Widom，H., 《Painlevé III 方程的解》。Math. Phys. Anal. Geom. ( )，第 - 期，MR Zbl 。