arXiv:2304.01595v1 [math.AP] 4 Apr 2023

双曲空间上的对数非线性波动方程

CHENGBO WANG AND XIAORAN ZHANG*

Abstract. 鉴于双曲空间 $\mathbb{H}^n$上线性波动方程解的指数衰减，为了阐明其临界性，我们研究双曲空间上的对数非线性波动方程，其非线性项在 $u=0$ 附近表现为 $(\ln 1/|u|)^{1-p}|u|$。关于小初值下整体存在性与爆破的问题，我们预期该问题存在一个临界幂 $p_c(n)>1$。当 $n=3$时，我们通过证明 $p>3$ 的整体存在性以及 $p\in(1,3)$ 的一般性爆破，证明临界幂为 3。

1. Introduction

设 $n\geq 2$，考虑波动方程。

$$\begin{cases}\partial_t^2 u-(\Delta_{\mathbb{H}^n}+\rho^2)u=F(u)\ ,\\ u(0,x)=\varepsilon u_0, u_t(0,x)=\varepsilon u_1\ ,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $\rho=\frac{n-1}{2}$(回顾一下，$-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ 的谱为 $[\rho^2,\infty)$，u_0，u_1 是具有紧支集的光滑函数。众所周知，具有幂型非线性 $F(u)\sim|u|^p$ 的非线性波动方程，其整体存在性与爆破解析与 $\mathbb{R}^n$ 中所谓的 $Strauss\ conjecture$ 有关，其临界幂为 $p_c(n)>1$。相应地，在双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 上，众所周知，对于任意幂次 $p\in(1,1+4/(n-1))$，只要 $\varepsilon>0$ 足够小，解便整体存在，这得益于线性波动方程的解具有更好的衰减性质。从某种意义上说，在处理幂型非线性时，我们无需探究衰减率的精确信息，也不会出现临界现象。

为捕捉临界性质，本文提出研究 $u=0$ 附近带有对数非线性项的非线性波动方程 $F_p(u)$，我们预计其具有临界幂 $p_c(n)>1$。

这种兴趣源于欧几里得空间中的类似方程

$$\begin{cases}\partial_t^2 u-\Delta_{\mathbb{R}^n}u=|u|^p\ ,\\ u(0,x)=\varepsilon u_0,\ u_t(0,x)=\varepsilon u_1.\end{cases}\tag{1.2}$$

该问题已被研究了很长时间，并存在一个临界幂 $p=p_c(n)>1$：对于任意具有紧支集且规模充分小的初始数据（$\varepsilon\ll 1$），当 $p>p_c(n)$时存在正则整体解，而当

Date:2023年4月5日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 58J45,35L05, 35L71,35B44,35B33。*Key words and phrases.*Strauss 猜想；移位波动方程；双曲空间；对数非线性。* 通讯作者。作者受到国家自然科学基金委员会 11971428 和国家自然科学基金委员会12141102 项目的资助。

$1 < p < p_c(n)$时则不成立。沿这一方向的首项工作是 [9] 1979年，当时 $n = 3$；F. John 确定了临界幂 $p_c(3) = 1 + \sqrt{2}$。随后 Strauss [17] 猜想，对于其他维数 $n \geq 2$，临界幂 $p_c(n)$ 应为二次方程的正根

$$(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0.$$

该猜想由 Glassey [6], [7] 在 $n = 2$ 且满足 $p_c(2) = (3+\sqrt{17})/2$时得到验证。随后，对于其他维数，猜想中的存在性部分由 Zhou [20] ($n = 4$)、Lindblad-Sogge [10] ($n \leq 8$) 以及 Georgiev-Lindblad-Sogge [5],Tataru [18]（均为 n， $p_c(n) < p \leq p_{conf}$）证明，其中

$$p_{conf}(n) = 1 + \frac{4}{n-1}$$

是共形幂。至于爆破解，则归因于 Sideris [13] ($n \geq 4$,$1 < p < p_c(n)$)。

在双曲空间 $\mathbb{H}^n$中，采用测地极坐标，度量表示为$g_{\mathbb{H}^n} = dr^2 +$(双曲正弦 r)$^2 d\omega^2$，其中 $(r, \omega) \in (0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$，详见第2节。如果我们取相同的幂型非线性 $F(u) = |u|^p$，则从启发式角度来看，由于度量中的双曲正弦 r 因子，我们预期对于所有 $p > 1$，小初值整体存在性总是成立。Fontaine [4] 于 1997 年首次从李代数的角度证明了这一点，当 $n = 2$, 3 时，对于任意满足以下条件的数据 $u_0 \in C^1(\mathbb{H}^n)$ $u_1 \in C(\mathbb{H}^n)$

$$|u_0| + |u_1| + |\nabla u_0| \leq \theta_k \ , \tag{1.3}$$

其中 $\nabla f =$($\partial_r f \partial_r$, $\frac{1}{\text{双曲正弦 } r})^2 \partial^\omega f \partial_\omega$), $|\nabla f| =$($(\partial_r f)^2 + |\frac{\partial_\omega f}{\text{双曲正弦 } r}|^2$)$^{1/2}$ 以及 $\theta_k =$(双曲余弦 $|)^{-k-\rho}$, $k > 0$。

对于一般的空间维数 $n \geq 2$，Anker-Pierfelice-Vallarino [2] 证明了改进的（多项式）色散估计和 Strichartz 估计，其强度足以推出 $1 < p \leq p_{conf}(n)$ 的整体结果，尽管这些结果尚未被明确表述。基于 Tataru 的（指数型）色散估计 [18]，$1 < p \leq p_{conf}(n)$ 的整体结果由 Sire- Sogge-Wang [14]明确表述并证明。Sire-Sogge-Wang [14] 给出了维数三情形下 Tataru 的色散估计的另一种证明，而作者 [19] 则给出了一般空间维数 $n \geq 2$下的证明。非移位波动方程（其中使用 $\partial_t^2 u - \Delta_{\mathbb{H}^n}$ 而不是 $\partial_t^2 u -$ ($\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2$) ）也在 Metcalfe-Taylor [11], [12], 和 Anker-Pierfelice [1]中得到了研究。另请参见 Anker-Pierfelice-Vallarino [3]关于 Damek-Ricci 空间上类似结果的研究，以及 Sire-Sogge-Wang-Zhang [15],[16] 关于渐近双曲流形上类似结果的近期工作。所有这些结果表明，临界幂为 $p_c = 1$；或者也可以说，对于具有幂型非线性的双曲空间，不存在临界幂。

由于度量中的双曲正弦 r 因子，我们预期（线性）解会指数衰减，参见例如 [4], [18], [19] 或引理 2.1。更准确地说，根据附录中的 (5.3)，我们确信，对于具有紧支集的光滑数据，当 t 趋于无穷时，线性解在光锥 $t = r$ 附近的行为类似于 $(\sinh t)^{-\rho} \sim e^{-\rho t}$ ，至少在 $n = 3$时如此。鉴于线性解的指数衰减，为了说明其临界性，自然要引入对数非线性，它在 $u = 0$附近的行为类似于 $(\ln 1/|u|)^{1-p} |u|$ ，其中 $p > 1$。一个典型例子是

$$F_p(u) = \left(\sinh^{-1} \frac{1}{|u|}\right)^{-(p-1)} |u| \ , \tag{1.4}$$

当 $|u|$ 较小时，其行为类似于 $(\ln \frac{1}{|u|})^{1-p}|u|$；当 $|u|$较大时，其行为类似于 $|u|^p$。

关于带有 $F = F_p(u)$ 的柯西问题 (1.1) 的整体存在性与爆破，我们预计存在一个临界幂 $p_c(n) > 1$，并且确定任意 $n \geq 2$ 的临界幂 $p_c(n)$ 是很有意义的。

本文将重点讨论物理情形 $n = 3$。首先，对于小初值下的整体存在性问题，我们只需假设 F_p 在 0 附近的行为，即 $F_p \in C^1$, $F_p(0) = F_p'(0) = 0$，并且

$$|F_p'(u)| \lesssim \left(\ln \frac{1}{|u|}\right)^{1-p}, \ \forall 0 < |u| \ll 1 \ . \tag{1.5}$$

我们的第一个主要结果如下。

定理 1.1（整体存在性）。设 $n = 3$ 和 $p > 3$。考虑满足（1.5）的（1.1），其中F（u）$= F_p$（u），则存在 ε_0（p）> 0，使得对于任意 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ 以及满足（u_0, u_1）$\in C^1$（$\mathbb{H}^3$）$\times C$（$\mathbb{H}^3$）的初始数据（1.3），该问题均存在一个整体弱解 $u \in C$（$\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$）。

为确定临界幂 $p_c(3)$，我们考虑相对较小幂下的爆破问题。事实证明，$p_c(3) = 3$ 对于带有 (1.4) 的 (1.1) 成立，这由以下爆破结果保证。

定理 1.2 (奇性形成)。设 $1 < p < 3$。考虑具有紧支集 $C^1 \times C$ 初值和由 (1.4) 给出的 $F(u) = F_p(u)$ 的 (1.1)，则唯一的整体解是平凡解。换言之，对于任意非平凡初值$(u_0, u_1) \in C_c^1 \times C_c$ 以及任意的 $\varepsilon > 0$，相应的弱解将在有限时间内爆破。

实际上，与整体结果类似，我们的证明可以推广到一般的非线性项：我们假设 F 是一个凸的 $C^1(\mathbb{R})$函数，从而 $F(0) = F'(0) = 0$,

$$\begin{cases} F(u) \gtrsim \left(\ln \frac{1}{|u|}\right)^{1-p} |u|, \ |u| \ll 1 \ , \\ F(u) \gtrsim |u|^q, \ |u| \gtrsim 1 \ , \end{cases} \tag{1.6}$$

对于某些 $q > 1$ 和 $p \in (1, 3)$。

最后，在结束引言之前，我们想讨论一些进一步的问题。关于带有 (1.4) 的问题 (1.1)，第一个自然问题是确定 $n \neq 3$ 的临界幂 $p_c(n)$。对于这个问题，凭借形如 $(\sinh t)^{-\rho} \sim e^{-\rho t}$ $(t > 1)$ 的尖锐线性衰减，我们启发式地预期，在光锥上，$p > p_c(n)$ 会呈现类似的渐近行为 $u(t, x) \sim e^{-\rho t}$，由此预计非线性问题 (1.1) 的行为类似于

$$|\partial_t^2 u - (\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2)u| = |F(u)| \lesssim \langle t \rangle^{-(p-1)} |u| \ .$$

将乘法算子 $\langle t \rangle^{-(p-1)}$ 视为算子 ∂_t^2的短程扰动后，自然可以猜想，无论空间维数如何，$p_c(n)$ 恰好等于 3。更确切地说，我们猜想存在 $\delta = \delta(n) > 0$，使得对于任意 $p \in (3, 3 + \delta(n))$，在小初值条件下都具有整体存在性；而对于 $p \in (1, 3)$，存在某些初值（u_0, u_1），使得对任意 $\varepsilon > 0$都不存在整体解。对于 $1 < p < p_c(n)$ 的情形，除了爆破解果之外，根据 ε确定精确寿命也很有意义。此外，当 $p = p_c(n)$ 时，理解其临界行为可能是一个更具挑战性的问题。

本文的组织结构。 本文的组织如下。我们在第2节回顾线性解 u^0 的基本色散估计。在第3节中，我们利用色散估计，通过迭代证明任意 $p > 3$下的整体存在性。奇性形成的结果，即定理 1.2，在第4节中给出；对此我们密切遵循 John [9]的思想。最后，在附录中，我们给出解的表示公式 (2.5) 的一个初等证明。

记号。

- 我们用 $A \lesssim B$ 表示 $A \leq CB$ ，其中 C 是某个较大的常数，它可能因行而异，并依赖于各种参数；类似地，我们用 $A \ll B$ 表示 $A \leq C^{-1}B$。当 $A \lesssim B \lesssim A$时，我们使用 $A \sim B$ 。
- $d(x, y)$ 表示 x, y在 $\mathbb{H}^3$中的测地距离；若 x 是原点 O，则记为 $|y| = d(O, y)$。
- $S_t(x) := \{y \in \mathbb{H}^3, d(x, y) = t\}$ 表示以 x为中心、半径为 t的双曲球面。
- $M^r f(x) = \frac{1}{|S_r(x)|}\int_{S_r(x)} f(y)d\sigma_y$表示 f在 $S_r(x)$上的球面平均。若中心是原点 O，对于任意带参数 t的函数 $w(t, x)$，我们简记 $\widetilde{w}(t, r) := M^r(w(t, \cdot))(O)$。
- 对于 $(O, t_0) \in \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$，我们将顶点为 (O, t_0) 的前向锥和后向锥分别记为$\Gamma^{\pm}(O, t_0) = \{(x, t) : d(O, x) \leq \pm(t - t_0)\}$.

2. Preliminary

在闵可夫斯基空间 $\Lambda = \{(\tau, z) \in \mathbb{R}^{1,n}$ 的前向光锥 $|z| < \tau\}$ 内，我们引入坐标

$$s = |z|, \ \tau = e^t \cosh r, \ s = e^t \sinh r, \ r \in [0, \infty), \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

将 $\mathbb{H}^n$ 视为嵌入其中且满足 $t = 0$ 的类空超曲面，我们得到自然度量 $g_{\mathbb{H}^n} = dr^2 +$ (双曲正弦 r)$^2 d\omega^2$，它由闵可夫斯基度量 $g = -d\tau^2 + dz^2 = -d\tau^2 + ds^2 + s^2 d\omega^2$ 诱导，其中 $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$。这说明 (r, ω) 是 $\mathbb{H}^n$中的自然测地极坐标。

考虑线性波动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - (\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2)u = F \ , x \in \mathbb{H}^n \ , \\ u(0, x) = u_0, u_t(0, x) = u_1 \ , \end{cases} \tag{2.2}$$

杜哈梅尔原理告诉我们，(2.2) 等价于积分方程。

$$u(t, x) = u^0(t, x) + (LF)(t, x) = u^0(t, x) + \int_0^t I(\tau, x, F(t - \tau))d\tau, \tag{2.3}$$

其中 $u^0 = \partial_t I(t, x, u_0) + I(t, x, u_1)$，以及 $I(t, x, u_1)$ 是带有数据 $u_0 = 0$ 的线性齐次方程的解。

在定理 1.1 的证明中，将用到关于线性解 u^0 的以下先验色散估计，这是 G¨unther[8, 定理 3.1]和 Fontaine [4, 定理 6] 中给出的。为完整起见，我们给出证明。

引理 2.1 (线性估计)。 设 $n = 3$ 和 $k > 0$，存在 $N_k > 1$ ，使得我们有如下估计

$$|u^0(t, x)| \leq N_k(\cosh |x|)^{-1}(\cosh(|t| - |x|))^{-k} \ , \tag{2.4}$$

对于满足 $F = 0$ 的 (2.2) 的任意解，只要初始数据 $(u_0, u_1) \in C^1 \times C$满足 (1.3)。

证明。不失一般性，假设 $t > 0$。首先，我们回顾一下，$u^0(t, x) = \partial_t I(t, x, u_0) + I(t, x, u_1)$ 在 $(0, \infty) \times \mathbb{H}^3$ with

$$I(t, x, u_1) = \sinh t \cdot (M^t u_1)(x), \tag{2.5}$$

这可以由双曲空间上的波算子与闵可夫斯基空间上的波算子之间的关系得到，证明概要请参见附录。

由于 $|u_1(x)| \le \theta_k(x) = (\cosh |x|)^{-k-1}$，我们有以下关于 $|x| = r$ 的估计

$$|I(t, x, u_1)| \le I(t, x, \theta_k) = \sinh t \cdot (M^t \theta_k)(x) \ ,$$

其中

$$\begin{aligned} (M^t \theta_k)(x) &= \frac{1}{2 \sinh t \sinh r} \int_{|r-t|}^{r+t} (\cosh \lambda)^{-k-1} \sinh \lambda d\lambda \\ &= \frac{(\cosh(t-r))^{-k} - (\cosh(t+r))^{-k}}{2k \sinh t \sinh r} \ . \end{aligned}$$

我们声称，我们可以对 $|I(x, t, g)|$ 证明一个更好的估计：

$$|(M^t \theta_k)(x)| \le C_k \frac{1}{(\cosh t)(\cosh r)(\cosh(t-r))^k} \ . \tag{2.6}$$

在证明 (2.6) 之前，我们先检查它是否足以推出 (2.4)。事实上，当 $u_0 = 0$ 时，由于 $\tanh t \in [0, 1]$，它比 (2.4) 更强。对于 $u_1 = 0$ 的情况，由 (2.5) 可得

$$u^0 = \partial_t I(t, x, u_0) = (\cosh t)(M^t u_0)(x) + (\sinh t) \partial_t (M^t u_0)(x) \ ,$$

因此，只需控制 $\partial_t (M^t u_0)(x)$。

为控制 $\partial_t (M^t u_0)(x)$，我们引入一个洛伦兹变换 $\psi_x \in SO(1, 3)$，使得$\psi_x(O) = x$。已知 $\psi_x S_t(O) = S_t(x)$ 保持度量不变，并且对于固定的x，y，$\psi_x(t, y) = (r_x(t, y)\ \omega_x(t, y)) = \gamma_{x,\ y}(t)$ 是一条测地线，且 $|\partial_t \gamma_{x,\ y}(t)| = 1$。于是

$$\begin{aligned} \partial_t (M^t u_0)(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(O)} \partial_t (u_0(\psi_x(t, y))) d\sigma_y \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(O)} \partial_t (u_0(r_x(t, y), \omega_x(t, y))) d\sigma_y \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(O)} \langle \nabla u_0, \partial_t \gamma_{x,y}(t) \rangle_{g_{\mathbb{H}^3}} d\sigma_y \ , \end{aligned}$$

因此

$$|\partial_t (M^t u_0)(x)| \le \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(O)} |\nabla u_0(\gamma_{x,y}(t))| d\sigma_y \le M^t(\theta_k)(x) \ ,$$

得益于假设 (1.3)。

为结束证明，我们证明 (2.6)。事实上，当 $t \geq r$ 和 $r \ll 1$ 时，由于 $\tanh\lambda$ 是递增的，且双曲正弦 $r \geq r$，我们有

$$\begin{aligned}(M^t\theta_k)(x) &= \frac{1}{2\sinh t\sinh r}\int_{|r-t|}^{r+t}(\cosh\lambda)^{-k}\tanh\lambda d\lambda \\ &\leq \frac{\tanh(t+r)}{2r\sinh t}\int_{t-r}^{t+r}(\cosh\lambda)^{-k}d\lambda \\ &\leq \frac{\tanh(t+r)}{\sinh t}(\cosh(t-r))^{-k} \sim (\cosh t)^{-1}(\cosh r)^{-1}(\cosh(t-r))^{-k}.\end{aligned}$$

同理，对于 $r > t$ 和 $t \ll 1$，我们得到

$$\begin{aligned}(M^t\theta_k)(x) &= \frac{1}{2\sinh t\sinh r}\int_{r-t}^{r+t}(\cosh\lambda)^{-k}\tanh\lambda d\lambda \\ &\leq \frac{\tanh(t+r)}{2t\sinh r}\int_{r-t}^{t+r}(\cosh\lambda)^{-k}d\lambda \\ &\lesssim \frac{\tanh(t+r)}{\sinh r}(\cosh(t-r))^{-k} \sim (\cosh t)^{-1}(\cosh r)^{-1}(\cosh(t-r))^{-k}\ .\end{aligned}$$

最后，对于满足 $r, t \gtrsim 1$ 的剩余情形，我们有。否则，若 $t \geq r \gtrsim 1$，显然

$$\begin{aligned}(M^t\theta_k)(x) &= \frac{(\cosh(t-r))^{-k} - (\cosh(t+r))^{-k}}{2k\sinh t\sinh r} \\ &\leq \frac{(\cosh(t-r))^{-k}}{2k\sinh t\sinh r} \sim (\cosh t)^{-1}(\cosh r)^{-1}(\cosh(t-r))^{-k}\ ,\end{aligned}$$

由此完成了 (2.6) 的证明。 □

3. Global existence

本节给出定理 1.1 的证明，为此我们将 (1.1) 改写为以下积分方程

$$u(t,x) = \varepsilon u^0(t,x) + (LF_p(u))(t,x) = \varepsilon u^0(t,x) + \int_0^t I(\tau,x,F_p(u(t-\tau,\cdot))d\tau, \tag{3.1}$$

其中 $u^0 = \partial_t I(t,\ x,\ u_0) + I(t,\ x,\ u_1)$ 是初值为 $(u_0,\ u_1)$ 的齐次解。

根据引理 2.1，我们有

$$|u^0(t,x)| \leq N_k(\cosh|x|)^{-1}(\cosh(t-|x|))^{-k}\ ,$$

对于满足 (1.3) 的任意 $u_0 \in C^1$, $u_1 \in C$。

设 $\langle t\rangle = \sqrt{1+t^2}$，根据初等不等式

$$\frac{1}{2}e^{|t|} \leq \cosh t \leq e^{|t|}, \forall t \in \mathbb{R}\ ,$$

我们注意到，对于任意 $h > 0$，存在常数 $N_h > N_k$ 使得

$$\overline{u^0}(t,r) \leq \frac{N_k}{(\cosh r)(\cosh(t-r))^k} \leq \frac{N_h}{e^r\langle t-r\rangle^h} := \frac{N_h}{\Phi_h(t,r)}\ , \tag{3.2}$$

其中，我们将 $f(t,\ \overline{r}) = \max_{|x|=r}|f(t,\ x)|$ 记为。

对于稍后将要指定的固定 $h>0$，我们将通过迭代证明方程 (3.1) 的解 u 的整体存在性。为此，我们需要引入一个适当的范数。我们将解空间（完备的）和解映射 Tu 定义如下。

$$X_\varepsilon=\{u\in C([0,\infty)\times\mathbb{H}^3):\|u\|:=\|\Phi_h u\|_{L^\infty_{t,x}}\le 2\varepsilon N_h\},$$

$$(Tu)(t,x)=\varepsilon u^0+LF_p(u).$$

由巴拿赫不动点定理可知，证明归结为以下关键的非线性估计。

引理 3.1 (非线性估计)。设 $p>3$, $h\in(1,p-2)$ 和 F_p 为满足 (1.5) 的 C^1函数。存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 均有

$$\|LF_p(u)-LF_p(v)\|\le\frac{1}{2}\|u-v\|,\forall u,v\in X_\varepsilon. \tag{3.3}$$

实际上，借助引理 3.1，我们知道对于 $u\in X_{\varepsilon_0}$,

$$\|LF_p(u)\|=\|LF_p(u)-LF_p(0)\|\le\varepsilon_0 N_h,$$

这说明

$$\|Tu\|\le\|\varepsilon u^0\|+\|LF_p(u)\|\le 2\varepsilon_0 N_h,$$

即，$Tu\in X_{\varepsilon_0}$。此外，由 (3.3) 可得

$$\|Tu-Tv\|=\|LF_p(u)-LF_p(v)\|\le\frac{1}{2}\|u-v\|,$$

这保证了 $T\colon X_{\varepsilon_0}\to X_{\varepsilon_0}$ 是一个压缩映射，而不动点就是所需的解。

3.1. 引理 3.1 的证明。

根据 (1.5)，存在 $A>2$，使得

$$|F_p'(u)|\le A\left(\ln\frac{1}{|u|}\right)^{1-p}\triangleq G(u),\forall|u|\le\frac{1}{A}. \tag{3.4}$$

对于任意 $u\in X_\varepsilon$，当 $\Phi_h\ge 1$ 时，我们知道，

$$\|u\|_{L^\infty_{t,x}}\le\|\Phi_h u\|_{L^\infty_{t,x}}=\|u\|\le 2\varepsilon N_h\le\frac{1}{A},$$

前提是 $\varepsilon\in(0,1/(2N_hA)]=(0,\varepsilon_1]$，对此我们在下文中作此假设。那么对于任意 u, $v\in X_\varepsilon$，鉴于（3.4）以及 G 的单调性，我们得到

$$|F_p(u)-F_p(v)|\le G(\max(|u|,|v|))|u-v|\le G\left(\frac{2\varepsilon N_h}{\Phi_h}\right)\overline{u-v}.$$

回顾 $\Phi_h(t,\ r)=e^r\langle t-r\rangle^h\ge e^r$，我们看到

$$|F_p(u)-F_p(v)(t,x)|\le A\left(\ln\frac{1}{2\varepsilon N_h}+r\right)^{1-p}\overline{u-v}(t,r).$$

由 (3.1)、(2.5) 和 (5.4)，以及这一事实

$$|\overline{u}(t,r)|\le\frac{\|u\|}{\Phi_h(t,r)}\le\frac{\|u\|}{\langle t-r\rangle^h\cosh r},$$

我们有

$$\begin{aligned}
& |(LF_p(u) - LF_p(u))(t,x)| \\
\leq\ & L\left(A\left(\ln\frac{1}{2\varepsilon N_h}+\cdot\right)^{1-p}\overline{u-v}\right)(t,r) \\
=\ & \frac{A}{2\sinh r}\int_0^t\int_{|t-s-r|}^{t-s+r}\left(\ln\frac{1}{2\varepsilon N_h}+\lambda\right)^{1-p}\overline{u-v}(s,\lambda)\sinh\lambda d\lambda ds \\
\leq\ & \frac{A\|u-v\|}{2\sinh r}\int_0^t\int_{|t-s-r|}^{t-s+r}\left(\ln\frac{1}{2\varepsilon N_h}+\lambda\right)^{1-p}\frac{\tanh\lambda}{\langle s-\lambda\rangle^h}d\lambda ds \\
\leq\ & \frac{A\tanh(t+r)}{2\sinh r}\|u-v\|\int_{|t-r|}^{t+r}\int_{-\beta}^{t-r}\left(\ln\frac{1}{2\varepsilon N_h}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{1-p}\langle\alpha\rangle^{-h}d\alpha d\beta\ ,
\end{aligned}$$

其中我们引入了新的积分变量 $\alpha = s-\lambda$, $\beta = s+\lambda$。

借助上述估计，(3.3) 的证明便归结为证明以下断言：

(3.5)
$$J(t,r) := \int_{|t-r|}^{t+r}\int_{-\beta}^{t-r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta-\alpha\right)^{1-p}\langle\alpha\rangle^{-h}d\alpha d\beta \ll \frac{\tanh r}{\tanh(t+r)}\langle t-r\rangle^{-h},$$

只要 $p>3$, $h\in(1,p-2)$ 且 ε 充分小。

对于 (3.5)，我们将证明分为三个独立的情形： $r\leq \min(1,t)$,$1\leq r\leq t$ 和 $r>t$。

3.1.1. 情形 *1*： $r\leq \min(1,t)$。在这种情形下，我们有 $r\sim$双曲正弦$\,r\sim\tanh\, r$。由于 $h>1$，显然 $\langle\alpha\rangle^{-h}$ 可积，因此

(3.6)
$$\begin{aligned}
& \int_{t-r}^{t+r}\int_{-\beta}^{(t-r)/2}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta-\alpha\right)^{1-p}\langle\alpha\rangle^{-h}d\alpha d\beta \\
\lesssim\ & \int_{t-r}^{t+r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta\right)^{1-p}d\beta \\
\lesssim\ & r\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+t-r\right)^{1-p} \ll r\langle t-r\rangle^{-h},
\end{aligned}$$

得益于假设 $h\in(1,\ p-1)$。另一方面，对于包含$\alpha\geq(t-r)/2$的部分，我们有

(3.7)
$$\begin{aligned}
& \int_{t-r}^{t+r}\int_{(t-r)/2}^{t-r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta-\alpha\right)^{1-p}\langle\alpha\rangle^{-h}d\alpha d\beta \\
\sim\ & \langle t-r\rangle^{-h}\int_{t-r}^{t+r}\int_{(t-r)/2}^{t-r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta-\alpha\right)^{1-p}d\alpha d\beta \\
\lesssim\ & \langle t-r\rangle^{-h}\int_{t-r}^{t+r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta-(t-r)\right)^{2-p}d\beta \\
\lesssim\ & \langle t-r\rangle^{-h}r\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-p} \ll r\langle t-r\rangle^{-h}.
\end{aligned}$$

借助 (3.6)、(3.7) 以及 $\tanh(t+r) \le 1$ 这一事实，我们有

$$J(t,r) \ll r\langle t-r\rangle^{-h} \sim \langle t-r\rangle^{-h}\tanh r \le \langle t-r\rangle^{-h}\frac{\tanh r}{\tanh(t+r)}. \tag{3.8}$$

3.1.2. 情形 *2:* $1 \le r \le t$. 在此情形下，我们有 $\tanh r \sim 1$。类似于 (3.6)，当$h \in (1, p-2)$时，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{t-r}^{t+r}\int_{-\beta}^{(t-r)/2}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta-\alpha\right)^{1-p}\langle\alpha\rangle^{-h}d\alpha d\beta \\ \lesssim\ &\int_{t-r}^{t+r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta\right)^{1-p}d\beta \\ \lesssim\ &\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+t-r\right)^{2-p} \ll \langle t-r\rangle^{-h}\ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

对于含有 $\alpha \ge (t-r)/2$ 的部分，与 (3.7) 类似，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{t-r}^{t+r}\int_{(t-r)/2}^{t-r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta-\alpha\right)^{1-p}\langle\alpha\rangle^{-h}d\alpha d\beta \\ \lesssim\ &\langle t-r\rangle^{-h}\int_{t-r}^{t+r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta-(t-r)\right)^{2-p}d\beta \\ \lesssim\ &\langle t-r\rangle^{-h}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3-p} \ll \langle t-r\rangle^{-h}\ , \end{aligned} \tag{3.10}$$

由于我们假设 $p > 3$。

对于情形 1，由 (3.9)、(3.10) 可得

$$J(t,r) \ll \langle t-r\rangle^{-h} \sim \langle t-r\rangle^{-h}\tanh r \le \langle t-r\rangle^{-h}\frac{\tanh r}{\tanh(t+r)}. \tag{3.11}$$

3.1.3. 情形 *3*: $r > t$. 在这种情况下，我们有

$$\tanh(t+r) \le \tanh(2r) \lesssim \tanh r,\ \beta-\alpha \ge \beta\ ,$$

因此

$$\begin{aligned} J(t,r) &= \int_{r-t}^{t+r}\int_{-\beta}^{t-r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta-\alpha\right)^{1-p}\langle\alpha\rangle^{-h}d\alpha d\beta \\ &\le \int_{r-t}^{t+r}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\beta\right)^{1-p}\int_{-\beta}^{t-r}\langle\alpha\rangle^{-h}d\alpha d\beta \\ &\lesssim \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+r-t\right)^{2-p}\langle r-t\rangle^{1-h} \ll \langle r-t\rangle^{-h}\frac{\tanh r}{\tanh(t+r)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

这就完成了(3.5)的证明，因而引理 3.1得证。

4. Formation of singularity

本节给出定理 1.2 的证明，其中 $F(u) = F_p(u)$ 满足 (1.6)。由于我们将证明任意非平凡初值都会发生爆破，因此不失一般性，可令 $\varepsilon = 1$。首先，我们给出紧支集 $C^1 \times C^0$ 数据的局部存在性与唯一性。

4.1. 局部存在性与唯一性。 我们概述 $t \in [0,T]$ 在某个充分小的 $T \in (0,1]$ 下的证明。

假设 u_0, u_1 的支集包含在一个球 $|x| \le r_0$中，由 (3.2) 可得

$$\overline{u^0}(t,r) \le Ne^{-r}\chi_{r\le t+r_0} \le N\chi_{r\le t+r_0}, \tag{4.1}$$

对于某个 $N>0$，其中 χ 是特征函数。基于 (4.1)，我们引入另一种范数

$$\|u\| = \|\overline{u}(t,r)\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{H}^3)} \tag{4.2}$$

以及完备度量空间

$$X_T = \{u \in C([0,T]\times\mathbb{H}^3) : \|u\| \le 2N, \operatorname{supp} u(t) \subset \{r \le t+r_0\}\} .$$

当 $F \in C^1$ 且 $F(0) = 0 = F'(0)$ 时，存在 $M>0$ 使得 $|F(u) - F(v)| \le M|u-v|$，因此 $F(u) - F(v) \le M\overline{u-v}$，对任意 $u, v \in X_T$。因此，对于任意此类$u, v \in X_T$，可得

$$\begin{aligned} |LF(u)(t,x) - LF(v)(t,x)| &\le \frac{1}{2\sinh r}\int_0^t \int_{|t-s-r|}^{t-s+r} \overline{F(u)-F(v)}(s,\lambda)\sinh\lambda d\lambda ds \\ &\le \frac{M\|u-v\|}{2\sinh r}\int_0^t\int_{|t-s-r|}^{t-s+r} d\lambda ds \\ &= \frac{M\|u-v\|}{4\sinh r}\int_{|t-r|}^{t+r}\int_{-\beta}^{t-r} d\alpha d\beta . \end{aligned}$$

一个简单的计算告诉我们，

$$\int_{|t-r|}^{t+r}\int_{-\beta}^{t-r} d\alpha d\beta \le 4t\min(t,r) \le 4tr .$$

回想一下双曲正弦 $r \ge r$，如果 $MT \le 1/2$，我们可以看到，

$$|LF(u)(t,x) - LF(v)(t,x)| \le \frac{Mtr\|u-v\|}{\sinh r} \le MT\|u-v\| \le \frac{1}{2}\|u-v\| ,$$

这确保了

$$\|LF(u) - LF(v)\| \le \frac{1}{2}\|u-v\|, \forall u, v \in X_T .$$

于是，映射显然是

$$(Tu)(t,x) = u^0 + LF(u)$$

是 X_T 上的压缩映射，从而保证局部存在性和唯一性。

4.2. 解的爆破。 由于 $F(u)$的凸性，由(3.1)可得$\varepsilon = 1$，我们有

$$\widetilde{u}(t,r) = \widetilde{u^0}(t,r) + \widetilde{LF(u)}(t,r) \ge \widetilde{u^0}(t,r) + LF(\widetilde{u})(t,r) , \tag{4.3}$$

这给出了我们所需的
结果

$$\widetilde{u}(t,r) \ge \widetilde{u^0}(t,r) + \frac{1}{2\sinh r}\int_0^t\int_{|t-s-r|}^{t-s+r} F(\widetilde{u})(s,\lambda)\sinh\lambda d\lambda ds. \tag{4.4}$$

令 $R_{r,\ t}$ 表示积分区域

$$R_{r,t} = \{(\lambda,s) : t-r < s+\lambda < t+r, s-\lambda < t-r, s>0\} \tag{4.5}$$

在 $(\lambda,\ s)$ 平面中，见图 1。

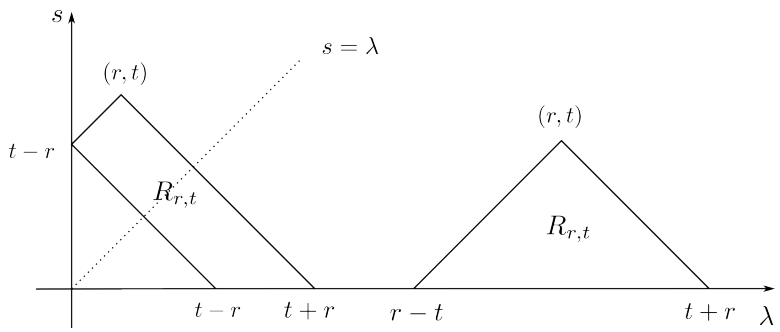


FIGURE 1. 积分区域

我们将采用反证法进行证明，为此假设存在某些非平凡初值 $(u_0,u_1)\in C_c^1\times C_c$ 使得解是整体的。

令 $t_0>0$，使得两组数据的支集均包含于 $\{x\in\mathbb{H}^3:\ r\le t_0\}$。借助尖锐惠更斯原理，我们有 $u^0=0$ 在 $\Gamma^+(O,\ t_0)$ 中。接下来，我们将证明必有

$$\text{supp } u\subset\Gamma^-(O,t_0)\ . \tag{4.6}$$

若此结论成立，则从 $t=t_0+1$ 向后求解，由第 **4.1** 小节的唯一性结论可知 $u\equiv 0$，这显然与数据非平凡的假设矛盾。

4.3. 证明 (4.6)。反设 **(4.6)** 不成立，也就是说，存在一点 $(x_1,\ t_1)\notin\Gamma^-(O,\ t_0)$，使得

$$u(t_1,x_1)\neq 0.$$

设 t_2，使得 $t_2=t_1+|x_1|$，则 $(O,\ t_2)\in\Gamma^+(O,\ t_0)$。由 **(3.1)** 及 $\varepsilon=1$ 可知，点 $(x^1,\ t_1)$ 位于 $(t,\ x)=(t_2,\ O)$ 时 L 的积分区域内，因此有

$$u(t_2,O)>\mu>0\ ,$$

对于某个 $\mu>0$。由于 $\widetilde{u}(t_2,0)=\widetilde{u}(t_2,O)>\mu$，由连续性可知，我们可以找到一个正的 $\delta>0$，使得

$$\widetilde{u}(t,r)>\frac{\mu}{2},\forall t\in[t_2,t_2+\delta],r\le\delta\ . \tag{4.7}$$

在继续之前，我们引入以下区域（见图 2）

$$T = \{(\lambda,s):t_2+\delta\le s+\lambda\le t_2+2\delta,s-\lambda\le t_2\}\ , \tag{4.8}$$

$$S = \{(\lambda,s):t_2+2\delta\le s+\lambda,t_2\le s-\lambda\le t_2+\delta\}\ . \tag{4.9}$$

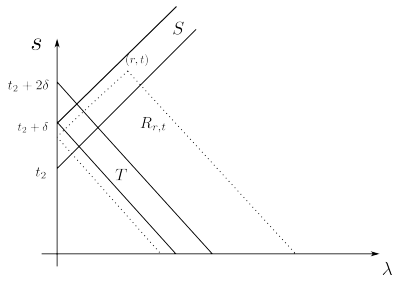


图 2

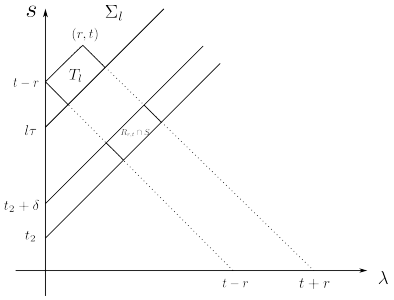


图 3

注意到，对于任意 $(r,t) \in S$，我们有 $T \subset R_{r,t}$。由此根据 (4.4) 和 (4.7) 可得，对于 $(r,t) \in S$,

$$\widetilde{u}(t,r) \geq \frac{1}{2\sinh r}\int_T F(\widetilde{u})(s,\lambda)\sinh\lambda d\lambda ds \geq \frac{c_0}{\sinh r}\ , \tag{4.10}$$

对于某个常数 常数 $0 < c_0 \ll 1$，它关于 $(r,\ t)$ 是一致的 $\in S$.

回忆式 (1.6)，存在 $\delta_0 > 0$ 使得 t

$$F(u) \geq \delta_0\left(\ln\frac{1}{|u|}\right)^{1-p}|u|, \forall |u| < \delta_0\ ;\ F(u) \geq \delta_0|u|^q, \forall |u| > 1/\delta_0\ . \tag{4.11}$$

不失一般性，我们可以假设 $c_0 < \delta_0$双曲正弦$(\delta/2)$，因此根据 (4.10)，

$$F(\widetilde{u})(t,r) \geq \frac{\delta_0 c_0}{\sinh r}\left(\ln\frac{\sinh r}{c_0}\right)^{1-p},\ \forall (r,t) \in S\ . \tag{4.12}$$

4.3.1. 改进的下界。 为改进下界，对于第 l 次迭代，我们引入以下区域，其中 $\tau = t_2 + 2\delta$,

$$\Sigma_l = \{(\lambda,s) : s-\lambda > l\tau\}\ , \tag{4.13}$$

$$T_l = \{(\lambda,s) : t-r < s+\lambda < t+r, l\tau < s-\lambda < t-r\}\ . \tag{4.14}$$

示意图见图 3。根据 (4.12) 和 (4.4)，对于任意 $(r,\ t) \in \Sigma_1$，我们可以再迭代一次，得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(t,r) &\geq \frac{1}{2\sinh r}\int_{R_{r,t}\cap S} F(\widetilde{u})(s,\lambda)\sinh\lambda d\lambda ds \\
&\geq \frac{\delta_0 c_0}{2\sinh r}\int_{R_{r,t}\cap S}\left(\ln\left(\frac{\sinh\lambda}{c_0}\right)\right)^{1-p} d\lambda ds \\
&\gtrsim \frac{1}{\sinh r}\int_{t-r}^{t+r}\int_{t_2}^{t_2+\delta}\left(\ln\left(\frac{1}{c_0}\right)+\beta\right)^{1-p} d\alpha d\beta \\
&\gtrsim \frac{r}{\sinh r}\left(\ln\left(\frac{1}{c_0}\right)+t+r\right)^{1-p},
\end{aligned}$$

这意味着存在 $c_1 \in (0, c_0]$

$$\widetilde{u}(t,r) \geq c_1\frac{r}{\sinh r}\left(\ln\left(\frac{1}{c_1}\right)+t+r\right)^{1-p}.$$

更一般地，假设我们已得到如下形式的不等式:

$$\widetilde{u}(t,r) \geq c_l \frac{r}{\sinh r}\left(t+r+\ln\left(\frac{1}{c_l}\right)\right)^{-b_l}(t-r)^{a_l},\ \forall\ (r,t)\in\Sigma_l, \tag{4.15}$$

对于某些 $b_l>0$, $c_l>0$ 和 $a_l\in[0,b_l]$。显然，当 $a_l-b_l\leq 0$时，我们可以取充分小的 c_l，使得下界小于 δ_0，并利用对数项进行迭代。根据 (4.15)，进一步迭代可得

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(t,r) &\geq \frac{1}{2\sinh r}\int_{T_l} F(\widetilde{u})(s,\lambda)\sinh\lambda d\lambda ds\\
&\gtrsim \frac{1}{\sinh r}\int_{t-r}^{t+r}\int_{l\tau}^{t-r}\left(\ln\left(\frac{1}{c_l}\right)+\beta\right)^{1-p}\left(\beta+\ln\left(\frac{1}{c_l}\right)\right)^{-b_l}\alpha^{a_l}(\beta-\alpha)d\alpha d\beta\\
&\geq \frac{1}{\sinh r}\int_{t-r}^{t+r}\left(\ln\left(\frac{1}{c_l}\right)+\beta\right)^{-b_l+1-p}\int_{l\tau}^{t-r}(\alpha-l\tau)^{a_l}(t-r-\alpha)d\alpha d\beta\\
&\gtrsim \frac{1}{\sinh r}(t-r-l\tau)^{a_l+2}\int_{t-r}^{t+r}\left(\ln\left(\frac{1}{c_l}\right)+\beta\right)^{-b_l+1-p}d\beta\\
&\gtrsim \frac{r}{\sinh r}(t-r-l\tau)^{a_l+2}\left(\ln\left(\frac{1}{c_l}\right)+t+r\right)^{-b_l+1-p},
\end{aligned}$$

对于任意 $(r,t)\in\Sigma_l$。若假设 $(r,t)\in\Sigma_{l+1}$，则得到 $t-r-l\tau\sim t-r$，因此 (4.15) 对 $a_{l+1}=a_l+2$, $b_{l+1}=p-1+b_l$ 以及某个 $c_{l+1}\in(0,c_l)$ 也成立。

通过归纳法，取 $a_1=0$ 和 $b_1=p-1$，显然，只要满足 $a_j\leq b_j$，就可以将带有 $l=j$ 的 (4.15) 加强为带有 $l=j+1$ 的 (4.15)。由于 $a_j=2j-2$,$b_j=(p-1)j$，若 $1<p<3$，该过程会在有限步内中止。具体而言，取 $l_0:=\left[\frac{2}{3-p}\right]+1$，则对某个 $c>0$，有

$$\widetilde{u}(t,r)\geq c\frac{r}{\sinh r}\left(t+r+\ln\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{-l_0(p-1)}(t-r)^{2l_0-2}, \tag{4.16}$$

对所有 $(r,\ t)\in\Sigma_{l_0}$。这里，$-l_0(p-1)+2l_0-2=l_0(3-p)-2>0$。

4.3.2. 进一步改进的下界。利用在无穷远处趋于无穷的下界 (4.16)，我们可以利用幂型非线性证明有限时间内发生爆破。

令 $A_0=l_0(3-p)-2>0$，并且

$Y_0=\{(\lambda,s):\lambda\leq 1, s\geq T\}$，$Y=\{(\lambda,s):\lambda\leq 1, s-\lambda\geq T, s+\lambda\leq T+2\}$，

其中 $T>\left(\frac{1}{c}\right)^{1/A_0}$ 是一个稍后确定的常数，使得 $Y_0\subset\Sigma_{l_0}$（见图4）。

将其限制在 Y_0 上，下界 (4.16) 告诉我们

$$\widetilde{u}(t,r)\geq\tilde{c}\ t^{A_0}\geq\tilde{c}\ T^{A_0}, \tag{4.17}$$

对某个 $\tilde{c}>0$。我们要求 $\tilde{c}\ T^{A_0}>\delta_0^{-1}$，以便能够应用幂型非线性 (4.11):

$$F(\widetilde{u})\geq\delta_0|\widetilde{u}|^q,\ \forall(r,t)\in Y_0\ .$$

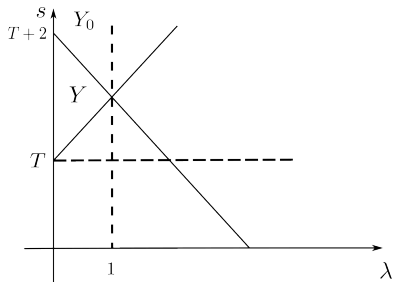


图4

与之前一样，我们希望加强 (4.17)，以说明有限时间内的爆破。为此，假设我们有如下形式的下界

$$\widetilde{u}(t,r) \geq DT^A(t-r-T)^B \ , \tag{4.18}$$

对于 $(r,\ t) \in Y \subset Y_0$。于是

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(t,r) &\geq \frac{1}{2\sinh r}\int_{R_{r,t}\cap Y} F(\widetilde{u})(s,\lambda)\sinh\lambda d\lambda ds \\
&\geq \frac{\delta_0}{2\sinh r}\int_{R_{r,t}\cap Y} |\widetilde{u}(s,\lambda)|^q \sinh\lambda d\lambda ds \\
&\geq \frac{\delta_0}{8\sinh r}\int_{t-r}^{t+r}\int_{T}^{t-r} D^q T^{Aq}(\alpha-T)^{Bq}(\beta-\alpha)d\alpha d\beta \\
&= \frac{\delta_0 D^q T^{Aq}}{8\sinh r}\int_{t-r}^{t+r}\int_{T}^{t-r}(\alpha-T)^{Bq}((\beta-T)-(\alpha-T))d\alpha d\beta \\
&\geq \frac{\delta_0 D^q r}{4(Bq+1)(Bq+2)\sinh r}T^{Aq}(t-r-T)^{Bq+2} \\
&\geq \frac{\delta_0 D^q}{8(Bq+2)^2}T^{Aq}(t-r-T)^{Bq+2} \ ,
\end{aligned}$$

如双曲正弦 $r \in [r, 2r]$ 对于 $r \in [0,1]$。

众所周知，利用归纳法，由带有 $D = \tilde{c}$、 $A = A_0$、 $B = 0$ 的 (4.18)，可得对任意 $m \geq 0$，只要 $D_0 = \tilde{c}$、 $B_0 = 0$ 且.....，带有 $D = D_m$、 $A = A_m$ 和 $B = B_m$ 的 (4.18) 也成立，

$$A_{m+1} = A_m q, B_{m+1} = B_m q + 2, D_{m+1} = \frac{\delta_0 D_m^q}{8(B_m q+2)^2} = \frac{\delta_0 D_m^q}{8B_{m+1}^2} \ . \tag{4.19}$$

求解 (4.19) 得到 $m \geq 1$

$$A_m = A_0 q^m,\ B_m = 2\frac{q^m-1}{q-1} \leq 2mq^{m-1},\ D_m \geq \frac{\delta_0 D_{m-1}^q}{32m^2 q^{2(m-1)}}, \tag{4.20}$$

因此

$$D_m \geq \exp\left[q^m\left(\ln D_0 - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{2\ln(j+1)+2j\ln q-\ln\frac{\delta_0}{32}}{q^{j+1}}\right)\right].$$

Let

$$E = \ln D_0 - \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2\ln(j+1)+2j\ln q-\ln\frac{\delta_0}{32}}{q^{j+1}} \ , \tag{4.21}$$

其收敛性由 $q>1$ 保证，由此可知，对于任意 $m\geq 1$,

$$D_m \geq \exp(Eq^m)\ . \tag{4.22}$$

于是由 (4.20)、(4.22)、(4.21)，对于 $(r,\ t)\in Y$ 且 m 充分大时，我们有

$$\widetilde{u}(t,r)\geq \exp\left[q^m\left(E+A_0\ln T+\frac{2}{q-1}\ln(t-r-T)\right)\right](t-r-T)^{-\frac{2}{q-1}}.$$

令 $r=0$ 和 $t=T+2$，当 T 充分大时，项 $E+A_0\ln T+\frac{2}{q-1}\ln(t-r-T)$ 为正。因此，对于这样的 T，可推出 $u(T+2,\ O)=\widetilde{u}(T+2,\ r)\to\infty$，当 $m\to\infty$ 时，这便得到了所需的矛盾。

5. Appendix

本节中，我们将给出公式 (2.5) 的一个初等证明。利用第2节中的坐标 (2.1)，经过简单计算可得双曲空间上的波算子与闵可夫斯基空间上的波算子之间的如下关系：

$$\Box=\partial_\tau^2-\Delta_{\mathbb{R}^3}=e^{-3t}(\partial_t^2-(\Delta_{\mathbb{H}^3}+1))e^t=e^{-3t}\Box_{\mathbb{H}^3}e^t\ .$$

不失一般性，我们只需证明 $x=O$ 时的公式 (2.5)，为此我们使用测地极坐标 $(r,\ \omega)$。

设 $u=I(t,\ x,\ u_1)$，我们知道它满足

$$(\partial_t^2-\partial_r^2-\frac{2}{\tanh r}\partial_r-\frac{1}{(\sinh r)^2}\Delta_\omega-1)u=0, u(0,x)=0, u_t(0,x)=u_1\ .$$

对 $S_1(O)$ 取球面平均，可得 $U(t,\ r)=M^r(u(t,\ \cdot))(O)$ 满足

$$(\partial_t^2-\partial_r^2-\frac{2}{\tanh r}\partial_r-1)U=0, U(0,r)=0, \partial_tU(0,r)=(M^ru_1)(O):=G(r)\ .$$

设 $W(\tau,\ s)=e^{-t}U(t,\ r)$，其中 $\tau^2-s^2=e^{2t}$、$s/\tau=\tanh\ r$，则有

$$\begin{cases}\Box W=e^{-3t}(\partial_t^2-\partial_r^2-\frac{2}{\tanh r}\partial_r-1)U=0\\ W|_{t=0}=W(\langle s\rangle,s)=0,\ W_t|_{t=0}=G(\tanh^{-1}\frac{s}{\langle s\rangle})\end{cases},$$

其中，当 $t=0$ 时，$\partial_t=\langle s\rangle\partial_\tau+s\partial_s$、$\partial_r=s\partial_\tau+\langle s\rangle\partial_s$。在双曲空间$t=0$上，我们看到 $\partial_\tau=\langle s\rangle\partial_t-s\partial_r$、$\partial_s=\langle s\rangle\partial_r-s\partial_t$，因此

$$\begin{cases}\Box W=(\partial_\tau^2-\partial_s^2)(sW)=0\\ W(\langle s\rangle,s)=0,\ W_\tau(\langle s\rangle,s)=(\langle s\rangle W_t-sW_r)|_{t=0}=\langle s\rangle G(\tanh^{-1}\frac{s}{\langle s\rangle})\ .\end{cases}\tag{5.1}$$

设 $\alpha=\tau-s$，$\beta=\tau+s$、$Z(\alpha,\ \beta)=sW$，且 $\lambda=\ln(\langle s\rangle+s)$，我们可以将 (5.1) 进一步变换为以下形式

$$\begin{cases}\partial_\alpha\partial_\beta Z=0\\ Z(e^{-\lambda},e^\lambda)=0,\ Z_\beta(e^{-\lambda},e^\lambda)=\frac{1}{2}(\partial_\tau+\partial_s)(sW)=\frac{\sinh\lambda}{2e^\lambda}G(\lambda)\ .\end{cases}\tag{5.2}$$

鉴于达朗贝尔公式，以及 $Z|_{s=0}=0$ 这一事实，我们对 $\alpha=\tau-s=e^{-\mu}$，$\beta=\tau+s=e^\nu\ (\mu\in\mathbb{R},\ \ \nu\geq 0)$ 得到

$$Z(e^{-\mu},e^\nu)=\int_{e^{|\mu|}}^{e^\nu}\frac{\sinh\lambda}{2e^\lambda}G(\lambda)d(e^\lambda)=\frac{1}{2}\int_{|\mu|}^{\nu}G(\lambda)\sinh\lambda d\lambda\ .$$

最后，当 $e^{2t}=\tau^2-s^2=e^{\nu-\mu}$, $e^{2r}=\frac{\tau+s}{\tau-s}=e^{\nu+\mu}$ 时，我们有

$$U(t,r)=\frac{e^t}{s}Z(e^{-\mu},e^\nu)=\frac{1}{2\sinh r}\int_{|t-r|}^{t+r}G(\lambda)\sinh\lambda d\lambda.\tag{5.3}$$

对于 $t>0$，我们有 $u(t,\ 0)\ =U(t,\ 0)\ =\lim_{r\to 0}U(t,\ r)\ =$(双曲正弦 t)$G(t)\ =$(双曲正弦 t)$(M^t u_1)(O)$，由此完成了 (2.5) 的证明。

顺便指出，公式 (5.3) 和 (2.5) 告诉我们，对于径向函数 u_1，球面平均满足以下公式：

$$(M^t u_1)(r)=\frac{1}{2\sinh t\sinh r}\int_{|t-r|}^{t+r}u_1(\lambda)\sinh\lambda d\lambda\ . \tag{5.4}$$

致谢。第一作者谨此感谢 Vladimir Georgiev 教授提出对数非线性问题。提出这一问题时，第一作者正在早稻田大学举行的“早稻田 2019 年偏微分方程研讨会”上作报告，报告内容是具有幂型非线性的双曲空间上的波动方程。

References

[1] Jean-Philippe Anker 和 Vittoria Pierfelice。双曲空间上的波动方程与 Klein-Gordon 方程。Anal. PDE, 7 4 953 995, 2014 2 ( ): –。Jean-Philippe Anker、Vittoria Pierfelice 和 Maria
[2] Vallarino。双曲空间上的波动方程。J. Differential Equations, 252 10 5613 5661, 2012 2 ( ): –。Jean-Philippe Anker、Vittoria
[3] Pierfelice 和 Maria Vallarino。Damek-Ricci 空间上的波动方程。Ann. Mat. Pura Appl. (4 194 3 731 758, 2015 2), ( ): –。Jean Fontaine。双曲空间上的半线性
[4] 波动方程。Comm. Partial Differential Equations, 22 3 4 633 659, 1997 2, 4 (-): –。Vladimir
[5] Georgiev、Hans Lindblad 和 Christopher D. Sogge。半线性波动方程的加权 Strichartz 估计与整体存在性。Amer. J. Math., 119(6):1291–1319, 1997。2[6] Robert T. Glassey。二维空间中 $cmu=F(u)$ 的大范围存在性。Math. Z., 178 2 233 261, 1981 2 ( ): –。Robert T. Glassey。非线性波动方程解的有限时间爆破。Math. Z.,
[7] 177 3 323 340, 1981 2 ( ): –。Paul Gunther。对称空间上球面平均值的 -衰减估计。Ann. Global Anal. Geom.,
[8] $\ddot{}$ L^∞ 12 3 219 236, 1994 4 ( ): –。Fritz John。三维空间中非线性波动方程解的爆破。
[9] Manuscripta Math., 28 1 3 235 268, 1979 2, 4 (-): –。Hans Lindblad 和
[10] Christopher D. Sogge。小振幅半线性波动方程的长时间存在性。Amer. J. Math., 118 5 1047 1135, 1996 2 ( ): –。Jason Metcalfe 和 Michael Taylor。三维双
[11] 曲空间上的非线性波。Trans. Amer. Math. Soc., 363 7 3489 3529, 2011 2 ( ): –。Jason
[12] Metcalfe 和 Michael Taylor。三维双曲空间上的色散波估计。Proc. Amer. Math. Soc., 140 11 3861 3866, 2012 2 ( ): –。Thomas C. Sideris。高维半线性波动方程整体解的不存在
[13] 性。J. Differential Equations, 52 3 378 406, 1984 2 ( ): –。Yannick
[14] Sire、Christopher D. Sogge 和 Chengbo Wang。负曲率背景上的 Strauss 猜想。Discrete Contin. Dyn. Syst., 39 12 7081 7099, 2019 2 ( ): –。Yannick Sire、
[15] Christopher D. Sogge、Chengbo Wang 和 Junyong Zhang。非陷获渐近双曲流形上的 Strichartz 估计与 Strauss 猜想。Trans. Amer. Math. Soc., 373 11 7639 7668, 2020 2 ( ): –。Yannick Sire、Christopher D.
[16] Sogge、Chengbo Wang 和 Junyong Zhang。非陷获渐近双曲流形上波动方程的反向 Strichartz 估计及其应用。Comm. Partial Differential Equations, 47 6 1124 1132, 2022 2 ( ): –。
[17] Walter A. Strauss。低能下的非线性散射理论。J. Functional Analysis, 41 1 110 133, 1981 2 ( ): –。Daniel
[18] Tataru。双曲空间中的 Strichartz 估计及半线性波动方程的整体存在性。Trans. Amer. Math. Soc., 353 2 795 807, 2001 2 ( ): –。Chengbo Wang 和 Xiaoran
[19] Zhang。Tataru 的色散估计的另一种证明。arXiv:2203.16191 [math.AP]。2

[20] 周毅。四个空间维度中具有小初始数据的半线性波动方程的柯西问题。《偏微分方程杂志》，8(2):135–144，1995年。2School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310058, P. R. China*Email address*: wangcbo@zju.edu.cn
School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310058,P.R.China
Email address: 1025391337@qq.com