arXiv:2304.01566v1 [math.NA] 4 Apr 2023

# 用于数值求解松弛型 $p(x)$-泊松方程的阻尼 Kačanov 格式

PASCAL HEID

Abstract. 本文重点研究 $p(x)$-泊松方程解的（理论）逼近。为设计一个能够保证收敛的迭代求解器，我们将通过一对正的截断参数，从下方和上方截断非线性项，从而对原问题进行松弛处理。随后，我们将验证，对于任意这样一对参数，阻尼 Kačanov 格式都会生成一个收敛到松弛方程解的序列。接着，我们将证明，松弛问题的解在离散情形下收敛到原问题的解。最后，未松弛问题的离散解收敛到连续解。本文最后以一些数值实验作结，这些实验印证了分析结果。

## 1. Introduction

在本文中，我们考虑 $p(x)$-拉普拉斯问题

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) &= f(x,u) \qquad && x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 && x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$ 是具有利普希茨边界的开有界区域。我们强调，形式如式（1）的问题已广泛应用于诸多领域，例如图像处理 [4, 5, 10, 15, 18, 19, 21]，电流变流体 [9, 16, 17]，或静磁学 [3]。式（1）的弱形式如下：求 $u \in W^1_{,0}{}^{p(\cdot)}(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int f(x,u)v \,\mathrm{d}x \qquad \text{for all } v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega), \tag{2}$$

在本文中，

$$p \in C_+(\overline{\Omega}) := \left\{ f \in C(\overline{\Omega}) : \inf_{x\in\overline{\Omega}} f(x) > 1 \right\}; \tag{3}$$

注意到 $p_- = \inf_{x\in\Omega} p(x) > 1$ 且 $p_+ = \sup_{x\in\Omega} p(x) < \infty$。众所周知，问题（2）可能有多个解，甚至无穷多个解。就本文的分析而言，我们希望将讨论限定在解唯一的情形。事实上，若源函数 $f$ 满足下文的假设（$A_\alpha$），则问题（2）存在唯一解；关于该结论的证明，参见 [12, 定理 4.2]。

($A_\alpha$) 有 $f(x,u) = f(x) \in L^{\alpha(\cdot)}(\Omega)$，其中 $\alpha \in C_+(\Omega)$，参见（3），且 $1/\alpha(x) + 1/p^\star(x) < 1$ 对所有 $x \in \Omega$ 均成立；这里，

$$p^\star(x) = \begin{cases} dp(x)/d-p(x) & p(x) < d, \\ \infty & p(x) \geq d. \end{cases} \tag{4}$$

Department of Mathematics, Technical University of Munich, Boltzmannstr. 3, 85748 Garching bei München, Germany Munich Center for Machine Learning (MCML) *E-mail address*: pascal.heid@ma.tum.de.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35J05, 47J25, 65N30。

*Key words and phrases.* $p(x)$-泊松方程，阻尼 Kačanov 格式，松弛法。

此外，定义（能量）泛函 $\mathsf{E}$： $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathsf{E}(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x, \qquad u \in W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega), \tag{5}$$

我们有，(2) 的唯一解 $u^\star \in W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$ 等价于 $\mathsf{E}$ 的唯一极小化子；即

$$u^\star = \operatorname*{arg\,min}_{u \in W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)} \mathsf{E}(u). \tag{6}$$

特别地，原始的（弱）方程 (2) 是优化问题 (6) 的欧拉–拉格朗日方程。无论是通过极小化能量泛函 (5)，还是考虑 $u^\star(p)$-Poisson 问题 (2)，求解 $u^\star$ 都极具挑战性。针对 $1 < p(x) \equiv p < 2$ and $2 \le p(x) \equiv p$，文献 [7] 和 [1]，分别引入了松弛问题，并可通过 Kačanov 格式进行迭代求解。上述文献还进一步证明，松弛问题的唯一解在某种意义下收敛于原问题的解。然而，本研究考虑的问题要困难得多，因为我们允许变指数 $p(\cdot)$ 取值低于或高于阈值 $p = 2$。因此，我们将着重于下文所述的较弱收敛结果。特别地，我们将证明阻尼 Kačanov 迭代格式收敛于松弛问题的唯一解。随后，我们将在离散情形下证明，松弛问题的唯一解收敛于未松弛的 $p(x)$-Poisson 问题的唯一解。最后，我们将验证离散（未松弛）解收敛于连续问题的唯一解。

概述。 第 2 节介绍必要的符号，回顾一些众所周知的结果，引入松弛问题并给出一些预备结果，这些内容对于后续章节的分析至关重要。第 3 节讨论用于求解松弛问题的阻尼 Kačanov 迭代格式。随后，第 4 节在离散情形下验证松弛问题的解收敛到非松弛问题的解。此外，我们还证明离散解收敛到连续解。第 5 节进行一些数值实验，最后在第 6 节给出若干总结性评述。

## 2. Preliminaries

在本文中，我们始终假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ 是具有利普希茨边界的开有界区域。

**2.1. 基本概念。** 在本文中，我们将讨论勒贝格空间和索伯列夫空间（具有变指数）。按照惯例，对于任意 $p \in [1, \infty)$，我们用 $L^p(\Omega)$ 表示由 $p$-可积函数构成的勒贝格空间，其相应范数为 $\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$。此外，$L^\infty(\Omega)$ 表示 $\Omega$ 上本质有界可测函数构成的勒贝格空间，其范数为 $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$。同样，对于 $p \in [1, \infty]$，我们用 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 表示边界 $\partial\Omega$ 上零迹的索伯列夫函数空间，其范数为 $\|f\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} := \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$。按照惯例，对于 $p = 2$，我们采用约定 $H^1_0(\Omega) := W^{1,2}_0(\Omega)$。

接下来，我们将介绍变指数勒贝格空间和索伯列夫空间；关于这些空间的详尽论述，感兴趣的读者可参阅专著 [8]。对于任意给定的可测函数 $p : \Omega \to [1, \infty]$，我们引入变指数勒贝格空间

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ measurable} : \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} \,\mathrm{d}x < \infty \right\},$$

赋予 Luxemburg 范数

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} \,\mathrm{d}x \le 1 \right\}. \tag{7}$$

我们强调，$(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)})$ 是一个可分且自反的巴拿赫空间，参见例如 [11]。此外，对于常数指数 $p$，(7) 中 Luxemburg 范数的定义与通常的 $L^p(\Omega)$-范数一致。类似地，我们定义变指数索伯列夫空间

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) := \left\{ f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : \nabla f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \right\},$$

配备范数

$$\|f\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} := \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

此外，对于 $p \in C_+(\overline{\Omega})$，我们进一步考虑具有变指数和零边界值的索伯列夫空间 $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$，它是 $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ 中 $C_0^\infty(\Omega)$ 的闭包；该空间赋予如下范数

$$\|f\|_{W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)} := \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

这些仍然是可分自反巴拿赫空间，参见 [8, 第 8] 节。

2.2. **辅助结果**。现在我们陈述一些关于变指数勒贝格空间和索伯列夫空间的预备结果，这些结果在文献中广为人知。

**命题 2.1**。设 $r, s \in C_+(\overline{\Omega})$。若 $\overline{r} \le s$ 几乎处处成立，则有连续嵌入 $L^{s(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$ 以及 $W^{1,s(\cdot)}_0(\Omega) \hookrightarrow W^{1,r(\cdot)}_0(\Omega)$。

例如，可参见 [11, 定理 1.11] 或 [8,第 3 节3]。此外，对于变指数 Lebesgue 空间，我们还有 H¨older 不等式；参见 [8, 引理 3.2.20]。

**命题 2.2.** 设 $q, r, s : \Omega \to [1, \infty]$ 可测，且

$$\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)} = \frac{1}{s(x)} \qquad \text{for almost every } x \in \Omega.$$

那么，对于所有 $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ 和 $g \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$，有 $fg \in L^{s(\cdot)}(\Omega)$，且

$$\|fg\|_{L^{s(\cdot)}(\Omega)} \le 2 \|f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \|g\|_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}.$$

特别地，对于可测的 $p : \Omega \to [1, \infty]$，记 $p'$ 为其 ***H¨older*** 共轭，即

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1 \qquad \text{for almost every } x \in \Omega.$$

那么，对于任意 $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 和 $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$，有 $fg \in L^1(\Omega)$，且

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \le 2 \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}.$$

下一个结果给出了一个与 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 中的收敛等价的性质，参见 [11,定理 1.4]。

**命题 2.3**。设 $f_k, f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$、$k \in \mathbb{N}$ 和 $p \in C_+(\overline{\Omega})$，参见$(\overline{3})$。则下列陈述等价：

*(a)* $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$；*(b)* $u_k$ 依测度收敛到 $u$，且$\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$。

最后，对于变指数空间还有一个索伯列夫嵌入，参见例如 [8, 推论 8.3.2]。

**命题 2.4.** 设 $p \in C_+(\overline{\Omega})$ 和 $q : \overline{\Omega} \to [1, \infty]$ 可测，且满足 $q \le p^\star$ 几乎处处成立，其中 $p^\star$ 按(4)中的定义给出。则嵌入 $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ 是连续的，其嵌入常数仅取决于 $p$、$q$ 和Ω。

**2.3. 松弛 $p(x)$-泊松问题。** 从现在起，我们始终假设 $p \in C_+(\Omega)$。如引言中所述，我们将考虑文献 [1,7] 中引入的问题 (2) 的一个松弛版本；然而，在这些参考文献中，指数是常数。该松弛基于两个截断参数 $0 < \epsilon_- < 1 < \epsilon_+ < \infty$；为简便起见，我们用 $\epsilon$ 表示这对截断参数$\epsilon_-, \epsilon_+$。下文中，设 $X \subseteq H^1_0(\Omega)$ 为一个闭子空间；我们尤其关注 $X = H^1_0(\Omega)$ 或 $X$ 为有限维的情形。于是，松弛问题表述如下：求 $u \in X$ 使得

$$\int_\Omega (\epsilon_- \vee |\nabla u| \wedge \epsilon_+)^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \qquad \text{for all } v \in X. \tag{8}$$

定义函数 $\mu_\epsilon : \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为

$$\mu_\epsilon(x,t) := \begin{cases} \epsilon_-^{p(x)-2} & t < \epsilon_-^2, \\ t^{\frac{p(x)-2}{2}} & \epsilon_-^2 \leq t \leq \epsilon_+^2, \\ \epsilon_+^{p(x)-2} & t > \epsilon_+^2, \end{cases} \tag{9}$$

松弛问题 (8) 可等价地表述为

$$\text{Find } u \in X: \qquad \int_\Omega \mu_\epsilon(x, |\nabla u|^2) \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \qquad \text{for all } v \in X. \tag{10}$$

此处，为保证右端项适定，我们需要对源函数 $f$ 施加一些（可能更强的）假设。事实上，得益于索伯列夫嵌入定理和霍尔德不等式，若满足以下条件，则 (10) 右端的积分有定义：

$$\begin{cases} \alpha_- := \min_{x \in \overline{\Omega}} \alpha(x) > 1 & \text{for } d = 2, \\ \alpha_- \geq \frac{6}{5} & \text{for } d = 3, \end{cases} \tag{11}$$

其中，与前文一样，$f \in L^{\alpha(\cdot)'}(\Omega) \subseteq L^{\alpha_-'}(\Omega)$，参见命题 2.1，其中 $\alpha \in C_+(\Omega)$。

与未松弛情形一样，松弛问题 (10) 是某个（能量）极小化问题的欧拉–拉格朗日方程

$$\operatorname*{arg\,min}_{u \in X} \mathsf{E}_\epsilon(u),$$

其中

$$\mathsf{E}_\epsilon(u) := \int_\Omega \varphi_\epsilon(x, |\nabla u|^2) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x; \tag{12}$$

这里，对所有 $x \in \Omega$,

$$\varphi_\epsilon(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\epsilon_-^{p(x)-2} t + \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{2}\right) \epsilon_-^{p(x)} & 0 \leq t < \epsilon_-^2, \\ \frac{1}{p(x)} t^{p(x)/2} & \epsilon_-^2 \leq t \leq \epsilon_+^2, \\ \frac{1}{2}\epsilon_+^{p(x)-2} t + \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{2}\right) \epsilon_+^{p(x)} & \epsilon_+^2 < t. \end{cases}$$

接下来，我们希望证明 (10) 有唯一解，这等价于证明它是 (12) 的唯一极小化解。为此，并为第 3 节中阻尼 Ka˘canov 格式的表述作准备，我们将引入算子 $\mathsf{A}_\epsilon[\cdot](\cdot) : X \times X \to X'$ 和 $\ell_f \in X'$，其中 $X'$ 表示 $X$ 的对偶空间，其定义如下：

$$\mathsf{A}_\epsilon[u](v)(w) := \int_\Omega \mu_\epsilon(x, |\nabla u|^2) \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x, \qquad u, v, w \in X, \tag{13}$$

and

$$\ell_f(v) := \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \qquad v \in X,$$

分别。然后，将（残差）算子 $\mathsf{F}_\epsilon : X \to X'$ 定义为

$$\mathsf{F}_\epsilon(u) := \mathsf{A}_\epsilon[u](u) - \ell_f, \qquad u \in X, \tag{14}$$

松弛问题 (10) 等价于确定一个满足以下条件的元素 $u \in X$

$$\langle \mathsf{F}_\epsilon(u), v\rangle = 0 \qquad \text{for all } v \in X, \tag{15}$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $X$ 及其对偶空间 $X'$之间的对偶配对。我们进一步指出，(15)等价于 $\mathsf{F}_\epsilon(u) = 0$ 属于 $X'$。此外，我们有 $\mathsf{E}'_\epsilon = \mathsf{F}_\epsilon$；即，$\mathsf{E}_\epsilon$ 是 $\mathsf{F}_\epsilon$的势。

为了证明(10)的解存在唯一性，我们将验证算子 $\mathsf{F}_\epsilon$ 是 Lipschitz 连续且强单调的。为此，我们首先考察系数 $\mu(\cdot,\ \cdot)$。根据定义，参见(9)，有

$$\mu_- \le \mu(x,t) \le \mu_+ \qquad \text{for all } (x,t) \in \Omega^\star, \tag{16}$$

其中 $\Omega^\star = \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0}$，且

$$\mu_{\epsilon,-} := \min\left\{\epsilon_-^{p_+-2}, \epsilon_+^{p_--2}\right\} \quad \text{and} \quad \mu_{\epsilon,+} := \max\left\{\epsilon_-^{p_--2}, \epsilon_+^{p_+-2}\right\}.$$

此外，设 $\xi_\epsilon : \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 定义如下：

$$\xi_\epsilon(x,t) := \mu_\epsilon(x,t^2)t \qquad \text{for all } x \in \Omega,\ t \ge 0; \tag{17}$$

该函数对于我们下面的分析至关重要。注意，对于任意给定的 $x \in \Omega$，函数 $t \mapsto \xi_\epsilon(x,\ t)$ 关于 $t \notin \{\epsilon_-, \epsilon_+\}$ 连续且可微。具体而言，我们有

$$\xi'_\epsilon(x,t) = \begin{cases} \epsilon_-^{p(x)-2} & t < \epsilon_-, \\ (p(x)-1)t^{p(x)-2} & \epsilon_- < t < \epsilon_+, \\ \epsilon_+^{p(x)-2} & t > \epsilon_+, \end{cases}$$

其中 $\xi'_\epsilon$ 表示对第二个变量求导。特别地，对于给定的 $x \in \Omega$，映射 $t \mapsto \xi'_\epsilon(x,\ t)$ 关于 $t \notin \{\epsilon_-, \epsilon_+\}$ 甚至是连续的。此外，我们有

$$\xi'_{\epsilon,-} := \inf_{(x,t)\in\Omega^\star} \xi'_\epsilon(x,t) > 0 \quad \text{and} \quad \xi'_{\epsilon,+} := \sup_{(x,t)\in\Omega^\star} \xi'_\epsilon(x,t) < \infty; \tag{18}$$

此处及下文中，对于任意 $x \in \Omega$，我们将函数 $\xi'_\epsilon(x,\ t)$ 延拓至 $t \in \{\epsilon_-, \epsilon_+\}$，定义为 $\xi'_\epsilon(x,\ \epsilon_\pm) := (p(x)-1)\epsilon_\pm^{p(x)-2}$。因此，通过应用中值定理（分段进行），我们得到

$$\xi'_{\epsilon,-}(t-s) \le \mu(x,t^2)t - \mu(x,s^2)s \le \xi'_{\epsilon,+}(t-s), \qquad t \ge s \ge 0, \tag{19}$$

这反过来意味着 $\xi'_{\epsilon,\,-} \le \mu_{\epsilon,\,-}$ 以及 $\xi'_{\epsilon,\,+} \ge \mu_{\epsilon,\,+}$。

**注 2.5**。为完整起见，我们将明确给出（18）中的界，这需要区分三种情况：

如果 $1 < p_- \le p_+ < 2$，则：

$$\inf_{(x,t)\in\Omega^\star} \xi'_\epsilon(x,t) \ge (p_- - 1)\epsilon_+^{p_--2} \qquad \text{and} \qquad \sup_{(x,t)\in\Omega^\star} \xi'_\epsilon(x,t) \le \epsilon_-^{p_--2}.$$

如果 $2 < p_- \le p_+ < \infty$，则：

$$\inf_{(x,t)\in\Omega^\star} \xi'_\epsilon(x,t) \ge \epsilon_-^{p_+-2} \qquad \text{and} \qquad \sup_{(x,t)\in\Omega^\star} \xi'_\epsilon(x,t) \le (p_+ - 1)\epsilon_+^{p_+-2}.$$

如果 $1 < p_- \le 2 \le p_+ < \infty$，则：

$$\inf_{(x,t)\in\Omega^\star} \xi'_\epsilon(x,t) \ge (p_- - 1)\min\left\{\epsilon_-^{p_+-2}, \epsilon_+^{p_--2}\right\} \quad \text{and} \quad \sup_{(x,t)\in\Omega^\star} \xi'_\epsilon(x,t) \le (p_+ - 1)\max\left\{\epsilon_-^{p_--2}, \epsilon_+^{p_+-2}\right\}.$$

下面的结果是迈向 $\mathsf{F}_\epsilon$的强单调性和利普希茨连续性的主要步骤；该结果及其证明基本借鉴了 [13, 引理 2.1], ，而后者又基于 [2,引理 3.1]。

**引理2.6**。令 $\mu_\epsilon$ 和 $\xi_\epsilon$ 分别如(9) 和(17)中所定义。那么，对于 $\boldsymbol{\kappa}$、$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^d$，任意给定的 $x \in\Omega$，我们有

$$\left|\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)\boldsymbol{\kappa} - \mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)\boldsymbol{\tau}\right|^2 \le 3(\xi'_{\epsilon,+})^2|\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\tau}|^2 \tag{20}$$

*and*

$$(\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)\boldsymbol{\kappa}-\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)\boldsymbol{\tau}):(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\tau})\geq\xi'_{\epsilon,-}|\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\tau}|^2. \tag{21}$$

证明。我们先证明界（20）。首先，注意到

$$\begin{aligned}
&\left|\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)\boldsymbol{\kappa}-\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)\boldsymbol{\tau}\right|^2\\
&\qquad=\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)^2|\boldsymbol{\kappa}|^2+\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)^2|\boldsymbol{\tau}|^2-2\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\tau}\\
&\qquad=\left(\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)|\boldsymbol{\kappa}|-\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)|\boldsymbol{\tau}|\right)^2+2\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)(|\boldsymbol{\kappa}||\boldsymbol{\tau}|-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\tau})\\
&\qquad\leq\left(\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)|\boldsymbol{\kappa}|-\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)|\boldsymbol{\tau}|\right)^2+2\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)|\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\tau}|^2.
\end{aligned}$$

进而，(19) 和 (16) 中的上界推出

$$\left|\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\kappa}|^2)\boldsymbol{\kappa}-\mu_\epsilon(x,|\boldsymbol{\tau}|^2)\boldsymbol{\tau}\right|^2\leq(\xi'_{\epsilon,+})^2(|\boldsymbol{\kappa}|-|\boldsymbol{\tau}|)^2+2\mu_{\epsilon,+}^2|\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\tau}|^2\leq3(\xi'_{\epsilon,+})^2|\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\tau}|^2,$$

其中，在第二个不等式中，我们利用了 $\xi'_{\epsilon,+}\geq\mu_{\epsilon,+}$。

现在我们来处理不等式 (21)。经过简单直接的计算可得

$$\begin{aligned}
(\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\kappa}|^2)\boldsymbol{\kappa}-\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\tau}|^2)\boldsymbol{\tau})\cdot(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\tau})&=\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\kappa}|^2)|\boldsymbol{\kappa}|^2+\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\tau}|^2)|\boldsymbol{\tau}|^2-\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\kappa}|^2)\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\tau}-\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\tau}|^2)\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\kappa}\\
&=\left(\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\kappa}|^2)|\boldsymbol{\kappa}|-\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\tau}|^2)|\boldsymbol{\tau}|\right)(|\boldsymbol{\kappa}|-|\boldsymbol{\tau}|) &(22)\\
&\quad+(\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\kappa}|^2)+\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\tau}|^2))(|\boldsymbol{\kappa}||\boldsymbol{\tau}|-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\tau}). &(23)
\end{aligned}$$

利用 (19)，可对 (22) 中的项给出如下下界：

$$\left(\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\kappa}|^2)|\boldsymbol{\kappa}|-\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\tau}|^2)|\boldsymbol{\tau}|\right)(|\boldsymbol{\kappa}|-|\boldsymbol{\tau}|)\geq\xi'_{\epsilon,-}(|\boldsymbol{\kappa}|-|\boldsymbol{\tau}|)^2 \tag{24}$$

关于 (23)，根据界 (16) 可得

$$(\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\kappa}|^2)+\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\tau}|^2))(|\boldsymbol{\kappa}||\boldsymbol{\tau}|-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\tau})\geq2\mu_{\epsilon,-}(|\boldsymbol{\kappa}||\boldsymbol{\tau}|-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\tau})\geq2\xi'_{\epsilon,-}(|\boldsymbol{\kappa}||\boldsymbol{\tau}|-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\tau}). \tag{25}$$

因此，分别对式 (22) 和 (23) 中的各项使用已得到的界 (24) 和 (25)，可得

$$\begin{aligned}
(\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\kappa}|^2)\boldsymbol{\kappa}-\mu_\epsilon(|\boldsymbol{\tau}|^2)\boldsymbol{\tau})\cdot(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\tau})&\geq\xi'_-\left((|\boldsymbol{\kappa}|-|\boldsymbol{\tau}|)^2+2\left(|\boldsymbol{\kappa}||\boldsymbol{\tau}|-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\right)\\
&=\xi'_{\epsilon,-}\left(|\boldsymbol{\kappa}|^2+|\boldsymbol{\tau}|^2-2\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\\
&=\xi'_{\epsilon,-}|\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\tau}|^2;
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

基于此引理，可以推出映射 $u\mapsto\mathsf{A}_\epsilon[u](u)$ 的强单调性和利普希茨连续性，这等价于 $u\to\mathsf{F}_\epsilon(u)$，因为 $\mathsf{F}_\epsilon(u)-\mathsf{F}_\epsilon(v)=\mathsf{A}_\epsilon[u](u)-\mathsf{A}_\epsilon[v](v)$。

**命题 2.7** ( [13, 命题 2.2]). 设 $\mu_\epsilon$、$\xi_\epsilon$、$\mathsf{A}_\epsilon$ 和 $\mathsf{F}_\epsilon$ 分别如式 (9)、(17)、(13) 和 (14) 所定义。

***(a)*** 对于给定的 $u\in X$，$\mathsf{A}_\epsilon[u](\cdot)(\cdot)$ 是 $X\times X$ 上一致有界、强制的对称双线性形式。特别地，以下不等式成立：

$$\mathsf{A}_\epsilon[u](v)(w)\leq\mu_{\epsilon,+}\left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla w\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{26}$$

*and*

$$\mathsf{A}_\epsilon[u](v)(v)\geq\mu_{\epsilon,-}\left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{27}$$

对任意 $u$、$v$、$w\in X$。

***(b)*** 映射 $u\mapsto\mathsf{A}_\epsilon[u](u)$ 和 $u\mapsto\mathsf{F}_\epsilon(u)$ 是 *Lipschitz* 连续的，且

$$\langle\mathsf{F}_\epsilon(u)-\mathsf{F}_\epsilon(v),w\rangle=\mathsf{A}_\epsilon[u](u)(w)-\mathsf{A}_\epsilon[v](v)(w)\leq\sqrt{3}\xi'_{\epsilon,+}\left\|\nabla(u-v)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla w\right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{28}$$

$u,v,w\in X$，且与.....强单调

$$\langle\mathsf{F}_\epsilon(u)-\mathsf{F}_\epsilon(v),u-v\rangle=\mathsf{A}_\epsilon[u](u)(u-v)-\mathsf{A}_\epsilon[v](v)(u-v)\geq\xi'_{\epsilon,-}\left\|\nabla(u-v)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{29}$$

$u,v\in X$。

证明。我们的证明借鉴自 [13]。首先，根据 $\mathsf{A}_\epsilon$ 的定义（参见式（13））、式（16）中的上界以及柯西–施瓦茨不等式，我们立即得到

$$\mathsf{A}_\epsilon[u](v)(w) = \int_\Omega \mu_\epsilon(x, |\nabla u|^2)\nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x \le \mu_{\epsilon,+} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)},$$

这就是 (26) 中所声称的界。同理，将 (16) 中的上界替换为下界，即可得到 (27)。

接下来，任取 $u, v, w \in X$。根据定义，

$$\mathsf{A}_\epsilon[u](u)(w) - \mathsf{A}_\epsilon[v](v)(w) = \int_\Omega \left(\mu_\epsilon(x, |\nabla u|^2)\nabla u - \mu_\epsilon(x, |\nabla v|^2)\,\nabla v\right) \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x.$$

利用 (20) 和柯西–施瓦茨不等式，可进一步推出

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_\epsilon[u](u)(w) - \mathsf{A}_\epsilon[v](v)(w) &\le \sqrt{3}\xi'_{\epsilon,+} \int_\Omega |\nabla(u-v)||\nabla w| \,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{3}\xi'_{\epsilon,+} \|\nabla(u-v)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

以类似方式，我们得到，对于任意 $u,\ v \in X$，

$$\mathsf{A}_\epsilon[u](u)(u-v) - \mathsf{A}_\epsilon[v](v)(u-v) = \int_\Omega \left(\mu_\epsilon(x, |\nabla u|^2)\nabla u - \mu_\epsilon(x, |\nabla v|^2)\,\nabla v\right) \cdot \nabla(u-v) \,\mathrm{d}x.$$

由于 $\nabla(\cdot)$ 是线性算子，界 (21) 蕴含强单调性 (29)。 □

由于 $\mathsf{F}_\epsilon$ 是强单调且 Lipschitz 连续的，我们立即得到下文所述的存在唯一性结果；详细内容参见 [20, §25.5]。

**定理 2.8**。式 $\mathsf{E}_\epsilon : X \to \mathbb{R}$（见 (12)）具有唯一的全局能量极小值 $u^\star_{X,\,\epsilon} \in X$；等价地，它是弱松弛问题 (10) 的唯一解。

## 3. Damped Kačanov iteration scheme for the relaxed $p(x)$-Poisson equation

本节中，我们将考虑 [14], 中的阻尼 Kačanov 格式，其定义如下：对于任意给定的迭代值 $u^n \in X$，相应的后续元素定义为

$$u^{n+1} = u^n - \delta(u^n)\mathsf{A}_\epsilon[u^n]^{-1}\mathsf{F}_\epsilon(u^n), \tag{30}$$

其中 $\delta(u^n) > 0$ 是一个阻尼因子，$\mathsf{A}_\epsilon[\cdot](\cdot)\colon\ X \times X \to X'$ 和 $\mathsf{F}_\epsilon\colon\ X \to X'$ 分别按 (13) 和 (14) 定义。我们也可以将 (30) 等价地表述为

$$\mathsf{A}_\epsilon[u^n](u^{n+1} - u^n) = -\delta(u^n)\mathsf{F}_\epsilon(u^n), \tag{31}$$

因为对于固定的 $u \in X$，算子 $\mathsf{A}_\epsilon[u]\colon\ X \to X'$ 是线性的。Kačanov 格式的后一种表述在下面的分析中将非常有用。本节旨在证明，由 Kačanov 格式 (30) 生成的序列收敛于松弛问题 (8) 在 $X$ 中的唯一解 $u^\star_{X,\,\epsilon}$；我们再次强调，$u^\star_{X,\,\epsilon}$ 也等价于 $\mathsf{E}_\epsilon$ 的唯一极小化解，见 (12)，且属于 $X$。为此，我们需要以下预备结果；特别是，该结果引自 [14, Cor. 2.7]。尽管我们的证明大体上沿用 [14, Cor. 2.7], 的证明思路，为求完整起见，我们仍将在此给出证明；此外，我们对迭代格式采用了不同的记号，从而可以简化证明。

**引理 3.1.** 设 $\{u^n\}_n \subset X$ 表示由 *Kačanov* 格式 (30)生成的序列，则有

$$\mathsf{E}(u^n) - \mathsf{E}(u^{n+1}) \ge \left(\frac{\mu_{\epsilon,-}}{\delta(u^n)} - \frac{\sqrt{3}\xi'_{\epsilon,+}}{2}\right) \left\|\nabla(u^{n+1} - u^n)\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{32}$$

特别地，若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $0 < \delta_{\min} \le \delta(u^n) \le \delta^-_{\max} < 2\mu_{\epsilon,\,-}/\sqrt{3}\xi'_{\epsilon,\,+}$，则

$$\mathsf{E}(u^n) - \mathsf{E}(u^{n+1}) \ge \gamma \left\|\nabla(u^{n+1} - u^n)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

其中

$$\gamma := \left( \frac{\mu_{\epsilon,-}}{\delta_{\max}} - \frac{\sqrt{3}\xi'_{\epsilon,+}}{2} \right) > 0.$$

证明。如前所述，我们将沿用 [14,推论 2.7]的证明思路。给定$n \in \mathbb{N}$，定义实值函数 $\varphi(t) := \mathsf{E}_\epsilon(u^n + t(u^{n+1} - u^n))$。于是，由微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\epsilon(u^{n+1}) - \mathsf{E}_\epsilon(u^n) &= \int_0^1 \left\langle \mathsf{E}'_\epsilon(u^n + t(u^{n+1} - u^n)), u^{n+1} - u^n \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left\langle \mathsf{F}_\epsilon(u^n + t(u^{n+1} - u^n)) - \mathsf{F}_\epsilon(u^n), u^{n+1} - u^n \right\rangle \mathrm{d}t + \left\langle \mathsf{F}_\epsilon(u^n), u^{n+1} - u^n \right\rangle,\end{aligned}$$

其中，第二步用到了 $\mathsf{E}'_\epsilon = \mathsf{F}_\epsilon$。接下来应用利普希茨连续性 (28) 和 Kačanov 格式迭代 (31) 的定义，可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\epsilon(u^{n+1}) - \mathsf{E}_\epsilon(u^n) &\le \frac{\sqrt{3}\xi'_{\epsilon,+}}{2} \left\| \nabla(u^{n+1} - u^n) \right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\delta(u^n)} \mathsf{A}_\epsilon[u^n](u^{n+1} - u^n)(u^{n+1} - u^n) \\ &\le \frac{\sqrt{3}\xi'_{\epsilon,+}}{2} \left\| \nabla(u^{n+1} - u^n) \right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\mu_{\epsilon,-}}{\delta(u^n)} \left\| \nabla(u^{n+1} - u^n) \right\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

由 (27) 可知。最后，简单地乘以 $-1$ 即可得到 (32)。 □

现在，我们已具备所有条件来证明，阻尼 Kačanov 迭代收敛于 $\mathsf{E}_\epsilon$ 在 $X$ 中的唯一极小化子 $u^\star_{X,\epsilon}$。

**定理 3.2.** 若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $\delta(u^n) \ge \delta_{\min} > 0$，且

$$\mathsf{E}_\epsilon(u^n) - \mathsf{E}_\epsilon(u^{n+1}) \ge \gamma \left\| \nabla(u^{n+1} - u^n) \right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{33}$$

存在一个与 $n \in \mathbb{N}$ 无关的 $\gamma > 0$，那么由阻尼 *Kačanov* 格式 (30) 生成的序列 $\{u^n\}_n \subset X$ 收敛于 $X$ 中 $\mathsf{E}_\epsilon$ 的唯一能量极小化子 $u^\star_{X,\epsilon}$。特别地，若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $0 < \delta_{\min} \le \delta(u^n) \le \delta_{\max} < 2\mu_{\epsilon,-}/\sqrt{3}\xi'_{\epsilon,+}$，则该结论成立。

证明。我们将按照定理 2.5], 的证明思路进行，该证明分为三个部分。 [14,

步骤 *1*： 回顾一下，$\mathsf{E}_\epsilon$ 在 $X$ 中有唯一的全局极小化子 $u^\star_{X,\epsilon}$，并且根据假设 (33)，$\mathsf{E}_\epsilon$ 沿生成的序列递减。因此，序列 $\{\mathsf{E}_\epsilon(u^n)\}_n$ 收敛。因此，根据 (33)，我们得到

$$0 \le \left\| \nabla(u^{n+1} - u^n) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{\gamma}(\mathsf{E}_\epsilon(u^n) - \mathsf{E}_\epsilon(u^{n+1})) \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty;$$

即，$\left\{ \left\| \nabla(u^{n+1} - u^n) \right\|_{L^2(\Omega)} \right\}_n$ 是一个趋于零的序列。

步骤 *2*：接下来，我们将验证 $\{u^n\}_n$ 是 $X$ 中的一个柯西序列。因此，由于 $X$ 是一个巴拿赫空间，该序列存在一个极限 $\tilde{u} \in X$。$\mathsf{F}_\epsilon$ 的强单调性（参见公式 (29)）表明，

$$\begin{aligned}&\xi'_{\epsilon,-} \left\| \nabla(u^m - u^n) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad \le \langle \mathsf{F}_\epsilon(u^m) - \mathsf{F}_\epsilon(u^n), u^m - u^n \rangle \\ &\qquad = \frac{1}{\delta(u^n)} \mathsf{A}_\epsilon[u^n](u^{n+1} - u^n)(u^m - u^n) - \frac{1}{\delta(u^m)} \mathsf{A}_\epsilon[u^m](u^{m+1} - u^m)(u^m - u^n),\end{aligned}$$

其中第二步用到了（31）。利用 $\mathsf{A}_\epsilon$ 的一致有界性，参见（26），可得

$$\begin{aligned}&\xi'_{\epsilon,-} \left\| \nabla(u^m - u^n) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad \le \frac{\mu_{\epsilon,+}}{\delta_{\min}} \left( \left\| \nabla(u^{n+1} - u^n) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \nabla(u^{m+1} - u^m) \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| \nabla(u^m - u^n) \right\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

因此，经过简单推导可得

$$0 \leq \|\nabla(u^m - u^n)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\mu_{\epsilon,+}}{\xi'_{\epsilon,-}\delta_{\min}} \left( \left\|\nabla(u^{n+1} - u^n)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla(u^{m+1} - u^m)\right\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

由第一步可知，当 $m, n \to \infty$ 时，右端趋于零。因此，$\{u^n\}_n$ 确实是一个柯西序列。

步骤 *3*：接下来需要证明 $\tilde{u} = u^\star_{X,\epsilon}$。为此，我们首先回顾 (31)，其指出

$$\frac{1}{\delta(u^n)} \mathsf{A}_\epsilon[u^n](u^{n+1} - u^n)(w) = \langle \mathsf{F}_\epsilon(u^n), w \rangle \qquad \text{for all } w \in X.$$

由于 $\delta(\cdot) \geq \delta_{\min} > 0$，且 $\mathsf{A}_\epsilon$ 一致有界（参见 (26)），步骤 1 表明，对于固定的$w \in X$，当 $n \to \infty$ 时，左端趋于零。因此，对于任意 $w \in X$，有

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle \mathsf{F}_\epsilon(u^n), w \rangle = \langle \mathsf{F}_\epsilon(\tilde{u}), w \rangle,$$

在第二个等式中，我们用到了 $\mathsf{F}_\epsilon$ 的连续性。然而，这意味着 $\tilde{u}$ 是弱问题 (8) 在 $X$ 上的一个解。进而，由解的唯一性可知，$\tilde{u} = u^\star_{X,\epsilon}$，由此完成证明。□

## 4. Convergence with respect to the relaxation and discretisation

**4.1. 关于离散空间上松弛的收敛。** 设 $X_N$ 是 $W^{1,\infty}_0(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$的一个闭有限维子集。注意，由命题 2.1可知，我们还可以得到 $X_N \subset W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$。我们将 $X_N$中的(2)的唯一离散解记为 $u^\star_N \in X_N$；对于一组固定的截断参数，$X_N$中的离散松弛问题(10)的唯一解记为$u^\star_{N,\epsilon} \in X_N$。下文中，若 $\epsilon_- \to 0$ 且 $\epsilon_+ \to \infty$，我们记作 $\epsilon \to \infty$。我们注意到，截断参数集合将记为

$$\mathcal{A} := \{(\epsilon_-, \epsilon_+) : 0 < \epsilon_- < 1 < \epsilon_+ < \infty\},$$

是一个有向集，其序关系由相应闭区间的包含关系给出；即 $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ 当且仅当 $[\epsilon_{1,-}, \epsilon_{1,+}] \subseteq [\epsilon_{2,-}, \epsilon_{2,+}]$。我们的目标是证明 $u^\star_{N,\,\epsilon} \to u^\star_N$当 $\epsilon \to \infty$时成立，为此我们需要以下辅助结果。

**引理4.1.** 设 $\{v_\epsilon\}_\epsilon \subset X_N$ 关于 $X_N$ 上的任意范数一致有界。则有

$$\lim_{\epsilon\to\infty} |\mathsf{E}(v_\epsilon) - \mathsf{E}_\epsilon(v_\epsilon)| = 0,$$

其中收敛是按网的意义理解的。

证明. 根据算子 E 和 $\mathsf{E}_\epsilon$ 的定义，分别见 (5) 和 (12)，可得

$$|\mathsf{E}(v_\epsilon) - \mathsf{E}_\epsilon(v_\epsilon)| = \left| \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla v_\epsilon|^{p(x)} - \varphi_\epsilon(x, |\nabla v_\epsilon|^2) \, \mathrm{d}x \right|.$$

由于集合 $\{v_\epsilon\}_\epsilon$ 在 $X_N$ 中一致有界，且有限维空间中的范数等价性成立，因此对于某个与 $\epsilon$ 无关的正常数 $C > 0$，有$\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$。反过来，当 $\epsilon$ 足够大时，有$\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} < \epsilon_+$，因此在取极限时可以忽略上截断参数。由此，经过直接计算可知，当 $\epsilon$ 足够大时，

$$\begin{aligned} |\mathsf{E}(v_\epsilon) - \mathsf{E}_\epsilon(v_\epsilon)| &= \left| \int_{\Omega_{\epsilon,-}} \frac{1}{p(x)} |\nabla v_\epsilon|^{p(x)} - \frac{1}{2} |\nabla v_\epsilon|^2 \epsilon_-^{p(x)-2} - \left( \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{2} \right) \epsilon_-^{p(x)} \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_{\Omega_{\epsilon,-}} \frac{1}{p(x)} |\nabla v_\epsilon|^{p(x)} + \frac{1}{2} |\nabla v_\epsilon|^2 \epsilon_-^{p(x)-2} + \left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{2} \right| \epsilon_-^{p(x)} \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中 $\Omega_{\epsilon,\,-} := \{x \in \Omega : |\nabla v_\epsilon| < \epsilon_-\}$。反过来，由于对于所有 $x \in \Omega$， $0 < \epsilon_- < 1$ 和 $p(x) > 1$，我们立即得到

$$|\mathsf{E}(v_\epsilon) - \mathsf{E}_\epsilon(v_\epsilon)| \le \left(\frac{1}{p_-} + 1\right) \epsilon_-^{p_-} |\Omega|, \tag{34}$$

其中 $|\Omega|$ 表示 $\Omega$ 的勒贝格测度。因此，若 $\epsilon \to \infty$，进而 $\epsilon_- \to 0$，则 (34) 右端为零，从而证明了该结论。□

这一结果为证明以下收敛结论铺平了道路。

**定理 4.2**。设 $f$ 满足 $(A_\alpha)$，且满足 (11)。那么，对于任意给定的闭有限维子空间 $X_N \subset W^{1,\,0}{}^{\infty}(\Omega)$，有

$$\lim_{\epsilon\to\infty} \mathsf{E}_\epsilon(u^\star_{\epsilon,N}) = \mathsf{E}(u^\star_N),$$

其中 $u^\star_{\epsilon,N}$ 和 $u^\star_N$ 分别是 $X_N$ 中 *(10)* 和 *(2)* 的唯一离散解 .

证明。引理 4.1 表明，对于与 $\epsilon$ 无关的 $v_\epsilon \equiv u^\star_N$，有 $\lim_{\epsilon\to\infty} \mathsf{E}_\epsilon(u^\star_N) = \mathsf{E}(u^\star_N)$。此外，由于 $u^\star_N$ 是 $\mathsf{E}$ 在 $X_N$ 中的全局极小化子，我们进一步得到

$$\liminf_{\epsilon\to\infty} \mathsf{E}(u^\star_{\epsilon,N}) \ge \mathsf{E}(u^\star_N) = \limsup_{\epsilon\to\infty} \mathsf{E}_\epsilon(u^\star_N) \ge \limsup_{\epsilon\to\infty} \mathsf{E}_\epsilon(u^\star_{\epsilon,N}), \tag{35}$$

其中，最后一个不等式用到了$u^\star_{\epsilon N}$ 是 $X_N$中 $\mathsf{E}_\epsilon$ 的全局极小化子。因此，如果我们能够证明

$$\liminf_{\epsilon\to\infty} \mathsf{E}(u^\star_{\epsilon,N}) = \liminf_{\epsilon\to\infty} \mathsf{E}_\epsilon(u^\star_{\epsilon,N}),$$

那么由 (35) 即可得出结论。特别是，根据引理 4.3，我们只需验证网 $\{u^\star_{\epsilon,N}\}_\epsilon \subset X_N$ 一致有界。因此，任取 $\epsilon \in \mathcal{A}$，即一对满足$0 < \epsilon_- < 1 < \epsilon_+ < \infty$的截断参数。根据假设，$u^\star_{\epsilon N}$ 是松弛离散问题 (10) 的一个解。因此，借助 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mu_\epsilon(x, |\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2)|\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2 \,\mathsf{d}x &= \int_\Omega f u^\star_{N,\epsilon} \,\mathsf{d}x \\ &\le \|f\|_{L^{6/5}(\Omega)} \left\|u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^6(\Omega)} \le C_1 \|f\|_{L^{6/5}(\Omega)} \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^2(\Omega)}; \end{aligned} \tag{36}$$

这里，$C_1 > 0$ 是连续嵌入$H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$的常数，与 $\epsilon$ 和 $X_N$无关。为了确定 (36) 左侧的下界，我们引入集合

$$\Omega_{\epsilon,-} := \{x \in \Omega : |\nabla u^\star_{N,\epsilon}| < 1\} \quad \text{and} \quad \Omega_{\epsilon,+} := \{x \in \Omega : |\nabla u^\star_{N,\epsilon}| \ge 1\}.$$

经过直接计算可得

$$\mu_\epsilon(x, |\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2)|\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2 \ge |\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^r \qquad \text{for all } x \in \Omega_{\epsilon,-}$$

and

$$\mu_\epsilon(x, |\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2)|\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2 \ge |\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^s \qquad \text{for all } x \in \Omega_{\epsilon,+},$$

其中

$$(s, r) := \begin{cases} (p_-, 2) & 1 < p_- \le p_+ < 2, \\ (p_-, p_+) & 1 < p_- \le 2 \le p_+ < \infty, \\ (2, p_+) & 2 < p_- \le p_+ < \infty. \end{cases}$$

因此，我们有

$$\int_\Omega \mu_\epsilon(x, |\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2)|\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2 \,\mathsf{d}x \ge \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|^r_{L^r(\Omega_{\epsilon,-})} + \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|^s_{L^s(\Omega_{\epsilon,+})}. \tag{37}$$

接下来，我们将区分两种情况:

(a) 若 $\left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^s(\Omega_{\epsilon,-})} \geq \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^s(\Omega_{\epsilon,+})}$，则根据集合 $\Omega^\epsilon_{,-}$ 的定义，

$$\left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|^s_{L^s(\Omega_{\epsilon,+})} \leq \int_{\Omega_{\epsilon,-}} |\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^s \,\mathrm{d}x \leq |\Omega_{\epsilon,-}| \leq |\Omega|,$$

进而，

$$\left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|^s_{L^s(\Omega)} = \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|^s_{L^s(\Omega_{\epsilon,+})} + \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|^s_{L^s(\Omega_{\epsilon,-})} \leq 2|\Omega|.$$

特别是，我们得到了统一的有界性 $\mathrm{d}$

$$\left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^s(\Omega)} \leq (2|\Omega|)^{1/s}.$$

(b) 现在假设 $\left\|\nabla u^\star_{N,\ \epsilon}\right\|_{L^s(\Omega_{\epsilon,\ -})} \leq \left\|\nabla u^\star_{N,\ \epsilon}\right\|_{L^s(\Omega_{\epsilon,\ +})}$。那么，结合有限维空间 $X_N$ 中的范数等价性，我们得到

$$\left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^s(\Omega)} \leq 2^{1/s} C_2 \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^s(\Omega_{\epsilon,+})},$$

其中某个常数 $C_2 > 0$ 与 $\epsilon$ 无关（但可能取决于具体的有限维空间 $X_N$）。结合 (36) 可得

$$\int_\Omega \mu_\epsilon(x, |\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2)|\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2 \,\mathrm{d}x \leq 2^{1/s} C_1 C_2 \left\|f\right\|_{L^{6/5}(\Omega)} \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^s(\Omega_{\epsilon,+})}. \tag{38}$$

另一方面，由 (37) 可知，

$$\int_\Omega \mu_\epsilon(x, |\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2)|\nabla u^\star_{N,\epsilon}|^2 \,\mathrm{d}x \geq \left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|^s_{L^s(\Omega_{\epsilon,+})} \tag{39}$$

结合 (38) 和 (39) 得到

$$\left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^s(\Omega_{\epsilon,+})} \leq \left(2^{1/s} C_1 C_2 \left\|f\right\|_{L^{6/5}(\Omega)}\right)^{1/(s-1)},$$

进而，

$$\left\|\nabla u^\star_{N,\epsilon}\right\|_{L^s(\Omega)} \leq 2^{1/s} \left(2^{1/s} C_1 C_2 \left\|f\right\|_{L^{6/5}(\Omega)}\right)^{1/(s-1)};$$

也就是说，我们得到了一个一致有界性。

由于 (a) 和 (b) 涵盖了所有可能的情形，我们验证了 $\{u^\star_{\epsilon,N}\}_\epsilon$ 确实一致有界（相对于 $W^{1,\ 0}{}^{s}$-范数），从而完成了证明。 □

4.2. **关于一列分层离散空间的收敛**。现在假设我们有一列分层离散空间 $\{X_N\}_N$，使得对所有 $N \in \mathbb{N}$，$X_N \subset W^{1,\ 0}{}^{\infty}(\Omega)$，且 $X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_N \subset X_{N+1} \subset \ldots W^{1,\ 0}{}^{\infty}(\Omega)$。我们的目标是推导离散解 $u^\star_N$（式 (2)）在 $X_N$ 中当 $N \in \mathbb{N}$ 时收敛到连续解 $u^\star \in W^{1,\ p(\cdot)\,0}(\Omega)$。为此，我们需要以下预备结果。

**引理 4.3.** 若 $v_N, v \in W^{1,p(\cdot)\,0}(\Omega)$ 且 $\lim_{N\to\infty} \left\|\nabla(v_N - v)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 0$，则对于适当的子序列 $\{v_{N_j}\}_j$，

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla v_{N_j}|^{p(x)} - |\nabla v|^{p(x)}\right) \mathrm{d}x = 0. \tag{40}$$

证明。经过简单推导可得

$$0 \leq \left|\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla v_N|^{p(x)} - |\nabla v|^{p(x)}\right) \mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{p_-} \int_\Omega \left||\nabla v_N|^{p(x)} - |\nabla v|^{p(x)}\right| \mathrm{d}x, \tag{41}$$

因此，只需证明右侧的积分沿某个子序列 $\{N_j\}_j$趋于零。为此，我们首先注意到

$$0 \leq \left||\nabla v_N|^{p(x)} - |\nabla v|^{p(x)}\right| \leq |\nabla v_N|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)} =: g(x) \in L^1(\Omega).$$

此外，根据命题 2.3，在 $W^{1,\ p(\cdot)}_0(\Omega)$ 中的收敛假设意味着 $|\nabla v_N|$ 依测度收敛于 $|\nabla v|$。进而，存在一个子序列 $\{v_{N_j}\}_j$，使得

$|\nabla v_{N_j}|$ 几乎处处收敛于 $|\nabla v|$；例如，参见 [6, 命题 3.1.3]。特别地，我们有

$$\left||\nabla v_{N_j}(x)|^{p(x)} - |\nabla v(x)|^{p(x)}\right| \to 0 \qquad \text{for almost every } x \in \Omega.$$

因此，由控制收敛定理可知

$$\int_\Omega \left||\nabla v_{N_j}|^{p(x)} - |\nabla v|^{p(x)}\right| \,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{as } j \to \infty,$$

结合 (41)，即可证明该结论。 □

**定理 4.4.** 假设离散空间 $X_N$, $N \in \mathbb{N}$ 的并集在 $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$ 中稠密；即，

$$\overline{\bigcup_{N\in\mathbb{N}} X_N}^{\|\cdot\|_{W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)}} = W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega). \tag{42}$$

那么，若 $f$ 满足 $(A_\alpha)$ 且满足 (11)，则当 $N \to \infty$ 时，$\mathsf{E}(u^\star_N) \to \mathsf{E}(u^\star)$。

证明。 我们要证明

$$0 \le \mathsf{E}(u^\star_N) - \mathsf{E}(u^\star) \to 0 \quad \text{as } N \to \infty; \tag{43}$$

第一个不等式成立，因为 $u^\star$ 是 $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$ 中 E 的全局极小化子，且 $u^\star_N \in X_N \subset W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$ 对所有 $N \in \mathbb{N}$ 均成立。此外，由于 $u^\star_N$ 是 $X_N$ 中 E 的全局极小化子，且根据离散空间的嵌套性，即 $X_N \subset X_{N+1}$ 对所有 $N \in \mathbb{N}$ 均成立，我们进一步得到差值 $\mathsf{E}(u^\star_N) - \mathsf{E}(u^\star)$ 单调递减。因此，只需验证 (43) 对 $\{u^\star_N\}_N$ 的任意子序列成立。接下来我们注意到，密度性质 (42) 结合离散空间的嵌套性，保证存在序列 $\mathfrak{u}_N \in X_N$, $N \in \mathbb{N}$，使得

$$\|\mathfrak{u}_N - u^\star\|_{W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)} \to 0 \quad \text{as } N \to \infty. \tag{44}$$

因此，我们可以利用引理 4.3；将满足 (40) 的相应子序列记为 $\{\mathfrak{u}_{N_j}\}_j$。由于 $u^\star_{N_j}$ 是 $X_{N_j}$ 中 E 的全局能量极小值，因此有

$$\begin{aligned} 0 \le \mathsf{E}(u^\star_{N_j}) - \mathsf{E}(u^\star) &\le \mathsf{E}(\mathfrak{u}_{N_j}) - \mathsf{E}(u^\star) \\ &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla \mathfrak{u}_{N_j}|^{p(x)} - |\nabla u^\star|^{p(x)}\right) \mathrm{d}x + \int_\Omega f(\mathfrak{u}_{N_j} - u^\star)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由于 $\{\mathfrak{u}_{N_j}\}_j$ 满足 (40)，上述右端第一项在 $j \to \infty$ 时趋于零。接下来只需验证第二项也同样趋于零。为此，我们先注意到，对于由下式给出的 $s \in C_+(\Omega)$

$$\frac{1}{p^\star(x)} + \frac{1}{\alpha(x)} = \frac{1}{s(x)}, \qquad x \in \Omega$$

我们有 $s(x) \ge 1$。因此，利用命题 2.1 和 2.2 可得

$$\int_\Omega f(\mathfrak{u}_{N_j} - u^\star)\,\mathrm{d}x \le C \left\|f(\mathfrak{u}_{N_j} - u^\star)\right\|_{L^{s(\cdot)}(\Omega)} \le 2C \|f\|_{L^{\alpha(\cdot)}(\Omega)} \left\|\mathfrak{u}_{N_j} - u^\star\right\|_{L^{p^\star(\cdot)}(\Omega)},$$

其中常数 $C > 0$ 与 $N_j$ 无关。根据命题 2.4，我们进一步得到

$$\int_\Omega f(\mathfrak{u}_{N_j} - u^\star)\,\mathrm{d}x \le 2\widetilde{C} \|f\|_{L^{\alpha(\cdot)}(\Omega)} \left\|\nabla(\mathfrak{u}_{N_j} - u^\star)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, \tag{45}$$

其中，$\widetilde{C} > 0$ 仍是一个与 $N_j$ 无关的正数。因此，由于 (44)，(45) 右端为零；证明至此完成。 □

## 5. Numerical experiments

本节将进行一些数值实验，以评估我们的理论结果。具体而言，我们希望通过数值方法考察收敛性与阻尼 Kačanov 迭代步数、松弛参数以及网格尺寸之间的关系。在构造离散子空间时，我们将采用一种 $P1$-有限元格式。具体来说，我们考虑 $\Omega$ 的一系列形状正则协调三角剖分，其中 $\mathcal{T}_{n+1}$ 由对 $\mathcal{T}_n$ 的细化得到。相应的协调有限元空间为

$$X_N := \left\{ u \in W_0^{1,\infty}(\Omega) : u|_K \in \mathbb{P}_1(K) \text{ for all } K \in \mathcal{T}_N \right\},$$

其中，$\mathbb{P}_1(K)$ 表示 $K$ 上所有次数至多为一的多项式所构成的集合。

**注 5.1.** 我们注意到，在给定的 $P1$-有限元方法设置中，当 $\mathcal{T}_N$ 的网格尺寸趋于 0 时，假设 (42) 成立。

我们将考虑以下两个模型方程

$$\text{(MEQ. i)} \quad \int_{\Omega_i} |\nabla u(\mathbf{x})|^{p_i(\mathbf{x})-2} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int f_i(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{for all } v \in W_0^{1,p_i(\mathbf{x})}(\Omega_i), \quad (46)$$

其中

- $\Omega_1 = (-1,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ and $p_1(x,y) = 2.3 + 0.5x + 0.5y$,
- $\Omega_2 = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ and $p_2(x,y) = 1.2 + 2(x^2+y^2)$;

这里，$\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 表示欧几里得坐标。在这两种情况下，源项 $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ 的选取方式使得（46）的精确解为 $u^\star(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$。我们注意到，对于 $i \in \{1,2\}$，变指数 $p_i$ 在阈值 $p = 2$以下和以上均取得值。此外，Kačanov 格式的阻尼参数被选取为固定且小于 1 的值，使得迭代格式能够收敛，但并未进行精细调节。

**实验 5.1**（阻尼 Kačanov 格式的收敛性）。在第一个实验中，我们将研究与（46）对应的离散松弛问题的阻尼 Kačanov 迭代的收敛性，其中 $i \in \{1,2\}$。为此，离散化基于一个三角网格，该网格包含 $\mathcal{O}(10^5)$ 个单元，松弛参数取为 $\epsilon_- = 10^{-6}$ 和 $\epsilon_+ = 10^6$。在这两种情况下，离散松弛解（我们将其称为参考解 $u_{\mathrm{ref},\,i}$）均通过阻尼 Kačanov 格式（30）的 300 次迭代步骤进行近似，初始猜测为精确解（未松弛问题）在单元节点处的线性插值函数。随后，我们考察了误差 $\|\nabla(u_{\mathrm{ref},\,i} - u_i^n)\|_{L^2(\Omega)}$的衰减，其中 $u_i^n$是离散松弛版（MEQ. i）的阻尼 Kačanov 格式（30）的第 $n$ 次迭代结果，$i \in \{1,2\}$。初始猜测分别取为 $u_1^0 \equiv 0$ 和 $u_2^0 = \sin(\pi xy)$，更准确地说，是网格节点处的线性插值函数。我们强调，前一种情况下的初始猜测非常不合理，因为这会导致 $\mu(\mathbf{x}, |\nabla u_1^0|^2) = \epsilon_-^{p_1(\mathbf{x})-2}$，而这取决于$\mathbf{x} \in \Omega$，可能会极小或极大。相应地，双线性型 $\mathsf{A}_\epsilon[u_1^0]$所对应矩阵的元素也具有同样的情况。这很可能就是第一次迭代导致巨大误差 $\|\nabla(u_{\mathrm{ref},\,1} - u_1^1)\|_{L^2(\Omega)}$ 的原因。尽管如此，在初始步骤之后，误差呈现出良好的衰减，见图 1（左）。同样，在第二种情况下，即对于 $i = 2$，随着迭代步骤数的增加，误差也很好地收敛到零，见图 1（右）。此外，由于初始猜测选择得更加合理，与之前相比，初始阶段的误差要小得多。

**实验 5.2**（关于松弛参数的收敛性）。接下来，我们将考察离散松弛问题的解向离散非松弛问题的解收敛的情况。我们使用与前文相同的有限元空间，此外，还将上一项实验中的参考解作为本实验的参考解。这里，对于 $i \in \{1,2\}$，我们首先针对松弛参数 $\epsilon_\pm = 1.4^{\pm k}$，计算式（46）的离散松弛版本的解的逼近 $u_{k,\,i}$。为此，对于固定的 $k$，我们采用阻尼 Kačanov 格式，并在连续两次迭代之间的误差（以 $H_0^1(\Omega)$ 范数衡量）低于 $10^{-10}$ 时立即停止计算。随后，我们

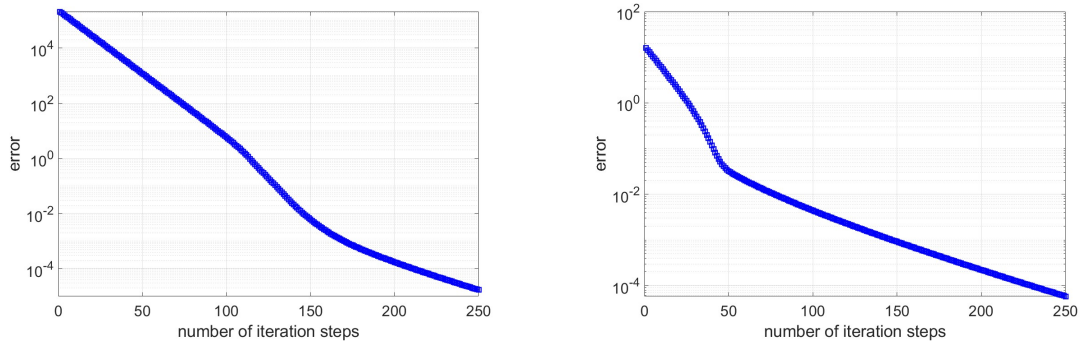



FIGURE 1. 实验 5.1。对于对应于 (MEQ. 1)（左）和 (MEQ. 2)（右）的离散松弛问题，阻尼 Kačanov 格式的收敛性。

绘制误差 $\|\nabla(u_{i,\ k} - u_{\mathrm{ref}})\|_{L^2(\Omega)}$ 随松弛参数的指数 $k$ 变化的曲线。正如我们的理论所预测的（参见定理 4.2）——尽管这里采用了更强的收敛概念——误差随着 $k$ 增大而明显减小，见图 2。

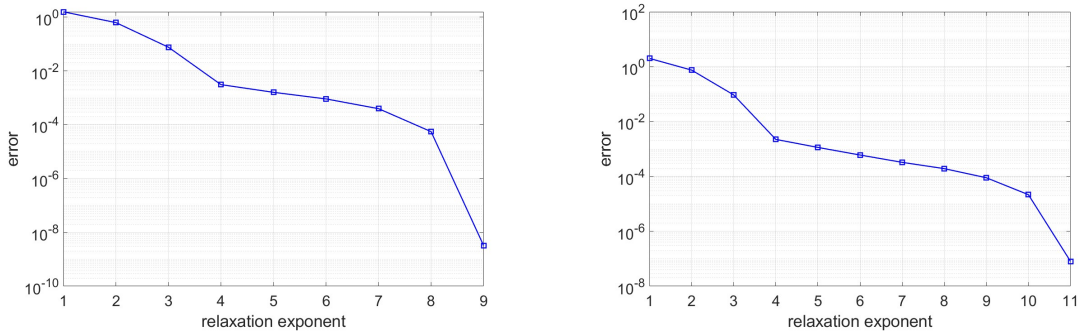



FIGURE 2. 实验 5.2。对于我们的模型问题 (MEQ. 1)（左）和 (MEQ. 2)（右），解关于延续参数 $\epsilon_{\pm} = 1.4^{\pm k}$ 的收敛性。

**实验 5.3**（关于网格尺寸的收敛性）。 在最后一个实验中，我们关注解关于网格尺寸的收敛性。对于每个给定的有限元空间$X_N$，我们采用阻尼 Kačanov 格式来近似离散非松弛问题的解 $u_N^\star$；对于松弛问题，使用与前面相同的停止策略，松弛参数为 $\epsilon_{\pm} = 10^{-6}$。我们从粗略的均匀网格 $\mathcal{T}_0$ 开始此实验，并通过均匀网格细化从 $\mathcal{T}_N$得到 $\mathcal{T}_{N+1}$。图 3 展示了误差 $\|\nabla(u_N^\star - u^\star)\|_{L^2(\Omega)}$ 随网格中单元数量 $\mathcal{T}_N$变化的收敛情况；这里，我们确实考虑模型问题 (MEQ. i) 的精确解 $u^\star(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$，其中$i \in \{1,2\}$；参见 (46)。如图 3 所示，两种情况下误差都呈线性衰减。

## 6. CONCLUSIONS

本文研究了离散松弛 $p(x)$-Poisson 方程的一些收敛性质。首先，我们设计了一种迭代格式，可生成一个收敛到松弛问题之解的序列，无论是在离散情形还是连续情形下。随后，我们证明，在有限维子空间上，松弛问题的解收敛到原始未松弛方程的解。最后，在对离散

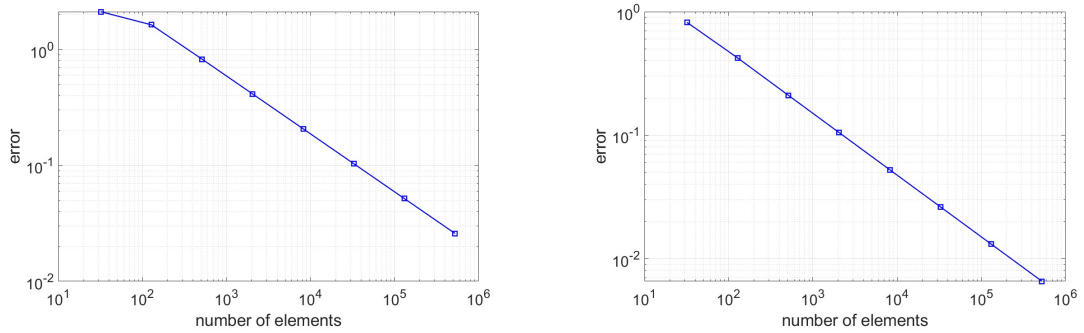



FIGURE 3. 实验 5.3. 网格单元数量对收敛性的影响。左图为我们的模型问题（MEQ. 1），右图为（MEQ. 2）。

空间作出适当假设的条件下，我们推导出了离散解收敛到连续解的结论。诚然，我们尚未构造出一个可计算序列，使其收敛到连续未松弛 $p(x)$-Poisson 方程的解。不过，这将留待未来研究。具体而言，我们希望设计一种算法，综合运用阻尼 Kačanov 迭代格式、增大松弛参数以及对离散空间进行分层加密，从而生成一个可计算且保证收敛到所求解的序列。

## REFERENCES

1. J. Storn、A. KH. Balci、L. Diening, *Relaxed kačanov scheme for the p-laplacian with large p*, 技术报告 2210.06402, arxiv.org, 2022年。2. J. W. Barrett 和 W. B. Liu, *Finite element error analysis of a quasi-Newtonian flow obeying the Carreau or power law* **64** 1993 4, 433 453 , 《Numer. Math.》（），第 – 期。3. B. Cekic、A.V. Kalinin、R.A. Mashiyev 和 M. Avci, *$L^{p(x)}(\Omega)$ estimates of vector fields and some applications to magnetostatics problems* **389** 2012 2, 838 851 , 《Journal of Mathematical Analysis and Applications》（），第 – 期。4. Y. Chen、S. Levine 和 M. Rao, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, 《SIAM Journal on Applied Mathematics》66（2006年），第 4 期，1383–1406。5. Y. Chen、S. Levine 和 J. Stanich, *Image restoration via nonstandard diffusion*, 技术报告，杜肯大学，2004 年。6. D. L. Cohn, *Measure theory*, 第 2 版，Birkh¨auser 高级教材：Basler Lehrb¨ucher，Birkh¨auser/Springer，纽约，2013。MR 3098996 7. L. Diening、M. Fornasier、R. Tomasi 和 M. Wank, *A relaxed Kačanov iteration for the p-Poisson problem*, 《Numer. Math.》145（2020 年），第 1 期，1–34。8. L. Diening、P. Harjulehto、P. H¨ast¨o 和 M. R˚uˇziˇcka, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, 《Lecture Notes in Mathematics》，第 2017 卷，2790542 9 2011 Springer，海德堡，。MR。Lars Diening, *Theoretical and numerical results for electrorheological fluids*, 博士论文，Albert–Ludwigs–Universit¨at Freiburg，2002。10. C. D'Apice、P. Kogut、O. Kupenko 和 R. Manzo, *On a variational problem with a nonstandard growth functional and its applications to image processing* 2022 1 20 , 《Journal of Mathematical Imaging and Vision》（），–。11. X. Fan 和 D. Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,\,p(x)}(\Omega)$*, 《Journal of Mathematical Analysis and Applications》263（2001 年），第 2 期，424–446。12. Xian-Ling Fan 和 Qi-Hu Zhang, *Existence of solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problem*, 《Nonlinear Anal.》 **52** 2003 8, 1843 1852 1954585（），第 – 期。MR。P. Heid 和 E. Suli, *On the convergence rate of the Kačanov scheme for shear-thinning fluids*, 《Calcolo》59（2022 4345847 14 1, 4, 27），第 Paper No. 期。MR。P. Heid 和 T.P. Wihler, *A modified Kačanov iteration scheme with application to quasilinear diffusion models*, 《ESAIM Math. Model. Numer. Anal.》56 4382751 15 2022 2, 433 450（），第 – 期。MR。F. Karami、K. Sadik 和 L. Ziad, *A variable exponent nonlocal p(x)-laplacian equation for image restoration*, 《Computers & Mathematics with Applications》75（2018 年），第 2 期，534–546。16. K.R. Rajagopal 和 M. R˚uˇziˇcka, *On the modeling of electrorheological materials*, 《Mechanics Research Communications》23（1996 年），第 4 期，401–407。17. M. R˚uˇziˇcka, *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, 《Lecture Notes in Mathematics》，第 1748 卷，Springer-Verlag，柏林，2000 年。MR 1810360

18. J. Tiirola, *Image decompositions using spaces of variable smoothness and integrability*, 《SIAM Journal on Imag- ing Sciences》 **7** （2014年），第 3 期，1558–1587。19. Z. Yi 和 Y. Ge, *A variable exponent p-laplace variational model preserving texture for image interpolation*，2017 2017，36 41，《IEEE冬季计算机视觉应用研讨会》（WACVW），第 – 页。20. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B*，Springer-Verlag，纽约，1990年。21. D. Zhang、K. Shi、Z. Guo 和 B. Wu, *A class of elliptic systems with discontinuous variable exponents and l1 data for image denoising*, 《非线性分析：现实世界应用》**50** （2019年），448–468。