基于小波重建的采集函数的信息与能量传输

Daewon Seo 和 Yongjune Kim

arXiv:2304.01560v1 [cs.IT] 4 Apr 2023

摘要—**在实际的信息与能量同时传输（SIET）中，由于能量采集电路具有非线性且并非理想，通常无法获得精确的能量采集函数。本文研究一种 SIET 问题：能量采集函数仅在实验采集的采样点处可用，并探讨如何利用这些采样获得的知识，设计出尽可能接近最优系统的 SIET。我们假设能量采集函数具有有界变差且可能存在不连续点，并分别考虑无加性噪声和有加性噪声时的采样情形。对于这两种情形，我们提出将小波重建的采集函数视为真实函数来设计 SIET 系统，并研究其相对于真实最优系统在能量与信息传输方面的渐近性能损失。具体而言，对于无噪声样本，结果表明，若将小波重建的采集函数视为真实函数来设计 SIET，随着样本数量增加，能量与信息传输的损失将渐近趋于零。对于含噪样本，我们提出通过软阈值估计重建小波系数。由此，我们不仅获得了与无噪声情形相似的渐近损失，还证明了基于小波的能量损失在渐近意义上除一个对数因子外是最优的。**

索引词—**能量采集、容量-能量函数、小波、有界变差函数**

一、引言

信息与能量同时传输（SIET）已应用于多种场景，例如射频识别（RFID）标签、无线远程传感器以及体内生物医学设备。这些广泛的应用推动了对 SIET 系统的大量研究。自从首次研究 SIET 的基本极限以来 [2]„ 后续研究层出不穷，例如，针对频率选择性加性高斯白噪声（AWGN）信道的 SIET [3], 、有限码长场景 [4]„ 有线场景 [5], 以及无线场景 [6]–[13]。此外，近期综述请参见 [14]。无线场景中的相关问题通常简称为 SWIPT（无线信息与能量同时传输）。

本文部分内容曾发表于2022年IEEE信息论国际研讨会（ISIT） [1]。（通讯作者：Yongjune Kim）本研究部分受大邱庆北科学技术院科学技术信息通信部启动基金计划（编号：2023010048）以及韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（编号：RS-2023-00212103）支持。D. Seo现任职于韩国大邱42988大邱庆北科学技术院电气工程与计算机科学系（电子邮箱：dwseo@dgist.ac.kr）。Y. Kim现任职于韩国浦项37673浦项科技大学（POSTECH）电气工程系，同时任职于韩国首尔03722延世大学先进技术融合研究与教育研究所（电子邮箱：yongjune@postech.ac.kr）。

SIET 和 SWIPT 面临的一项主要挑战是，实际中的能量采集函数并不遵循物理学中的简单能量定律，例如，对于接收信号 $\int y^2$（t）dt （ y）t。此外，能量采集电路的非线性和非理想性（如非线性元件、不完善的阻抗匹配、非理想信号滤波器和寄生电容）通常会使能量采集函数变得复杂且难以处理。因此，由于无法准确获知真实的能量采集函数，便不可能设计出完全最优的 SIET 系统。

针对具有此类难以处理的能量采集函数的 SIET，文献中主要有两种方法。第一种方法将能量采集电路拆分为多个组件，分别进行近似（例如采用泰勒近似），然后将其组合起来，以闭式形式得到端到端能量采集函数 [15]–[20]。具体而言， [18], 通过泰勒级数近似理想二极管的特性，推导出一种能量采集电路的非线性解析模型，并据此提出使用多正弦波形来获取最大能量。然而，这种方法存在局限，因为受耦合效应、寄生电容等因素影响，各个组件的规律甚至可能不符合理想电路定律，因此近似误差可能会累积。例如，组件间相互作用产生的寄生元件，使得难以对含有二极管的电路建立解析的等效端到端模型。

事实上，真实的端到端能量采集函数可能只能通过实验样本或电路仿真获得 [21]–[26]。受此启发，近期文献尝试利用实验样本采用深度学习方法。文献 [27] 首先通过深度学习回归，根据样本重建能量采集函数，然后利用基于神经网络的自编码器优化调制的星座点。文献 [28] 着重研究能量采集电路的记忆效应。为捕捉记忆效应，该文提出一种针对能量采集电路的马尔可夫决策过程（MDP）模型，并使用神经网络根据电路仿真器生成的数据估计该 MDP 的参数。尽管深度学习方法在实践中取得了成功，但它有一个关键缺点：通常无法提供理论性能保证。此外，由于基于深度学习的优化属于黑箱算法，它通常难以深入揭示 SIET 的特性。例如，它无法回答达到特定性能需要多少实验样本，也无法说明我们的 SIET 设计与最优 SIET 之间有多大差距。

我们此前的工作 [29] 通过使用样条和

局部多项式，同时实现了学习方法与理论保证。这项工作基于这样一个事实：对于低维函数，经典函数插值方法的表现不亚于深度学习回归，而且还能提供理论保证。具体而言，假设一个平滑的能量采集函数（形式上属于索博列夫函数类）仅在采样点处已知，该工作刻画了基于这些采样获得的知识时，信息率和能量所产生的渐近性能损失 [29]。它没有采用深度学习回归，而是建议使用样条和局部多项式方法重构未知的能量采集函数，并将其作为真实函数的替代。结果颇具前景：随着样本数量增加，相对于真实最优性能的性能损失渐近趋于可忽略。然而，平滑性假设限制较强，因为随着信号变化，能量采集函数有时会迅速变化，例如因二极管的模式转换、硬件缺陷，或采用频率调制时电路出现意外谐振而导致。此时，采集的真实数据会显示出能量采集函数的突变，例如 [27] 中的图 4。即使真实函数是平滑的（形式上属于索博列夫函数），这种突变也意味着其导数幅值很大，而导数会被损失刻画中的一个隐藏常数因子所反映 [29]。因此，得到的损失界没有实际意义。在这种情况下，更合理的做法是将其建模为一个有界变差函数，该函数可以存在不连续点，但其全变差有界。这类函数比索博列夫函数更广，而样条重构方法在这类函数上的表现并不好。

本文研究一类有界变差的能量采集函数，这类函数可能存在有限个跳跃（不连续点）。此外，我们假设只能在离散采样点处获取能量采集函数的值，且采样可能有噪声，也可能没有噪声。在这些设定下，我们的最终目标是探讨如何设计信息论意义上（近似）最优的 SIET 系统，以及这些系统的性能。为此，我们提出的方法首先使用小波方法重构能量采集函数，然后据此设计传输码本。与基于深度学习的方法不同， [27]，采用成熟的小波方法，使我们能够解析地刻画其性能损失。此外，本文将我们先前的工作[29] 推广到使用样条和局部多项式仅重构光滑函数的情形。小波显然不同于样条和局部多项式；对于更广泛的函数类别，使用小波通常能够达到极小极大意义上的（近似）最优。结果表明，随着样本数量增加，能量损失和信息率损失渐近趋于零。具体而言，我们的研究结果总结如下。

- 对于无噪声样本，若基于小波重建的采集函数设计 SIET，则能量传输渐近地接近采集函数完全已知时的能量传输。在能量域内部，信息传输也能渐近地接近最优水平。

- 对于含噪样本，我们提出通过小波和软阈值系数估计来重构能量收集函数。随后，基于小波的信息与能量同时传输所产生的能量和信息预期损失会随着样本数量的增加而渐近趋于零。此外，我们证明，对于某个信道，采样获得的知识导致的能量损失在渐近意义上达到最优，仅相差一个对数因子；也就是说，该损失无法进一步降低。

本文其余部分安排如下。第二节对问题进行形式化描述，并介绍小波基础知识。第三节研究无噪声采样时的能量损失和信息损失。第四节研究有噪声采样时的预期能量损失和信息损失。第五节通过数值实验展示所提出的方案，并将其与基于样条的方法 [29] 和基于深度学习的方法 [27] 进行比较。最后，第六节总结全文。

II. 背景与问题表述

A. 容量-能量函数

SIET 的目标是通过噪声信道同时传输信息和能量。在本文中，我们特别假设，能量采集函数仅在离散采样点处已知，例如通过这些点上的测量获得。码字也可以看作一串信号或波形。我们采用信息论方法 [30] 研究这一问题，因为它为分析 SIET 系统的基本极限以及开发能够提升其性能的高效算法和协议，提供了严谨的理论框架。我们主要关注刻画信息传输与能量传输之间的基本权衡，以及这种采样获得的知识所造成的损失。形式上，发送方希望发送速率为 R 的比特流，记为均匀消息 $W \in \{1, \dots, 2^{nR}\}$。该消息被编码成长度为 n 的码字 $X^n \in \mathcal{X}^n = [0,1]^n$，并通过无记忆信道 $p_{Y|X}$ 发送。区间 $[0,1]$ 可用于描述实际的离散时间模拟通信系统或高密度星座数字通信系统，例如当输入信号空间为 $\mathcal{X} = [0,1]^2$ 时的调幅与调频（AM 和 FM）、高密度星座正交幅度调制（QAM）以及正交频分复用（OFDM）。详情请参阅 [29] 。接收方收到一串信号或波形 $Y^n \in \mathcal{Y}^n$ 后，会恢复与比特流相对应的消息 W，同时采集能量。若概率为 $\widehat{\ }$ 的错误 $\mathbb{P}[W \neq \widehat{W}]$ 随着 n 增大而渐近趋于零，且采集的能量大于 B ，则满足条件的最大信息率 R 称为能量水平 B 下的容量。目标是同时最大化信息传输和能量传输，即找到信息率与能量传输之间的最优权衡。我们假设信息解码器和能量采集器处理的是同一个信号。经过对能量采集函数进行适当缩放后，我们的模型涵盖分割比为 ρ [7], [31] 的静态功率分割接收机。

信息率与能量之间的基本权衡由信道容量-能量 函数 [2] 表征。

对于完全已知的能量采集函数 $b: \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R}_+$，所需能量传输 B 对应的信息容量为 $C_b(B)$,

$$C_b(B) = \max_{p_X:\mathbb{E}[b(Y)]\geq B} I(X;Y),$$

其中， $I(X;Y)$ 是传输信号与接收信号 [30] 之间的互信息。注意，最低能量需求 $\mathbb{E}[b(Y)] \geq B$ 也可以利用条件期望表示为传输符号 X 的函数,

$$\mathbb{E}_Y[b(Y)] = \mathbb{E}_X[\mathbb{E}_{Y|X}[b(Y)]] = \mathbb{E}_X[\beta(X)],$$

其中， $\beta(x) := \mathbb{E}_{Y|x}[b(Y)]$。此表达式更适用于设计传输符号或码字；因此，以下我们假设能量采集函数是传输符号的函数。这意味着，稍微滥用一下记号，新能量采集函数 $\beta(x)$ 对应的容量 - 能量函数定义为

$$C_\beta(B) = \max_{p_X:\mathbb{E}[\beta(X)]\geq B} I(X;Y). \tag{1}$$

如前所述，本文考虑的能量采集函数是未知的，只能通过离散采样点获取。由于有不可数多个候选函数会产生相同的采样点，因此不可能仅凭样本准确识别真实函数并设计出最优的 SIET 系统。相反，我们采用一种保守（即最坏情况）方法：对于与这些样本一致的任意 能量采集函数，都传输一定量的信息和能量。这引出了针对一组能量采集函数 F （这些函数与给定样本一致）的容量-能量函数,

$$C_F(B) = \sup_{p_X:\mathbb{E}[\beta(X)]\geq B \quad \forall \beta\in F} I(X;Y), \tag{2}$$

这意味着对于 B 中任意 能量采集函数，当能量传输不低于 B 时所能达到的最大信息速率。显然， $C_F(B) \leq C_\beta(B)$，且 $C_\beta(B)$ $C_F(B)$均为非增函数。此外， $C_\beta(B)$在可交付能量域的内部是凹函数，[1] 而 $C_F(B)$不一定是凹函数，因为它是凹函数的上确界。我们还定义了能量容量函数 $B_\beta(R)$ $B_F(R)$，它是容量-能量函数的对偶，

$$B_\beta(R) = \max_{p_X:I(X;Y)\geq R} \mathbb{E}[\beta(X)], \tag{3}$$

$$B_F(R) = \max_{p_X:I(X;Y)\geq R} \inf_{\beta\in F} \mathbb{E}[\beta(X)]. \tag{4}$$

最后请注意，根据 Shannon 的随机码本生成方法，实现 $C_\beta(B)$（或者在关注 F 时实现 $C_F(B)$）的容量达成分布 p_X^* 可被视为最优码本 [30]。

[1]通过（编码）时分复用论证可直接证明其凹性[32]: 在 $\alpha > 0$ 的时间内，系统使用一个可实现（B_1、$C_\beta(B_1)$）的编码。其余时间则使用一个可实现（B_2、$C_\beta(B_2)$）的编码。将这两个编码组合成一个超级编码即可实现以下性能

$(\alpha B_1 + (1-\alpha)B_2,\ \alpha C_\beta(B_1) + (1-\alpha)C_\beta(B_2))$ 是可实现的，因此可能存在一种能在 $\alpha B_1 + (1-\alpha)B_2$ 达到更高信息率的编码，即该曲线是凹的。

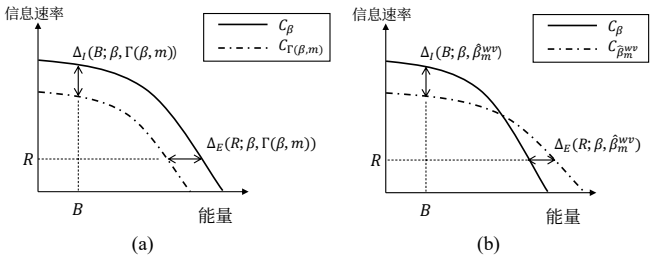


图 1. 典型容量-能量曲线及所关注损失的示意图。(a) C_β， $C_{\Gamma(\beta,m)}$ 无噪声样本所产生的能量损失和信息损失。(b) C_β， $C_{\hat{\beta}_m^{wv}}$ 来自含噪样本的特定实现 β_m^{wv}（因此，此处没有取期望）及其损失。

B. 能量采集函数与损失

我们感兴趣的能量采集函数 β 具有有界变差。[2] 也就是说，令界限为 $K > 0$,

$$\beta \in \mathsf{BV}_K[0,1] := \left\{ f : \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq K \right\},$$

其中， $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{X} = [0,1]$ 的所有分割构成的集合， $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n_p} = 1$为分割边界。量 $\mathsf{TV}(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$称为 f的全变差。等价地，可以写作

$$\mathsf{BV}_K[0,1] = \left\{ f : \int_{\mathcal{X}} |f^{(1)}(x)| \leq K \right\},$$

其中 $f^{(1)}$是 f [33]的弱导数。令 $\|f\|_{L_p}$为 f的 L_p函数范数，即:

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p},\ p \geq 1,$$

并且 $L_2[0,1] = \{f:\ \|f\|_{L_2} < \infty\}$。那么，关于 $\mathsf{BV}_K[0,1]$ 有两个重要推论如下:

- Jordan分解 [34] 表明， $f \in \mathsf{BV}_K[0,1]$ 可以表示为两个有界单调递增函数之差。由于每个单调函数都属于 $L_2[0,1]$，我们知道 $f \in \mathsf{BV}_K[0,1] \subset L_2[0,1]$。

- $\mathsf{BV}_K[0,1]$ 不仅包含 [29] 中讨论的 Sobolev光滑采集函数，也包含具有有限个不连续点的函数。因此，我们感兴趣的函数类比 [29]中考虑的索伯列夫函数类更一般。

C. 问题表述

本研究的一个关键假设是，能量采集函数$\beta(x)$未知，但可通过实验样本获得。我们针对 $\mathcal{X} = [0,1]$ 上的采样点位置采用规则网格设计，即样本的位置为 $\{\frac{i}{m-1} :\ i = 0, 1, \ldots\ldots, m-1\}$。我们考虑两种情形：采集样本时不存在噪声，或存在噪声。无噪声

[2]某些电路函数可能不稳定，因此不属于这一类别。例如，如果电路的非理想性放大了特定的频率分量，就可能造成显著的频率波动，进而导致变差函数无界。

情形尤其适用于传输符号的信噪比（SNR）足够高、因而接收符号不存在不确定性和/或采集能量测量值可靠的情况，例如，通过多次采样并取平均值来获得可靠测量。此时，给定的样本为 $\mathcal{S} = \{(\frac{i}{m-1}, \beta(\frac{i}{m-1}))\}_{i=0}^{m-1}$。观察到 $\mathcal{S}$ 后，我们可以发现，存在多个彼此不同但无法区分、且在采样点处取值相同的能量采集函数。对于未知的真实能量采集函数 β，我们将 $\Gamma(\beta, m) = \{\beta' \in \mathrm{BV}_K[0,1] : \beta'(i/(m-1)) = \beta(i/(m-1)) \ \forall i \in \{0, \dots, m-1\}\}$ 定义为这类无法区分的函数集合。由于我们希望对于$\Gamma(\beta, m)$中的任意能量采集函数，发送的能量都不低于 B，因此我们考虑图1(a)所示的信息和能量最坏情况损失：

$$\Delta_{\mathsf{E}}(R; \beta, \Gamma(\beta, m)) = B_\beta(R) - B_{\Gamma(\beta,m)}(R), \tag{5}$$
$$\Delta_{\mathsf{I}}(B; \beta, \Gamma(\beta, m)) = C_\beta(B) - C_{\Gamma(\beta,m)}(B). \tag{6}$$

此外，上述量取决于 β，而我们无法确定它们；因此，了解这些量通常对 SIET 设计没有帮助。因此，我们可能希望保证对任何真实能量采集函数都能采集到一定量的能量。为此，我们定义一种不依赖未知 β的最坏情况能量损失

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathsf{E}}(R) &= \sup_{\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]} \Delta_{\mathsf{E}}(R; \beta, \Gamma(\beta, m)) \\ &= \sup_{\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]} B_\beta(R) - B_{\Gamma(\beta,m)}(R).\end{aligned}$$

然而，我们不对信息损失取上确界，因为每个能量采集函数的可交付能量范围各不相同，这会导致信息损失任意大。我们将主要讨论基于小波重建的能量采集函数设计 SIET 系统时，$\Delta_{\mathsf{E}}, \Delta_{\mathsf{I}}$ 随样本数量变化的渐近界。

接下来，假设样本是在存在均值为零、方差为σ^2的独立同分布加性高斯噪声时采集的。换言之，给定的含噪样本为

$$\mathcal{S} = \{(x_i, Y_i)\}_{i=0}^{m-1} = \{(\tfrac{i}{m-1}, \beta(\tfrac{i}{m-1}) + Z_i)\}_{i=0}^{m-1},$$

其中 $Z_i \overset{\text{独立同分布}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。这是低信噪比传输和/或能量采集器不可靠时的模型。请注意，一旦观测到含噪样本，我们就无法像无噪声情形那样根据样本确定候选集 Γ。换言之，在此情形下，$\Gamma = \mathrm{BV}_K$。由于我们建议用小波重建能量采集函数 β_m^{wv}，并以此为基础设计 SIET 系统，因此定义能量和信息的期望损失如下。注意，β_m^{wv} 是随机的，因为样本具有随机性，因此期望是针对采样噪声求取的。

$$\overline{\Delta}_{\mathsf{E}}(R; \beta, \widehat{\beta}_m^{\mathsf{wv}}) = \mathbb{E}\left[\left|B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}_m^{\mathsf{wv}}}(R)\right|\right], \tag{7}$$
$$\overline{\Delta}_{\mathsf{I}}(B; \beta, \widehat{\beta}_m^{\mathsf{wv}}) = \mathbb{E}\left[\left|C_\beta(B) - C_{\widehat{\beta}_m^{\mathsf{wv}}}(B)\right|\right]. \tag{8}$$

此外，注意到 $\Delta_{\mathsf{E}}(R; \beta, \beta_m^{\mathsf{wv}})$ 和 $\Delta_{\mathsf{I}}(R; \beta, \beta_m^{\mathsf{wv}})$ 取决于未知的 β。因此，我们最终希望最小化最坏情况下的损失，

$$\overline{\Delta}_{\mathsf{E}}(R) = \sup_{\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]} \overline{\Delta}_{\mathsf{E}}(R; \beta, \widehat{\beta}_m^{\mathsf{wv}}).$$

然而，出于与无噪声样本相同的原因，我们不对信息损失取上确界，因为每种能量采集函数的可交付能量范围各不相同，若取上确界，信息损失就会变得任意大。

最后，为了使该问题具有实质性，我们将输入分布限制为（可能是分段）连续分布，并排除 p_X 含有点质量的情况。为说明原因，考虑一个在 $x_0 \in (0,1)$ 处存在不连续点的阶梯递增采集函数。观测到测量样本后，假设我们的重建也是一个阶梯函数，但其不连续点的位置略有不同，位于 $x_0' \neq x_0$。那么，在 x_0 与 x_0' 之间含有点质量的一些 p_X，可能会表现出任意大的能量和信息速率性能差异。讨论离散容量达成分布的条件超出了本文范围；据我们所知，这是一个开放问题，除关于加性高斯白噪声信道 [35]–[38]的结果外，信道具有离散容量达成分布的条件尚不明确。我们还假设可行输入分布有界，即对所有 x，$p_X(x) \leq c_{\mathsf{max}}$，因为某些无界的连续 p_X 可能表现得像含有点质量的分布。

D. 小波与多分辨率分析

小波变换因其出色的经验表现，以及对广泛函数类别具有强大的理论保证，而被广泛用于信号分析和从样本中进行信号重建。它将一个函数表示为一系列扩展的类波基函数之和，这些基函数由尺度函数（或父小波） $\phi(x)$构造而成$\{\psi_{j,k}\}_{j,\,k}$。此处仅作简要介绍；更多细节请参见 [39], [40]。

设 V_j 为尺度 j 上的空间，该空间可由 $\{2^{-j/2}\phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$的线性组合张成。若由此得到的 V_j满足以下条件，则称其为多分辨率结构：

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

其中 $\cap_j V_j = \{0\}$ 和 $\cup_j V_j$ 在 $L_2(\mathbb{R})$中稠密。较大的尺度意味着更精细的分辨率。此外，$V_{j+1} = V_j \oplus V_j^\perp$，其中$\oplus$为直和，$V_j^\perp$是$V_{j+1}$ 中与 V_j正交的函数所构成的子空间。接着，我们可以由 ϕ 定义一个母小波，使其尺度和平移的线性组合构成 W_0的一组基。令 ψ 为母小波，则可将尺度 j、位置k处的子小波定义为$\psi_{j,\,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^j x - k)$。子小波的一个显著性质是，除非$(j,\ k) = (j',\ k')$，否则$\psi_{j,\,k}$ 与$\psi_{j',\,k'}$ 正交。

最简单的小波或许是哈尔小波，其中$\phi(x) = \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}(x)$，且 $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1)$。另一种常见的小波是达布希小波，它在有限长度支撑上具有“p阶消失矩”这一性质，见 [39]–[40]。一类有趣的小波是样条小波 [41]，其基由样条生成。对于某些函数类（例如索博列夫空间），小波的重建性能可与非小波方法（如样条 [42]）相当；而对于更广泛的函数类，小波通常比非小波方法表现更好，

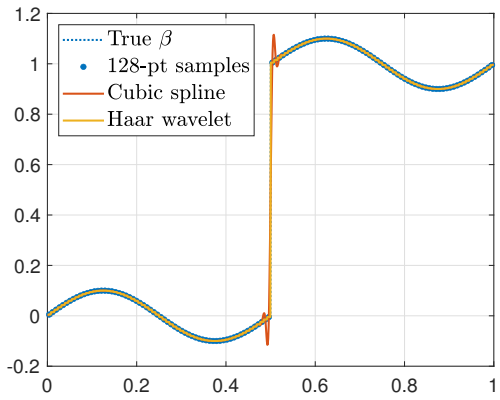


图 2. 不连续函数的小波重构与样条重构示例。真实函数（点线）为 $f(x) = 0.1\sin(4\pi x) + \mathbf{1}_{\{x\geq 0.5\}}$，采集了 128 个样本。三次样条（红色）在不连续点附近出现下冲和过冲，而哈尔小波（黄色）则能紧密跟踪该不连续点。

函数。图 2 展示了其对不连续函数的重建精度，并与样条方法进行了比较。即使样本数量充足（128 个点），样条重建的函数在不连续点附近仍存在根本性的精度不足。

III. 无噪声样本

本节讨论在样本采集过程中不存在测量噪声时，Δ_{E}, Δ_{I} 随样本数量 m 变化的渐近特征。请注意，定义 (5) 和 (6) 仅刻画性能损失；仅给出这些量的界限，并不能直接说明如何达到这些界限。为此，我们建议对能量采集函数进行小波重构，并设计 SIET 系统时将小波重建的采集函数视为真实函数。正如我们将看到的，随着样本数量增加，性能损失将渐近趋于可忽略。

在继续之前，下面的命题刻画了小波所产生的函数重构损失。

命题*1*：设 $f \in \mathrm{BV}_K[0,1]$ 是待重构的函数，且已知 $m = 2^J$ 观测值 $\{(i/(m-1)\ f(i/(m-1)))\}_{i=0}^{2^J-1}$。那么，存在一种基于尺度 J、$f_J^{\mathsf{wv}} \in V_J$ 处观测值的小波重构，使得

$$\|f - \widehat{f}_J^{\mathsf{wv}}\|_{L_2}^2 \leq c\mathsf{TV}^2(f)m^{-1} = \mathcal{O}(m^{-1}).$$

其中 c 为某个正常数。

证明：证明见附录A。此命题将在后续小节中作为一个构建模块使用。

A. 能量损失

以下定理是关于能量损失的主要结果。第一条表明，对于所有信息率，能量损失 $\Delta_{\mathsf{E}}(R)$ 在渐近意义下可忽略不计。然而，单凭这一结论并不能为我们提供如何设计出达到此性能的 SIET 系统的构造性方案，因为 $\Delta_{\mathsf{E}}(R)$ 需要对 $\Gamma(\beta,\ m)$ 中的所有函数进行优化。第二条说明了如何设计码本——天真地相信 β_m^{wv} 就是真相，并据此设计码本，即可达到渐近行为。

定理 *1*：有

$$\Delta_{\mathsf{E}}(R) = \mathcal{O}(m^{-1/2}) \quad \forall R \geq 0.$$

此外，若将小波-重构的能量采集函数 β_m^{wv} 视为真实的能量采集函数来设计最优码本，则会产生 $\mathcal{O}(m^{-1/2})$ 能量损失。

证明：固定一个任意的（可能是分段的）连续输入分布 p_X，该分布在 $[0,1]$, 上有界，即对于所有 $x \in \mathcal{X}$，均有 $p_X(x) \leq c_{\mathsf{max}}$。此外，考虑一个由 p_X 生成的随机码本。我们任取一个 $\beta_m(X) \in \Gamma(\beta,\ m) \subset \mathrm{BV}$，它不一定是经过小波重构的。然后，

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbb{E}_{p_X}[\beta(X)] - \mathbb{E}_{p_X}[\widehat{\beta}_m(X)]\right)^2 = \left(\mathbb{E}_{p_X}[\beta(X) - \widehat{\beta}_m(X)]\right)^2 \\
&\overset{(a)}{\leq} \mathbb{E}_{p_X}\left[(\beta(X) - \widehat{\beta}_m(X))^2\right] = \int_{\mathcal{X}} p_X(x)(\beta(x) - \widehat{\beta}_m(x))^2 dx \\
&\leq c_{\mathsf{max}} \int_{\mathcal{X}} (\beta(x) - \widehat{\beta}_m(x))^2 dx = c_{\mathsf{max}}\|\beta - \widehat{\beta}_m\|_{L_2}^2,
\end{aligned}$$

其中，(a) 根据詹森不等式得出。对两边取平方根，并利用小波重构的能量采集函数 β^{wv}进行望远镜求和，

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_{p_X}[\beta(X)] - \mathbb{E}_{p_X}[\widehat{\beta}_m(X)]\right| \leq \sqrt{c_{\mathsf{max}}}\|\beta - \widehat{\beta}_m\|_{L_2} \\
&\leq \sqrt{c_{\mathsf{max}}}\|\beta - \widehat{\beta}_m^{\mathsf{wv}}\|_{L_2} + \sqrt{c_{\mathsf{max}}}\|\widehat{\beta}_m^{\mathsf{wv}} - \widehat{\beta}_m\|_{L_2} \\
&= \mathcal{O}(m^{-1/2}) + \mathcal{O}(m^{-1/2}) = \mathcal{O}(m^{-1/2}),
\end{aligned} \tag{9}$$

其中，命题1被使用了两次，因为 $\beta,\ \beta_m \in \mathrm{BV}_K[0,1]$。注意，上述结果对任意 p_X, $\beta_m \in \Gamma(\beta,\ m)$。设 p_X^*, q_X^* 分别为 B_β, $B_{\Gamma(\beta,m)}$ 在速率 R 下的容量达成分布。也就是说，$B_\beta = \mathbb{E}_{p_X^*}[\beta\ X\ ]$ ( ) 且 $B_{\Gamma(\beta,m)} = \min_{\widehat{\beta}_m \in \Gamma(\beta,\ m)} \mathbb{E}_{q_X^*}[\beta(X)]$。于是，

$$\begin{aligned}
B_\beta(R) &\overset{(b)}{\geq} B_{\Gamma(\beta,m)}(R) = \min_{\widehat{\beta}_m \in \Gamma(\beta,m)} \mathbb{E}_{q_X^*}[\widehat{\beta}_m(X)] \\
&\overset{(c)}{\geq} \min_{\widehat{\beta}_m \in \Gamma(\beta,m)} \mathbb{E}_{p_X^*}[\widehat{\beta}_m(X)] \\
&\overset{(d)}{\geq} \mathbb{E}_{p_X^*}[\beta(X)] - cm^{-1/2} \\
&= B_\beta(R) - cm^{-1/2},
\end{aligned}$$

其中，(b) 根据定义 (3) 和 (4) 得出，(c) 是因为 p_X^* 对于 $B_{\Gamma(\beta,m)}(R)$ 并非最优，(d) 则由 (9) 得出。该结果意味着，对于所有 $\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]$，$\Delta_{\mathsf{E}}(R;\ \beta,\ \Gamma(\beta,\ m)) = \mathcal{O}(m^{-1/2})$，因为 β 是任意的。对 $\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]$ 取上确界，即得第一个结论。

为证明第二个论断，固定 $R \geq 0$ 并考虑一个能量采集函数 β 及其小波重构 β_m^{wv}。由于 $\beta_m^{\mathsf{wv}} \in \Gamma(\beta, m)$，我们有

$$B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}_m^{\mathsf{wv}}}(R) \leq B_\beta(R) - B_{\Gamma(\beta,m)}(R) \leq cm^{-1/2}. \tag{10}$$

注意，如果 β_m^{wv}是真实的，那么 $\beta \in \Gamma(\beta_m^{\mathsf{wv}},\ m)$，因为 β，β_m^{wv} 两者在采样点上都一致。这意味着

$$B_{\widehat{\beta}_m^{\mathsf{wv}}}(R) - B_\beta(R) \leq cm^{-1/2}. \tag{11}$$

假设 $B_\beta(R)$,$B_{\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m}(R)$ 的容量达成分布分别为 p^*_X, q^*_X，并据此生成最优码本。那么，针对 $\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m$ 的 q^*_X 生成码本将在 β 下传递能量 $\mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]$，并且 $B_\beta(R) = \mathbb{E}_{p^*_X}[\beta(X)] \geq \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]$。因此，

$$\begin{aligned}
&|B_\beta(R) - \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]| \\
&\overset{(e)}{\leq} |B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m}(R)| + |B_{\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m}(R) - \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]| \\
&\overset{(f)}{\leq} cm^{-1/2} + |B_{\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m}(R) - \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]| \\
&= cm^{-1/2} + \left|\mathbb{E}_{q^*_X}[\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m(X)] - \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]\right| \\
&\overset{(g)}{\leq} cm^{-1/2} + cm^{-1/2} = \mathcal{O}(m^{-1/2}),
\end{aligned}$$

其中，(e)依据三角不等式，(f)依据(10)和(11)，(g)依据(9)。因此，我们可以得出结论：通过基于 β^{wv}_m设计码本，我们能够以至多 $\mathcal{O}(m^{-1/2})$的损失传输能量，相较于最佳工作点而言。■

上述定理讨论了能量损失 $\mathcal{O}(m^{-1/2})$的上界。因此，人们可能会想知道该上界是否渐近紧确。在函数逼近理论中，如果获得的小波系数不再经过进一步处理，这种方法称为线性近似，因为获取系数本质上就是进行线性投影。有趣的是，已知命题1中的上界是所有线性近似方法中最优的 [40], [43], [44]。因此，我们的上界$\mathcal{O}(m^{-1/2})$也是所有线性近似方法中最优的。为了优于 $\mathcal{O}(m^{-1/2})$，应采用非线性逼近，即对获得的小波系数进行进一步处理。这是因为，如果目标函数存在不连续点，则与该不连续点附近位置相关的小波系数会较大，因此更为重要。然而，由于不连续点的位置未知，必须在 $m' > m$ 个等距点处采集样本，并且只选择（即处理）其中最大的 m 个（也就是最重要的）样本；或者等价地，应在不连续点附近自适应地布置 m 个采样点。这种属于非线性逼近的方法已知可在BV $_K[0,1]$ 空间中达到 $\|f - \widehat{f}^{\mathsf{wv}}_m\|^2_{L_2} = \Theta(m^{-2})$, [40], [43], [44], 也就是说，没有其他方法能够改善这一速率 m^{-2}。然而，这种非线性的 m项逼近不适用于我们的应用，因为必须在测量之前预先确定采样位置。因此，这不在我们的研究范围之内。

话虽如此，在不进一步操作系数的方法中，$\mathcal{O}(m^{-1/2})$已是最优的；将其与索伯列夫类的衰减率进行比较也很有意义：[29] 中的定理4和定理7指出，可微性参数为 $\lambda \geq 1$ 的索伯列夫类函数，其能量损失为 $\mathcal{O}(m^{-\lambda})$，且对某些函数而言这是紧确的。由于 BV$_K[0,1]$ 包含的函数多于索伯列夫类，指数上的差异$\lambda - \frac{1}{2}$ 表明，诸如不连续函数等额外函数会使指数受到 $\lambda - \frac{1}{2}$ 的惩罚。若将能量采集函数限制在参数为 λ的索伯列夫类中，小波重构仍能恢复 $\mathcal{O}(m^{-\lambda})$。也就是说，基于小波的传输同样是最优的。证明可立即由 [40, 第 9] 章得出，并重复上述论证，因此从略。

B. 信息损失

接下来，我们将注意力转向信息率损失。以下定理和推论将证明，信息损失在渐近意义下也可以忽略不计。不过，两者的区别在于：能量损失在所有$R \geq 0$处都渐近趋于零，而信息损失仅在可交付能量范围的内部趋于零。设计能量传输达到最大值的 SIET 系统时应谨慎，因为信息损失可能任意大。

定理 *2*： 对于任意 $\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]$ 和 $B \in [0, B_{\mathsf{max}})$,

$$\Delta_{\mathsf{I}}(B; \beta, \Gamma(\beta, m)) \to 0 \text{ as } m \to \infty.$$

然而，假设存在这样一个信道：其容量达成分布在 $\mathcal{X}$ 上处处非零，即对于所有 x, $p_X(x) > c$，存在某个 $c > 0$, $\Delta_{\mathsf{I}}(B_{\mathsf{max}}; \beta, \Gamma(\beta, m)) = C_{\mathsf{max}}$，其中某个 $\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]$, 这里 C_{max} 是无约束容量，即 $C_{\mathsf{max}} = \max_{p_X} I(X;Y)$。

证明：首先，在 $B = 0$ 处，容量-能量函数确实与无约束容量相同。换言之，任意输入概率都是可行的，因此 $C_\beta(0) = C_{\widehat{\beta}_m}(0) = C_{\mathsf{max}}$ $\Delta_{\mathsf{I}}(0, \beta, \Gamma, \beta, m) = 0$。于是，$(;, (,))$。

考虑 $B \in (0, B_{\mathsf{max}})$。回想一下，$C_\beta(B)$ 是凹函数，这意味着 $C_\beta(B)$ 在能量域的内部连续。然后，定理 1 表明，对于任意 B, 存在 B' $C_{\Gamma(\beta,m)}(B) = C_\beta(B')$ $|B - B'| =$，使得 $(\mathcal{O}(m^{-1/2}))$ 且 $()$。也就是说，

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathsf{I}}(B; \beta, \Gamma(\beta, m)) &= C_\beta(B) - C_{\Gamma(\beta,m)}(B) \\
&= C_\beta(B) - C_\beta(B') \\
&= C_\beta(B) - C_\beta(B + \mathcal{O}(m^{-1/2})).
\end{aligned}$$

由于 $C_\beta(R)$ 连续，随着样本数量增加，$\Delta_{\mathsf{I}}(B; \beta, \Gamma(\beta, m)) \to 0$。这证明了第一个结论。

为证明第二个结论，在假设所述信道存在的情况下，考虑一个常数能量采集函数，例如 $\beta(x) = M$。显然，如果 $B \leq M$，则任何 p_X 都是可行的；如果 $B > M$，则没有任何一个是可行的。因此，

$$C_\beta(B) = \begin{cases} C_{\mathsf{max}} & \text{if } B \leq M = B_{\mathsf{max}}, \\ 0 & \text{if } B > M = B_{\mathsf{max}}. \end{cases}$$

注意，$\Gamma(\beta, m)$ 包含一些 β'，使得 $\beta'(x) = \beta(x) = M$ 在采样点处成立，但在其他位置，$\beta'(x) < \beta(x)$；参见定理 7] 的证明中关于非负隆起函数的思路 [29]。因此，对于满足 $p_X(x) > c$ 的 p_X，$\mathbb{E}[\beta'(X)] < M$，这又意味着 $C_{\Gamma(\beta,m)}(M) = 0$。换言之，对于 $\Gamma(\beta, m)$ 中的所有能量采集函数，都不可能传输能量 $M = B_{\mathsf{max}}$。这是第二个结论的一个例子，其中 $\Delta_{\mathsf{I}}(B_{\mathsf{max}}; \beta, \Gamma(\beta, m)) = C_{\mathsf{max}}$。■

上述定理仅讨论了收敛性，并未讨论使用 m 时的收敛速度。对信息损失的收敛速度进行解析刻画通常颇具挑战，因为它高度依赖于信道及其容量达成分布。下面的推论通过假设 $C_\beta(B)$ 具有 α-H¨older 连续性，避开了这一难题；这是一种利普希茨连续性的推广形式。

推论 *1*：假设对于一个采集函数 $\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]$ 和一个信道，其能量容量函数具有 α- Hölder 连续性。也就是说，对于任意 $B_1, B_2 \in (0, B_{\max})$，

$$|C_\beta(B_1) - C_\beta(B_2)| \le c|B_1 - B_2|^\alpha$$

其中 $c > 0$ 为某个常数。于是，对于 $B \in [0, B_{\max}]$，$\Delta_{\mathrm{I}}(B; \beta, \Gamma(\beta, m)) = \mathcal{O}(m^{-\alpha/2})$。

证明：首先，考虑 $B = 0$ 的情形。由于这退化为无约束容量，任意 p_X 都是可行的。因此，对于任意 β，$C_\beta(0) = C_{\Gamma(\beta,m)}(0)$，且 $\Delta_{\mathrm{I}}(B; \beta, \Gamma(\beta, m)) = 0$。

对于 $B \in (0, B_{\max})$，

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{I}}(B; \beta, \Gamma(\beta,m)) &= C_\beta(B) - C_{\Gamma(\beta,m)}(B)\\ &\overset{(a)}{=} C_\beta(B) - C_\beta(B + \mathcal{O}(m^{-1/2}))\\ &\overset{(b)}{\le} \text{const} \cdot m^{-\alpha/2} = \mathcal{O}(m^{-\alpha/2}),\end{aligned}$$

其中，(a) 由定理 1 得出，(b) 则是因为 C_β 是 α-Hölder。该论断得证。 ∎

注意，当 $\alpha = 1$ 时，即当 $C_\beta(B)$ 是 Lipschitz 连续函数时，信息损失可简化为 $\Delta_{\mathrm{I}}(B; \beta, \Gamma(\beta, m)) = \mathcal{O}\left(m^{-1/2}\right)$，这与能量损失渐近行为相同。

IV. 含噪样本

本节讨论测量样本含噪时能量和信息的预期损失。由于只能获得含噪样本，我们建议使用小波重建能量采集函数，并对系数进行软阈值去噪；随后，假设最终重建的能量采集函数就是真实函数，据此设计 SIET 系统。结果表明，由此造成的能量和信息损失渐近可忽略，且其界仅相差一个对数因子。

下面的命题刻画了样本含噪时使用小波进行函数重建所造成的损失。与利用无噪声样本进行线性近似的命题1不同，下一个命题采用非线性近似，即处理系数。首先，使用 m-系数小波近似 $f \in \mathrm{BV}_K[0,1]$，此时得到的系数也含有噪声；然后通过软阈值处理 [45] 调整系数。在一些文献中，后一种处理称为 小波收缩，因为软阈值处理会“收缩”系数的幅度。众所周知，这种方法具有普适性，且近乎极小极大最优：对于索伯列夫、别索夫、Hölder 和有界变差函数类等大多数函数类，其重建性能在相差一个对数前因子的范围内达到极小极大最优[46]。关于适用于某些光滑函数类的最优非小波重构方法，参见 [47, 第 1, 2]章。

命题 *2*：设 $f \in \mathrm{BV}_K[0,1]$ 是待恢复的函数，且给定了 $m = 2^J$ $\mathcal{S} = \{x_i\ Y_i\}_{i=0}^{2^J-1} = \{i/2^J\ f\ i/2^J + Z_i\}_{i=0}^{2^J-1}$ 含噪观测 (,) (,( ))。假设 Z_i 相互独立且同分布（i.i.d.），服从均值为零、方差为 σ^2 的高斯分布。那么，通过对系数进行软阈值估计得到的小波 ^ 重建 f^{wv} 可达到期望误差

$$\mathbb{E}_Z\left[\|f - \widehat{f}^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}^2\right] = \mathcal{O}(m^{-2/3}\log m).$$

证明：证明见附录 B。与无噪声样本的情况一样，上述命题将在接下来的小节中作为构建模块使用。 ∎

A. 能量损失

下一个定理讨论期望能量损失，指出如果采用上述小波重构，部分信息导致的能量损失在渐近意义下会消失。

定理*3*：$\overline{\Delta}_{\mathsf{E}}(R) = \mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m})\ \forall R \ge 0$。此外，若将小波重建的能量采集函数 β_m^{wv} 视为真实的能量采集函数来设计最优码本，则可达到渐近行为。

证明：注意，根据詹森不等式，

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_Z\left[\|\beta - \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}\right]\right)^2 &\le \mathbb{E}_Z\left[\|\beta - \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}^2\right]\\ &= \mathcal{O}(m^{-2/3}\log m).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}_Z\left[\|\beta - \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}\right] = \mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m}). \tag{12}$$

令 p_X^*, q_X^* 分别为$B_\beta(R)$ $B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R)$的容量达成分布。回顾一下，我们关注的分布是（可能分段的）连续有界分布，定义在$[0,1]$,上；即对于所有 $x \in \mathcal{X}$，均有 $p_X^*(x)$ $q_X^*(x)$ $\le c_{\max}$。此外，回顾一下，分布会生成随机码本。令 E 为满足 $B_\beta(R) \le B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R)$的噪声事件集合。那么，

$$\begin{aligned}&\overline{\Delta}_{\mathsf{E}}(R; \beta, \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}) = \mathbb{E}_Z\left[|B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R)|\right]\\ &= \mathbb{E}_Z\left[(B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R) - B_\beta(R))\mathbf{1}_{\{E\}} + (B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R))\mathbf{1}_{\{E^c\}}\right].\end{aligned}$$

考虑与事件 E相对应的第一项。

$$\begin{aligned}&B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R) - B_\beta(R)\\ &= \mathbb{E}_{q_X^*}[\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}(X)] - \mathbb{E}_{p_X^*}[\beta(X)]\\ &\overset{(a)}{\le} \mathbb{E}_{q_X^*}[\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}(X)] - \mathbb{E}_{q_X^*}[\beta(X)]\\ &\le \int_{\mathcal{X}} q_X^*(x)|\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}(x) - \beta(x)|dx\\ &\overset{(b)}{\le} c_{\max}\int_{\mathcal{X}} |\beta(x) - \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}(x)|dx\\ &= c_{\max}\|\beta - \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}\|_{L_1},\end{aligned}$$

其中，(a)成立是因为 q_X^* 对于 β而言是次优的，将p_X^* 替换为 q_X^* 会增加损失；(b)成立是因为 q_X^* 有界。利用（12）以及有限测度空间上的 L_p-范数单调性，我们得到第一项的如下界。

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_Z\left[(B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R) - B_\beta(R))\mathbf{1}_{\{E\}}\right]\\ &\le c_{\max}\mathbb{E}_Z\left[\|\beta - \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}\|_{L_1}\mathbf{1}_{\{E\}}\right]\\ &\le c_{\max}\mathbb{E}_Z\left[\|\beta - \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}\mathbf{1}_{\{E\}}\right]\\ &\le c_{\max}\mathbb{E}_Z\left[\|\beta - \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}\right] = \mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m}).\end{aligned}$$

类似地，对于事件 E^c，我们可以得到相同的界 $\mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m})$，因此，$\overline{\Delta}_{\mathsf{E}}(R; \beta, \widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}) = \mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m})$。

最后，请注意，只要 $\beta \in \mathsf{BV}_K[0,1]$，渐近界就不依赖于$\beta$。因此，对$\beta \in \mathsf{BV}_K[0,1]$ 取上确界不会改变该界，即，

$$\overline{\Delta}_{\mathsf{E}}(R) = \sup_{\beta \in \mathsf{BV}_K[0,1]} \overline{\Delta}_{\mathsf{E}}(R;\beta,\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m) = \mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m}).$$

为证明第二个结论，我们可以重复上述论证，并按如下方式证明定理1。

$$\begin{aligned}
&B_\beta(R) - \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)] = \left|B_\beta(R) - \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]\right| \\
&\le \left|B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m}(R)\right| + \left|B_{\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m}(R) - \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]\right| \\
&= \left|B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m}(R)\right| \mathbf{1}_{\{E\}} + \left|B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m}(R)\right| \mathbf{1}_{\{E^c\}} \\
&\qquad + \left|B_{\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m}(R) - \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]\right| \\
&\le c_{\mathsf{max}}\|\beta - \widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m\|_{L_1}(\mathbf{1}_{\{E\}} + \mathbf{1}_{\{E^c\}}) \\
&\qquad + \left|\int q^*_X(x)(\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m(x) - \beta(x))dx\right| \\
&\le c_{\mathsf{max}}\|\beta - \widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m\|_{L_1} + c_{\mathsf{max}}\int |\widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m(x) - \beta(x)|dx \\
&= 2c_{\mathsf{max}}\|\beta - \widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m\|_{L_1}.
\end{aligned}$$

对噪声取期望，利用 L_p-范数的单调性以及式（12），可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Z\left[B_\beta(R) - \mathbb{E}_{q^*_X}[\beta(X)]\right] \le \mathbb{E}_Z[2c_{\mathsf{max}}\|\beta - \widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m\|_{L_1}] \\
&\le 2c_{\mathsf{max}}\mathbb{E}_Z[\|\beta - \widehat{\beta}^{\mathsf{wv}}_m\|_{L_2}] = \mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m}).
\end{aligned}$$

由此证明了第二个结论。 ∎

由于小波重构是多种重构方法中的一种具体情形，自然会产生这样的疑问：速率 $\mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m})$ 是否渐近最优。我们的答案是肯定的：基于 β^{wv}_m 的 SIET设计在能量传输方面渐近最优，误差至多相差一个对数因子，即在 $\widetilde{\mathcal{O}}(\cdot)$ 的意义下成立。[3] 下一个定理确实证明，在假设情形下，$\Delta_{\mathsf{E}}(R) = \Omega(m^{-1/3})$。因此，$\Delta_{\mathsf{E}}(R) = \widetilde{\Theta}(m^{-1/3})$。

定理4：对于某个信道和速率 R，$\Delta_{\mathsf{E}}(R) = \overline{\Omega}(m^{-1/3})$。

证明：假设存在一个假想信道，其唯一的无约束容量达成分布 p^*_X 是一个方形脉冲：$p^*_X(x) = c > 0$ 在每个区间 $I_i := [i/r, (i+0.5)/r]$上对 $i \in \{0,1,\ldots,r-1\}$成立，而在其他情况下 $p^*_X(x) = 0$。分箱数 r 将在后文指定。

我们不考虑具有不可数多个函数的 $\mathsf{BV}_K[0,1]$，而是假设能量采集函数属于有限子集$F \subset \mathsf{BV}_K[0,1]$。定义如下：

$$F := \left\{\beta_{\mathbf{b}}(x) : \beta_{\mathbf{b}}(x) = A\left(1 + \sum_{i=0}^{r-1} b_i \psi(rx - i)\right)\right\},$$

其中，b_i是 ± 1，ψ 是哈尔小波。因此，每个二进制序列都映射到一个不同的分段常数能量采集函数，而 F 中总共有 2^r 个函数。由于哈尔小波在长度为 $1/r$的每个区间内有两个不连续点，$\beta_{\mathbf{b}}$ 的全变差至多为 $4Ar$。令 $A = \frac{K}{4r}$，使得 $F \subset$ 属于 $\mathsf{BV}_K[0,1]$。现在，我们将从含噪样本中准确检测 $\beta_{\mathbf{b}}$，或者等价地，正确检测所有 b_i，并据此设计 SIET。因此，原来的函数估计问题现在转化为一个关于有限假设的检测问题的下界，这更容易处理。

注意，如果 $b_i = 1$，则在区间的前半部分，样本服从$\mathcal{N}(2A,\sigma^2)$；在后半部分服从 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$。如果 $b_i = -1$，情况则相反。由于我们有 m个等距样本，且每个哈尔小波的支撑集都是一个长度为 $1/r$的不相交区间，因此每个区间内有 m/r 个样本。因此，检测每个 b_i 的问题确实是两个高斯分布之间的二元假设检验问题:

$$H_0 : Y \sim \mathcal{N}(2A, \frac{r\sigma^2}{m}) \quad \text{and} \quad H_1 : Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{r\sigma^2}{m}).$$

由于似然比检验是最优的，它产生最小的错误概率 $Q(\frac{A\sqrt{m}}{\sqrt{r}\sigma})$，其中 $Q(\cdot)$ 是 Q-函数。使用 $A = \frac{K}{4r}$ 并令 $r =$ 为常数，$\cdot\, m^{1/3}$ 个分箱，则每个比特的错误概率为 $Q(\text{const}) =$ 常数，即不依赖于 m，r。最后，检测中一个比特的错误会导致

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{X}} |\beta_{\mathbf{b}}(x) - \widehat{\beta}_m(x)|dx \\
&= \|\beta_{\mathbf{b}} - \widehat{\beta}_m\|_{L_1} = \frac{2A}{r} = \text{const} \cdot m^{-1/3}
\end{aligned} \tag{13}$$

因为误差区间的前半部分对距离的贡献为 $\frac{A}{r}$，而另一半的贡献为 $\frac{A}{r}$。

因此，任意重构方法的期望能量损失可界定如下：对于 $\beta_{\mathbf{b}} \in F$ 且在$R = C_{\mathsf{max}}$

$$\begin{aligned}
&\overline{\Delta}_{\mathsf{E}}(R;\beta_{\mathbf{b}},\widehat{\beta}_m) = \mathbb{E}\left[\left|B_{\beta_{\mathbf{b}}}(R) - B_{\widehat{\beta}_m}(R)\right|\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\int p^*_X(x)\beta_{\mathbf{b}}(x)dx - \int p^*_X(x)\widehat{\beta}_m(x)dx\right|\right] \\
&\overset{(a)}{=} c\mathbb{E}\left[\left|\int \beta_{\mathbf{b}}(x)\mathbf{1}_{\{\exists i: x \in I_i\}}dx - \int \widehat{\beta}_m(x)\mathbf{1}_{\{\exists i: x \in I_i\}}dx\right|\right] \\
&= c\mathbb{E}\left[\left|\int (\beta_{\mathbf{b}}(x) - \widehat{\beta}_m(x))\mathbf{1}_{\{\exists i: x \in I_i\}}dx\right|\right] \\
&\overset{(b)}{\ge} \text{const} \cdot \frac{A}{r} = \text{const} \cdot m^{-1/3},
\end{aligned}$$

其中，(a) 成立是因为 p^*_X 是一个方形脉冲。此外，(b) 成立是因为：1）单比特错误事件给出了期望距离的下界；2）单比特错误的概率是一个常数；3） p^*_X 仅滤除区间的前半部分，这部分贡献了 $\frac{A}{r}$。证明完毕。 ∎

B. 信息损失

回顾样本无噪声时的信息损失。在上一节中，信息损失仅在能量域内部渐近趋于零；此外，当 C_β 曲线利普希茨连续时，其收敛速率与能量损失的收敛速率相同。如下文定理 5 所示，对于含噪样本，第一个结论仍然成立。然而，由于尾概率分析较为困难，推论 2 中关于收敛速率的结论与无噪声情形略有不同。

[3] $\widetilde{\mathcal{O}}(\cdot)$ $\widetilde{\Theta}(\cdot)$ 忽略一个对数因子，例如，对任意，$\widetilde{\mathcal{O}}(m^{-1/3}) = \mathcal{O}(m^{-1/3}\log^k m)$ $k \in \mathbb{N}$。

定理 5：对于任意 $\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]$ 和 $B \in [0, B_{\max})$，

$$\overline{\Delta}_{\mathrm{I}}(B;\beta,\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}) \to 0 \text{ as } m \to \infty.$$

然而，一般而言，$\Delta_{\mathrm{I}}(B_{\max};\beta,\beta_m^{\mathrm{wv}})$不会随 m 趋于零。

证明：首先，在 $B=0$处，容量-能量函数与无约束容量相同。换言之，$C_\beta(0) = C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(0) = C_{\max}$。因此，$\Delta_{\mathrm{I}}(0;\beta,\beta_m^{\mathrm{wv}}) = 0$。

接下来，考虑 $B \in (0, B_{\max})$。利用定理3的证明以及马尔可夫不等式，对于任意 $\epsilon > 0$，

$$\mathbb{P}\left[|B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R)| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[|B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R)|\right]}{\epsilon} = \frac{\mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m})}{\epsilon} =: \delta_m \to 0 \quad \text{as} \quad m \to \infty. \tag{14}$$

换言之，以至少 $1-\delta_m$的概率，在 β_m^{wv}下可交付的最大能量与在 β下的能量任意接近。或者等价地，存在某个 B'，使得$C_\beta(B) = C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B') = R$ 以高概率满足 $|B - B'| < \epsilon$。因此，

$$C_\beta(B) - C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B) = C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B') - C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B),$$

其中，以至少 $1-\delta_m$ 的概率 $B' \in (B-\epsilon, B+\epsilon)$。由于 $C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B)$ 是凹函数，因此它在能量域的内部连续。这进而意味着，当 $C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B') \to C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B)$ 时，$\epsilon \to 0$ $m \to \infty$ ()。另一方面，$|B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R)| \geq \epsilon$的概率趋于零。此事件对 $\Delta_{\mathrm{I}}(B;\beta,\beta_m^{\mathrm{wv}})$ 的影响至多为 $\delta_m C_{\max}$，因此渐近地也可忽略。这证明了第一个结论。

为证明第二个结论，例如，考虑一个常数能量采集函数 $\beta(x) = M =: B_{\max}$。显然，对于任意 p_X，它都能提供能量 $B_{\max}$，因此 $C_\beta(B_{\max}) = C_{\max}$。然而，由于我们的样本含有噪声，恢复出的能量采集函数所能提供的最大能量小于 $B_{\max}$ 的概率并不趋于零。在这种情况下，$C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B_{\max}) = 0$，因此，$C_\beta(B_{\max}) - C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B_{\max})$ 以非消失概率成立。这意味着 $\Delta_{\mathrm{I}}(B_{\max};\beta,\beta_m^{\mathrm{wv}})$ 不趋于零。■

对于无噪声样本，推论 1 表明，当 $C_\beta(B)$ 利普希茨连续时，信息损失的衰减率确实与能量损失相同。因此，人们可能会认为，在有噪声的情形下，期望能量损失也满足同样的结论；然而，下面的推论给出了不同的衰减率界。

推论 2：假设对于能量采集函数 $\beta \in \mathrm{BV}_K[0,1]$，能量容量函数是 α- H¨older 连续的。也就是说，对于 $B_1, B_2 \in (0, B_{\max})$，

$$|C_\beta(B_1) - C_\beta(B_2)| \leq c|B_1 - B_2|^\alpha.$$

那么，$\Delta_{\mathrm{I}}(B;\beta,\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}) = \mathcal{O}\left(m^{-\frac{\alpha+1}{3}}(\log m)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ 对于 $B \in [0, B_{\max})$.

证明：首先，考虑 $B=0$ 的情形。由于它归结为无约束容量，因此任意 p_X 都是可行的。因此，对于任意 β，β_m^{wv}，都有 $C_\beta(0) = C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(0)$，这意味着 $\Delta_{\mathrm{I}}(B;\beta,\beta_m^{\mathrm{wv}}) = 0$。

对于 $B \in (0, B_{\max})$，令 E 为事件 $\{|B_\beta(R) - B_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(R)| \geq \epsilon\}$ 的集合。由定理 5 的证明可知，$\mathbb{P}[E] \leq \delta_m = \mathcal{O}(m^{-1/3}\sqrt{\log m})$。于是，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[|C_\beta(B) - C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B)|\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|C_\beta(B) - C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B)| \cdot \mathbf{1}_{\{E\}} + |C_\beta(B) - C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B)| \cdot \mathbf{1}_{\{E^c\}}\right] \\
&= C_{\max}\mathbb{P}[E] + \mathbb{E}\left[|C_\beta(B) - C_\beta(B')| \cdot \mathbf{1}_{\{E^c\}}\right],
\end{aligned}$$

对于某个 $B' \in (B-\epsilon, B+\epsilon)$。由于 C_β 是 α-H¨older 连续的，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|C_\beta(B) - C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B)|] \\
&= C_{\max}\mathbb{P}[E] + \mathbb{E}\left[|C_\beta(B) - C_\beta(B')| \cdot \mathbf{1}_{\{E^c\}}\right] \\
&= C_{\max}\mathbb{P}[E] + c\epsilon^\alpha\mathbb{P}[E^c] \leq C_{\max}\mathbb{P}[E] + c\epsilon^\alpha \\
&\leq \text{const} \cdot \frac{m^{-1/3}(\log m)^{1/2}}{\epsilon} + \text{const} \cdot \epsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

通过匹配阶数来优化上界，可得：

$$\begin{aligned}
&\epsilon = m^{-\frac{1}{3(\alpha+1)}}(\log m)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}, \\
&\mathbb{E}\left[|C_\beta(B) - C_{\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}}(B)|\right] = \mathcal{O}\left(m^{-\frac{\alpha}{3(\alpha+1)}}(\log m)^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}\right).
\end{aligned}$$

■

注意，当 $\alpha = 1$，即 $C_\beta(B)$ 是利普希茨连续时，信息损失可化简为

$$\overline{\Delta}_{\mathrm{I}}(B;\beta,\widehat{\beta}_m^{\mathrm{wv}}) = \mathcal{O}\left(m^{-1/6}(\log m)^{1/4}\right) = \widetilde{\mathcal{O}}(m^{-1/6}).$$

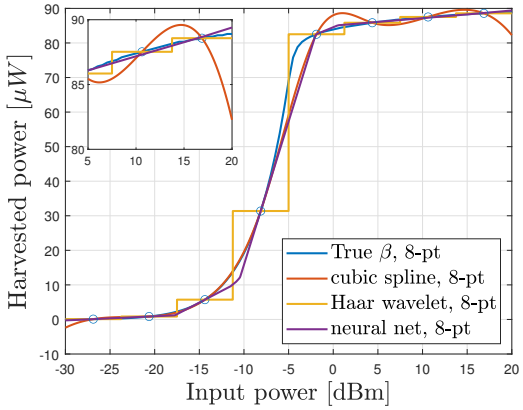
由于这是一个可能较松的上界，因此无法直接判断其衰减速度是否与能量损失相同。证明说明了其中的难点：回顾一下，由于含噪样本，β_m^{wv} 是随机的，因此需要对式 (14) 给出更精细的概率界，而这通常极具挑战性。

V. 数值评估

本节展示了基于小波的传输在真实能量采集电路测量数据上的性能，并将其与基于样条的 [29] 和基于深度学习的方法 [27]进行比较。正如我们将看到的，随着样本量增加，C_{β_m} 曲线会越来越接近真实曲线。还值得注意的是，只要能产生相同的样本，未知的能量采集函数可以呈现任意形状；如果没有预言机，我们就无法根据样本准确估计该函数。换言之，总存在一个能量采集函数，它与我们的估计大相径庭，却仍与这些样本相符。这正是我们提出极小极大理论性能界的关键动机，本节也旨在通过数值结果为其提供支持。

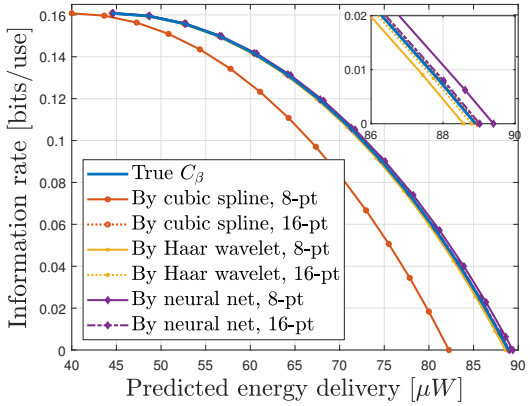
对于能量采集器，我们采用了电路设计 [27,图 3]以及经 [27]作者许可使用的测量数据。我们假设通信信道为标准加性白高斯噪声（AWGN）信道，即 $Y_t = X_t + Z_t$ 其中 $Z_t \overset{\text{独立同分布}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$。[4]

[4]众所周知，在峰值功率约束下，加性高斯白噪声信道的容量达成分布由一个有限集合支撑 [38], [48], [49], , 因此违反了我们的问题假设。尽管如此，我们仍出于信息说明的目的考虑加性高斯白噪声信道，因为只要不连续点不与点质量 β 重合，我们的小波框架仍然适用。



(a) $\beta(x)$

图 3. 使用三种方法从 8 个样本重构函数。由于 $\beta(x)$ 在区间端点附近几乎是平坦的，因此使用哈尔小波在端点处的重建效果最佳。



(a) $\beta(x)$

图 4. 使用三种方法得到的真实 C_β 和预测的信息-能量权衡曲线 $C_{\widehat{\beta}_m}$。请注意，$C_{\widehat{\beta}_m}$ 表示在设计 SIET 时假设 $\widehat{\beta}_m$ 为真实值所预测的能量-信息权衡曲线。对于这两幅图，样本越多，预测效果越好。由于小波重建在端点处与真实值的偏差最小（见图 3），因此使用 8 个样本点的小波方法对信道容量曲线的预测效果最佳。

原始测量值为 101 个等间距采样点。请记住，我们永远无法从离散采样点获知真实的连续 β 。因此，将这 101 个样本线性插值为 2^{13} 更密集的样本，以模拟 β 在x中的连续形态。我们假设这就是真实的能量采集函数 $\beta(x)$，它在 x中连续。然后，在无噪声的情况下，我们取 $m = 8$，16 个等间距采样点[5]，并据此用三种不同的方法重建$\widehat{\ }\beta_m(x)$

1)（所提方法）哈尔[6] 小波；2) 三次样条 [29],；3) 通过最小化均方误差（MSE）进行的深度学习回归 [27],

然后计算其预测的香农容量

$$C_{\widehat{\beta}_m}(B) = \max_{p_X:\mathbb{E}[\widehat{\beta}_m(X)]\geq B} I(X;Y).$$

深度学习回归所使用的神经网络是一个具有两个隐藏层的全连接神经网络，每个隐藏层有 50 个采用修正线性单元（ReLU）激活函数的神经元。也就是说，

$$\widehat{\beta}_m(x) = W_3\sigma(W_2\sigma(W_1x + b_1) + b_2) + b_3,$$

其中，σ 是 ReLU 激活函数，W_i，b_i 分别是维度适当的权重矩阵和偏置向量。由于 $C_\beta(B)$ 和 $C_{\widehat{\beta}_m}(B)$ 是连续字母表空间上的容量-能量函数，因此采用对 $2^{13} = 8192$ 个电平进行精细量化的基于粒子的 Blahut-Arimoto 算法 [50] 。数值评估结果见图 3 和图 4。

我们先讨论图 3 中三种方法的 β 重建。真实的 β 以蓝色绘出。对于这个包含 8 个样本的特定 β，按平均均方根误差（RMSE）衡量，表现最好的重构方法是样条方法，RMSE 为 0.0304；而小波方法和神经网络方法的 RMSE 分别为 0.0656 和 0.0327。

[5]当 m取较大值时，结果几乎无法区分。[6]此处使用了最简单的小波基，但也可以通过选择不同的小波基来提高精度，这可以作为未来的研究方向。

然而，考虑到加性高斯白噪声信道的容量达成分布具有离散点质量 [38], [48], [49],，且在本例中这些点质量尤其集中于两个端点，因此，比起最小化平均误差，更关键的是尽可能准确地重建端点处的 β_m 。由于 $\beta(x)$在输入区间端点附近相对平坦，而哈尔小波在端点附近也呈现平坦特性，因此在这些点上能够实现最准确的重建；相比之下，样条的准确度最差，如图 3 的插图所示。我们还可以构造一种 β，使样条在端点处表现最佳，而小波表现最差。例如，如果 β 按照样条基函数波动，那么即使在端点处，样条也会表现出最佳准确度。这表明，重建准确度在很大程度上取决于样条和小波的类型，以及神经网络的超参数，例如激活函数和网络架构。

在讨论容量结果之前，请记住，$(B,\ C_{\widehat{\beta}_m}(B))$ 曲线表示系统错误地设定的能量与信息传输目标，而非系统实际能够实现的传输效果。换句话说，它仅表示在设计 SIET 时假设 β_m 为真实值所预测的能量与$\widehat{\ }$信息传输。因此，我们的目标是使 $C_{\widehat{\beta}_m}(B)$尽可能接近 $C_\beta(B)$，以尽量减小性能相对于 $C_\beta(B)$的偏差。

图 4 展示了 $C_{\widehat{\beta}_m}(B)$ 对 $C_\beta(B)$ 的逼近程度。首先，对于任何重构方法，样本越多，对 $C_\beta(B)$ 的预测就越准确。由于更大的样本集$m \geq 32$ 所得结果几乎无法区分，因此未予展示。为进一步分析细节，请注意，此示例的容量达成分布在端点处具有点质量，这意味着 $C_{\widehat{\beta}_m}(B)$ 的准确度仅取决于$\widehat{\ }\beta_m(x)$ 在端点处的准确度。哈尔小波的平坦基函数即使使用 8 个样本也几乎能够完美地重建 β，因此，基于哈尔小波的$C_{\widehat{\beta}_8}(B)$几乎接近真实的 $C_\beta(B)$；而三次样条在端点附近上升或下降，仅使用 8 个样本时无法逼近 $C_\beta(B)$。神经网络

方法的表现与小波方法相当。

上述数值评估表明，不存在普遍适用的优良函数重构方案，因此也不存在普遍适用的优良 SIET 设计原则。这可以看作一场对抗博弈：当我们尝试根据样本尽可能准确地重构 $\beta(x)$时，对手总能选择一个与我们的估计大相径庭、却与采样点相符的函数。由于无法获得真实的能量采集函数，我们无法判断在采用当前方案时真实函数是否有利。因此，这也说明了我们针对函数类中所有可能函数的最坏情况定义所给出的理论性能保证是合理的。

VI. 结论

在本研究中，我们研究了能量采集函数具有有界变差，且在有噪声或无噪声的情况下可通过实验样本部分获知时的 SIET。我们提出使用小波重构，并据此设计 SIET。我们根据能量损失和信息速率损失（含噪样本情况下为其期望值）评估了此类设计的性能。对于这两种情况，我们发现，只要目标能量水平位于可交付能量域的内部，（期望）能量损失和信息损失在渐近意义下均可忽略。对于含噪样本，所得期望能量损失在渐近意义下除对数因子外是紧的。我们还对所提出的方案进行了数值评估，结果证实，样本越多，对最优 SIET 系统的逼近越准确，也证明了我们采用具有理论保证的极小极大方法是合理的。

所提出的基于小波的信息与能量同时传输还有若干值得研究的方向。请注意，我们的SIET设计采用顺序式方法：首先利用小波重建能量采集函数，然后设计可实现容量-能量函数的香农随机码本。同一原理也可用于SIET的其他目标。例如，可以在小波重建的采集函数基础上优化数字通信的信号星座 [27] 或波形设计 [18]（无论是否已知信道状态信息 [51] ）。此外，将当前结果推广到多维输入（例如多输入多输出（MIMO）传输），以及具有记忆的能量采集器，也很值得研究。

致谢

我们感谢 Hansung Choi 在第V节的深度学习仿真中提供帮助。

附录A 命题1的证明

请注意， $\cup_j V_j$在 $L_2[0,1]$中稠密，也就是说，任何 $f \in L_2[0,1]$都可以通过无限精细的小波准确恢复。由于小波彼此正交，因此有限尺度 J 带来的误差为

$$\|f - \widehat{f}_J^{\mathsf{wv}}\|_{L_2}^2 = \left\| \sum_{j \geq J+1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \right\|_{L_2}^2 = \sum_{j \geq J+1} \sum_{k=0}^{2^j-1} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2, \tag{15}$$

因为 $\psi_{j,\ k}$ 彼此正交。此外，令 $\Psi(x)$ 为 $\psi(x)$ 的原函数，

$$\begin{aligned}
|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| &= \left| \int_0^1 f(x) 2^{j/2} \psi(2^j x - k) dx \right| \\
&\overset{(a)}{=} \left| \int_0^1 f^{(1)}(x) 2^{-j/2} \Psi(2^j x - k) dx \right| \\
&= 2^{-j/2} \left| \int_{\mathrm{supp}(\Psi(2^j x - k))} f^{(1)}(x) \Psi(2^j x - k) dx \right| \\
&\leq 2^{-j/2} \max_x |\Psi(x)| \int_{\mathrm{supp}(\Psi(2^j x - k))} |f^{(1)}(x)| dx \\
&\leq C_\Psi 2^{-j/2} \int_{I_{j,k}} |f^{(1)}(x)| dx,
\end{aligned}$$

其中，(a)由分部积分得出，且 $C_\Psi := \max_x |\Psi(x)|$ 和 $I_{j,\ k} := \mathrm{supp}(\Psi(2^j x - k))$。利用 ℓ_2-范数小于 ℓ_1-范数这一事实，

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{2^j-1} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \\
&\leq \sum_{k=0}^{2^j-1} C_\Psi 2^{-j/2} \int_{I_{j,k}} |f^{(1)}(x)| dx \leq C_\Psi C_j 2^{-j/2} \mathsf{TV}(f),
\end{aligned}$$

其中， C_j 是计入$I_{j,\ k}$重叠情况后的重数；对于某个 C' ， $C_j \leq C'$ ，因为它由$\psi(x)$确定。然后，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\|f - \widehat{f}_J^{\mathsf{wv}}\|_{L_2}^2 &= \sum_{j \geq J+1} \sum_{k=0}^{2^j-1} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \\
&\leq \sum_{j \geq J+1} (C_\Psi C')^2 2^{-j} \mathsf{TV}^2(f) \\
&= 2^{-J} (C_\Psi C')^2 \mathsf{TV}^2(f) \\
&= c \cdot \mathsf{TV}^2(f) \cdot m^{-1} \quad \text{with } c := (C_\Psi C')^2.
\end{aligned} \tag{16}$$

该陈述得证。

附录 B 命题 2 的证明

在继续之前，我们先陈述两个基本构件。第一个引理用含有 t项的小波级数逼近一个函数，第二个引理则根据含噪样本估计系数。

引理 *1*： 设 $f \in \mathrm{BV}_K[0,1]$ 是待恢复的函数。假设小波至少有一个消失矩

且具有紧支撑。那么，我们可以取一个满足以下条件的 t 项小波级数 f_t

$$\|f - f_t\|_{L_2}^2 = \mathcal{O}(t^{-2}).$$

证明：由式（16）可知，在每个尺度 j下，

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} |\theta_{j,k}| \le c2^{-j/2},$$

其中 $\theta_{j,\,k} := \langle f, \psi_{j,k}\rangle$。若将系数重新排序，使得$|\theta_{j,\,(0)}| \ge |\theta_{j,\,(1)}| \ge \cdots \ge |\theta_{j,\,(2^j-1)}|$，则可得到

$$c2^{-j/2} \ge \sum_{k=0}^{2^j-1} |\theta_{j,(k)}| \ge \sum_{k=0}^{r} |\theta_{j,(r)}| \ge (r+1)|\theta_{j,(r)}|$$

对于任意 $r \in \{0,\dots,2^j-1\}$ $|\theta_{j\,(r)}| \le$。这意味着 $c2^{-j/2}\,r+1^{\,-1}$ ( )。

若取阈值 T，则在尺度 j下，幅值大于 T 的系数数量，记为 $n_j(T)$，为

$$n_j(T) \le \min\{c2^{-j/2}T^{-1}, 2^j\}.$$

因此，所有尺度下幅值大于 T 的系数总数为

$$\begin{aligned} n(T) &\le \sum_{j=0}^{\infty} \min\{c2^{-j/2}T^{-1}, 2^j\} \\ &\overset{(a)}{=} \sum_{j\le j^*} 2^j + \sum_{j>j^*} c2^{-j/2}T^{-1} \\ &\overset{(b)}{=} \mathcal{O}(2^{j^*}) + \mathcal{O}(2^{-j^*/2}T^{-1}) \\ &= \mathcal{O}(T^{-2/3}) + \mathcal{O}(T^{-2/3}) = \mathcal{O}(T^{-2/3}). \end{aligned}$$

其中，(a) 成立是因为 $2^j = c2^{-j/2}T^{-1}$ 在 $j^* = \frac{2}{3}\log_2 cT^{-1}$ 处，(b) 则由几何级数的求和得到。

令 $\theta_{(r)}$ 为所有尺度中第 r 大的系数。于是，我们有

$$|\theta_{(r)}| \le \widetilde{c}r^{-3/2}.$$

这意味着，通过选取所有尺度中最大的 t 个系数，我们可以构造 f_t，使得

$$\begin{aligned} \|f - f_t\|_{L_2}^2 &= \sum_{k=t+1}^{\infty} |\theta_{(k)}|^2 \\ &\overset{(c)}{=} \sum_{k=t+1}^{\infty} \widetilde{c}k^{-3} = \mathcal{O}(t^{-2}). \end{aligned}$$

其中，(c) 根据帕塞瓦尔–普朗歇尔定理得出。该结论得证。 ■

引理*2*（定理 *1*，见 *[45]*）：令 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$ 为待估计的向量。假设我们有含噪观测

$$Y_i = \theta_i + Z_i, \quad Z_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2).$$

^那么，软阈值估计量 $\theta_i =$ y_i $|y_i|-$ sign( ) max(,) 在 $\lambda = \sqrt{2\sigma^2 \log p}$ 下达到预期误差

$$\mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}\|_2^2\right] \le (2\log p + 1)\left(\sigma^2 + \sum_{i=1}^{p} \min(\theta_i^2, \sigma^2)\right).$$

命题 *2* 的证明：我们首先将 f 投影到 V_J空间中（近似），然后根据含噪样本估计 $\mathrm{Proj}_{V_J}(f)$（估计）。对于小波系数的估计，将采用软阈值处理。

^注意，f–$\mathrm{Proj}_{V_J}(f)$ 和 $\mathrm{Proj}_{V_J}(f) - f^{\mathrm{wv}}$ 正交^，因为 $\mathrm{Proj}_{V_J}(f) - f^{\mathrm{wv}}$ 属于 V_J。也就是说，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\|f - \widehat{f}^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\|f - \mathrm{Proj}_{V_J}(f)\|_{L_2}^2\right] + \mathbb{E}\left[\|\mathrm{Proj}_{V_J}(f) - \widehat{f}^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}^2\right] \\ &= \|f - \mathrm{Proj}_{V_J}(f)\|_{L_2}^2 + \mathbb{E}\left[\|\mathrm{Proj}_{V_J}(f) - \widehat{f}^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}^2\right], \end{aligned}$$

第一项没有期望算子，因为它与随机噪声无关。此外，根据命题1，第一项为 $\mathcal{O}(m^{-1})$。我们将看到，与第二项相比，该项渐近地可忽略不计。

为了获得第二项的界，首先考虑一个朴素重建的函数 $\widehat{g}$：令 $f_Y(x)$ 为根据样本得到的分段常数函数。于是，$\widehat{g}(x = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \widehat{c}_{j\,k}\psi_{j\,k}\;x = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \widehat{c}_{j\,k}2^{j/2}\psi\;2^j x-k\;)$,,( ) , ( ) 的系数为

$$\begin{aligned} \widehat{c}_{j,k} &= \langle f_Y, \psi_{j,k}\rangle = \int f_Y(x)\psi_{j,k}(x)dx \\ &= \int f_Y(x)2^{j/2}\psi(2^j x - k)dx \\ &= 2^{-j/2}\int f_Y(2^{-j}z)\psi(z-k)dz = c_{j,k} + \widetilde{Z}_{j,k}, \end{aligned}$$

~其中 $c_{j,k}$ 是真实系数，而 $Z_{j,k}$ 是方差为 $\widetilde{\sigma}^2 = \mathrm{const} \cdot 2^{-J}\sigma^2 \propto m^{-1}$ 的等效高斯噪声。

令 $\boldsymbol{\theta}$ 为 $\{c_{j,k}\}$ 的向量化版本。那么，我们得到的不是 θ_i，而是仅有被 Z_i 污染的噪声系数。回想一下，由于小波是正交的，$\|\mathrm{Proj}_{V_J}(f) - \widehat{f}^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}^2$ 与系数估计误差相同。因此，根据引理2使用软阈值处理来估计系数，可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\|f - \widehat{f}^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}^2\right] = \mathcal{O}(m^{-1}) + \mathbb{E}\left[\|\mathrm{Proj}_{V_J}(f) - \widehat{f}^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}^2\right] \\ &\le \mathcal{O}(m^{-1}) + (2\log m + 1)\left(\widetilde{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^{m} \min(\theta_i^2, \widetilde{\sigma}^2)\right). \end{aligned}$$

我们还可以利用引理 1 对最后一项展开，从而进一步得到它的上界。令 $\theta_{(0)} > \theta_{(1)} > \cdots > \theta_{(m-1)}$ 为有序系数。然后，利用 $\min(x, y) \le x$ 和 $\min(x, y) \le y$ 这一性质，

$$\sum_{i=0}^{m-1} \min(|\theta_{(i)}|^2, \widetilde{\sigma}^2) \le \sum_{i=0}^{t} \widetilde{\sigma}^2 + \sum_{i=t+1}^{m-1} \theta_{(i)}^2 = t\widetilde{\sigma}^2 + \mathcal{O}(t^{-2}),$$

其中最后一项由引理 1 得出。回想$\widetilde{\sigma}^2 = \mathcal{O}(m^{-1})$并匹配衰减速度，可得 $t^* = m^{1/3}$。进而得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\|f - \widehat{f}^{\mathrm{wv}}\|_{L_2}^2\right] &\le \mathcal{O}(m^{-1}) + (2\log m + 1)(\mathrm{const} \cdot m^{-2/3}) \\ &= \mathcal{O}(m^{-2/3}\log m). \end{aligned}$$

■

参考文献

[1] D. Seo 和 Y. Kim，“利用小波重构的能量采集函数进行信息与能量传输”，载于《2022年 IEEE 信息论国际研讨会论文集》，2022年6月至7月，第 694–699 页。[2] L. R. Varshney，“同时传输信息与能量”，载于《2008 年 IEEE 信息论国际研讨会论文集》，2008年7月，第 1612–1616 页。[3] P. Grover 和 A. Sahai，“Shannon 遇见 Tesla：无线信息与功率传输”，载于《2010年 IEEE 信息论国际研讨会论文集》，2010年6月，第 2363–2367 页。[4] S. ul Zuhra、S. M. Perlaza、H. V. Poor 和 E. Altman，“有限码块长度区间内有限星座的可达信息-能量区域”，载于《2022年 IEEE 信息论国际研讨会论文集》，2022年6月至7月，第 2106–2111 页。[5] L. R. Varshney，“关于能量/信息跨层架构”，载于《2012年 IEEE 信息论国际研讨会论文集》，2012年7月，第 1361–1365 页。[6] R. Zhang、R. G. Maunder 和 L. Hanzo，“无线信息与功率传输：从科学假设到工程实践”，《IEEE通信杂志》，第 53 卷，第 8 期，第 99–105 页，2015年8月。[7] B. Clerckx、R. Zhang、R. Schober、D. W. K. Ng、D. I. Kim 和 H. V. Poor，“无线信息与功率传输基础：从射频能量采集器模型到信号与系统设计”，《IEEE通信领域精选期刊》，第 37 卷，第 1 期，第 4–33 页，2019年1月。[8] X. Zhou、R. Zhang 和 C. K. Ho，“无线信息与功率传输：架构设计与速率-能量权衡”，《IEEE通信汇刊》，第 61 卷，第 11 期，第 4754–4767 页，2013年11月。[9] M. Gastpar，“接收约束与空间频谱共享约束下的信道容量”，《IEEE信息论汇刊》，第 53 卷，第 2 期，第 471–487 页，2007年2月。[10] K. Banawan 和 S. Ulukus，“接收方功率约束下的 MIMO 窃听信道及其在无线能量传输和认知无线电中的应用”，《IEEE通信汇刊》，第 64 卷，第 9 期，第 3872–3885 页，2016年9月。[11] S. B. Amor、S. M. Perlaza、I. Krikidis 和 H. V. Poor，“反馈增强多址信道中的无线信息与能量同时传输”，《IEEE信息论汇刊》，第 63 卷，第 8 期，第 5244–5265 页，2017年8月。[12] P. N. Alevizos 和 A. Bletsas，“无线通信中的灵敏非线性远场射频能量采集”，《IEEE无线通信汇刊》，第 17 卷，第 6 期，第 3670–3685 页，2018 年 6 月。[13] J. Wu 和 W. Chen，“ 采用能量采集的低时延、高能效无线通信”，《IEEE无线通信汇刊》，第 21 卷，第 2 期，第 1244–1256 页，2022 年 2 月。[14] B. Clerckx 、 J. Kim 、 K. W. Choi 和 D. I. Kim，“无线信息与功率传输基础：理论、原型与实验”，《IEEE会刊》，第 110 卷，第 1 期，第 8–30 页，2022年1月。[15] C. R. Valenta 和 G. D. Durgin，“无线能量采集：远场无线能量传输系统中能量采集器转换效率综述”，《IEEE微波杂志》，第 15 卷，第 4 期，第 108–120 页，2014年6月。[16] E. Boshkovska、D. W. K. Ng、N. Zlatanov 和 R. Schober，“用于 SWIPT系统的实用非线性能量采集模型与资源分配”，《IEEE通信快报》，第 19 卷，第 12 期，第 2082–2085 页，2015年12月。[17] T. Soyata、L. Copeland 和 W. Heinzelman，“嵌入式系统的射频能量采集：权衡与方法论综述”，《IEEE电路与系统杂志》，第 16 卷，第 1 期，第 22–57 页，2016年。[18] B. Clerckx 和 E. Bayguzina，“无线能量传输的波形设计”，《IEEE信号处理汇刊》，第 64 卷，第 23 期，第 6313–6328 页，2016年12月。[19] M. Varasteh、B. Rassouli 和 B. Clerckx，“加性高斯白噪声信道上的无线信息与功率传输：非线性与非对称高斯信号传输”，载于《IEEE信息论研讨会论文集（ITW'17）》，2017年11月，第 181–185 页。[20] J.-M. Kang、I.-M. Kim 和 D. I. Kim，“无线信息与功率传输：非线性能量采集的速率-能量权衡”，《IEEE通信快报》，第 17 卷，第 3 期，第 1966–1981 页，2018年3月。[21] T. Le、K. Mayaram 和 T. Fiez，“无源供电传感器网络的高效远场射频能量采集”，《IEEE固态电路杂志》，第 43 卷，第 5 期，第 1287–1302 页，2008年5月。[22] P. Nintanavongsa、U. Muncuk、D. R. Lewis 和 K. Roy Chowdhury，“射频能量采集电路的设计优化与实现”，《IEEE新兴与精选电路和系统主题杂志》，第 2 卷，第 1 期，第 24–33 页，2012年3月。[23] M. Stoopman、S. Keyrouz、H. J. Visser、K. Philips 和 W. A. Serdijn，“自校准射频能量采集器，输出 1V，输入功率为 −26.3 dBm”，载于《2013年 VLSI 电路研讨会技术论文摘要》，2013年6月，第 C226–C227 页。

[24] ——，“面向高灵敏度射频能量采集器的CMOS整流器与小型环形天线协同设计”，IEEE固态电路杂志，第49卷，第3期，第622–634页，2014年3月。[25] A. P. Sample、A. N. Parks、S. Southwood和J. R. Smith，“无线环境射频能量”，载于《无线供电传感器网络与计算型射频识别》，J. R. Smith 编。纽约：施普林格，2013年，第223–234页。[26] X. Zhang、J. Grajal、J. L. Vazquez-Roy、U. Radhakrishna、X. Wang、W. Chern、L. Zhou、Y. Lin、P.-C. Shen、X. Ji、X. Ling、A. Zubair、Y. Zhang、H. Wang、M. Dubey、J. Kong、M. Dresselhaus和T. Pala- cios，“二维MoS_2助力实现适用于Wi-Fi频段无线能量采集的柔性整流天线”，《自然》，2019年1月。[27] M. Varasteh、J. Hoydis和B. Clerckx，“学会通信与供能：无线信息与能量传输的调制、编码和多址接入设计”，IEEE通信汇刊，第68卷，第11期，第6822–6839页，2020年11月。[28] N. Shanin、L. Cottatellucci和R. Schober，“基于马尔可夫决策过程的SWIPT系统设计：非线性能量采集电路、记忆和阻抗失配”，IEEE通信汇刊，第69卷，第2期，第1259–1274页，2021年2月。[29] D. Seo和L. R. Varshney，“基于实验采样能量采集函数的信息与能量传输”，IEEE通信汇刊，第67卷，第6期，第4479–4490页，2019年6月。[30] T. M. Cover和J. A. Thomas，《信息论基础》。纽约，美国：约翰·威立父子出版公司，1991年。[31] X. Zhou、R. Zhang和C. K. Ho，“无线信息与功率传输：架构设计与速率-能量权衡”，载于IEEE全球电信会议论文集（GLOBECOM 2012），2012年12月，第3982–3987页。[32] A. El Gamal和Y.-H. Kim，《网络信息论》。剑桥：剑桥大学出版社，2011年。[33] L. Ambrosio、N. Fusco和D. Pallara，《有界变差函数与自由间断问题》。英国牛津：牛津大学出版社，2000年。[34] P. Billingsley，《概率与测度》，第3版。纽约，美国：约翰·威立父子出版公司，1995年。[35] J. G. Smith，“幅度与方差受限标量高斯信道的信息容量”，《信息与控制》，第18卷，第3期，第203–219页，1971年4月。[36] S. Shamai (Shitz)和I. Bar-David，“平均功率与峰值功率受限正交高斯信道的容量”，IEEE信息论汇刊，第41卷，第4期，第1060–1071页，1995年7月。[37] T. H. Chan、S. Hranilovic和F. R. Kschischang，“有界输入条件高斯信道的容量达到概率测度”，IEEE信息论汇刊，第51卷，第6期，第2073–2088页，2005年6月。[38] A. Dytso、S. Yagli、H. V. Poor和S. Shamai (Shitz)，“幅度受限加性高斯信道的容量达到分布：质量点数量的上界”，IEEE信息论汇刊，第66卷，第4期，第2006–2022页，2020年4月。[39] I. Daubechies，《小波十讲》。费城：工业与应用数学学会，1992年。[40] S. Mallat，《信号处理小波之旅》，第3版。纽约，美国：学术出版社，2008年。[41] M. A. Unser，“使用样条小波的十个充分理由”，载于《小波在信号与图像处理中的应用 V》，1997年10月，第422–431页。[42] M. Unser，“样条：信号与图像处理的理想选择”，IEEE信号处理杂志，第16卷，第6期，第22–38页，1999年。[43] R. A. DeVore和G. G. Lorentz，《构造逼近》。柏林：施普林格出版社，1993年。[44] R. A. DeVore，“非线性逼近”，《数值学报》，第7卷，第51–150页，1998年1月。[45] D. L. Donoho和I. M. Johnstone，“通过小波收缩实现理想空间自适应”，《生物统计学》，第81卷，第3期，第425–455页，1994年9月。[46] D. L. Donoho，“通过软阈值处理去噪”，IEEE信息论汇刊，第41卷，第3期，第613–627页，1995年5月。[47] A. B. Tsybakov，《非参数估计导论》。纽约：施普林格出版社，2009年。[48] J. G. Smith，“关于峰值功率与平均功率受限高斯信道的信息容量”，博士学位论文，加利福尼亚大学伯克利分校，伯克利，加利福尼亚州，1969年。[49] M. Varasteh、B. Rassouli和B. Clerckx，“关于非线性功率约束下复加性高斯白噪声信道的容量达到分布及其在无线信息与功率同步传输中的应用”，IEEE信息论汇刊，第66卷，第10期，第6488–6508页，2020年10月。

[50] J. Dauwels，《连续无记忆信道信道容量的数值计算》，载于《比荷卢信息理论研讨会第*26*届论文集》，2005年5月，页214–220。[51] H. Joudeh 和 B. Clerckx，《部分信道状态信息发射端已知下线性预编码下行链路多用户MISO系统的和速率最大化：一种速率分拆方法》，*IEEE*通信汇刊，第64卷，第11期，页4847–4861，2016年11月。

Daewon Seo 于2008年和2010年分别以最优等成绩获得韩国大田韩国科学技术院（KAIST）电气工程学士和硕士学位。硕士毕业后，他于2010年至2011年在KAIST研究院工作，并于2011年至2014年任职于韩国LG电子。2019年，他获得美国伊利诺伊州尚佩恩伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校电气与计算机工程博士学位。2019年，他在美国加利福尼亚州洛杉矶南加州大学明熹电气与计算机工程系工作；2019年至2020年，他在美国威斯康星州麦迪逊威斯康星大学麦迪逊分校电气与计算机工程系工作。目前，他是韩国大邱大邱庆北科学技术院（DGIST）电气工程与计算机科学系的助理教授。他的研究兴趣包括信息论、统计推断和机器学习系统。

Yongjune Kim （IEEE会员）于2002年和2004年分别获得首尔大学（韩国首尔）的电气与计算机工程学士（荣誉）和硕士学位，并于2016年获得卡内基梅隆大学（美国宾夕法尼亚州匹兹堡）的电气与计算机工程博士学位。2016年至2018年，他在伊利诺伊大学厄巴纳-尚佩恩分校（美国伊利诺伊州厄巴纳）的协同科学实验室担任博士后研究助理。2018年至2020年，他在西部数据研究院（美国加利福尼亚州米尔皮塔斯）工作。2020年至2022年，他在大邱庆北科学技术院（DGIST，韩国大邱）电气工程与计算机科学系担任助理教授。自2022年起，他在浦项科技大学（POSTECH，韩国浦项）电气与工程系任职，目前担任助理教授。他还兼任延世大学（韩国首尔）兼职教授。他的研究兴趣包括语义通信、编码与信息论以及机器学习。他曾获IEEE数据存储最佳学生论文奖、2016年IEEE国际通信会议（ICC）最佳论文奖、2018年IEEE国际电路与系统研讨会（ISCAS）最佳论文奖（荣誉提名），以及第31届三星半导体技术研讨会最佳论文奖。