arXiv:2304.01591v1 [math.RA] 4 Apr 2023

上三角矩阵代数上线性多项式的像

Yingyu Luo 数学学院，长春师范大学，中国长春 130032。电子邮箱：luoyingyu1980@163.com Qian Chen*数学系，上海师范大学，中国上海 200234。电子邮箱：qianchen0505@163.com

Abstract. Fagundes-Mello 猜想断言，上三角矩阵代数上的每个多线性多项式的像都是一个向量空间。这是著名的 Lvov-Kaplansky 猜想的一个重要变体。本文旨在描述在基域满足一个较弱条件时，上三角矩阵代数上零常数项线性多项式的像。由此，我们改进了关于 Fagundes-Mello 猜想的所有结果。作为另一项推论，我们改进了 Fagundes 和 Koshlukov 关于上三角矩阵代数上多线性分次多项式的像的一些结果。

1. Introduction

设 $n \geq 2$ 为整数。设 K 为域，并设 $K\langle X\rangle$为由可数个非交换变量集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ 自由生成的 K 上的自由结合代数。我们将 $K\langle X\rangle$ 中的元素称为多项式。

在代数上求值的多项式的像在非交换代数中发挥着重要作用。特别是，在 Formanek [19] 和 Razmyslov [28]在矩阵代数上构造出中心多项式之后，许多与多项式恒等式理论相关的各种难题都得到了解决。

古老而著名的 Lvov-Kaplansky 猜想断言：

猜想 1.1. [13] 设 f 是一个多线性多项式。那么 f 在域 K 上的矩阵代数 $M_n(K)$ 上的取值集合是一个向量空间。

关于二次多项式的一个特殊情形早已为人所知（参见 [1,30]）。2013年，Mesyan [26] 将这一结果推广到了次数为三的非零多线性多项式。同年，Buzinski 和 Winstanley [7] 将这一结果推广到了次数为四的非零多线性多项式。

2012年，Kanel-Belov、Malev 和 Rowen [4] 完整描述了二次封闭域上 2×2 矩阵代数中半齐次多项式的像。因此，他们解决了关于 $n = 2$的猜想 1.1。2016年，他们完整描述了一个多线性多项式的像。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 16S50, 15A54.*Key words and phrases.* Lvov-Kaplansky 猜想、Fagundes-Mello 猜想、线性多项式、多重线性多项式、上三角矩阵代数。

* 通讯作者。

其在域 K 上的 3×3 矩阵中具有迹为零的性质（参见定理 4]）。我们指出，对于 $n = 3$, 猜想 1.1 仍未得到解决。

然而，尽管付出了诸多努力，猜想 1.1 似乎仍远未得到解决。2020 年，Brešar [9] 提出了猜想 1.1 的一些粗略近似版本，或者至少试图从不同视角来研究这一猜想。

为研究猜想 1.1，人们对它的一些变体进行了广泛研究。例如，研究者讨论了李代数 [2, 29] 和约旦代数 [22, 24] 上低次多线性多项式的像。2021年，Malev[23] 完整描述了在四元数代数上取值的多线性多项式的像。2021年，Vitas [31] 证明，对于任意非零多线性多项式 p，若 $\mathcal{A}$ 是具有满射内导子的代数（例如 Weyl 代数），则 $p(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$。2022年，Kanel-Belov、Malev、Pines 和 Rowen [3]研究了八元数代数上多线性多项式和半齐次多项式的像。最近，Centrone 和 Mello [10] 研究了矩阵代数上分次多项式的像。关于多项式像的最新成果，建议参阅综述论文 [6]。

所有 $n \times n$ 域 K 上的上三角矩阵组成的集合记为 UT_n。所有 $n \times n$ 严格上三角矩阵组成的集合记为 $UT_{(0)n}$。更一般地，若 $t \geq 0$，则所有满足以下条件的上三角矩阵组成的集合记为 $UT_{(t)n}$：对于 $j - i \leq t$，其第 (i, j) 个元素均为零。为方便起见，令$UT_{(-1)n} = UT_n$。容易验证，对于所有 $k \geq 1$，都有 $J = UT_{(0)n}$ 和 $J^k = UT_{(k-1)n}$，其中 J 是 UT_n 的雅各布森根（见 [8, 例 5.58]）。

2019年，Fagundes [16] 对域上的严格上三角矩阵代数中的多线性多项式的像作出了完整描述。同年，Fagundes 和 Mello [17] 讨论了上三角矩阵代数中次数不超过四的多线性多项式的像。他们提出了对猜想 1.1 的以下重要变体：

猜想 1.2. [17, 猜想 1] 域 K 上关于 UT_n 的多线性多项式的像总是一个向量空间。

2019年，Wang [32] 对 $n = 2$ 给出了猜想 1.2 的肯定回答（另见[33]，其中对该论文作了更正）。我们指出，Fagundes 在其硕士学位论文中以极其简洁的证明对 $n = 2$ 给出了猜想 1.2 的肯定回答（见 [15]），但论文以葡萄牙语撰写，且这一结果未在其他地方发表。

2021年，Mello [25] 对无限域上的 $n = 3$ 给出了猜想 1.2 的肯定回答。2022年，Gargate 和 Mello [20] 对无限域上的猜想 1.2 给出了肯定回答。同年，Luo 和 Wang [21] 在基域 K满足一个较弱条件的情况下，给出了猜想 1.2 的肯定回答。具体而言，他们得到了以下结果：

定理 1.1。 [21, 定理 1.1] 设 K 是一个域，设 $m \geq 1$ 是一个整数，设$n \geq 2$是一个整数。设 $p(x_1, \ldots, x_m)$ 是 K 上非交换变量的非零多线性多项式。假设 $|K| > {}^{n}{}_{(n-1)\ 2}$。我们有$p(UT_n) = UT_{(t)n}$，其中某个整数为 $-1 \leq t \leq \frac{m}{2} - 1$。

作为定理 1.1 的一个应用，Fagundes 和 Koshlukov [18] 研究了域上的上三角矩阵代数中多线性分次多项式的像。

2021年，Wang、Zhou 和 Luo [34] 给出了代数闭域上 2×2 上三角矩阵代数中零常数项多项式的像的完整描述。2022年，Chen、Luo 和 Wang [11] 给出了代数闭域上 3×3 上三角矩阵代数中零常数项多项式的像的完整描述。同年，Panja 和 Prasad [27] 讨论了代数闭域上上三角矩阵代数中零常数项多项式的像的若干情形。最近，Chen [12] 给出了代数闭域上上三角矩阵代数中零常数项多项式的像的完整描述。

在本文中，我们将在关于基域的一个温和条件下，给出上三角矩阵代数上线性多项式（其常数项为零）的像的完整描述。更确切地说，我们将证明以下结果。

定理 1.2. 设 K 为一个域，设 $m\geq 1$ 为一个整数，设 $n\geq 2$ 为一个整数。设 $p(x_1,\dots,x_m)$ 是K上的非交换变量中的一个非零线性多项式。假设 $|K|>{}^{n}{}_{(n-1)\,3}$。我们有 $p(UT_n)=UT_{(t)n}$，其中$-1\leq t\leq \frac{m}{2}-1$为某个整数。

作为定理 1.2 的推论，我们得到以下结果，它显然改进了定理 1.1。

推论 1.1. 设 K 为一个域，设 $m\geq 1$ 为一个整数，设 $n\geq 2$ 为一个整数。设 $p(x_1,\dots,x_m)$ 为 K 上非交换变量的一个非零多线性多项式。假设 $|K|>{}^{n}{}_{(n-1)\,3}$。我们有 $p(UT_n)=UT_{(t)n}$，其中某个整数为 $-1\leq t\leq \frac{m}{2}-1$。

本文安排如下：在第 2 节中，我们将介绍一些预备知识。在第 3 节中，我们将给出定理 1.2 的证明。在第 4 节中，作为推论 1.1 的一个应用，我们将改进 Fagundes 和 Koshlukov 在 [18] 中得到的两个结果。

我们指出，定理 1.2 的证明与定理 1.1 的证明完全不同。我们还指出，定理 1.2 的证明源于两个方面：一方面来自 [12], 中的一些论证，另一方面来自一些新的论证。

2. PRELIMIARIES

用 $\mathcal{N}$ 表示所有正整数构成的集合。设 K 是一个域。对于满足 $n\geq 2$ 的 $n\in\mathcal{N}$，我们可以写成

$$UT_n=\begin{pmatrix} UT_{n-1} & K^{n-1}\\ & K\end{pmatrix}.$$

设 $\mathcal{A}$ 是 K 上的代数。用 $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 的所有多项式恒等式的集合。那么不难看出

$$\mathcal{T}(K)\supset\mathcal{T}(UT_2)\supset\mathcal{T}(UT_3)\supset\cdots.$$

因此，给定一个以 K 上的非交换变量为变量的多项式 $p(x_1,\ldots,x_m)$，我们将其阶定义为满足 $p\in\mathcal{T}(UT_m)$ 但 $p\notin\mathcal{T}(UT_{m+1})$ 的最小整数 m。注意，$T_1(K)=K$。若 $p\notin\mathcal{T}(K)$，则多项式 p 的阶为 0。我们用 $\mathrm{ord}(p)$ 表示 p 的阶。关于多项式阶的详细介绍，请参阅书籍 [14, 第 5] 章。

我们指出，$\mathcal{T}(UT_n)$ 的结构实际上已为人所知。例如，当 K 是无限域时，$\mathcal{T}(UT_n)$ 的基已在 [14, 定理 5.4], 中得到描述。在有限域的情形下，也存在类似的结论。

假设 $p(x_1,\ldots,x_m)$ 是 K 上一个非零的零常数项多项式。设 p 的阶为 $=r$，其中 $r\geq 2$。由于 $p(UT_r)=\{0\}$，我们很容易验证 $2r\leq m$。

设 $m,k\in\mathcal{N}$。我们定义

$$T_m^k=\left\{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{N}^k\mid 1\leq i_1,\ldots,i_k\leq m,\ i_s\neq i_t \text{ for all } s\neq t\right\}.$$

设 $p(x_1,\ldots,x_m)$ 是域 K 上一个零常数项的线性多项式。我们可以写成

$$p(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in T_m^k}\lambda_{i_1\cdots i_k}x_{i_1}\cdots x_{i_k}\right),\tag{1}$$

其中 $\lambda_{i_1\cdots i_k}\in K$。

以下结果与 [12, 引理 3.2] 类似。为求完整起见，我们给出其证明。

命题 2.1. 设 $p(x_1,\ldots,x_m)$ 是域 K 上关于非交换变量的一个零常数项线性多项式。对于 $u_i=(a_{jk}^{(i)})\in UT_n$, $i=1,\ldots,m$，我们定义

$$\bar{a}_{jj}=(a_{jj}^{(1)},\ldots,a_{jj}^{(m)})$$

对所有 $j=1,\ldots,n$ 均成立。我们有

$$p(u_1,\ldots,u_m)=(p_{st}),\tag{2}$$

其中，对所有 $s=1,\ldots,n$，$p_{ss}=p(\bar{a}_{ss})$，并且

$$p_{st}=\sum_{k=1}^{t-s}\left(\sum_{\substack{s=j_1<j_2<\cdots<j_{k+1}=t\\(i_1,\ldots,i_k)\in T_m^k}}p_{i_1\cdots i_k}(\bar{a}_{j_1j_1},\ldots,\bar{a}_{j_{k+1}j_{k+1}})a_{j_1j_2}^{(i_1)}\cdots a_{j_kj_{k+1}}^{(i_k)}\right)$$

对于所有 $1\leq s<t\leq n$，其中 $p_{i_1,\ldots,i_k}(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_{k+1})$ 是域 K 上关于 $m(k+1)$ 个变量的多项式，其中 $k=1,\ldots,n-1$。

证明。对于任意 $(i_1,\ldots,i_k)\in T_m^k$, $k=1,\ldots,m$，我们很容易验证

$$u_{i_1}\cdots u_{i_k}=(m_{st}),$$

其中

$$m_{st}=\sum_{s=j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_{k+1}=t}a_{j_1j_2}^{(i_1)}\cdots a_{j_kj_{k+1}}^{(i_k)}$$

对所有 $1\leq s\leq t\leq n$ 均成立。由 (1) 可得

$$
\begin{aligned}
p(u_1,\dots,u_m) &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in T_m^k}\lambda_{i_1\cdots i_k}u_{i_1}\cdots u_{i_k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in T_m^k}\lambda_{i_1\cdots i_k}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n}\\ 0 & m_{22} & \dots & m_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & m_{nn}\end{pmatrix}\right)\\
&= (p_{st}),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
p_{st} &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in T_m^k}\lambda_{i_1\cdots i_k}m_{st}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in T_m^k}\lambda_{i_1\cdots i_k}\left(\sum_{s=j_1\le j_2\le\cdots\le j_{k+1}=t}a_{j_1j_2}^{(i_1)}\cdots a_{j_kj_{k+1}}^{(i_k)}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{\substack{s=j_1\le j_2\le\cdots\le j_{k+1}=t\\(i_1,\dots,i_k)\in T_m^k}}\lambda_{i_1\cdots i_k}a_{j_1j_2}^{(i_1)}\cdots a_{j_kj_{k+1}}^{(i_k)}\right),
\end{aligned}
$$

其中 $1\le s\le t\le n$。我们得到 马会。

$$
\begin{aligned}
p_{ss} &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in T_m^k}\lambda_{i_1\cdots i_k}a_{ss}^{(i_1)}\cdots a_{ss}^{(i_k)}\right)\\
&= p(\bar{a}_{ss}),
\end{aligned}
$$

对于所有 $s=1,\dots,n$, 以及

$$
\begin{aligned}
p_{st} &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{\substack{s=j_1\le j_2\le\cdots\le j_{k+1}=t\\(i_1,\dots,i_k)\in T_m^k}}\lambda_{i_1\cdots i_k}a_{j_1j_2}^{(i_1)}\cdots a_{j_kj_{k+1}}^{(i_k)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{t-s}\left(\sum_{\substack{s=j_1<j_2<\cdots<j_{k+1}=t\\(i_1,\dots,i_k)\in T_m^k}}p_{i_1\cdots i_k}(\bar{a}_{j_1j_1},\dots,\bar{a}_{j_{k+1}j_{k+1}})a_{j_1j_2}^{(i_1)}\cdots a_{j_kj_{k+1}}^{(i_k)}\right)
\end{aligned}
$$

对于所有 $1\le s<t\le n$, 其中 $p_{i_1,\dots,i_k}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_{k+1})$ 是定义在域 K 上、关于 $m(k+1)$ 个变量的多项式, 其中 $k=1,\dots,n-1$。这就证明了该结论。□

3. THE PROOF OF THEOREM 1.2

设 $p(x_1,\dots,x_m)$ 是 K 上无零常数项的线性多项式。对于任意 $(i_1,\dots,i_k)\in T_m^k$, $k=1,\dots,m$, 我们用 $\alpha_{i_1\cdots i_k}$ 表示 $p(x_1,\dots,x_m)$ 中由 $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ 组成的所有单项式的系数之和。

我们先给出以下结果, 该结果本身也具有一定的独立意义。

引理 3.1。设 $m \geq 1$ 为整数。设 K 为域。设 $p(x_1, \ldots, x_m)$ 为 K 上的零常数项线性多项式。假设 $p(K) \neq \{0\}$。则有 $p(K) = K$。

证明。对于任意 $a_1, \ldots, a_m \in K$，由 (1) 可得

$$\begin{aligned} p(a_1, \ldots, a_m) &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in T_m^k} \lambda_{i_1 \cdots i_k} a_{i_1} \cdots a_{i_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_k} a_{i_1} \cdots a_{i_k} \right). \end{aligned} \tag{3}$$

由于 $p(K) \neq \{0\}$，我们有一个最小整数 $r \geq 1$ 使得

$$\alpha_{i'_1 \cdots i'_r} \neq 0$$

对于某个 $1 \leq i'_1 < \cdots < i'_r \leq m$。我们将 (3) 改写如下：

$$p(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{k=r}^{m} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_k} a_{i_1} \cdots a_{i_k} \right). \tag{4}$$

对于任意 $a' \in K$，我们取 $a_i \in K, i = 1, \ldots, m$，其中

$$\begin{cases} a_{i'_1} = \alpha_{i'_1 \cdots i'_r}^{-1} a'; \\ a_{i'_k} = 1_K, \quad k = 2, \ldots, r; \\ a_i = 0, \quad \text{for all } i \notin \{i'_1, \ldots, i'_r\}. \end{cases}$$

由 (4) 可得

$$\begin{aligned} p(a_1, \ldots, a_m) &= \alpha_{i'_1 \cdots i'_r} a_{i'_1} \cdots a_{i'_r} \\ &= \alpha_{i'_1 \cdots i'_r} \alpha_{i'_1 \cdots i'_r}^{-1} a' \\ &= a'. \end{aligned}$$

这意味着 $p(K) = K$。由此得证。 □

使用与引理 3.1相同的论证，我们可以得到以下结果。

引理 3.2。设 $n \geq 2$ 和 $m \geq 1$ 为整数。设 K 为域。设 $p(x_1, \ldots, x_m)$ 为 K 上的零常数项线性多项式。假设 $p(K) \neq \{0\}$。我们有 $p(UT_n) = UT_n$。

证明。对于任意的 $u_1, \ldots, u_m \in UT_n$，若对所有 i 都有 $u_i u_j = u_j u_i$，则由 (1) 可得 $j = 1, \ldots, m$，从而得到

$$\begin{aligned} p(u_1, \ldots, u_m) &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in T_m^k} \lambda_{i_1 \cdots i_k} u_{i_1} \cdots u_{i_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_k} u_{i_1} \cdots u_{i_k} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

由于 $p(K) \neq \{0\}$，我们可知存在最小整数 $r \geq 1$，使得

$$\alpha_{i'_1 \cdots i'_r} \neq 0$$

对某个 $1 \le i'_1 < \cdots < i'_r \le m$ 成立。我们将 (5) 改写如下:

$$p(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{k=r}^{m} \left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \alpha_{i_1 \cdots i_k} u_{i_1} \cdots u_{i_k} \right). \tag{6}$$

对于任意 $u' \in UT_n$, 我们取 $u_i \in UT_n$, $i = 1, \ldots, m$, 其中

$$\begin{cases} u_{i'_1} = \alpha^{-1}_{i'_1 \cdots i'_r} u'; \\ u_{i'_k} = 1_{UT_n}, \quad k = 2, \ldots, r; \\ u_i = 0, \quad \text{for all } i \notin \{i'_1, \ldots, i'_r\}. \end{cases}$$

注意, 对于所有 $i, j = 1, \ldots, m$, $u_i u_j = u_j u_i$。由 (6) 可得

$$\begin{aligned} p(u_1, \ldots, u_m) &= \alpha_{i'_1 \cdots i'_r} u_{i'_1} \cdots u_{i'_r} \\ &= \alpha_{i'_1 \cdots i'_r} \alpha^{-1}_{i'_1 \cdots i'_r} u' \\ &= u'. \end{aligned}$$

这意味着 $p(UT_n) = UT_n$。这证明了该结果。 □

下述结果与 [12, 引理 3.6] 类似。为完整起见, 我们给出其证明。

引理 3.3. 设 $p(x_1, \ldots, x_m)$ 是 K 上的一个零常数项线性多项式。设 $p_{i_1, \ldots, i_k}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{k+1})$ 是 (2) 中 K 上的一个关于 $m(k+1)$ 个变量的多项式, 其中 $k = 1, \ldots, n-1$。对于任意 $1 \le r \le n-1$, 我们有, $\mathrm{ord}(p) = r$ 当且仅当

(i) $p(K) = \{0\}$;
(ii) $p_{i_1 \cdots i_s}(K) = \{0\}$ *for all* $(i_1, \ldots, i_s) \in T^s_m$, *where* $s = 1, \ldots, r-1$ *and* $r \ge 2$;
(iii) $p_{i'_1 \cdots i'_r}(K) \ne \{0\}$ *for some* $(i'_1, \ldots, i'_r) \in T^r_m$.

证明。假设陈述 (i)、(ii) 和 (iii) 均成立。我们断言 $\mathrm{ord}(p) = r$。由陈述 (i) 可知, $\mathrm{ord}(p) \ge 1$。

鉴于陈述 (iii), 我们有

$$p_{i'_1, \ldots, i'_r}(K) \ne \{0\}$$

对某个 $(i'_1, \ldots, i'_r) \in T_r$。我们有 $b_s \in K^m$, $s = 1, \ldots, r+1$ 存在, 使得

$$p_{i'_1, \ldots, i'_r}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{r+1}) \ne 0.$$

我们取 $u_i = (a^{(i)}_{jk}) \in T_{r+1}(K)$、$i = 1$、.....、$m$, 其中

$$\begin{cases} \bar{a}_{ss} = \bar{b}_s, \quad \text{for all } s = 1, \ldots, r+1; \\ a^{(i'_s)}_{s,s+1} = 1, \quad \text{for all } s = 1, \ldots, r; \\ a^{(i)}_{jk} = 0, \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

由陈述 (ii) 和 (2) 可得

$$\begin{aligned} p_{1,r+1} &= \sum_{\substack{1 = j_1 < j_2 < \cdots < j_{r+1} = r+1 \\ (i_1, \ldots, i_r) \in T^r_m}} p_{i_1 \cdots i_r}(\bar{a}_{j_1 j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_{r+1} j_{r+1}}) a^{(i_1)}_{j_1 j_2} \cdots a^{(i_r)}_{j_r j_{r+1}} \\ &= p_{i'_1, \ldots, i'_r}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{r+1}) a^{(i'_1)}_{12} \cdots a^{(i'_r)}_{r,r+1} \\ &= p_{i'_1, \ldots, i'_r}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{r+1}) \ne 0. \end{aligned}$$

这意味着 $p(T_{r+1}(K)) \neq \{0\}$。对于任意 $u_i = (a_{jk}^{(i)}) \in T_r(K)$、$i = 1$、……、$m$，由陈述 (i)、陈述 (ii) 以及 (2) 可得

$$p(u_1, \ldots, u_m) = (p_{st}), \tag{7}$$

其中，对于所有 $s = 1$、……、n，均有 $p_{ss} = 0$。

$$\begin{aligned} p_{st} &= \sum_{k=1}^{t-s} \left(\sum_{\substack{s=j_1<j_2<\cdots<j_{k+1}=t \\ (i_1,\ldots,i_k)\in T_m^k}} p_{i_1 i_2 \cdots i_k}(\bar{a}_{j_1 j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_{k+1} j_{k+1}}) a_{j_1 j_2}^{(i_1)} \cdots a_{j_k j_{k+1}}^{(i_k)} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

对所有 $1 \leq s < t \leq r$。这意味着 $p(T_r(K)) = \{0\}$。我们得到 $\operatorname{ord}(p) = r$。假设 $\operatorname{ord}(p) = r$。我们断言陈述 (i)、(ii) 和 (iii) 均成立。由于 $r \geq 1$，我们得到陈述 (i) 成立。现在我们断言陈述 (ii) 成立。反设】【。

$$p_{i'_1,\ldots,i'_s}(K) \neq \{0\}$$

¯对于某个 $(i'_1, \ldots, i'_s) \in T_m^s$，其中 $1 \leq s \leq r-1$。那么存在 $b_j \in K^m$，其中 $j = 1$，$\ldots$，$s+1$ 使得

$$p_{i'_1,\ldots,i'_s}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{s+1}) \neq 0.$$

我们取 $u_i = (a_{jk}^{(i)}) \in T_{s+1}(K)$、$i = 1$、……、$m$，其中

$$\begin{cases} \bar{a}_{tt} = \bar{b}_t, & \text{for all } t = 1, \ldots, s+1; \\ a_{t,t+1}^{(i'_t)} = 1, & \text{for all } t = 1, \ldots, s; \\ a_{jk}^{(i)} = 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由 (2) 可得

$$\begin{aligned} p_{1,s+1} &= \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{\substack{1=j_1<j_2<\cdots<j_{k+1}=s+1 \\ (i_1,\ldots,i_k)\in T_m^k}} p_{i_1 \cdots i_k}(\bar{a}_{j_1 j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_{k+1} j_{k+1}}) a_{j_1 j_2}^{(i_1)} \cdots a_{j_k j_{k+1}}^{(i_k)} \right) \\ &= p_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_s}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{s+1}) \neq 0. \end{aligned}$$

这意味着 $p(T_{s+1}(K)) \neq \{0\}$，矛盾。这就证明了陈述 (ii)。

最后，我们断言陈述 (iii) 成立。注意到 $p(T_{1+r}(K)) \neq \{0\}$。因此，我们有 $u_i = (a_{jk}^{(i)}) \in T_{1+r}(K)$、$i = 1$、……、$m$ 存在，使得

$$p(u_1, \ldots, u_m) = (p_{st}) \neq 0.$$

根据陈述 (ii)，我们可得

$$\begin{aligned} p_{1,r+1} &= \sum_{\substack{1=j_1<j_2<\cdots<j_{r+1}=r+1 \\ (i_1,\ldots,i_r)\in T_m^r}} p_{i_1 i_2 \cdots i_r}(\bar{a}_{j_1 j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_{r+1} j_{r+1}}) a_{j_1 j_2}^{(i_1)} \cdots a_{j_r j_{r+1}}^{(i_r)} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

这意味着，对于某个 $(i'_1, \ldots, i'_r) \in T_m^r$，有 $p_{i'_1,\ldots,i'_r}(K) \neq \{0\}$。这证明了陈述 (iii)。该结果的证明至此完成。□

以下结果对于证明我们的主要结果至关重要，而该结果本身也具有独立的研究价值。

引理 3.4。设 r，$s \geq 1$ 是一个整数。设 K 是一个域。设 $U_i = \{i_1, \ldots, i_r\}$ 是 $\mathcal{N}$、$i = 1$、.....、s 的子集。设 $f_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ 是域 K 上的线性多项式，使得 $f_i(K) \neq \{0\}$、$i = 1$、.....、s。对于任意 $u \in \bigcup_{i=1}^{s} U_i$，我们令

$$l(u) = \{i \in \{1, \ldots, s\} \mid u \in U_i\}.$$

假设re热

$$|K| > max_{u \in \bigcup_{i=1}^{s} U_i}\{|l(u)|\}.$$

我们有 $c_u \in K$、$u \in \bigcup_{i=1}^{s} U_i$ 的存在，使得

$$f_i(c_{i_1}, \ldots, c_{i_r}) \neq 0$$

对所有 $i = 1, \ldots, s$。

证明。不失一般性，我们可以假设做爰片

$$\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{i=1}^{s} U_i.$$

我们设

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$$

对所有 $i = 1, \ldots, s$。显然，g_i是 K 上的线性多项式，使得$g_i(K) \neq \{0\}, i = 1, \ldots, s$。

对于任意 $i \in \{1, \ldots, s\}$，由于 $g_i(K) \neq \{0\}$，我们有存在 $c_1^{(i)}$，$\ldots$，$c_n^{(i)} \in K$ 使得

$$g_i(c_1^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)}) \neq 0. \tag{8}$$

我们设

$$h_i^{(1)}(x_1) = g_i(x_1, c_2^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)})$$

对于所有 $i = 1$，.....，s。由 (8) 可得

$$h_i^{(1)}(c_1^{(i)}) \neq 0$$

对于所有 $i = 1, \ldots, s$。我们看到，对于所有 $i = 1, \ldots, s$，$h_i^{(1)}(x_1) \neq 0$。由于 $|K| > |l(1)|$，且 $h_i^{(1)}(x_1)$ 是一个非零线性多项式，$i = 1, \ldots, s$，因此存在 $c_1 \in K$，使得

$$h_i^{(1)}(c_1) \neq 0$$

对于所有 $i = 1$、.....、s。也就是说

$$g_i(c_1, c_2^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)}) \neq 0 \tag{9}$$

对于所有 $i = 1, \ldots, s$. 同样地，我们设

$$h_i^{(2)}(x_2) = g_i(c_1, x_2, c_3^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)})$$

对所有 $i = 1$、$\ldots$、s。由 (9) 可得

$$h_i^{(2)}(c_2^{(i)}) \neq 0$$

对所有 $i = 1, \ldots, s$ 均成立。由此可得，对所有 $i = 1, \ldots, s$，$h_i^{(2)}(x) \neq 0$。由于 $|K| > |l(2)|$，且 $h_i^{(2)}(x_2)$ 是一个非零线性多项式，$i = 1, \ldots, s$，因此存在 $c_2 \in K$，使得

$$h_i^{(2)}(c_2) \neq 0$$

对于所有 $i = 1$、.....、 s。也就是说

$$g_i(c_1, c_2, c_3^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)}) \neq 0$$

对所有 $i = 1, \ldots, s$ 都成立。继续沿用上述论证，我们可以得到存在 $c_3, \ldots, c_n \in K$，使得

$$g_i(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$$

对所有 $i = 1$、.....、 s 均成立。这意味着存在 $c_u \in K$、 $u \in \bigcup_{i=1}^{s} U_i$，使得

$$f_i(c_{i_1}, \ldots, c_{i_r}) \neq 0$$

对于所有 $i = 1, \ldots, s$。这就证明了该结果。 □

鉴于引理 3.4，我们可以得到以下对证明主要结果至关重要的结果。

引理 3.5. 设 $n \geq 2$ 是一个整数，设 $1 \leq r \leq n-1$ 是一个整数。设 K 是一个域。设

$$f_{s,r+s+t}(\bar{x}_s, \bar{x}_{s+1}, \ldots, \bar{x}_{r+s-1}, \bar{x}_{r+s+t})$$

是一个在 K 上、含 $m(r+1)$ 个变量的非零线性多项式，使得

$$f_{s,r+s+t}(K) \neq \{0\}$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$ 均成立。假设 $|K| \geqslant \frac{(2n-3r+1)}{2}^{r}$。我们有，存在 $\bar{c}_i \in K^m$、 $i = 1$、.....、 n，使得

$$f_{s,r+s+t}(\bar{c}_s, \bar{c}_{s+1}, \ldots, \bar{c}_{r+s-1}, \bar{c}_{r+s+t}) \neq 0$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$ 均成立。

证明。注意

$$\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} = \bigcup_{1 \leq s < r+s+t \leq n} \{\bar{x}_s, \ldots, \bar{x}_{r+s-1}, \bar{x}_{r+s+t}\}.$$

Set

$$U_{s,r+s+t} = \{\bar{x}_s, \ldots, \bar{x}_{r+s-1}, \bar{x}_{r+s+t}\}$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$ 均成立。对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们令

$$l(\bar{x}_i) = \{(s, r+s+t), 1 \leq s < r+s+t \leq n \mid \bar{x}_i \in U_{s,r+s+t}\}.$$

注意

$$\begin{cases} f_{1,r+1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}) \neq 0; \\ f_{1,r+2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+2}) \neq 0; \\ \quad \vdots \\ f_{1,n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r, \bar{x}_n) \neq 0. \end{cases}$$

我们得到

$$|l(\bar{x}_1)| \leq n - r.$$

注意

$$\begin{cases} f_{1,r+1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_{r+1})\neq 0;\\ f_{1,r+2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_{r+2})\neq 0;\\ \quad\vdots\\ f_{1,n}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_n)\neq 0;\\ f_{2,r+2}(\bar{x}_2,\bar{x}_3,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_{r+2})\neq 0;\\ f_{2,r+3}(\bar{x}_2,\bar{x}_3,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_{r+3})\neq 0;\\ \quad\vdots\\ f_{2,n}(\bar{x}_2,\bar{x}_3,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_n)\neq 0. \end{cases}$$

我们得到的是

$$|l(\bar{x}_2)|\leq (n-r)+(n-r-1).$$

注意到

$$\begin{cases} f_{1,r+1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_{r+1})\neq 0;\\ f_{1,r+2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_{r+2})\neq 0;\\ \quad\vdots\\ f_{1,n}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_n)\neq 0;\\ \quad\vdots\\ f_{r,2r}(\bar{x}_r,\bar{x}_{r+1},\ldots,\bar{x}_{2r-1},\bar{x}_{2r})\neq 0;\\ f_{r,2r+1}(\bar{x}_r,\bar{x}_{r+1},\ldots,\bar{x}_{2r-1},\bar{x}_{2r+1})\neq 0;\\ \quad\vdots\\ f_{r,n}(\bar{x}_r,\bar{x}_{r+1},\ldots,\bar{x}_{2r-1},\bar{x}_n)\neq 0. \end{cases}$$

延续上述相同的论证，我们得到】【。

$$|l(\bar{x}_i)|\leq \sum_{j=1}^{i}(n-r-j+1)$$

对于所有 $i=1,\ldots,r$。注意,

$$\sum_{j=1}^{r}(n-r-j+1)=\frac{(2n-3r+1)r}{2}.$$

这意味着

$$|l(\bar{x}_i)|\leq \frac{(2n-3r+1)r}{2} \tag{10}$$

对所有的 $i = 1, \ldots, r$ 均成立。注意,

$$\begin{cases} f_{1,r+1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}) \neq 0; \\ f_{1,r+2}(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_{r+1}, \bar{x}_{r+2}) \neq 0; \\ \vdots \\ f_{1,n}(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_{r+1}, \bar{x}_n) \neq 0; \\ \vdots \\ f_{r,2r}(\bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}, \ldots, \bar{x}_{2r-1}, \bar{x}_{2r}) \neq 0; \\ \vdots \\ f_{r,n}(\bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}, \ldots, \bar{x}_{2r-1}, \bar{x}_n) \neq 0; \\ f_{r+1,2r+1}(\bar{x}_{r+1}, \bar{x}_{r+2}, \ldots, \bar{x}_{2r}, \bar{x}_{2r+1}) \neq 0; \\ \vdots \\ f_{r+1,n}(\bar{x}_{r+1}, \bar{x}_{r+2}, \ldots, \bar{x}_{2r}, \bar{x}_n) \neq 0. \end{cases}$$

我们得到

$$|l(\bar{x}_{r+1})| \leq 1 + \sum_{i=1}^{r}(n - r - i).$$

注意到

$$1 + \sum_{i=1}^{r}(n - r - i) = \frac{(2n - 3r + 1)r}{2} - r + 1.$$

这意味着

$$|l(\bar{x}_{r+1})| \leq \frac{(2n - 3r + 1)r}{2}.$$

注意

$$\begin{cases} f_{1,r+1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_{r+2})\neq 0;\\ f_{2,r+2}(\bar{x}_2,\bar{x}_3,\ldots,\bar{x}_{r+1},\bar{x}_{r+2})\neq 0;\\ f_{3,r+3}(\bar{x}_3,\bar{x}_4,\ldots,\bar{x}_{r+2},\bar{x}_{r+3})\neq 0;\\ \vdots\\ f_{3,n}(\bar{x}_3,\bar{x}_4,\ldots,\bar{x}_{r+2},\bar{x}_n)\neq 0;\\ \vdots\\ f_{r,2r}(\bar{x}_r,\bar{x}_{r+1},\ldots,\bar{x}_{2r-1},\bar{x}_{2r})\neq 0;\\ \vdots\\ f_{r,n}(\bar{x}_r,\bar{x}_{r+1},\ldots,\bar{x}_{2r-1},\bar{x}_n)\neq 0;\\ f_{r+1,2r+1}(\bar{x}_{r+1},\bar{x}_{r+2},\ldots,\bar{x}_{2r},\bar{x}_{2r+1})\neq 0;\\ \vdots\\ f_{r+1,n}(\bar{x}_{r+1},\bar{x}_{r+2},\ldots,\bar{x}_{2r},\bar{x}_n)\neq 0;\\ f_{r+2,2r+2}(\bar{x}_{r+2},\bar{x}_{r+3},\ldots,\bar{x}_{2r+1},\bar{x}_{2r+2})\neq 0;\\ \vdots\\ f_{r+2,n}(\bar{x}_{r+2},\bar{x}_{r+3},\ldots,\bar{x}_{2r+1},\bar{x}_n)\neq 0. \end{cases}$$

我们得到

$$|l(\bar{x}_{r+2})|\leq 2+\sum_{i=2}^{r+1}(n-r-i).$$

注意到

$$2+\sum_{i=2}^{r+1}(n-r-i)\leq \frac{(2n-3r+1)r}{2}-2r+2.$$

我们得到

$$|l(\bar{x}_{r+2})|\leq \frac{(2n-3r+1)r}{2}.$$

沿用上述相同的论证，我们可以得到

$$|l(\bar{x}_{r+i})|\leq \frac{(2n-3r+1)r}{2} \tag{11}$$

对所有 $i=1,\ldots,n-r$ 均成立。由 (10) 和 (11) 可得

$$max_{1\leq i\leq n}\{|l(\bar{x}_i)|\}\leq \frac{(2n-3r+1)r}{2}.$$

由于 $|K|>(2n-3r+1)_2^{\ r}$，我们得到

$$|K|>max_{1\leq i\leq n}\{|l(\bar{x}_i)|\}.$$

根据引理 3.4，我们可得存在 $\bar{c}_i\in K^m, i=1,\ldots,n$，使得

$$f_{s,r+s+t}(\bar{c}_s,\bar{c}_{s+1},\ldots,\bar{c}_{r+s-1},\bar{c}_{r+s+t})\neq 0$$

对所有 $1\leq s<r+s+t\leq n$ 均成立。证毕。 □

作为引理 3.5 的推论，我们得到以下有用的结果。

推论 3.1。设 $n \geq 2$ 是一个整数，设 $2 \leq r \leq n-1$ 是一个整数。设 K 是一个域。设 $g_{s,r+s+t}(\bar{x}_{s,s+1}, \ldots, \bar{x}_{r+s-2,r+s-1})$ 是一个关于$m(r-1)$-变量的非零线性多项式，定义在 K 上，使得

$$g_{s,r+s+t}(K) \neq \{0\}$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。假设 $|K| > (2n-3r+1)_2^{r}$。我们有，存在 $\bar{c}_{i,i+1} \in K^m$, $i = 1, \ldots, n-2$, 使得

$$g_{s,r+s+t}(\bar{c}_{s,s+1}, \bar{c}_{s+1,s+2}, \ldots, \bar{c}_{r+s-2,r+s-1}) \neq 0$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。

证明。设

$$\bar{y}_s = \bar{x}_{s,s+1}$$

对于所有 $s = 1, \ldots, n-2$. 我们设

$$f_{s,r+s+t}(\bar{y}_s, \ldots, \bar{y}_{r+s-1}, \bar{y}_{r+s+t}) = g_{s,r+s+t}(\bar{y}_s, \ldots, \bar{y}_{r+s-2})$$

对于所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。注意,

$$f_{s,r+s+t}(K) \neq \{0\}$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。请注意

$$\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{1 \leq s \leq r+s+t \leq n} \{s, \ldots, r+s-1, r+s+t\}.$$

由于 $|K| > (2n-3r+1)_2^{r}$，由引理 3.5 可知，存在 $\bar{c}_i \in K^m$, $i = 1, \ldots, n$, 使得

$$f_{s,r+s+t}(\bar{c}_s, \ldots, \bar{c}_{r+s-1}, \bar{c}_{r+s+t}) \neq 0$$

对于所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。我们设定

$$\bar{c}_{i,i+1} = \bar{c}_i$$

对于所有 $i = 1, \ldots, n-2$。这意味着

$$g_{s,r+s+t}(\bar{c}_{s,s+1}, \bar{c}_{s+1,s+2}, \ldots, \bar{c}_{r+s-2,r+s-1}) \neq 0$$

对于所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。 □

以下结果与 [12, 引理 3.10] 类似。为完整起见，我们给出其证明。

引理 3.6. 设 $p(x_1, \ldots, x_m)$ 是域 K 上的一个零常数项线性多项式。假设 $\mathrm{ord}(p) = 1$ and $|K| \geq n$。我们有 $p(UT_n) = UT_{(0)n}$。

证明。鉴于引理 3.3(i)，我们注意到 $p(K) = \{0\}$。由命题 2.1 可知，$p(UT_n) \subseteq UT_{(0)n}$。只需证明 $UT_{(0)n} \subseteq p(UT_n)$。

根据引理 3.3(iii)，我们有存在 $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in K^m$ 使得

$$p_{i_0}(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \neq 0.$$

由于 $|K| \geq n$，由引理 3.5 可知，存在 $\bar{c}_1$、……、$\bar{c}_n \in K^m$ 使得

$$p_{i_0}(\bar{c}_s, \bar{c}_t) \neq 0$$

对所有 $1 \leq s < t \leq n$。

对于任意 $A'=(a'_{jk})\in UT_{(0)n}$，我们取 $u_i=(a^{(i)}_{jk})\in UT_n, i=1,\dots,m$，其中

$$\begin{cases} \bar{a}_{jj}=\bar{c}_j \quad \text{for all } j=1,\dots,n;\\ a^{(i_0)}_{st}=x^{(i_0)}_{st} \quad \text{for all } 1\le s<t\le n;\\ a^{(i)}_{st}=0, \quad \text{otherwise.}\end{cases}$$

由命题 2.1 可知

$$p(u_1,\dots,u_m)=(p_{st}),$$

其中 $p_{ss}=0$ 对于 $s=1$、.....、n，以及

$$\begin{aligned} p_{st}&=p_{i_0}(\bar{c}_s,\bar{c}_t)x^{(i_0)}_{st}\\ &\quad+\sum_{k=2}^{t-s}\left(\sum_{s=j_1<j_2<\cdots<j_{k+1}=t} p_{i_1\cdots i_k}(\bar{c}_{j_1j_1},\dots,\bar{c}_{j_{k+1}j_{k+1}})x^{(i_0)}_{j_1j_2}\cdots x^{(i_0)}_{j_kj_{k+1}}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

对于所有 $1\le s<t\le n$。考虑以下方程组：

$$\begin{aligned} a'_{st}&=p_{i_0}(\bar{c}_s,\bar{c}_t)x^{(i_0)}_{st}\\ &\quad+\sum_{k=2}^{t-s}\left(\sum_{s=j_1<j_2<\cdots<j_{k+1}=t} p_{i_1\cdots i_k}(\bar{c}_{j_1j_1},\dots,\bar{c}_{j_{k+1}j_{k+1}})x^{(i_0)}_{j_1j_2}\cdots x^{(i_0)}_{j_kj_{k+1}}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

对于所有 $1\le s<t\le n$。由于 $p_{i_0}(\bar{c}_s,\bar{c}_t)\neq 0$ 对于所有 $1\le s<t\le n$，我们很容易验证方程组 (13) 有解

$$\left\{c^{(i_0)}_{st}\in K \mid \text{for all } 1\le s<t\le n\right\}.$$

我们取

$$x^{(i_0)}_{st}=c^{(i_0)}_{st}$$

对所有 $1\le s<t\le n$ 均成立。由 (12) 和 (13) 可得

$$p(u_1,\dots,u_m)=(p_{st})=(a'_{st})=A'.$$

这说明 $T_n(K)^{(0)}\subseteq p(T_n(K))$，正如所需。这就证明了该结果。 □

以下结果对于证明我们的主要结论至关重要。

引理 3.7. 设 $p(x_1,\dots,x_m)$ 是域 K 上一个非零的零常数项线性多项式。假设 $\operatorname{ord}(p)=r$，$2\le r\le n-2$。假设 $|K|>(2n-3r+1)_2{}^{r}$。则有 $p(UT_n)=UT_{(r-1)n}$。

证明. 根据命题 2.1 和引理 3.3(i)(ii)，我们注意到 $p(UT_n)\subseteq UT_{(r-1)n}$。只需证明 $UT_{(r-1)n}\subseteq p(UT_n)$。根据引理 3.3(iii)，有

$$p_{i'_1\cdots i'_r}(K)\neq\{0\}$$

对于某些 $(i'_1,\dots,i'_r)\in T_r$。由于 $|K|>(2n-3r+1)_2{}^{r}$，由引理 3.5 可得存在 $b_1,\dots,b_n\in K^m$，使得

$$p_{i'_1\cdots i'_r}(\bar{b}_s,\dots,\bar{b}_{r+s-1},\bar{b}_{r+s+t})\neq 0 \tag{14}$$

对所有 $1\le s<r+s+t\le n$。我们令

$$\widehat{b}_{s,t}=(\bar{b}_s,\dots,\bar{b}_{r+s-1},\bar{b}_{r+s+t})$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n_\circ$ 由（14）可得

$$p_{i'_1 \cdots i'_r}(\widehat{b}_{s,t}) \neq 0$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n_\circ$ 对于任意 $u_i = (a_{jk}^{(i)}) \in UT_n$, $i = 1, \ldots, m$, 我们取$\bar{a}_{jj} = b_j$对所有 $j = 1, \ldots, n_\circ$ 由命题 2.1 可得

$$f(u_1, \ldots, u_m) = (p_{s,r+s+t})$$

其中

$$\begin{aligned}
p_{s,r+s+t} &= \sum_{k=r}^{r+t} \left(\sum_{\substack{s=j_1<\cdots<j_{k+1}=r+s+t \\ (i_1,\ldots,i_k)\in T_m^k}} p_{i_1\cdots i_k}(\bar{b}_{j_1}, \ldots, \bar{b}_{j_{k+1}}) a_{j_1 j_2}^{(i_1)} \cdots a_{j_k j_{k+1}}^{(i_k)} \right) \\
&= \sum_{\substack{s=j_1<\cdots<j_{r+1}=r+s+t \\ (i_1,\ldots,i_r)\in T_r}} p_{i_1\cdots i_r}(\bar{b}_{j_1}, \ldots, \bar{b}_{j_{r+1}}) a_{j_1 j_2}^{(i_1)} \cdots a_{j_r j_{r+1}}^{(i_r)} \\
&\quad + \sum_{k=r+1}^{r+t} \left(\sum_{\substack{s=j_1<\cdots<j_{k+1}=r+s+t \\ (i_1,\ldots,i_k)\in T_m^k}} p_{i_1\cdots i_k}(\bar{b}_{j_1}, \ldots, \bar{b}_{j_{k+1}}) a_{j_1 j_2}^{(i_1)} \cdots a_{j_k j_{k+1}}^{(i_k)} \right) \\
&= \left(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r)\in T_r \\ i_r = i'_r}} p_{i_1\cdots i_r}(\widehat{b}_{s,t}) a_{s,s+1}^{(i_1)} \cdots a_{r+s-2,r+s-1}^{(i_{r-1})} \right) a_{r+s-1,r+s+t}^{(i'_r)} \\
&\quad + \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r)\in T_r \\ i_r \neq i'_r}} p_{i_1\cdots i_r}(\widehat{b}_{s,t}) a_{s,s+1}^{(i_1)} \cdots a_{r+s-2,r+s-1}^{(i_{r-1})} a_{r+s-1,r+s+t}^{(i_r)} \\
&\quad + \sum_{\substack{s\leq j_1<\cdots j_{r+1}\leq r+s+t \\ (j_r,j_{r+1})\neq(r+s-1,r+s+t) \\ (i_1,\ldots,i_r)\in T_r}} p_{i_1\cdots i_r}(\bar{b}_{j_1}, \ldots, \bar{b}_{j_{r+1}}) a_{j_1 j_2}^{(i_1)} \cdots a_{j_r j_{r+1}}^{(i_r)} \\
&\quad + \sum_{k=r+1}^{t-s} \left(\sum_{\substack{s=j_1<j_2<\cdots<j_{k+1}=r+s+t \\ (i_1,\ldots,i_k)\in T_m^k}} p_{i_1\cdots i_k}(\bar{b}_{j_1}, \ldots, \bar{b}_{j_{k+1}}) a_{j_1 j_2}^{(i_1)} \cdots a_{j_k j_{k+1}}^{(i_k)} \right)
\end{aligned} \tag{15}$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n_\circ$ 我们定义

$$h_{s,r+s+t} = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r)\in T_r \\ i_r = i'_r}} p_{i_1\cdots i_r}(\widehat{b}_{s,t}) x_{s,s+1}^{(i_1)} \cdots x_{r+s-2,r+s-1}^{(i_{r-1})}$$

对于所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n_\circ$ 通过 $W_{s,r+s+t}$ 我们表示 $h_{s,r+s+t}$ 中变量的指标集, 其中 $1 \leq s < r+s+t \leq n_\circ$ 也就是说, $h_{s,r+s+t}$ 是关于这些变量的线性多项式

$$\left\{ x_{jk}^{(i)} \in X \mid (j,k,i) \in W_{s,r+s+t} \right\}$$

对于所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。我们声称,

$$h_{s,r+s+t}(K) \neq \{0\}$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。事实上，我们取

$$\begin{cases} a_{j,j+1}^{(i'_{j-s+1})} = 1 \quad \text{for all } j = s, \ldots, r+s-2; \\ a_{jk}^{(i)} = 0 \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{aligned} h_{s,r+s+t}(a_{jk}^{(i)}) &= p_{i'_1 \cdots i'_r}(\widehat{b}_{s,t}) a_{s,s+1}^{(i'_1)} \cdots a_{r+s-2,r+s-1}^{(i'_{r-1})} \\ &= p_{i'_1 \cdots i'_r}(\widehat{b}_{s,t}) \neq 0, \end{aligned}$$

如所需。令

$$W = \bigcup_{1 \leq s < r+s+t \leq n} W_{s,r+s+t}.$$

由于 $|K| > \frac{(2n-3r+1)}{2}^{r}$，由推论 3.1 可知，存在 $b_{jk}^{(i)} \in K$，其中 $(j,k,i) \in W$ 满足

$$h_{s,r+s+t}(b_{jk}^{(i)}) \neq 0$$

对所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。我们对变量集定义一个次序

$$\left\{ x_{r+s-1,r+s+t}^{(i'_r)} \in X \mid 1 \leq s < r+s+t \leq n \right\}$$

如下:

$$x_{r,r+1}^{(i'_r)} < \cdots < x_{n-1,n}^{(i'_r)} < x_{r,r+2}^{(i'_r)} < \cdots < x_{n-2,n}^{(i'_r)} < \cdots < x_{r,n}^{(i'_r)}.$$

我们取

$$\begin{cases} a_{jk}^{(i)} = b_{jk}^{(i)} \quad \text{for all } (j,k,i) \in W; \\ a_{r+s-1,r+s+t}^{(i'_r)} = x_{r+s-1,r+s+t}^{(i'_r)} \quad \text{for all } 1 \leq s < r+s+t \leq n; \\ a_{jk}^{(i)} = 0, \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

在（15）中。由（15）可得

$$p_{1,r+1} = h_{1,r+1}(b_{jk}^{(i)}) x_{r,r+1}^{(i'_r)} + \alpha_{1,r+1},$$

其中 $\alpha_{1,\ r+1} \in K$ 以及

$$p_{2,r+2} = h_{2,r+2}(b_{jk}^{(i)}) x_{r+1,r+2}^{(i'_r)} + \alpha_{2,r+2}(x_{r,r+1}^{(i'_r)}),$$

其中$\alpha_{2,r+2}$ 是关于变量 $x^{(i'_r)}{}_{r,r+1}$ 的多项式，在 K上。继续上述论证，我们可以由（15）得到

$$p_{s,r+s+t} = h_{s,r+s+t}(b_{jk}^{(i)}) x_{r+s-1,r+s+t}^{(i'_r)} + \alpha_{s,r+s+t}(x_{1,r+1}^{(i'_r)}, \ldots, x_{s_1,t_1}^{(i'_r)}) \tag{16}$$

对于所有 $1 \leq s \leq r+s+t \leq n$，其中 $\alpha_{s,r+s+t}$ 是一个关于所有先前变量 $\{x_1^{(i'_r)}{}_{,r+1}, \ldots, x^{(i'_r)}{}_{s_1,t_1}\}$的 $x^{(i'_r)}{}_{r+s-1,r+s+t}$ 在 K 上的多项式。

对于任何 $A = (a'_{jk}) \in UT_{(r-1)n}$，我们考虑以下方程组:

$$h_{s,r+s+t}(b_{jk}^{(i)}) x_{r+s-1,r+s+t}^{(i'_r)} + \alpha_{s,r+s+t}(x_{1,r+1}^{(i'_r)}, \ldots, x_{s_1,t_1}^{(i'_r)}) = a'_{s,r+s+t} \tag{17}$$

对于所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。由于 $\alpha_{1,\ r+1} \in K$ 以及

$$h_{s,r+s+t}(b_{jk}^{(i)}) \neq 0$$

对于所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$，我们很容易验证方程组 (17) 有解

$$\left\{ b_{r+s-1,r+s+t}^{(i'_r)} \in K \mid 1 \leq s < r+s+t \leq n \right\}.$$

最后，我们取

$$x_{r+s-1,r+s+t}^{(i'_r)} = b_{r+s-1,r+s+t}^{(i'_r)}$$

对于 (16) 中的所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。由 (16) 和 (17) 可知

$$p_{s,r+s+t} = a'_{s,r+s+t}$$

对于所有 $1 \leq s < r+s+t \leq n$。这意味着

$$f(u_1, \ldots, u_m) = (p_{s,r+s+t}) = \left(a'_{s,r+s+t}\right) = A'.$$

我们得到 $UT_{(r-1)\ n} \subseteq p(UT_n)$，正如所期望的。该结果的证明至此完成。 □

下面的结果与 [12, 引理 3.12] 类似。为完整起见，我们给出其证明。

引理 3.8. 设 $p(x_1, \ldots, x_m)$ 是域 K 上一个零常数项线性多项式。假设 $\mathrm{ord}(p) = n-1$。我们有 $p(T_n(K)) = T_n(K)^{(n-2)}$。

证明. 根据命题 2.1 和引理 3.2(ii)，我们有 $p(T_n(K)) \subseteq T_n(K)^{(n-2)}$。只需证明 $T_n(K)^{(n-2)} \subseteq p(T_n(K))$。

由于 $\mathrm{ord}(p) = n-1$，我们得到 $p(T_n(K)) \neq \{0\}$。由命题 2.1 可得

$$p_{1n}(K) \neq \{0\}.$$

注意，p_{1n} 是域 K上的一个零常数项线性多项式。由引理 3.1 可得

$$p_{1n}(K) = K.$$

对于任意 $a'_{1n} \in K$，我们有：存在 $a_{jk}^{(i)} \in K$，其中 $1 \leq j \leq k \leq n, i = 1, \ldots, m$，使得

$$p_{1n}(a_{jk}^{(i)}) = a'_{1n}.$$

我们令 $u_i = (a_{jk}^{(i)}) \in T_n(K)$，$i = 1$，....., m。由 (2) 可得

$$p(u_1, \ldots, u_m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & p_{1n}(a_{jk}^{(i)}) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & a'_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

这意味着 $T_n(K)^{(n-2)} \subseteq p(T_n(K))$，正如所需。至此，结果得证。 □

现在我们可以给出本节主要结果的证明了。

定理 3.1. 设 $n \geq 2$ 和 $m \geq 1$ 为整数。设 K 为一个域，$p(x_1, \ldots, x_m)$ 为 K 上的一个非零线性多项式，且其常数项为零。令 $r = ord(p)$。以下陈述之一成立：

(i) 假设 $r = 0$。我们有 $p(UT_n) = UT_n$；(ii) 假设 $r = 1$ 和 $|K| \geq n$。我们有 $p(UT_n) = UT_{(0)n}$；(iii) 假设 $2 \leq r \leq n-2$ 和 $|K| > {(2n-3r+1)_2}^r$。我们有 $p(UT_n) = UT_{(r-1)n}$；(iv) 假设 $r = n-1$。我们有 $p(UT_n) = UT_{(n-2)n}$；(v) 假设 $r \geq n$。我们有 $p(UT_n) = \{0\}$。

证明。陈述 (i) 由引理 3.2 得出。陈述 (ii) 由引理 3.6 得出。陈述 (iii) 由引理 3.7 得出。陈述 (iv) 由引理 3.8 得出。最后一个陈述由 ord(p) 的定义得出。□

下面这个有用的结果显然成立。

引理 3.9. 设 $n \geq 2$ 为整数，设 $0 \leq r \leq n-1$ 为整数。我们有

(i) 假设 $n = 2$。我们有

$$\frac{(2n-3r+1)r}{2} \leq 1$$

对所有 $0 \leq r \leq n-1$；

(ii) 假设 $n \geq 3$。我们有

$$\frac{n(n-1)}{3} \geq \frac{(2n-3r+1)r}{2}$$

对所有 $0 \leq r \leq n-1$。

我们现在可以给出定理 1.2 的证明。

定理 1.2 的证明。令 $r = ord(p)$。注意到 $0 \leq r \leq \frac{m}{2}$。首先，假设 $n = 2$。根据引理 3.8(i)，我们注意到 $|K| > {(2n-3r+1)_2}^r$ 对所有 $0 \leq r \leq n-1$ 成立。接下来，假设 $n \geq 3$。根据引理 3.8(ii)，我们注意到 $|K| > {(2n-3r+1)_2}^r$ 对所有 $0 \leq r \leq n-1$ 成立。于是由定理 3.1 得出所需结论。□

4. Applications

我们用 $UT_{(-)n}$ 表示定义在 UT_n 上的李代数，其李括号为

$$[a, b] = ab - ba.$$

最近，Fagundes 和 Koshlukov [18] 得到了以下结果：

定理 4.1. [18, 推论 2.9] 令 F 是一个域，满足 $|K| \geq {n_{(n-1)\ 2}}$，令 f 是一个多重线性李多项式。则 $Im(f)$ 在 $UT_{(-)}$ 上是 J^r，对于某个 $0 \leq r \leq n$。

应用定理 1.2，并采用与 [18, 推论 2.9], 中相同的论证，我们可以得到以下结果。为简洁起见，证明从略。

推论 4.1。令 F 为一个域，满足 $|K| > {n_{(n-1)\ 3}}$，令 f 为一个多重线性李多项式。则 $Im(f)$ 在 $UT_{(-)}$ 上是 J^r，其中某个 $0 \leq r \leq n$。

最近，Fagundes 和 Koshlukov [18] 得到了以下结果：

定理 4.2。 [18, 定理 4.4] 设 F 为一个满足 $|K| \geq {}^{n}{}_{(n-1)\ 2}$ 的域，设 $UT_n = \bigoplus_{k\in Z_q} A_k$ 赋予由以下序列给出的初等 Z_q-分次：

$$(\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{q-2}, \overline{q-1}, \ldots, \overline{q-1})$$

并设 $f \in F\langle X\rangle^{gr}$ 是一个多线性多项式。那么， $Im(f)$ 在 UT_n 上是 $\{0\}$、 J^r、 $B_{\bar{l},\ r}$ 或 $A_{\bar{l}}$，其中 $J = Jac(A_0)$。特别地，该像总是一个齐次向量子空间。

应用定理 1.2，并采用定理 4.4], 中相同的论证，可以得到以下结果。为简洁起见，我们省略其证明。

推论 4.2。设 F 是一个域，满足 $|K| > {}^{n}{}_{(n-1)\ 3}$，设 $UT_n = \bigoplus_{k\in Z_q} A_k$ 配备由以下序列给出的初等 Z_q-分次

$$(\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{q-2}, \overline{q-1}, \ldots, \overline{q-1})$$

并设 $f \in F\langle X\rangle^{gr}$ 是一个多线性多项式。那么， $Im(f)$ 在 UT_n 上是 $\{0\}$、 J^r、 $B_{\bar{l},\ r}$ 或 $A_{\bar{l}}$，其中 $J = Jac(A_0)$。特别地，该像总是一个齐次向量子空间。

References

[1] A. Albert、B. Mukenhoupt，关于迹为零的矩阵，Michigan Math. J. 4 (1957) 1–3。[2] B. E. Anzis、Z. M. Emrich、K. G. Valiveti，关于在李代数上求值的李多项式的像，线性代数及其应用 469 (2015) 51–75。[3] A. Kanel-Belov、S. Malev、C. Pines、L. Rowen，八元数代数上多线性多项式与半齐次多项式的像，arXiv:2204.07139v1。[math.AG]。2022年4月14日。[4] A. Kanel-Belov、S. Malev、L. Rowen，在 2×2 矩阵上求值的非交换多项式的像，Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012) 465–478。[5] A. Kanel-Belov、S. Malev、L. Rowen，在 3×3 矩阵上求值的多线性多项式的像，Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016) 7–19。[6] A. Kanel-Belov、S. Malev、L. Rowen、R. Yavich，代数上的非交换多项式求值：方法与问题，以及 Lvov-Kaplansky 猜想，SIGMA. 16 (2020) 071。[7] D. Buzinski、R. Winstanley，在矩阵上求值的四个变量的多线性多项式，线性代数及其应用 439 (2013) 2712–2719。[8] M. Bre˘sar，《非交换代数导论》，Universitext，Springer，2014。[9] M. Bre˘sar，交换子与非交换多项式的像，Adv. Math. 374 (2020) 107-140。[10] L. Centrone、T. C. de Mello，矩阵代数上分次多项式的像，J. Algebra，614 (2023) 650–699。[11] Q. Chen、Y. Y. Luo、Y. Wang， 3×3 上三角矩阵代数上多项式的像，线性代数及其应用 648 (2022) 254–269。[12] Q. Chen，上三角矩阵代数上零常数项多项式的像，预印本。[13] Dniester Notebook：环与模理论中的未解决问题，第4版，数学研究所，俄罗斯科学院西伯利亚分院，新西伯利亚，1993。[14] V. Drensky，自由代数与 PI 代数，《代数研究生课程》，香港，1996，1–197。[15] P. S. Fagundes，关于矩阵若干子代数上的多线性多项式的像，应用数学硕士学位论文，圣保罗联邦大学，2019。[16] P. S. Fagundes，严格上三角矩阵上多线性多项式的像，线性代数及其应用 563 (2019) 287–301。[17] P. S. Fagundes、T. de Mello，上三角矩阵上次数至多为四的多线性多项式的像，Oper Matrices 13 (2019) 283–292。

[18] P. S. Fagundes、P. Koshlukov，《上三角矩阵代数上的多线性分次多项式的像》，加拿大数学杂志（在线版）。[19] E. Formanek，《矩阵环的中心多项式》，J. Algebra 23（1972年）129–132。[20] I. G. Gargate、T. de Mello，《无限域上上三角矩阵的多线性多项式的像》，以色列数学杂志（2022年），https://doi.org/10.1007/s11856-022-2350-2。[21] Y. Y. Luo、Y. Wang，《关于 Fagundes-Mello 猜想》，J. Algebra 592（2022年）118–152。[22] A. Ma、J. Oliva，《在对称矩阵上取值的 Jordan 多项式的像》，线性代数及其应用 492（2016年）13–25。[23] S. Malev，《在四元数代数上取值的非交换多项式的像》，J. Algebra and Appl. 20（2021年）2150074。[24] S. Malev、R. Yavich、R. Shayer，《低秩Jordan代数上的多线性多项式的取值》，代数通讯 50（2022年）2840–2845。[25] T. de Mello，《在上三角矩阵上取值的多线性多项式的像》，数学通讯 29（2021年）183–186。[26] Z. Mesyan，《在矩阵上取值的小次数多项式》，线性与多线性代数 61（2013年）1487–1495。[27] S. Panja 和 S. Prasad，《上三角矩阵代数上的多项式的像》，arXiv:2206.08827v3，2022年11月19日。[28] P. Yu. Razmyslov，《关于 Kaplansky 的一个问题》，苏联数学杂志 7（1973年）479–496。[29] Š. Špenko，《非交换多项式的像》，J. Algebra 377（2013年）298–311。[30] K. Shoda，《关于矩阵的一些定理》，日本数学杂志 13（1936年）361–365。[31] D. Vitas，《多线性多项式在具有满射内导子的代数上是满射的》，J. Algebra 565（2021年）255–281。[32] Y. Wang，《上三角矩阵代数上的多线性多项式的像》，线性与多线性代数 67（2019年）2366–2372。[33] Y. Wang、P. P. Liu、J. Bai，《更正：上三角矩阵代数上的多线性多项式的像》，线性与多线性代数 67（2019年）i–vi。[34] Y. Wang、J. Zhou、Y. Y. Luo，《上三角矩阵代数上的多项式的像》，线性代数及其应用 610（2021年）560–573。