函数型时间序列的非线性与模型设定检验

Xin Huang Han Lin Shang * Tak Kuen Siu 精算学与商业分析系 麦考瑞大学

arXiv:2304.01558v1 [stat.ME] 4 Apr 2023

摘要

函数型时间序列分析中的一个重要问题是，观测到的序列是否来自纯随机过程。我们将广泛使用的非线性独立性检验——BDS检验推广至函数型时间序列。与单变量情形下的BDS检验类似，函数型BDS检验既可以作为模型设定检验，用于评估各种预测模型的充分性，也可以作为非线性检验，在剔除所呈现的线性结构后，检测函数型时间序列中是否存在非线性结构。我们证明，函数型BDS检验的检验统计量具有与单变量情形下相同的渐近性质，并给出了其超参数的推荐取值范围。此外，实证数据分析展示了该检验在评估fAR(1)和fGARCH(1,1)模型拟合VIX指数的日内累计收益（CIDR）日曲线时的应用。我们表明，函数型BDS检验弥补了现有文献中独立性检验的不足，因为后者仅限于检测线性结构，因此可能忽略非线性时间结构。

关键词：BDS检验；函数型GARCH模型；金融自回归模型；独立性检验；VIX指数。

*通信地址：澳大利亚悉尼麦考瑞大学精算学与商业分析系，NSW 2109；电话： +61(2) 9850 4689；电子邮箱：hanlin.shang@mq.edu.au

1 引言

函数型时间序列分析是函数型数据分析与时间序列分析的融合。与单变量和多变量时间序列类似，函数型观测中也存在时间依赖结构，并以曲线、图像或形状的图形形式呈现。函数型时间序列通常分为两类：第一类是将单变量时间序列分割成（切片式）函数型时间序列。例如，Rice 等人(2021年)考虑日内波动率，构造函数型时间序列 $\left[\mathcal{X}_1(u),\mathcal{X}_2(u),\ldots,\mathcal{X}_N(u)\right]$ 定义在连续统 $u \in [u_1,u_p]$上。另一类是连续统并非时间变量的情形，例如年龄（参见Shang、Haberman 和 Xu，2022年）或光谱学中的波长（参见Shang、Cao 和 Sang，2022年）。

函数型时间序列是连续对象，而离散时间序列则是标量值。函数型时间序列至少有三项优势：1）与单变量时间序列相比，时间序列数据的函数型表示能够很好地适应超高频采集的数据，并减轻在对大量观测值建模时通常产生的参数估计负担。2）作为副产品，函数型导数能够为所研究的数据提供额外见解（例如，参见 Shang 2019， Hooker& Shang 2022）。3）有些数据更适合视为表现为平滑曲线的函数，而不是彼此分离的离散观测值，例如按年龄划分的死亡率数据。

过去二十年来，函数型时间序列分析取得了迅速发展。Ramsay& Silverman (2002年、2005年) 全面概述了函数型数据分析的主要进展，以及其中使用的基本概念和技术。函数型时间序列分析发展的一个重要分支，是将单变量时间序列中的主流模型和分析工具推广到函数型情形（例如，参见 Kokoszka & Reimherr 2017）。举例而言，Kokoszkaet al. (2017年) 和 Mestreetal. (2021年) 提出了函数型自相关函数（fACF），用于量化函数型时间序列中的线性序列相关性。Huang & Shang(2023年) 提出了非线性函数型自相关函数，用于测度函数型时间序列中的非线性依赖关系。

Bosq （1991年）将自回归（AR）模型扩展到函数型情形，并称之为 fAR 模型。此后，许多函数型时间序列模型都由 fAR 模型扩展而来，包括带外生变量的自回归希尔伯特模型（ARHX 模型）（Da-

mon & Guillas 2002）、希尔伯特移动平均模型（Turbillon 等人，2007年）、函数型自回归移动平均模型（fARMA）（Klepsch 等人，2017年）、季节性函数型自回归模型（Zamanietal. 2022），以及带外生变量的季节性自回归移动平均希尔伯特模型（SARMAHX）（Gonz´alez et al.2017）。在条件方差建模方面，还包括函数型自回归条件异方差模型（fARCH）（H¨ormann et al. 2013）、函数型广义自回归条件异方差模型（fGARCH）（Aue 等人，2017年）以及 fGARCH-X 模型（Rice 等人，2021年）。

尽管人们对函数型时间序列的兴趣和研究日益增加，但许多现有的用于研究观测到的函数型时间序列潜在结构的度量方法/工具（包括函数型自相关函数（fACF））均基于自协方差和/或自相关（Horv´等人，2013年，Zhang，2016年，Mestre 等人，2021年）。这些方法只能捕捉线性时间结构。除了Huang 和 Shang (2023年)提出的非线性函数型自相关函数外，函数型时间序列领域鲜有研究探讨其中的非线性时间结构。此外，由于线性结构限制了这些工具的适用范围，它们无法检验所有可能偏离随机性的情形。因此，必须改进稳健的模型设定检验，以评估函数型时间序列模型是否充分。

本文将BDS检验扩展至函数型时间序列。与单变量情形一样，所提出的检验既可作为独立同分布检验，用于检验估计残差，以评估拟合模型的充分性；也可在去除所研究数据中呈现的线性时间结构后，作为函数型时间序列残差的非线性检验。

由 Broock et al.(1996) 提出的 BDS检验是单变量时间序列分析中应用最广泛的非线性检验和模型设定检验。它广受欢迎的原因有很多：首先，BDS检验对所研究的数据集几乎没有任何假设或先验知识要求。当 BDS检验应用于模型残差时，在满足某些充分条件的情况下，其检验统计量的渐近分布与估计误差独立。具体而言，de Lima (1996) 表明，对于线性加性模型或可转换为该形式的模型，BDS检验不含干扰参数，应用于拟合模型残差时无需进行任何调整。

其次，BDS检验用于检验各种偏离随机性的情况。而.....

BDS检验的原假设是，被研究的时间序列由一个独立同分布过程生成，其备择假设并未明确指定。因此，它可以被视为一种综合检验。这意味着，BDS检验能够检测被研究时间序列中表现出的任何非随机性。此外，还存在一种用于计算BDS检验统计量的快速算法，这确保了BDS检验在实证应用中能够得到简便且快速的应用（LeBaron 1997年）。此外，BDS统计量的渐近分布理论并不要求高阶矩存在。这一特性在金融时间序列分析中尤为有用，因为许多金融时间序列都呈现出重尾分布，其高阶矩可能并不存在。

本文其余部分的结构如下。第2 节介绍函数型BDS检验的具体设定。在附录B中，我们详细证明函数型BDS检验的检验统计量的渐近分布。在第3节中，我们针对独立同分布函数型时间序列和模拟的fAR(1)函数型时间序列开展蒙特卡洛实验，以提供推荐的维数和距离超参数范围。在第4节中，使用函数型BDS检验检验日内VIX指数收益的日曲线的fAR(1)模型和fGARCH(1,1)模型的适adequacy。第5节给出结论，并提出一些关于如何进一步扩展本文所述方法的设想。

2 函数型时间序列的BDS检验

BDS检验使用“相关积分”，这是一种在混沌时间序列分析中广受欢迎的测度。根据Packard等人（1980年）和Takens （1981）的研究，延迟法可以将标量时间序列$\{x_i : i = 1, 2, \ldots\ldots N\}$嵌入 m维空间中，如下所示

$$\vec{x}_i = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}), \qquad \vec{x}_i \in R^m.$$

因此， $\vec{x}_i$ 称为 m的历史 x_i。 Grassberger & Procaccia (1983年) 提出了相关积分，用作确定性数据分形维数的测度，因为它记录了时间模式重复出现的频率。嵌入维数为 m 时，相关积分为

定义为

$$C(m,N,r)=\frac{2}{M(M-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant M}\Theta(r-\|\vec{x}_i-\vec{x}_j\|),\quad r>0 \tag{1}$$

$$\Theta(a)=0,\quad \text{if } a\leqslant 0$$

$$\Theta(a)=1,\quad \text{if } a>0$$

其中， N 是数据集的大小， $M=N-m+1$ 是m维空间中的嵌入点数量， r 是用于检验数据点邻近性的距离，$\|\cdot\|$ 表示上确界范数。从本质上说， $C(m,N,r)$ 衡量的是点对 $\vec{x}_i$、$i=1$、2、...、M中，上确界范数分离度小于 r的比例。

Brock (1987)证明，在原假设 $\{x_i:i=1,2,...,N\}$服从具有非退化分布函数的独立同分布 F()的条件下，

$$C(m,r):=\lim_{N\to\infty}C(m,N,r)$$

$$C(m,r)\to C^m(1,r)\quad \text{with probability 1.}$$

根据Broock et al. (1996)，的BDS统计量 $m>1$ 定义为

$$BDS(m,M,r)=\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\left[C(m,N,r)-C^m(1,r)\right]$$

其中， $M=N-m+1$,

$$\sigma^2=4\left(K^m+2\sum_{j=1}^{m-1}K^{m-j}C^{2j}+(m-1)^2C^{2m}-m^2KC^{2m-2}\right),$$

$C=\int[F(z+r)-F(z-r)]dF(z)$ 和 $K=\int[F(z+r)-F(z-r)]^2dF(z)$。注意， $C(1,N,r)$ 是 C的相合估计，而 K 可以通过以下方法相合估计：

$$\frac{6}{M(M-1)(M-2)}\sum_{1<t<s<u<M}\Theta(r-\|\vec{x}_t-\vec{x}_s\|)\Theta(r-\|\vec{x}_s-\vec{x}_u\|). \tag{2}$$

在独立同分布假设下 论文中，$BDS(m, M, r)$ 在 $M \to$下具有极限标准正态分布 ∞.

上述 BDS 检验的设定适用于标量时间序列。当研究对象为函数型时间序列时，需要调整 m历史在 (1) 和 (2) 中上确界范数分离度的计算。

给定函数型时间序列 $\mathcal{X}(u) = \{\mathcal{X}_t(u);\ u \in [u_1, u_p], t = 1, 2, \ldots, N\}$， m的历史由其 m 个相邻观测值构成，即

$$\overrightarrow{\mathcal{X}_i(u)} = [\mathcal{X}_i(u), \mathcal{X}_{i+1}(u), ..., \mathcal{X}_{i+m-1}(u)]\,.$$

两个 m 函数集合之间的上确界范数，可通过计算相应曲线之间的最大距离来度量。具体而言，若采用 L_2 范数作为两条曲线之间的距离度量，

$$\|\overrightarrow{\mathcal{X}_i(u)} - \overrightarrow{\mathcal{X}_j(u)}\| = \max(\|\mathcal{X}_i(u) - \mathcal{X}_j(u)\|_2, \ldots, \|\mathcal{X}_{i+m-1}(u) - \mathcal{X}_{j+m-1}(u)\|_2).$$

由于我们调整了 BDS 检验统计量的设定，使其适用于函数型情形，因此要确定调整后 BDS 检验的临界值，需要推导其在原假设下的渐近分布。在附录 B中，我们证明，单变量 BSD 检验统计量的渐近正态性在函数型情形下同样成立。事实上，附录B 定理1中给出的渐近正态性结果具有相当的通用性。它适用于可分希尔伯特空间$\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 上的任意范数 $\mathcal{H}$，其范围比 L^2-范数更广。

L_2 范数并非衡量两个函数之间距离的唯一距离度量。其他常见选择包括L_1 范数和 L_{inf} 范数。包括其他范数在内的所有这些范数，都可用于计算函数型时间序列的 m 阶滞后历史的上确界范数。然而，距离度量的选择决定了距离超参数 r 的建议取值范围，也会影响检验统计量的收敛速度和检验功效。在第 3 节中，我们针对随机和结构化函数型时间序列开展功效与检验水平实验，其中将 L_1、 L_2 和 L_{inf} 选作上确界范数中的距离度量。

3 蒙特卡洛实验

在本节中，我们对模拟的独立同分布和结构化函数型时间序列进行蒙特卡洛实验，以给出函数型BDS检验的超参数建议取值范围，即 m、 r，以及上确界范数中推荐使用的范数。

我们使用两个评价指标来评估超参数和范数的选择：1）独立同分布过程中检验统计量的正态性相似程度；以及 2）结构化过程中拒绝 H_0 的检验功效。

为考察正态性，我们模拟了 200 条长度为 500 的独立同分布函数型时间序列样本路径，并使用 $m = (2, 3,$ 在每条样本路径上计算了 BDS 检验统计量。.. , 10) 与 r = (025 标准差，0.5 标准差 . . . , 2 标准差) .

表1 给出了 p值，即在上确界范数中选取 m 和r时， L_2 作为范数的每种组合对应的柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫（KS）检验结果。附录中给出了在上确界范数中分别选取 L_1 和 L_{inf} 作为范数时对应的表格。KS检验用于检验计算得到的函数型BDS检验统计量是否服从标准正态分布这一原假设。若 p 值小于0.025（以红色标出），则表示拒绝 H_0，这意味着不能假定生成的BDS检验统计量服从标准正态分布。相反， p值越高，BDS检验统计量就越接近标准正态分布。

表 1：基于 500 条模拟的独立同分布函数型时间序列的 200 条样本路径计算的带 L_2 范数的函数型BDS检验统计量的KS检验 p值。

	m								
r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25标准差	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5个标准差	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.75标准差	0.00	0.03	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
s.d.	0.84	0.63	0.06	0.00	0.26	0.01	0.00	0.00	0.00
1.25标准差	0.69	0.52	0.19	0.88	0.10	0.03	0.01	0.00	0.02
1.5标准差	0.56	0.44	0.38	0.03	0.00	0.23	0.60	0.03	0.94
1.75标准差	0.34	0.37	0.33	0.14	0.19	0.22	0.07	0.06	0.06
2标准差	0.27	0.00	0.29	0.93	0.01	0.33	0.52	0.02	0.02

从表1 和7的结果可以看出，当函数型BDS检验具有适中的 $m(2 \leqslant m \leqslant 7)$和足够大的 r(r >= 标准差)时，在原假设下，相应检验统计量的分布与标准正态分布足够接近。

对于功效检验，我们模拟了 200 条 fAR(1) 过程的样本路径。每条样本路径生成 500 个观测值，每个函数型观测值由 (0,1) 区间内 100 个等间距点构成。根据 Bosq (2000年) 中给出的定义，令 $\mathcal{H}$ 为一个范数为 $\|\cdot\|$、内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$的可分希尔伯特空间，一列 $\{\mathcal{X}_1(u),\ldots,\mathcal{X}_N(u)\}$随机变量 $\mathcal{H}$ 称为与 (μ,ϵ,ρ) 相关的 fAR(1) 过程，如果

$$\mathcal{X}_{t+1}(u)-\mu(u)=\rho[\mathcal{X}_t(u)-\mu(u)]+\epsilon_t(u), \tag{3}$$

其中，作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子 ρ ($\|\rho\|<1$) 是紧算子，并且随机误差项 $\{\epsilon_1(u),\epsilon_2(u),\ldots,\epsilon_N(u)\}$是一组独立随机变量，其分布满足以下条件： $E[\epsilon_t(u)]=0$、$0<E\left[\epsilon_t^2(u)\right]<\infty$，以及 $E[\epsilon_t(u)\epsilon_s(u)]=\sigma^2\delta_{t,s}$，对于 $t,\ s\in\mathbb{Z}$（若 $t=s$，则为 δ_t；若 $t\neq s$，则为 δ_t）。通过加入形如 $\rho_k[\mathcal{X}_{t-k}(u)-\mu(u)]$的附加项，可以轻松地将方程 (3) 扩展为定义 fAR(p) 过程。我们使用 R 包 'far' 中的 simul.far 函数（ Serge 2022 年）在 R （ R Core Team 2023 年）中生成 fAR(1) 过程。模拟的 fAR(1) 过程具有线性算子 $\rho=0.1$。误差项 $\epsilon_t(u)$ 为强白噪声，并使用五个等间距的正弦基函数 $\{1,\sqrt{2}\sin(2\pi u),\sqrt{2}\cos(2\pi u),\sqrt{2}\sin(4\pi u),\sqrt{2}\cos(4\pi u)\}$ 来构造 fAR(1) 模型。我们特意选择较小的 ρ，使生成的过程具有较弱的时间结构。

<escape>在模拟函数型自回归一阶过程的200条样本路径后，我们计算每条模拟函数型时间序列的函数型BDS检验统计量。表 2 展示了当选择 L_2 作为范数时，函数型BDS检验在结构化过程中成功拒绝独立同分布假设的概率。附录中的表 8 提供了相应的 L_1 和 L_{inf}表格。100%的数值表示BDS检验在所有模拟样本路径上均作出了正确推断，而低于100%的数值则表明，该检验在某些样本路径上未能区分结构化过程与随机过程。低于100%的数值以红色突出显示，表明这一特定的 m 和 r 组合会降低检验功效。</escape>

表 2：在 200 条模拟 fAR(1) 过程（$\rho = 0.1$）的样本路径上，基于 500 个观测值的函数型BDS检验成功拒绝率；其中 L_2 用作上确界范数中的范数，并采用不同的 m 和 r 取值。

	m								
r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25标准差	100%	99%	100%	100%	98%	68%	20%	3%	0%
0.5标准差	100%	100%	100%	100%	100%	99%	93%	52%	15%
0.75标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	99%	99%
s.d.	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
1.25标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
1.5标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	99%	99%	98%
1.75个标准差	98%	100%	99%	98%	98%	98%	99%	97%	96%
2个标准差	98%	95%	96%	92%	90%	89%	92%	93%	86%

<escape>在表格 2 和 8中，功效实验的结果表明，当 m 介于 2 和 7 之间，且 r 介于 0.5标准差和 1.5标准差之间时，BDS检验达到最高的成功拒绝率。</escape>

在稳健性实验中，我们随机将 1% 的模拟独立同分布函数型时间序列替换为均值明显高于其余观测值的序列，然后重复进行正态性相似实验。表 9展示了 p-值的 KS检验结果，其中 L_1，L_2，以及L_{inf}，详见附录。结果表明，当在上确界范数中使用 L_1 和 L_2 作为范数时，加入随机离群值不会影响函数型BDS检验收敛至正态分布。然而，当 L_{inf} 用于上确界范数时，离群值会显著影响检验。当在上确界范数中选择 m 和 r 作为范数时，离群值的存在会使生成的检验统计量在大多数组合下无法通过 KS检验；当 L_{inf} 被选作上确界范数中的范数时，情况也是如此。

最后，我们进行了检验尺寸实验，以确定函数型时间序列的最佳长度，使 BDS检验能够取得令人满意的表现。我们在 $m = 3$ 和 $r =$ 标准差下重复进行正态性相似实验和功效检验，其中所选的 m 和 r 均处于先前正态性相似实验和功效检验所表明的推荐范围内。模拟的函数型时间序列长度为 100、250、500、750 或 1000。正态性相似实验的结果见表3，功效检验的结果见表4。检验尺寸实验表明，恰当选择 m 和 r后，函数型

对于长度大于或等于 250 的函数型时间序列，BDS检验表现令人满意。

表3：不同长度的独立同分布函数型时间序列上，函数型BDS检验统计量的KS检验 p值。

KS检验 p值（$m = 3$， $r =$ 标准差）	n=100	n=250	n=500	n=750	n=1000
L_1	0.00	0.10	0.13	0.01	0.43
L_2	0.00	0.50	0.43	0.81	0.81
L_{inf}	0.06	0.00	0.01	0.43	0.13

表4：在不同长度的模拟 fAR(1) 过程（$\rho = 1$）上，函数型BDS检验的成功拒绝率。

拒绝率（$m = 3$， $r =$ 标准差）	n=100	n=250	n=500	n=750	n=1000
L_1	88%	100%	100%	100%	100%
L_2	88%	100%	100%	100%	100%
L_{inf}	94%	100%	100%	100%	100%

总之，为确保正态性收敛和检验功效，我们建议将维度超参数 m 设定在2至7的范围内，并将距离参数 r设定在标准差与1.5倍标准差之间。对于上确界范数内部的范数，我们推荐使用 L_1 和 L_2，因为它们对离群值具有更强的稳健性。最后，建议函数型时间序列包含超过250个观测值，以确保函数型BDS检验取得令人满意的表现。

4 评估 fAR(1) 模型和 fGARCH(1,1) 模型对 VIX逐笔收益率的适用性

本节展示了函数型BDS检验在实证分析中的应用，以评估fAR(1)模型和fGARCH(1,1)模型在拟合日内VIX（波动率）指数收益率日曲线时的适用性。VIX是基于30天期标普500指数期权价格构建的加权投资组合，对未来股票市场波动率进行前瞻性测度的指标。VIX指数是衡量.....的关键指标。

市场风险。因此，准确预测VIX指数对于风险管理至关重要，尤其是对于对冲基金和养老基金。

大多数试图对VIX指数进行建模和预测的现有研究，都将其视为离散时间序列。举几个例子，Konstantinidi等人（2008年）使用了自回归分数积分移动平均（ARFIMA）模型，而Fernandes等人（2014年）采用异质自回归模型来预测未来的VIX指数。最近，函数型时间序列模型为提取VIX动态背后的额外信息提供了新的替代方案，并有望更准确地预测市场对未来股权风险的期望（例如，参见Shang等人 2019年）。

我们所考虑的数据集记录了从2013年3月19日到2017年7月21日的15秒VIX指数，其中15秒是VIX指数（芝加哥期权交易所）可获得的最高频率。研究期间的VIX指数绘于图1中。值得注意的是，不同交易日首条和末条VIX记录的时间可能略有差异。为确保VIX记录日曲线的开始时间和结束时间保持不变，我们使用线性插值填补缺失值（如有），使每个交易日的VIX指数时间点保持一致。经过线性插值后，我们的研究数据共包含1095个交易日（不包括周末和节假日）。在每个交易日，VIX指数取自09:31:10至16:15:00之间、间隔为15秒的时间点，每天共计1616个点。

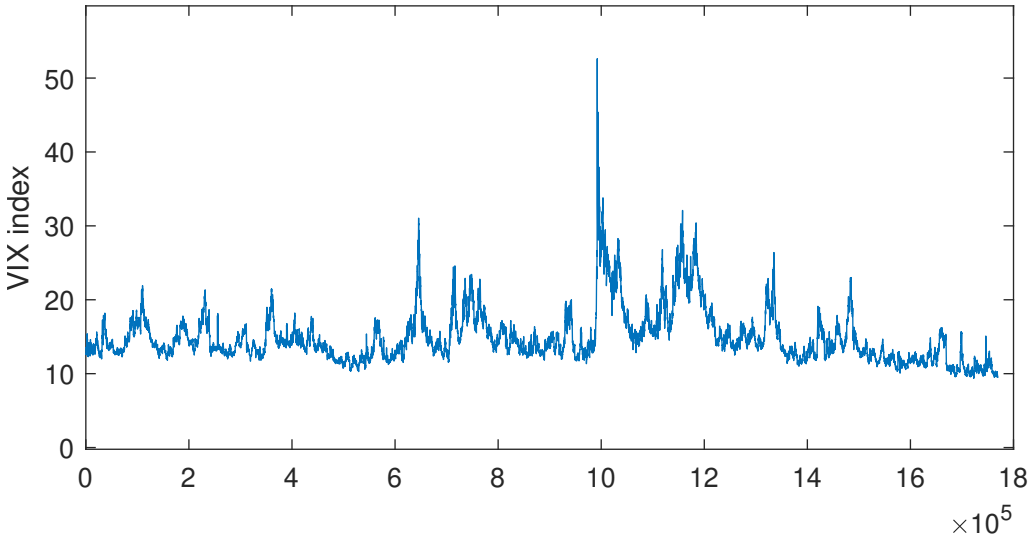


图1：2013年3月19日至2017年7月21日的15秒VIX指数图。

基于插值指数，我们将非平稳日内VIX指数转换为日曲线形式的累计日内收益（CIDR）。设 $P_i(t_j)$ 表示第 i 天（$i = 1, \ldots, n$）在时间t_j（$j = 1, \ldots, m$）的每日VIX值，CIDR的计算公式为

$$R_i(t_j) = 100 \times [\ln P_i(t_j) - \ln P_i(t_1)], \tag{4}$$

其中 $\ln()$ 表示自然对数，t_{j-1} 和 t_j 相隔 15 秒。VIX 指数 CIDR 的日曲线是我们关注的函数型时间序列。图 2 展示了不同交易日的 CIDR VIX 指数函数型时间序列曲线。

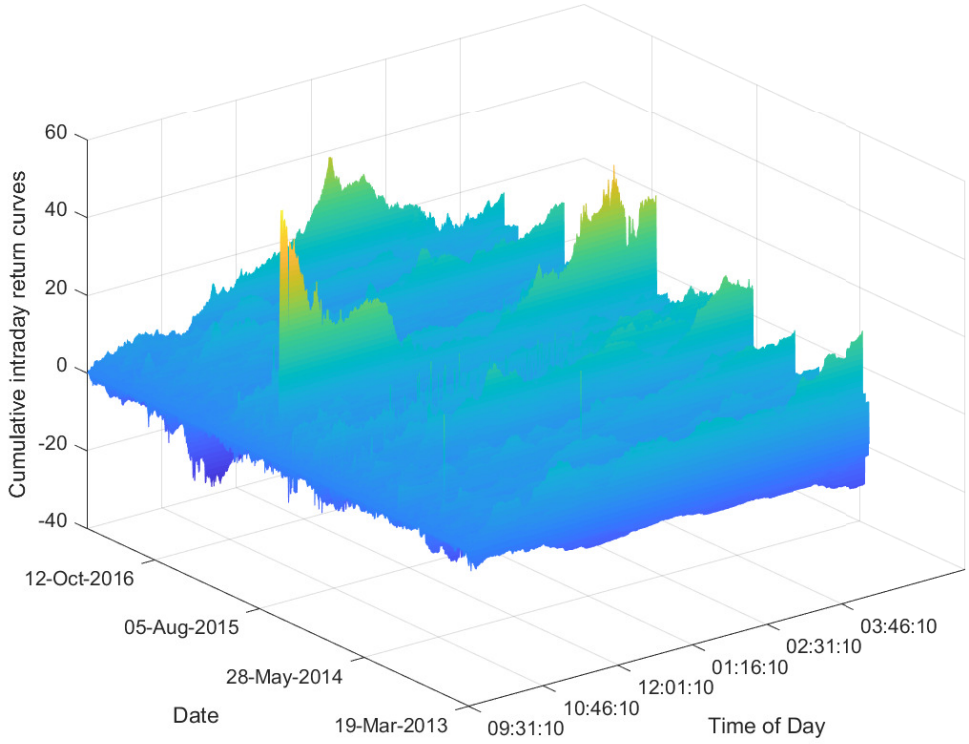


图 2：2013年3月19日至2017年7月21日 CIDR VIX 指数函数型时间序列曲线的图形展示。

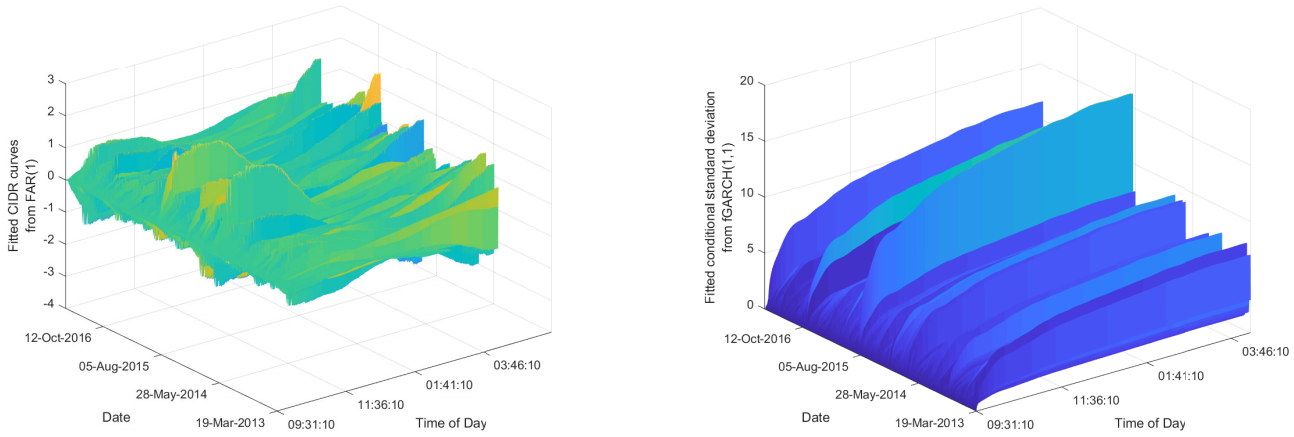
我们考虑用于拟合 CIDR VIX 指数日曲线的候选模型为 fAR(1) 模型和 fGARCH(1,1) 模型。fAR(1) 模型的具体设定见第 3 节中的公式（3）。我们使用 'far' 软件包将观测数据拟合到 fAR(1) 模型。fGARCH

模型由 Aue 等人 (2017年)。一列随机函数 $(R_i : i \in \mathbb{Z})$ 称为 fGARCH(1,1)，如果它满足以下方程

$$R_i = \sigma_i \varepsilon_i, \tag{5}$$

$$\sigma_i^2 = \delta + \alpha R_{i-1}^2 + \beta \sigma_{i-1}^2, \tag{6}$$

其中 δ 是非负函数，算子 α 和 β 将非负函数映射为非负函数，而新息 ε_i 是独立同分布的随机函数。Rice 等人 (2021年) 通过准似然描述了拟合 fGARCH 模型的估计过程。根据 fAR(1) 模型估计得到的拟合 VIX 指数收益，以及根据 fGARCH(1,1) 模型估计得到的拟合 σ_i 绘于图3中。



(a) 基于 fAR(1) 模型拟合的每日 CIDR VIX 指数曲线图。

(b) 基于 fGARCH(1,1) 模型拟合的条件标准差图。

图 3：基于 fAR(1) 模型拟合的 CIDR VIX 指数函数型时间序列曲线，以及基于 fGARCH$(1,1)$ 模型拟合的条件标准差（$\hat{\sigma}_i$）图。

为评估函数型自回归一阶模型（fAR(1)）的适用性，我们对观测收益率曲线与拟合收益率曲线之间的残差（$(R_i(t_j) - R_i(t_j) : j = 1, \ldots, \tau;\ i = 1, \ldots, n)$）进行函数型BDS检验。表5 展示了在不同超参数组合下，fAR(1)模型残差的函数型BDS检验统计量 m 和 r。由于大多数检验统计量均超过标准正态分布的1%临界值，因此函数型BDS检验拒绝残差服从独立同分布的原假设。在

换言之，函数型自回归一阶模型无法捕捉VIX收益观测日曲线背后的所有结构。

表 5：对 CIDR VIX 指数日曲线拟合的 fAR(1)残差和 fGARCH(1,1) 对数平方标准化收益的函数型BDS检验统计量。* 表示在 5% 显著性水平下拒绝独立性原假设，** 表示在 1% 显著性水平下拒绝独立性原假设。

		m					
模型	r	2	3	4	5	6	7
fAR(1)	s.d.	7.75**	9.15**	9.52**	10.05**	10.39**	11.11**
	1.25标准差	6.26**	7.73**	8.20**	8.57**	8.71**	9.15**
	1.5标准差	5.05**	6.67**	7.21**	7.68**	7.76**	8.13**
fGARCH(1,1)	s.d.	1.42	2.06*	2.77**	3.25**	3.66**	3.93**
	1.25标准差	2.32*	2.69**	3.09**	3.21**	3.47**	3.73**
	1.5标准差	2.72**	3.13**	3.42**	3.42**	3.59**	3.75

由于 fGARCH(1,1)是乘法模型，我们使用标准化收益（$R_i/\hat{\sigma}_i$）来评估其充分性。在单变量情形下，评估 GARCH模型的充分性时，如果直接对标准化收益 $R_t/\hat{\sigma}_t$应用 BDS检验，早期研究（参见Brock等人 1991年）表明，需要调整 BDS统计量以获得正确的检验尺寸。Fernandes和 Preumont（2012年）提出，对标准化残差的平方取自然对数（$\ln(R_t^2/\hat{\sigma}_t^2)$）后再应用 BDS检验，从而通过对数变换将 GARCH模型转化为线性加性模型。表5 记录了标准化收益平方的对数的函数型BDS检验统计量。

为了将新提出的 BDS 检验与函数型时间序列文献中现有的独立性检验进行比较，我们对 fAR(1)残差和 fGARCH(1,1)标准化收益实施由 Gabrys &Kokoszka (2007年) 提出的独立性检验（简称 GK独立性检验）。GK独立性检验统计量基于函数型时间序列投影主成分的滞后交叉协方差。因此，GK独立性检验统计量在检测线性结构方面存在局限。GK独立性检验需要两个超参数，p 和 H。超参数 p 表示降维步骤中保留的主成分数量，而 H 表示所考虑的最大滞后交叉协方差

计算检验统计量。6 记录了 p的 GK 独立性检验的 p 值，其中H = 1、10 和 p = 3、4、5、8、10。在Gabrys & Kokoszka (2007年）中，作者研究了 GK 独立性检验在有限样本下的表现，其中 H = 1、3、5 和 p = 3、4、5，并得出结论：如果使用 H = 1，则该检验针对函数型自回归一阶模型的检验功效非常好。由于 GK 检验的最优参数取决于残差的潜在动态特征，而这一特征在实证研究中是未知的，因此我们还将 GK 检验扩展到相对较大的 H 和 p。

表6：拟合 CIDR VIX 指数日曲线所得 fAR(1) 残差和 fGARCH(1,1) 标准化收益的 GK 检验 p 值。* 表示在 5% 显著性水平下拒绝独立性原假设，** 表示在 1% 显著性水平下拒绝原假设。

		p				
模型	H	3	4	5	8	10
fAR(1)	1	1	1	1	0.36	1.40e-05**
	10	0.70	0.58	0.29	1.01e-4**	6.43e-11**
fGARCH(1,1)	1	0.37	0.41	0.60	0.47	0.54
	10	0.92	0.81	0.42	0.78	0.55

比较函数型BDS检验与GK检验得出的推断结果，可以进一步深入了解CIDR VIX函数型时间序列的动态特征。根据函数型BDS检验结果，fAR(1)和fGARCH(1,1)模型均不足以捕捉VIX指数日CIDR曲线所呈现的时间结构。然而，GK检验仅在选择较大的 p 时，发现fAR(1)模型存在违反独立性的证据。这表明，与fAR(1)模型相比，fGARCH(1,1)模型对观测曲线的拟合效果更好。此外，函数型BDS检验与GK检验针对fGARCH(1,1)模型残差得出的看似矛盾的结论，表明CIDR VIX指数的日曲线呈现出非线性结构。此外，GK检验结果表明，检验的推断结果可能因所选参数而异，而我们的函数型BDS检验在不同参数选择下均能提供一致的推断结果。

5 结论

在本文中，我们将BDS检验扩展到函数型时间序列。与单变量情形下的BDS检验一样，函数型BDS检验具备若干重要的理想性质，使其成为检验模型设定和非线性的一个可行候选方法。这些优点包括对先验假设和知识的要求极低，以及检测线性结构和非线性结构的能力。我们证明，在将检验统计量调整至函数型情形后，原先在单变量情形下原假设成立时检验统计量所具有的渐近正态性依然成立。此外，我们针对函数型BDS检验进行了蒙特卡洛实验，以提供其超参数和数据长度的建议取值范围。我们表明，通过适当选择超参数，函数型BDS检验所需的数据长度仅为250，即可确保其收敛于正态分布，并在模拟的时间结构相对较弱的函数型时间序列中以100%的正确率检测出可预测性。此外，如果在上确界范数中选取 L_1 或 L_2 作为距离度量，函数型BDS检验也对离群值具有稳健性。函数型BDS检验的代码可在以下网址获取：https://github.com/Landy339/functional_BDS_检验。

我们通过一项实证分析展示了本研究的重要性。在该分析中，我们使用函数型BDS检验评估函数型自回归一阶模型和 fGARCH(1,1) 模型对 CIDR VIX 指数函数型时间序列的拟合充分性。在拟合候选模型后，我们应用函数型BDS检验来检测残差中残留的结构。检验拒绝了独立性原假设，因此得出结论：fAR(1) 和 fGARCH(1,1) 模型均不足以充分捕捉观测曲线所呈现的时间结构。此外，与现有的函数型时间序列独立性检验相比，我们的检验在检测可预测性方面表现出更高的灵敏度，尤其是在检测非线性结构方面。我们将函数型BDS检验的结果与 GK 检验（一种函数型时间序列领域中现有的线性独立性检验）的结果进行了比较。结果表明，我们新提出的函数型BDS检验弥补了 GK 检验的不足，能够检测出 GK 检验所忽略的 fGARCH(1,1) 残差中的非线性结构。借助这一新工具，研究人员可以意识到，现有的独立性检验可能会得出 fGARCH(1,1) 是观测数据的充分模型这一结论，从而忽略其非线性时间结构。

结构。

函数型BDS检验是函数型时间序列领域提出的首个非线性检验，也是首个模型设定检验。然而，所提出检验的主要局限在于，它只能检测残差中剩余的结构。遗憾的是，该检验无法指出所检测结构的具体形式。因此，如果某个模型被认为是不充分的，实践者将无法获得指导，不知道应采用何种模型才能充分捕捉观测数据中的结构。

当前研究可以通过多种方式进一步拓展，下面简要概述三种可能性：（1）尽管我们的研究表明，通过适当选择范数，函数型BDS检验对离群值具有稳健性，但未来研究可以考察其在非平稳函数型时间序列上的表现，因为这类序列在现实数据中经常出现。（2）当前研究聚焦于单变量函数型时间序列。未来工作可以研究将非线性检验拓展至多变量函数型时间序列，同时考虑变量之间可能存在的相关性。（3）由于我们的实证分析表明金融函数型时间序列中存在非线性，我们希望本研究能够推动对函数型时间序列依赖结构的进一步研究，尤其是在非线性函数型时间序列的分析、建模和预测方面。

致谢

本研究得到澳大利亚研究理事会 DP230102250 号资助的支持，该资助项目题为“面向高维函数型时间序列的特征学习”。作者谨此感谢 Yuqian Zhao 博士慷慨分享其用于部分实证研究的代码。

A 附录：额外的蒙特卡洛模拟结果

在表 7中，我们呈现了 p值，该值是对使用 L_1 范数和 L_{inf} 范数作为上确界范数内部距离度量所计算的模拟独立同分布函数型时间序列的函数型BDS检验统计量进行KS检验得到的。

表 7：在 200 条由 500 个模拟独立同分布函数型时间序列构成的样本路径上，使用 L_1 范数和 L_{inf} 范数计算的函数型BDS检验统计量的 KS 检验 p-值。

		m								
度量	r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_1	0.25标准差	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.5标准差	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.75标准差	0.00	0.46	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	s.d.	0.78	0.55	0.14	0.04	0.08	0.17	0.03	0.03	0.00
	1.25标准差	0.89	0.19	0.94	0.26	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00
	1.5标准差	0.78	0.15	0.03	0.03	0.22	0.01	0.03	0.00	0.00
	1.75标准差	0.24	0.30	0.74	0.15	0.00	0.57	0.08	0.02	0.27
	2标准差	0.54	0.09	0.21	0.09	0.01	0.10	0.01	0.22	0.03
L_{inf}	0.25标准差	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.5标准差	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.75标准差	0.10	0.19	0.29	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	s.d.	0.00	0.53	0.82	0.20	0.03	0.03	0.00	0.00	0.00
	1.25标准差	0.41	0.83	0.98	0.58	0.01	0.11	0.00	0.34	0.00
	1.5标准差	0.72	0.29	0.72	0.17	0.12	0.25	0.09	0.02	0.01
	1.75标准差	0.86	0.03	0.53	0.40	0.22	0.02	0.35	0.11	0.00
	2标准差	0.00	0.16	0.29	0.13	0.91	0.17	0.22	0.93	0.00

在表8中，我们列出了当 L_1 和 L_{inf} 被选作范数时，函数型BDS检验成功拒绝结构化过程的独立同分布假设的概率。

表9 报告了采用上确界范数时，以 L_1、 L_2 和 L_{inf} 作为其中的范数，对含有1%随机离群值的模拟独立同分布函数型时间序列计算函数型BDS检验统计量后进行KS检验所得的p值。

表8：在500个观测值的模拟 fAR(1) 过程（$\rho = 0.1$）的200条样本路径上，采用 L_1 和 L_{inf} 作为上确界范数中的范数，并选取不同的 m 和 r时，函数型BDS检验的成功拒绝率。

		m								
度量	r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_1	0.25标准差	100%	98%	100%	100%	98%	73%	19%	1%	1%
	0.5标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	93%	51%	15%
	0.75标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	99%	97%
	s.d.	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	1.25标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	1.5标准差	100%	100%	100%	100%	98%	100%	100%	99%	98%
	1.75标准差	96%	98%	98%	96%	95%	96%	94%	91%	91%
	2标准差	91%	93%	85%	84%	89%	87%	86%	84%	78%
L_{inf}	0.25标准差	100%	100%	100%	100%	94%	51%	11%	1%	1%
	0.5标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	83%	35%	8%
	0.75标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	94%
	s.d.	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	1.25个标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	1.5标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	1.75标准差	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	2倍标准差	99%	100%	100%	99%	99%	99%	99%	98%	99%

表9：基于 200 条样本路径（每条包含 500 个模拟的独立同分布函数型时间序列观测，且含有 1% 的随机离群值），采用 L_1、L_2 和 L_{inf} 范数计算的函数型BDS检验统计量的 KS检验 p 值。

		m								
度量	r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_1	0.25 标准差	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.5 标准差	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.75 标准差	0.33	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	s.d.	0.68	0.25	0.39	0.25	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
	1.25 标准差	0.36	0.37	0.02	0.16	0.03	0.17	0.02	0.12	0.00
	1.5标准差	0.80	0.12	0.93	0.09	0.15	0.43	0.98	0.02	0.09
	1.75标准差	0.40	0.70	0.76	0.16	0.85	0.21	0.49	0.42	0.01
	2标准差	0.83	0.17	0.13	0.02	0.28	0.05	0.26	0.67	0.08
L_2	0.25标准差	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.5标准差	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.75标准差	0.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	s.d.	0.67	0.30	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1.25标准差	0.62	0.23	0.10	0.23	0.15	0.00	0.00	0.00	0.00
	1.5标准差	0.57	0.95	0.07	0.15	0.35	0.05	0.00	0.11	0.00
	1.75标准差	0.18	0.35	0.49	0.19	0.01	0.31	0.03	0.01	0.23
	2标准差	0.01	0.16	0.16	0.03	0.02	0.19	0.33	0.26	0.01
L_{inf}	0.25标准差	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.5标准差	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.75标准差	0.44	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	s.d.	0.71	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1.25标准差	0.47	0.54	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1.5标准差	0.03	0.71	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1.75标准差	0.17	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	2标准差	0.35	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

B 附录：BDS 检验统计量的渐近正态性及其证明

在第 2 节中，我们调整了 BDS 检验统计量的设定，使其适用于函数型情形。在附录中，我们证明，单变量 BSD 检验统计量的渐近正态性在函数型情形下成立。首先，我们将介绍一些与渐近正态性结果相关的数学预备知识。然后，BDS 检验统计量与一个二阶广义 U 统计量相关联。最后，我们将给出渐近正态性结果及其证明。值得注意的是，以下证明在计算上确界范数时不受任何距离度量的限制。

B.1 数学预备知识

本文所采用的符号和定义遵循 Bosq（1999）。设 $\mathcal{H}$ 为可分希尔伯特空间，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$，范数为 $\|\cdot\|_H$。我们赋予 $\mathcal{H}$ 其博雷尔 σ-域$\mathcal{B}(\mathcal{H})$。由于 $\mathcal{H}$ 是具有可数基的线性度量空间，因此它是一个拓扑空间，且其拓扑具有可数基。根据 Preston（2008）的命题3.1，由于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是由 $\mathcal{H}$的博雷尔子集生成的 $\mathcal{H}$ 的博雷尔 σ-域，因此可测空间 $(\mathcal{H},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 是可数生成的。设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为完备概率空间。我们考虑定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上、取值于可数生成可测空间 $(\mathcal{H},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$的离散时间函数型时间序列$\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$，其中$\mathbb{Z}$ 为整数集。注意，Denker & Keller（1983）提出了随机过程的状态空间为可数生成可测空间这一条件，并给出了一些关于 U-统计量的渐近正态性结果。本文将利用 U统计量的渐近结果证明 BDS 检验统计量的渐近正态性。因此，我们也要求 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 取值于可数生成可测空间 $(\mathcal{H},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$。与 Broock et al.（1996）的单变量情形一样，假设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是严格平稳随机过程。设 μ_{X_t} 为 $(\mathcal{H},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 上的测度，该测度由随机元素 X_t（即一个取值于 $\mathcal{H}$的随机变量）在测度 $\mathbb{P}$下诱导。也就是说，对于任意

$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\mu_{X_t}(B) := \mathbb{P}(X_t^{-1}(B)), \tag{7}$$

其中 $X_t^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega | X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$。注意， μ_{X_t} 也称为 $\mathbb{P}$ 在可测映射 $X_t : \Omega \to \mathcal{H}$ 下的像测度（例如，参见 Prakasa Rao 2014）。

在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 为严格平稳随机过程的假设下，像测度μ_{X_t}是时间不变的。因此，我们记 μ_X 为 μ_{X_t}。令 $X_t^m := (X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+m-1}) \in \mathcal{H}^m$。注意， X_t^m是 m-历史从单变量情形推广到函数型情形的结果，见 Broock etal.(1996)。当 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 在测度 $\mathbb{P}$下相互独立时，我们考虑 m-积可数生成可测空间 $(\mathcal{H}^m, \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\otimes m})$。在这种情况下，$\mu_{X_t^m}$在 $\mathbb{P}$下作用于 X_t^m上的像测度 $(\mathcal{H}^m, \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\otimes m})$ 由下式给出：

$$\mu_{X_t^m}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m) = \prod_{i=1}^{m} \mu_X(B_i), \tag{8}$$

对于任意 $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\otimes m}$。由于 $\mu_{X_t^m}$ 是时间不变的，我们将 $\mu_{X_t^m}$ 记为 μ_{X^m}。

对于每个 i， $j = 1$、2、$\cdots$令 $i < j$，设 $\mathcal{G}_{i,j}$为由 $\mathbb{P}$-值随机元素 σ所生成的 $\mathcal{H}$-域的 $\sigma(X_i, X_{i+1}, \cdots, X_j)$-增广。根据 Volkonski & Rozanov（1961）、Grassberger & Procaccia （1983年）和 Broock et al. （1996）， $\mathcal{H}$值随机过程$\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 称为绝对正则的，当且仅当

$$\beta(k) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ E\left[\sup \left\{ |\mathbb{P}(G|\mathcal{G}_{1,n}) - \mathbb{P}(G)| \,\middle|\, G \in \mathcal{G}_{n+k,\infty} \right\} \right] \right\}, \tag{9}$$

当 $k \to \infty$ 时收敛于零，其中 $\mathbb{N}$ 是自然数集。

对于每个 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}^m$，我们考虑如下定义的最大范数：

$$\|\mathbf{x}\|_{m,\mathcal{H}} := \max_{k=1,2,\cdots,m} \{\|x_i\|_H\}, \tag{10}$$

其中， $x_i \in \mathcal{H}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{H}$上的范数。对于BDS检验的数值实现，在 the

函数型情形下，我们考虑 $L_H^2(\mathbb{P})$ 空间（即平方可积的 $\mathcal{H}$值随机元素在测度 $\mathbb{P}$）上的空间。记号 $L_H^2(\mathbb{P})$ 遵循Bosq （1999）中的记号。注意， $L_H^2(\mathbb{P})$ 是 $\mathcal{H}$值随机元素在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的空间，其范数如下：

$$\|X\|_{L_H^2(\mathbb{P})} := \left(\int_\Omega \|X(\omega)\|_H^2 \mathbb{P}(d\omega) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathcal{H}} \|x\|_H^2 \mu_X(dx) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

在这种情况下， （10）中的最大范数变为：

$$\|\mathbf{x}\|_{m, L_H^2(\mathbb{P})} := \max_{k=1,2,\cdots,m} \{\|x_i\|_{L_H^2(\mathbb{P})}\}, \tag{12}$$

这里，我们试图证明一般情形下（10）最大范数的函数型情形中，BDS检验统计量的渐近正态性结果。

设 I_A 为集合 A的特征函数。特别地，当 $A = [0, \epsilon)$时，为简便起见，对任意 $\epsilon > 0$，其特征函数记为 I_ϵ。现在，我们将 Grassberger & Procaccia (1983年) 中的相关积分推广到函数型时间序列情形。具体而言，对于函数型时间序列 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ，其嵌入维数为 m 时，相关积分定义为：

$$C_{m,n}(\epsilon) := \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n} I_\epsilon(\|X_s^m - X_t^m\|_{m,\mathcal{H}}). \tag{13}$$

正如Broock et al. （1996）所指出的，在假设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是一个正则的严格平稳随机过程的条件下，表示为 $\lim_{n\to\infty} C_{m,n}(\epsilon)$ 的极限存在，并记为：

$$C_m(\epsilon) := \lim_{n\to\infty} C_{m,n}(\epsilon). \tag{14}$$

对于函数型时间序列，公式（14）中的极限为：

$$C_m(\epsilon) = \int_{\mathcal{H}^m} \int_{\mathcal{H}^m} I_\epsilon(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{m,\mathcal{H}}) \mu_{X^m}(d\mathbf{x}) \mu_{X^m}(d\mathbf{y}). \tag{15}$$

当 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 为独立过程时，

$$I_\epsilon(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{m,\mathcal{H}}) = \prod_{i=1}^{m} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}}). \tag{16}$$

因此，利用（8）和（16），（15）可得：

$$\begin{aligned} C_m(\epsilon) &= \int_{\mathcal{H}^m}\int_{\mathcal{H}^m}\left(\prod_{i=1}^{m} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\right)\prod_{i=1}^{m}\mu_X(dx_i)\prod_{i=1}^{m}\mu_X(dy_i) \\ &= \prod_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{H}}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dx_i)\mu_X(dy_i) = (C_1(\epsilon))^m. \end{aligned} \tag{17}$$

写入 $C(\epsilon)$ 对于 $C_1(\epsilon)$。然后，由（17），

$$C_m(\epsilon) = [C(\epsilon)]^m. \tag{18}$$

B.2 二阶广义 U统计量

在下文中，我们将介绍函数型时间序列的二阶广义 U 统计量的一些概念。 U-统计量的概念最早可追溯至Hoeffding (1948年)。这里，我们将 U统计量从 Serfling (1980年) 和 Broock et al. (1996) 推广到函数型时间序列的情形。这里的论述遵循Denker & Keller (1983年) 和 Broock et al. (1996) 中的相关论述。

由于 $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 是一个可数生成的可测空间，因此有限乘积空间 $(\mathcal{H}^m, \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\otimes m})$ 也是一个可数生成的可测空间。设 $h : (\mathcal{H}^m)^2 \to \mathfrak{R}$ 是一个可测函数 $h(\mathbf{x},\mathbf{y})$，其中 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathcal{H}^m$。可测函数 h 称为积分的核：

$$\int_{\mathcal{H}^m}\int_{\mathcal{H}^m} h(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu_{X^m}(d\mathbf{x})\mu_{X^m}(d\mathbf{y}), \tag{19}$$

如果 h 关于其自变量$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$对称。也就是说，

$$h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = h(\mathbf{y},\mathbf{x}). \tag{20}$$

那么，阶数为 2 的广义 U-统计量定义如下：

$$U_n = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant n} h(X_s^m, X_t^m), \quad n \geqslant 2. \tag{21}$$

注意

$$I_\epsilon(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{m,\mathcal{H}}) = I_\epsilon(\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_{m,\mathcal{H}}). \tag{22}$$

那么 $I_\epsilon(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{m,\mathcal{H}})$ 是式（15）中积分的对称核。因此，令$h(X_s^m, X_t^m)$ 在式（21）中取值为 $I_\epsilon(\|X_s^m - X_t^m\|_{m,\mathcal{H}})$，式（13）中的相关积分便与式（21）一致。因此，式（13）中的相关积分是一个阶数为 2、对称核为 U的广义 $I_\epsilon(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{m,\mathcal{H}})$统计量。将 Broock et al. (1996) 中的定义推广到函数型时间序列情形，我们定义：

$$\begin{aligned} K(\epsilon) &:= \int_{\mathcal{H}} \left(\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x-y\|_H) \mu_X(dx) \right)^2 \mu_X(dy) \\ &= \int_{\mathcal{H}} \left(\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|y-x\|_H) \mu_X(dy) \right)^2 \mu_X(dx). \end{aligned} \tag{23}$$

最后一个等式由对称性得出。接下来，

$$\begin{aligned} & \mathrm{Var}[E[I_\epsilon(\|X_t - X_s\|_H)|X_s]] \\ = \; & E[(E[I_\epsilon(\|X_t - X_s\|_H)|X_s])^2] - (E[E[I_\epsilon(\|X_t - X_s\|_H)|X_s]])^2 \\ = \; & E[(E[I_\epsilon(\|X_t - X_s\|_H)|X_s])^2] - (E[I_\epsilon(\|X_t - X_s\|_H)])^2 \\ = \; & \int_{\mathcal{H}} \left(\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x-y\|_H) \mu_X(dx) \right)^2 \mu_X(dy) - \left(\int_{\mathcal{H}} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x-y\|_H) \mu_X(dx) \mu_X(dy) \right)^2 \\ = \; & K(\epsilon) - [C(\epsilon)]^2. \end{aligned} \tag{24}$$

因此，

$$K(\epsilon) \geqslant [C(\epsilon)]^2. \tag{25}$$

B.3 渐近正态性及其证明

为建立广义 U 统计量（阶数为 2，见（21））的渐近正态性结果，如Broock et al. (1996) 所述，我们关注满足 $K(\epsilon) > [C(\epsilon)]^2$.

为简化符号，参照Broock et al. (1996）的写法，我们记作 K 表示 $K(\epsilon)$，并记作 C 表示 $C(\epsilon)$，除非另有说明。定义 $\sigma_m^2 := \sigma_m^2(\epsilon)$ 如下：

$$\sigma_m^2 = 4K^m - 4C^{2m} + 8\sum_{i=1}^{m-1}(K^{m-i}C^{2i} - C^{2m}). \tag{26}$$

下面的定理给出了第一个渐近正态性结果，它将Broocket al.(1996，定理2.1）推广到了函数型时间序列的情形。

定理1。 假设

1. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是一个取值于 $\mathcal{H}$的独立同分布随机元素序列；
2. $K(\epsilon) > [C(\epsilon)]^2$。

则具有如下定义的阶数为 2 的标准化广义 U 统计量：

$$\sqrt{n}\left(\frac{C_{m,n}(\epsilon) - (C(\epsilon))^m}{\sigma_m(\epsilon)}\right) \tag{27}$$

按分布收敛于 $N(0,1)$（即均值为零、方差为单位方差的标准正态分布），当 $n \to \infty$，其中 $\sigma_m(\epsilon)$ 由下式给出(26)。

证明。 证明源自Denker & Keller （1983年）中的定理1(c)以及Broock et al. （1996）中定理2.1的证明。这里我们考虑概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的 $\mathcal{H}^m$值随机过程 $\{X_t^m\}_{t\in\mathbb{Z}}$。在条件1下，$\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$是独立同分布的，若$|s-t| \geqslant m$，则 X_s^m和 X_t^m相互独立。于是，对于 $k \geqslant m$，两个 σ-域$\mathcal{G}_{1,n}$ 与$\mathcal{G}_{n+k,\infty}$必然独立。那么对于任意$G \in \mathcal{G}_{n+k,\infty}$，若满足 $k \geqslant m$,

$$P(G|\mathcal{G}_{1,n}) = P(G). \tag{28}$$

因此，对于 ea　　阶 $k \geqslant m$，$\beta(k)$ 在（9）中必须恒等于零。这意味着 $\{X_t^m\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是

绝对正则。由于假设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是一个严格平稳的 $\mathcal{H}$值过程，$\{X_t^m\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是一个绝对正则的严格平稳 $\mathcal{H}$ 值过程。由于 $\beta(k) < \infty$，对所有$k \leqslant m$均成立，且对所有 $k > m$， $\beta(k) = 0$均成立，其中 $\delta > 0$ 为某个值。注意到 $I_\epsilon \leqslant 1$。于是

$$E[|I_\epsilon(\|X_s^m - X_t^m\|_{m,\mathcal{H}})|^{2+\delta}] \leqslant 1 < \infty. \tag{29}$$

因此，Denker & Keller(1983年，定理1(c)) 中的条件均得到满足。这便确立了标准化广义 U 统计量（其阶数为2，见(27)）依分布收敛到标准正态分布。剩下需要证明的是 $\sigma_m(\epsilon)$ 由(26)给出。对每个$\mathbf{x} \in \mathcal{H}^m$，定义

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &:= \int_{\mathcal{H}^m} I_\epsilon(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{m,\mathcal{H}})\mu_{X^m}(d\mathbf{y}) - (C(\epsilon))^m \\ &= \prod_{i=1}^m \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i) - (C(\epsilon))^m. \end{aligned} \tag{30}$$

对于每 ch $i = 1, 2, \cdots, m$, 令 $X_t^m(i)$ 为 X_t^m 的 i^{th} 分量。在条件1 ，

$$\begin{aligned} E[h_1(X_t^m)] &:= E\left[\prod_{i=1}^m \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_t^m(i) - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right] - (C(\epsilon))^m \\ &= \prod_{i=1}^m E\left[\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_t^m(i) - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right] - (C(\epsilon))^m \\ &= \prod_{i=1}^m \int_{\mathcal{H}}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dx_i)\mu_X(dy_i) - (C(\epsilon))^m \\ &= \prod_{i=1}^m C(\epsilon) - (C(\epsilon))^m = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

使用Denker & Keller (1983年的渐近方差，并记作 σ_m^2 表示 $\sigma_m^2(\epsilon)$,

$$\frac{1}{4}\sigma_m^2 = E[(h_1(X_1^m))^2] + 2\sum_{t>1} E[h_1(X_1^m)h_1(X_t^m)]. \tag{32}$$

由（30）出发，

$$
\begin{aligned}
& (h_1(X_t^m))^2 \\
= & \left(\prod_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_t^m(i)-y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)-(C(\epsilon))^m\right)^2 \\
= & \left(\prod_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_t^m(i)-y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right)^2-2\left(\prod_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_t^m(i)-y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right) \\
& \times(C(\epsilon))^m+(C(\epsilon))^{2m}. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

对式（33）取期望可得：

$$
\begin{aligned}
E[(h_1(X_t^m))^2] &= E\left[\left(\prod_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_t^m(i)-y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right)^2\right] \\
&\quad -2E\left[\left(\prod_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_t^m(i)-y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right)\right](C(\epsilon))^m \\
&\quad +(C(\epsilon))^{2m} \\
&= \int_{\mathcal{H}^m}\left(\prod_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i-y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right)^2\mu_{X^m}(d\mathbf{x}) \\
&\quad -2\prod_{i=1}^{m}E\left[\left(\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_t^m(i)-y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right)\right](C(\epsilon))^m \\
&\quad +(C(\epsilon))^{2m} \\
&= \prod_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{H}}\left(\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i-y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right)^2\mu_X(dx_i) \\
&\quad -2\prod_{i=1}^{m}E\left[\left(\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_t^m(i)-y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\right)\right](C(\epsilon))^m \\
&\quad +(C(\epsilon))^{2m} \\
&= \prod_{i=1}^{m}K(\epsilon)-2\prod_{i=1}^{m}C(\epsilon)(C(\epsilon))^m+(C(\epsilon))^{2m} \\
&= (K(\epsilon))^m-(C(\epsilon))^{2m}. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

为评估 $E[h_1(X_1^m)h_1(X_t^m)]$，考虑两种情况，即 $t\leqslant m$ 和 $t>m$。

回想一下，$X_1^m=(X_1,X_2,\cdots,X_m)\in\mathcal{H}^m$ 和 $X_t^m=(X_t,X_{t+1},\cdots,X_{t+m-1})\in\mathcal{H}^m$。那么对于 $t\leqslant m$，X_1^m和 X_t^m的重叠元素为 $(X_t,X_{t+1},\cdots,X_m)\in\mathcal{H}^{m-t+1}$。非重叠

元素为:

$$
\begin{aligned}
&(X_1, X_2, \cdots, X_{t-1}) \in \mathcal{H}^{t-1}, \\
&(X_{m+1}, X_{m+2}, \cdots, X_{t+m-1}) \in \mathcal{H}^{t-1}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

因此，对于 $t \leqslant m$,

$$
\begin{aligned}
& E[h_1(X_1^m) h_1(X_t^m)] \\
= \; & E\Bigg[\Bigg(\prod_{i=1}^{m} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i) - (C(\epsilon))^m\Bigg) \\
& \times \Bigg(\prod_{i=t}^{t+m-1} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i) - (C(\epsilon))^m\Bigg)\Bigg] \\
= \; & E\Bigg[\Bigg(\prod_{i=1}^{m} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg)\Bigg(\prod_{i=t}^{t+m-1} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg)\Bigg] \\
& -(C(\epsilon))^m E\Bigg[\Bigg(\prod_{i=1}^{m} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg)\Bigg] \\
& -(C(\epsilon))^m E\Bigg[\Bigg(\prod_{i=t}^{t+m-1} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg)\Bigg] + (C(\epsilon))^{2m} \\
= \; & E\Bigg[\Bigg(\prod_{i=1}^{t-1} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg)\Bigg(\prod_{i=t}^{m} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg)^2 \\
& \times \Bigg(\prod_{i=m+1}^{t+m-1} \int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg)\Bigg] \\
& -(C(\epsilon))^m \prod_{i=1}^{m} E\Bigg[\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg] \\
& -(C(\epsilon))^m \prod_{i=t}^{t+m-1} E\Bigg[\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg] + (C(\epsilon))^{2m}
\end{aligned} \tag{36}
$$

注意,

$$
E\Bigg[\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}}) \mu_X(dy_i)\Bigg]
$$

$$= \int_{\mathcal{H}}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\mu_X(dx_i) = C(\epsilon), \tag{37}$$

并且

$$\begin{aligned}
& E\Bigg[\Bigg(\prod_{i=1}^{t-1}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\Bigg)\Bigg(\prod_{i=t}^{m}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\Bigg)^2 \\
& \times\Bigg(\prod_{i=m+1}^{t+m-1}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|X_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\Bigg)\Bigg] \\
= & \int_{\mathcal{H}^{t+m-1}}\Bigg(\prod_{i=1}^{t-1}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\Bigg)\prod_{i=t}^{m}\Bigg(\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\Bigg)^2 \\
& \times\Bigg(\prod_{i=m+1}^{t+m-1}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\Bigg)\mu_{X^{t+m-1}}(d\mathbf{x}) \\
= & \Bigg(\prod_{i=1}^{t-1}\int_{\mathcal{H}}\int_{H} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\mu_X(dx_i)\Bigg) \\
& \times\prod_{i=t}^{m}\int_{\mathcal{H}}\Bigg(\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\Bigg)^2\mu_X(dx_i) \\
& \times\Bigg(\prod_{i=m+1}^{t+m-1}\int_{\mathcal{H}}\int_{\mathcal{H}} I_\epsilon(\|x_i - y_i\|_{\mathcal{H}})\mu_X(dy_i)\mu_X(dx_i)\Bigg) \\
= & \Bigg(\prod_{i=1}^{t-1} C(\epsilon)\Bigg)\Bigg(\prod_{i=t}^{m} K(\epsilon)\Bigg)\Bigg(\prod_{i=m+1}^{t+m-1} C(\epsilon)\Bigg) \\
= & (C(\epsilon))^{t-1}(K(\epsilon))^{m-t+1}(C(\epsilon))^{t-1} \\
= & (K(\epsilon))^{m-(t-1)}(C(\epsilon))^{2(t-1)}.
\end{aligned} \tag{38}$$

因此，利用公式（36）、公式（37）和公式（38），对于 $t \leqslant m$,

$$E[h_1(X_1^m)h_1(X_t^m)] = (K(\epsilon))^{m-(t-1)}(C(\epsilon))^{2(t-1)} - (C(\epsilon))^{2m}. \tag{39}$$

对于 $t > m$， X_1^m和 X_t^m彼此独立，因为它们没有重叠项。利用这一事实和（31），

$$E[h_1(X_1^m)h_1(X_t^m)] = E[h_1(X_1^m)]E[h_1(X_t^m)] = 0. \tag{40}$$

因此，利用（32）、（34）、（39）和（40），

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sigma_m^2 &= E[(h_1(X_1^m))^2] + 2\sum_{t>1} E[h_1(X_1^m)h_1(X_t^m)] \\
&= E[(h_1(X_1^m))^2] + 2\sum_{t=2}^{\infty} E[h_1(X_1^m)h_1(X_t^m)] \\
&= E[(h_1(X_1^m))^2] + 2\sum_{t=2}^{m} E[h_1(X_1^m)h_1(X_t^m)] \\
&= (K(\epsilon))^m - (C(\epsilon))^{2m} + 2\sum_{t=2}^{m}\left((K(\epsilon))^{m-(t-1)}(C(\epsilon))^{2(t-1)} - (C(\epsilon))^{2m}\right) \\
&= (K(\epsilon))^m - (C(\epsilon))^{2m} + 2\sum_{t=1}^{m-1}\left((K(\epsilon))^{m-t}(C(\epsilon))^{2t} - (C(\epsilon))^{2m}\right) \\
&= K^m - C^{2m} + 2\sum_{t=1}^{m-1}(K^{m-t}C^{2t} - C^{2m}) \qquad (41)
\end{aligned}$$

由此得到（26）中的渐近方差，并完成证明。 □

参考文献

Aue, A., Horv´ath, L. & Pellatt, D. F. (2017), ‘函数广义自回归条件异方差’，时间序列分析杂志 **38**(1), 3–21.

Bosq, D. (1991), 连续时间过程的建模、非参数估计与预测，载于《非参数函数估计及相关主题》，Springer, pp. 509–529.

Bosq, D. (1999), ‘自回归希尔伯特过程’，*Annales de l’ISUP, Publications de l’Institut de Statistique de l’Universit´e de Paris***XXXXIII**(2-3), 25–55.

Bosq, D. (2000), 函数空间中的线性过程：理论与应用, 第149卷，Springer Science & Business Media，纽约。

Brock, W. (1987), ‘IID 类型检验中的干扰参数问题札记’，未发表手稿。美国威斯康星州麦迪逊：威斯康星大学。

Brock, W. A., Hsieh, D. A., LeBaron, B. D., Brock, W. E. 等（1991年），《非线性动力学、混沌与不稳定性：统计理论与经济证据》，麻省理工学院出版社，剑桥，马萨诸塞州，伦敦，英格兰。

Broock, W. A., Scheinkman, J. A., Dechert, W. D. & LeBaron, B.（1996），‘基于相关维数的独立性检验’，《计量经济学评论》**15**(3)，197–235。

Damon, J. & Guillas, S.（2002年），‘在函数自回归臭氧预测中纳入外生变量’，《环境计量学》**13**(7)，759–774。

de Lima, P. J.（1996），‘基于相关积分的统计量不受干扰参数影响的性质’，《计量经济学评论》**15**(3)，237–259。

Denker, M. & Keller, G.（1983年），‘关于弱依赖过程的 U-统计量和冯·米塞斯统计量’，《概率论与相关领域杂志¨》**64**，505–522。

Fernandes, M., Medeiros, M. C. & Scharth, M.（2014年），《建模与预测 CBOE 市场波动率指数》，《银行与金融期刊》**40**, 1–10。

Fernandes, M. & Preumont, P.-Y. (2012年), ‘GARCH标准化残差的BDS检验有限样本规模’,《巴西计量经济学评论》**32**(2), 241–260.

Gabrys, R. & Kokoszka, P.（2007年）, 《函数型观测的独立性Portmanteau检验》, 《美国统计学会会刊：理论与方法》**102**(480), 1338–1348。

Gonz´alez, J. P., San Roque, A. M. S. M.& Perez, E. A.（2017年）, 《采用新型Hilbert型ARMAX模型预测函数型时间序列：电价预测的应用》, 《*IEEE*电力系统汇刊》**33**(1), 545–556。

Grassberger, P. & Procaccia, I.（1983年）, 《奇异吸引子的刻画》, 《物理评论快报》**50**(5), 346。

Hoeffding, W.（1948年）, 《一类具有渐近正态分布的统计量》, 《数理统计年刊》**19**(3), 293–325。

Hooker, G. & Shang, H.（2022年）, 《在标量对函数回归中选择函数型协变量的导数》, 《统计与计算》**32**(3), 文章：35。

H¨ormann, S., Horv´ath, L. & Reeder, R.（2013年）, 《ARCH 模型的函数型版本》, 计量经济学理论**29**(2), 267–288。

Horv´ath, L., Hu˘skov´a, M. & Rice, G.（2013年）, 《函数型数据独立性检验》, 《多元分析期刊》**117**, 100–119。

Huang, X. & Shang, H. L.（2023年）, 《函数型时间序列的非线性自相关函数》, 《非线性动力学》**111**, 2537–2554。

Klepsch, J., Kl¨uppelberg, C. & Wei, T.（2017年）, 《函数型 ARMA 过程的预测及其在交通数据中的应用》, 《计量经济学与统计学》**1**, 128–149。

Kokoszka, P. & Reimherr, M.（2017年）, 《函数型数据分析导论》, Chapman and Hall/CRC, 博卡拉顿。

Kokoszka, P., Rice, G. & Shang, H. L. (2017年), ‘条件异方差下函数型时间序列自协方差的推断’,《多元分析期刊》**162**, 32–50.

Konstantinidi, E., Skiadopoulos &Tzagkaraki, E. (2008年), '隐含波动率的演变能否预测？来自欧洲和美国隐含波动率指数的证据', 《银行与金融期刊》**32**(11), 2401–2411.

LeBaron, B.（1997年）, "BDS统计量的快速算法", 《非线性动力学与经济计量学研究》**2**（2）。

Mestre, G.、Portela, J.、Rice, G.、San Roque, A. M. 和 Alonso, E.（2021年）, "通过自相关和偏自相关分析进行函数型时间序列模型识别与诊断", 《计算统计与数据分析》**155**, 107108。

Packard, N. H.、Crutchfield, J. P.、Farmer, J. D. 和 Shaw, R. S.（1980年）, "从时间序列中获取几何结构", 《物理评论快报》**45**（9）, 712。

Prakasa Rao, B. L. S.（2014年）, "从随机样本量的样本刻画希尔伯特空间上的高斯分布", 《多元分析期刊》**132**, 209–214。

Preston, C.（2008年）, 关于标准Borel空间及相关空间的若干注记, 工作论文, arXiv。
网址： https://arxiv.org/pdf/0809.3066.pdf

R Core Team（2023年）, *R*: 用于统计计算的语言与环境, R统计计算基金会, 维也纳, 奥地利。
网址： https://www.R-project.org/

Ramsay, J. O. & Silverman, B. W.（2002年）, 应用函数型数据分析：方法与案例研究, 第77卷, Springer, 纽约。

Ramsay, J. O. & Silverman, B. W.（2005年）, 函数型数据分析, Springer, 纽约 .

Rice, G., Wirjanto, T. & Zhao, Y.（2021年）, 探索原油日内收益曲线的波动率：一种函数型GARCH-X 模型, MPRA 工作论文 109231, 滑铁卢大学。**网址：**
https://mpra.ub.uni-muenchen.de/109231/

Serfling, R. J.（1980年）, 《数理统计逼近定理》, 约翰·威立父子公司, 纽约。

Serge, D. J. G.（2022年），*far*：函数自回归过程建模。R 包版本 0.6-6。**网址：**
https://CRAN.R-project.org/package=far

Shang, H. L.（2019年），“变化率可视化：应用于年龄别生育率”，英国皇家统计学会杂志：*A*辑（社会统计学）**182**(1)，249–262。

Shang, H. L., Cao, J. & Sang, P.（2022年），“木板压缩的停时检测：一种函数时间序列方法”，英国皇家统计学会杂志：*C*辑**71**（5），1205–1224。

Shang, H. L., Haberman, S. & Xu, R. (2022年), ‘多人口建模与生命表死亡人数预测’, 保险：数学与经济学**106**, 239–253.

Shang, H. L., Yang, Y. & Kearney, F. (2019年)，《波动率指数的日内预测：采用动态更新的函数时间序列方法》，运筹学年鉴 **282**(1), 331–354。

Takens, F.（1981），湍流中奇异吸引子的检测，载于《动力系统与湍流，华威1980》，Springer，第366–381页。

Turbillon, C., Marion, J.-M. & Pumo, B.（2007），希尔伯特空间中移动平均算子的估计，载于 C. H. Skiadas 编，《随机建模与数据分析的最新进展》，世界科技出版公司，第597–604页。

Volkonski, V. A. & Rozanov, Y. A.（1961），《随机函数的若干极限定理 II》，概率论及其应用 **6**，186–198。

Zamani, A., Haghbin, H., Hashemi, M. & Hyndman, R. J.（2022），《季节性函数自回归模型》，时间序列分析杂志**43**（2），197–218。

Zhang, X.（2016），《函数型时间序列的白噪声检验与模型诊断检验》，计量经济学杂志 **194**(1)，76–95。