arXiv:2304.01605v1 [math.AP] 4 Apr 2023

无限时更新方程

Xu'an Dou[*a]、Benoît Perthame[†b]、Chenjiayue Qi[‡c]、Delphine Salort[§d]和Zhennan Zhou[¶aa]北京大学北京国际数学研究中心，中国北京，100871。[b]索邦大学、法国国家科学研究中心、法国国家信息与自动化研究院、巴黎西岱大学、雅克-路易·利翁实验室，法国巴黎朱西厄广场4号，邮编75005。[c]北京大学哲学系，中国北京，100871。[d]索邦大学、法国国家科学研究中心、计算与定量生物学实验室（UMR 7238），法国巴黎朱西厄广场4号，邮编75005。

2023年4月5日

摘要

在神经科学中，人们利用自上次放电以来经过的时间来预测下一次放电的概率。若将最近两次放电的时间纳入考量，甚至考虑更多次放电，预测效果还可以进一步提高。这类多时刻过程也出现在许多其他领域，对所用时刻的数量并没有普遍的限制。这一观察促使我们研究无限时更新方程，将其作为一个简单模型，以理解这类依赖无穷多个变量的偏微分方程的含义和性质。

我们定义了两种解的概念，并证明了解（可能是测度解）的存在性和唯一性。我们还证明，在对系数的假设不同的情况下，解在不同的强或弱拓扑下以指数速率长期收敛至稳态。

2010 数学学科分类。35B40,35F20, 35R09, 92B20关键词和短语。更新方程；Doeblin理论；最优传输；数学神经科学；结构化方程；

[*]电子邮箱：dxa@pku.edu.cn

[†]电子邮箱：benoit.perthame@sorbonne-universite.fr

[‡]电子邮箱：jiayue@pku.edu.cn §电子邮箱：delphine.salort@sorbonne-universite.fr

[¶]电子邮箱：zhennan@bicmr.pku.edu.cn

1 引言

许多物理和生物过程都涉及多个连续发生的事件，例如神经元的尖峰时间、地震序列，以及更一般的多时间更新过程。我们使用偏微分方程（PDE）的语言来描述这类过程在时刻 t 的概率分布，记作 $n_\infty(t, s_1, s_2, ...)$，并研究无限时更新方程，其中更新率记为 p_∞。该方程定义在定义域 $0 \le s_1 \le s_2 \le ...$ 上，其中 s_i 表示从当前时刻向过去数第 i 个最近事件的经过时间，可写为：

$$\begin{cases} \partial_t n_\infty + \sum_{i=1}^{\infty} \partial_{s_i} n_\infty + p_\infty(s_1, s_2, ...) n_\infty = 0, \\ n_\infty(t, s_1 = 0, s_2, ...) = \int_{u=0}^{\infty} p_\infty(s_2, ..., s_K, ..., u) n_\infty(t, s_2, ..., s_K, ..., u)\, du. \end{cases} \tag{1.1}$$

这种写法是形式上的，因为没有“最后一个变量” u 可供积分。我们的目标是精确定义解的概念，尤其是边界条件的含义，并证明唯一性。我们通过令 $N \to \infty$ 趋于 N次更新方程的极限来构造这些解，

$$\begin{cases} \partial_t n_N + \sum_{i=1}^{N} \partial_{s_i} n_N + p_N([s]_N) n_N = 0, \\ n_N(t, s_1 = 0, s_2, ..., s_N) = \int_{u=0}^{\infty} p_N(s_2, ..., s_N, u)\, n_N(t, s_2, ..., s_N, u)\, du. \end{cases} \tag{1.2}$$

对于我们所考虑的应用，极限的存在使得我们可以将物理描述限制在任意值 N，因为经过一定范围后，精确值不会发生太大变化。此外，我们还证明，这一近似 $N \to \infty$ 在时间上是一致成立的。

生物学动机 （1.2）中的边界条件意味着更新后会启动一个新的时间，并且所有标签都移动了 $+1$，因此“最老的”会被遗忘，倒数第二个则变成最后一个。这个过程可用于神经科学，其中 n（t, s）描述了找到一个神经元的概率，其时间 s 是自上次放电以来经过的时间 [18, 14, 15, 3]。当放电率取决于最近 N 次事件时，我们得到 N次更新方程，该方程由 $N = 2$ 在 [17]中提出。这个2次更新方程也被用于确定疫情传播期间接触者追踪的有效性 [8]。在这些应用中，变量 s_i 指的是年龄，但在许多其他领域中会出现具有不同速度的多重结构，从而得到形式更为一般的方程

$$\partial_t n + \sum_{i=1}^{N} \partial_{s_i} \left[g_i([s]_N) n \right] + p_N([s]_N, n_N) n_N = 0.$$

例如参见 [1] 。我们的分析可以涵盖此类更一般的设定，但为简洁起见，我们保留形式（1.1）–（1.2）。

在神经科学中，这一方面与对神经活动背后的随机过程更精细的描述密切相关，尤其是霍克斯过程和沃尔德过程。

与霍克斯过程和沃尔德过程的关系 我们将更新方程推广到无限时次的做法，与霍克斯过程的表述有相似之处；霍克斯过程见于计算神经科学 [16], 基因组分析 [19] 和金融分析 [2] 等领域。无限时次更新方程很可能也能用于这些问题。霍克斯过程可以理解为一种点

过程 $\mathcal{N} = \{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 其中 $T_i \in \mathbb{R}$ 是第 i次更新发生的时间。对于这一过程，在最简单的形式下，时刻 t 的更新率定义为 $\sum_{i\in\mathbb{Z}} h(t - T_i)\mathbb{I}^{T_i<t}$，这意味着更新率可能取决于过去无限多个更新时刻。在关于霍克斯过程的众多研究结果中，我们提及其分布 [5] 及其长期收敛性 [6, 13]。

除了霍克斯过程，沃尔德过程也与（1.1）有关，其中粒子的更新率取决于过去固定次数的更新（见 [5]）。它们可能对应有限次更新方程。然而，沃尔德过程是否可能取决于无限久远之前的更新次数，目前仍基本悬而未决。

论文内容。为了研究问题（1.1），我们需要遵循 [17], 回顾 N次更新方程的性质，例如 L^1 非扩张性质和 L^∞ 界。特别地，我们证明了一个关于维数 3.2一致的紧性估计（引理 N），这有助于后续的弱收敛结果（定理6.6）。

基于这些结果，我们的首要目标是证明当 $N \to \infty$ 时，存在 N 次更新方程的极限。一方面，秉承粒子系统中 BBGKY层级的思路，参见 [4], ，该极限可以理解为边缘分布层级 $n_\infty^{(K)}$，其中每个边缘分布都满足一个依赖于下一个边缘分布的方程，参见定理 4.1。我们称它们为“层级解”，参见定义 6.2。另一方面，利用柯尔莫哥洛夫扩张定理，它也可以理解为无限维中的一个测度 n_∞（定理6.6），该测度以弱意义满足无限维方程（定义 6.3）。这两种观点最终证明是等价的，而我们的主要结果是方程（1.1）的解的适定性。

我们的第二个目标是研究这些解对于无限维问题的长期行为。为此，我们采用两种不同的方法。对于 N-次更新方程，我们可以使用 Doeblin 方法证明其指数 L^1-收敛性，见定理 3.3。但是，当维数趋于无穷时， L^1-收敛速率将趋于零。然而，如果更新率 p_N足够快地收敛到 p_∞，则可以证明一些关于 $N \to \infty$ 的时间上一致收敛结果，以及长期行为在 N 中的某种一致性，这些结果仍然是在 L^1中得到的，见定理 5.1。 L^1 拓扑与处理无限维测度 n_∞几乎不相容。因此，我们还使用蒙日-康托罗维奇距离，在测度的弱拓扑中开展研究。我们为有限系统（定理 7.1）以及无限系统（定理 7.3）建立了长期收敛结果。同样，这些结果关于 N 是一致的，并且依赖于某个关于 N的一致小性条件，即 p_N的利普希茨范数满足该条件。

论文提纲。在第3节中，我们证明了有限次更新方程的若干性质。基于这些有限次更新方程的结果，我们采用两种方法处理无限时更新方程的弱解。第一种方法见第4-5 节，涉及强拓扑，称为“层级解”；第二种方法见第6-7节，借助柯尔莫哥洛夫扩张定理和蒙日-康托罗维奇距离，涉及弱拓扑和“测度解”。

2 记号

一般记号。如前所述，我们考虑满足 $s_i \le s_{i+1}$ 的变量，因此引入定义域

$$\mathcal{C}_N = \{0 \le s_1 \le ... \le s_N\}, \qquad \mathcal{C}_\infty = \{0 \le s_1 ... \le s_N \le ...\}. \tag{2.1}$$

我们用记号 $[s]_N$ 表示向量（$s_1, ..., s_N$） $\in \mathcal{C}_N$， s_i 是 $[s]_N$ 中的第 i 个分量， $d[s]_N$ 表示 $\mathcal{C}_N$ 上的勒贝格测度。更一般地，我们定义

$$[s]_{K,N} = (s_K, ..., s_N) \in \mathcal{C}_{N-K+1} \qquad \text{for} \qquad K \le N.$$

在 同样地， $[s]_\infty$ 对应于一个无限向量。我们将 τ 记作移位算子，其中 e

$$\tau(s_1, s_2, ..., s_N) = (0, s_1, s_2, ..., s_{N-1}), \qquad \tau(s_1, s_2, ..., s_N, ...) = (0, s_1, s_2, ..., s_N, ...) \tag{2.2}$$

对于满足 $K \le N$ 的 $K, N = 1, 2, ..., \infty$，我们用 n_N 表示 N 维问题的解，而 $n_N^{(K)}$ 表示 n_N 的前 K 个边缘分布

$$n_N^{(K)}(t, [s]_K) = \int_{s_K \le s_{K+1} \le ... \le s_N} n_N(t, s_1, ..., s_N)\, d[s]_{K+1,N}. \tag{2.3}$$

显然，对于 $K < N$，边缘分布满足

$$n_N^{(K)}(t, [s]_K) = \int_{s_K}^{\infty} n_N^{(K+1)}(t, s_1, ..., s_{K+1})\, ds_{K+1}. \tag{2.4}$$

我们用 μ_N 表示 $\mathcal{C}_N$上的一个测度，特别地， μ_∞ 是 $\mathcal{C}_\infty$上的一个测度。我们还用 $\mu^{(K)}$ 表示分布 μ的 K 边缘分布。

定义 2.1 (相容序列). 如果测度序列$(\mu_N)^{N \ge 1}$ 的边缘分布满足 $\mu_K = \mu_N^{(K)}$ （对所有 $K < N$），则称其为相容序列。对于测度 μ_∞，这意味着对所有 $K \ge 1$，都有 $\mu_\infty^{(K)} = \int_0^\infty \mu_\infty^{(K+1)} ds_{K+1}$。

我们经常使用若干函数，其中值得一提的是，对于 $N = 1, 2, ..., \infty$，矩函数（用于证明紧性）

$$\sigma_N([s]_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i}{2^i}. \tag{2.5}$$

在给定的可测空间 $\mathcal{X}$ 上，我们用 $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ 表示有限总测度符号测度的空间，并将 $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ 上的全变差范数（TV 范数）记为$\|\cdot\|_{\mathcal{M}^1}$，而不是$\|\cdot\|_{TV}$。概率测度集合记为 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$，它是 $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ 的子集。我们用 $C_w([a, b]; \mathcal{M}(\mathcal{X}))$ 表示取值于 $\mathcal{M}(\mathcal{X})$、赋予其弱拓扑的连续函数空间，并称其为弱连续。我们用 $C_b^i(\mathcal{X})$ 表示有界的 i 阶可微函数空间。

As设与弱解。 我们假设更新率具有如下特定形式，

$$p_N = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(s_1, ..., s_i), \qquad \varphi_i > 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_\infty \le a_+ < \infty, \tag{2.6}$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 是 L^∞ 范数。我们还定义

$$\varepsilon_{K,N} := \sum_{i=K+1}^{N} \|\varphi_i\|_\infty, \qquad \varepsilon_K := \varepsilon_{K,\infty}. \tag{2.7}$$

我们还需要一个下界控制，并假设

$$0 < a_- \le p_N([s]_N) \le a_+. \tag{2.8}$$

定义 2.2 （N 次更新方程的弱解）。 我们称 $n_N \in C\big([0,+\infty)\big)$ ； L^1（$\mathcal{C}_N$）) 是 N 次更新方程 （1.2）的弱解，若对于所有 $T > 0$ 以及所有测试函数 $\psi \in C_b^1$（$[0,T] \times \mathcal{C}_N$），其中 $\tau[s]$ 是定义于 （2.2）中的移位算子，

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{C}_N} n_N(t,[s]_N) \Big[-\partial_t \psi(t,[s]_N) - \sum_{i=1}^{N} \partial_{s_i} \psi(t,[s]_N) + \big(\psi(t,[s]_N) - \psi(t,\tau[s]_N)\big) p_N([s]_N) \Big] d[s]_N dt \\ = -\int_{\mathcal{C}_N} \psi(T,[s]_N) n_N(T,[s]_N) d[s]_N + \int_{\mathcal{C}_N} \psi(0,[s]_N) n_N(0,[s]_N) d[s]_N. \end{aligned} \tag{2.9}$$

对于无限情形，我们在相应章节中给出定义。

我们用 $\mathcal{N}_N([s]_{N-1})$表示 N次问题的边界数据

$$\mathcal{N}_N(t,[s]_{N-1}) = \int_{s_{N-1}}^{+\infty} n_N(t,[s]_N) p_N([s]_N) ds_N, \qquad \mathcal{N}_\infty([s]_\infty) = p_\infty([s]_\infty) n_\infty([s]_\infty). \tag{2.10}$$

注意， $\mathcal{N}_\infty$ 不涉及积分，因为更新后没有需要遗忘的历史变量。我们用 n_N^* 表示 N维问题的平稳解，而 $n^*_{N}{}^{(K)}$ 表示其第一个 K 边缘分布。

3 N 次更新方程

由于我们将无限时更新方程视为 N次方程的极限，我们的首要目标是证明方程（ N）解的一致估计 1.2。我们为方程（1.2补充一个初始数据，该数据为概率密度

$$n_N(0,[s]_N) \ge 0, \quad \int_{\mathcal{C}_N} n_N(0,[s]_N)\, d[s]_N = 1, \quad n_N(0,[s]_N) \text{ is supported in } \mathcal{C}_N. \tag{3.1}$$

这里可以采用2次更新方程适定性的证明方法，见 [17]。对于任意$1 \le N < +\infty$，任意满足假设（ p_N 2.8）的 $n_N(0)$ 且支撑集包含于 $\mathcal{C}_N$中的初始数据，方程（1.2）存在唯一弱解 $n_N(t)$，其意义见定义 2.2。特别地，解属于 $C\big([0,+\infty)$； $L^1(\mathcal{C}_N)\big)$ 且性质（3.1）在所有时刻 $t>0$均得以保持，因此我们仍有

$$n_N(t,[s]_N)\ge 0, \qquad \int_{\mathcal{C}_N} n_N(t,[s]_N)\,d[s]_N = 1, \quad n_N(t,[s]_N) \text{ is supported in } \mathcal{C}_N. \tag{3.2}$$

3.1 边缘分布方程 (1.2)

我们将根据边缘分布所满足的方程，证明关于 n_N 的边缘分布的一致 N 估计，即

$$\begin{cases} \partial_t n_N^{(K)} + \sum_{i=1}^{K} \partial_{s_i} n_N^{(K)} + p_K([s]_K) n_N^{(K)} + E_N^{(K)}(t,[s]_K) = 0, \\ n_N^{(K)}(t,s_1=0,[s]_{2,K}) = \int_0^\infty \left[p_K n_N^{(K)} + E_N^{(K)}\right](t,[s]_{2,K},u)du, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中耦合项为

$$E_N^{(K)}(t,[s]_K) = \sum_{i=K+1}^{N} \int_{s_{K+1}=0}^{\infty} \cdots \int_{s_N=0}^{\infty} \varphi_i([s]_i) n_N(t,[s]_N)\,d[s]_{K+1,N}.$$

我们更倾向于用边缘分布来表示上述耦合项

$$E_N^{(K)}(t,[s]_K) = \sum_{i=K+1}^{N} \int_{s_{K+1}=0}^{\infty} \cdots \int_{s_i=0}^{\infty} \varphi_i([s]_i) n_N^{(i)}(t,[s]_i)\,d[s]_{K+1,i}, \tag{3.4}$$

并且有逐点界

$$0 \le E_N^{(K)}(t,[s]_K) \le \left(\sum_{i=K+1}^{N} \|\varphi_i\|_\infty\right) n_N^{(K)}(t,[s]_K), \tag{3.5}$$

从而得到 L^1 估计

$$\|E_N^{(K)}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le \varepsilon_{K,N} := \sum_{i=K+1}^{N} \|\varphi_i\|_\infty. \tag{3.6}$$

3.2 一致 L^∞ 估计

为证明 L^∞ 关于 N的一致估计，我们引入一个下解。根据2.7中对 ε_K的定义，我们考虑 $\overline{n}_K([s_K]) > 0$ 的 K次更新方程的平稳解

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{K} \partial_{s_i} \overline{n}_K + \big(\varepsilon_K + p_K([s]_K)\big)\overline{n}_K = 0, \\ \overline{n}_K(s_1=0,[s]_{2,K}) = \int_{u=0}^{\infty} \left[p_K([s]_{2,K},u) + \varepsilon_K\right] \overline{n}_K([s]_{2,K},u)du. \end{cases}$$

引理 3.1（局部一致的 L^∞ 界）。假设（2.6）、（3.1）成立，并且对于某个 $K \leq N$

$$n_N^{(K)}(0,[s]_K) \leq C_K \overline{n}_K([s]_K). \tag{3.7}$$

那么，对于所有 $t>0$，我们也有

$$n_N^{(K)}(t,[s]_K) \leq C_K e^{\varepsilon_K t}\overline{n}_K([s]_K). \tag{3.8}$$

证明。由（2.4）可知，K 边缘分布也满足

$$\begin{cases} \partial_t n_N^{(K)} + \sum_{i=1}^{K} \partial_{s_i} n_N^{(K)} + p_K([s]_K) n_N^{(K)} \leq 0, \\ n_N^{(K)}(t, s_1=0, [s]_{2,K}) \leq \int_0^\infty \left[p_K([s]_{2,K},u) + \sum_{i=K+1}^{N} \|\varphi_i\|_\infty\right] n_N^{(K)}(t,[s]_{2,K},u)du. \end{cases}$$

这表明 $n_N^{(K)}$ 是下列方程的下解

$$\begin{cases} \partial_t n_K + \sum_{i=1}^{K} \partial_{s_i} n_K + p_K([s]_K) n_K = 0, \\ n_K(s_1=0,[s]_{2,K}) = \int_{u=0}^\infty \left[p_K([s]_{2,K},u) + \varepsilon_K\right] n_K([s]_{2,K},u)du. \end{cases} \tag{3.9}$$

因此，它小于 $C_K e^{\varepsilon_K t}\overline{n}_K$，而后者是一个解。 □

3.3 一致紧性估计

为了证明这族概率测度 $\{n_N(t)\}_N$ 弱收敛，第一步是建立紧性。为此，权函数 σ_N（由（2.5）定义）在平衡维数与控制解在无穷远处的衰减方面至关重要。它有助于优先处理前几个变量，同时也适当考虑所有变量，从而使所得估计关于 N一致。

引理 3.2。在假设 (2.8) 和 (3.1)下，对所有 $t \geq 0$，有：

$$\int_{\mathcal{C}_N} \sigma_N([s]_N) n_N(t,[s]_N) d[s]_N \leq e^{-\frac{a_- t}{2}} \int_{\mathcal{C}_N} \sigma_N([s]_N) n_N(0,[s]_N) d[s]_N + (1-e^{-\frac{a_- t}{2}}) \frac{2}{a_-}.$$

证明。根据弱解的定义 2.2，并使用稠密性论证，我们可以将 σ_N 作为测试函数，写成：

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_N} \sigma_N([s]_N) n_N(t,[s]_N) d[s]_N + \int_{\mathcal{C}_N} \sigma_N([s]_N) p_N([s]_N) n_N(t,[s]_N) d[s]_N \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{C}_N} n_N(t,[s]_N) \frac{\partial \sigma_N}{\partial s_i}([s]_N) d[s]_N + \int_{\mathcal{C}_{N-1}} \sigma_N(0,[s]_{2,N}) n_N(t,0,[s]_{2,N}) d[s]_{2,N}. \end{aligned}$$

由于边界条件给出

$$n_N(t,0,[s]_{2,N}) = \int_0^\infty p_N([s]_{2,N},u) n_N(t,[s]_{2,N},u)du,$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N+\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)p_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N\\&\quad=\sum_{i=1}^{N}2^{-i}\int_{\mathcal{C}_N}n_N(t,[s]_N)d[s]_N+\int_{\mathcal{C}_{N-1}}\sigma_N(0,[s]_{2,N})\int_0^\infty p_N([s]_{2,N},u)n_N(t,[s]_{2,N},u)dud[s]_{2,N}.\end{aligned}$$

利用 n_N 的归一化条件，我们进一步写出

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N+\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)p_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N\\&\quad\le 1+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_{2,N},u)p_N([s]_{2,N},u)n_N(t,[s]_{2,N},u)d[s]_{2,N}du.\end{aligned}$$

然后，我们用 s_N 替换 u，将方程写为

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N+\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)p_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N\\&\quad\le 1+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)p_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)p_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N\le 1.$$

根据假设（2.8），我们有，

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N\le-\frac{a_-}{2}\int_{\mathcal{C}_N}\sigma_N([s]_N)n_N(t,[s]_N)d[s]_N+1.$$

利用格朗沃尔引理，我们得出结论。 □

3.4 稳态与长期行为

按照近期文献的做法[3, 17]，，我们使用 Doeblin 方法（见附录A）为 N重更新方程构造一个稳态。为此，给定 $t^*>0$ 并采用假设（2.8）中的记号，我们定义以下数值

$$\begin{cases}\alpha_N(t^*):=a_-^N\displaystyle\int_{0\le s_N\le t^*}\frac{1}{(N-1)!}s_N^{N-1}e^{-s_Na_+}ds_N,\\[2ex]\lambda_N(t^*):=-\dfrac{\ln(1-\alpha_N(t^*))}{t^*},\qquad c_N(t^*):=\dfrac{1}{1-\alpha_N(t^*)}.\end{cases}\tag{3.10}$$

通过标准计算可知，对于所有 $t^*>0$，$0<\alpha_N(t^*)<1$。因此，我们有$\lambda_N(t^*)>0$，且 $c_N(t^*)>1$。我们的主要结果是

定理 3.3 (稳态、收敛与紧性)。 固定维数 N 并假设 (2.8)、 (3.1)。那么，方程 $n_N(t,\ [s]_N)$ 的解 (1.2) 满足

$$n_N(t,[s]_N) \geq a_-^N e^{-s_N a_+}, \qquad \text{for} \quad s_1 \leq \ldots \leq s_N \leq t. \tag{3.11}$$

此外， $n_N(t,\ [s]_N)$ 在 L^1-范数下指数收敛到唯一的稳态 $n_N^*([s]_N)$，并且对所有$t^* > 0$，我们有

$$\|n_N(t) - n_N^*\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} \leq c_N(t^*) e^{-\lambda_N(t^*)\, t} \|n_N(0) - n_N^*\|_{L^1(\mathcal{C}_N)}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.12}$$

此外，紧性估计成立

$$\int_{\mathcal{C}_N} \sigma_N([s]_N) n_N^*(d[s]_N) \leq \frac{2}{a_-}. \tag{3.13}$$

此时，稳态 n_N^* 是一个 L^1 函数，并满足方程

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^N \partial_{s_i} n_N^* + p_N n_N^* = 0, \\ \displaystyle n_N^*(0,[s]_{N-1}) = \int p_N([s]_N) n_N^*([s]_{N-1}, s_N) ds_N, \quad n_N^* \text{ is supported in } \mathcal{C}_N. \end{cases} \tag{3.14}$$

可以证明更好的正则性，但由于我们关注的是极限 $N \to \infty$，因此不沿此方向深入。

注 3.4。尽管定理3.3 给出了每个 N次方程的长时间行为，但 λ_N 在(3.12) 中的收敛速率并不关于 N一致，这给研究无限时间问题的长时间行为带来了本质性的困难。第5 节和第7节研究了这一问题。

证明。第一步。估计(3.11)。我们使用边界条件所定义的边界更新通量 $\mathcal{N}_N(t,\ [s]_{N-1})$的定义 (1.2)。根据方程 ($n_N(t,\ [s]_N)$ 的特征线法，我们可以将其写为

$$n_N(t,[s]_N) = e^{-\int_0^{s_1} p_N(u,[s-s_1+u]_{2,N})du} \mathcal{N}_N(t-s_1, [s-s_1]_{2,N}) \qquad \text{for} \quad t \geq s_1,$$

并且，在边界条件的定义（2.10）中进行变量替换后，我们得到

$$\mathcal{N}_N(t-s_1,[s-s_1]_{2,N}) = \int_{s_N \leq s_1'} n_N(t-s_1,[s-s_1]_{2,N}, s_1'-s_1) p_N([s-s_1]_{2,N}, s_1'-s_1) ds_1'.$$

由此可得，对于 $t \geq s_1$ 上的 $\mathcal{C}_N$，

$$\begin{aligned} n_N(t,[s]_N) =& e^{-\int_0^{s_1} p_N(u,[s-s_1+u]_{2,N})du} \\ & \int_{s_N \leq s_1'} n_N(t-s_1,[s-s_1]_{2,N}, s_1'-s_1) p_N([s-s_1]_{2,N}, s_1'-s_1) ds_1' \end{aligned}$$

现在我们可以利用假设（2.8），从上述方程推导出下界

$$n_N(t,[s]_N) \geq a_- e^{-s_1 a_+} \int_{s_N \leq s_1'} n_N(t-s_1,[s-s_1]_{2,N}, s_1'-s_1) ds_1', \qquad t \geq s_1. \tag{3.15}$$

这一过程对于估计式（3.11）至关重要。该估计式给出了 $n_N(t)$ 的下界，且该下界独立于 $n_N(t')$，适用于 $t' < t$。在后续迭代中，每一步我们都会多积分一个变量，直到得到在 n_N 上的总积分；已知该积分等于 1。

第二步。迭代。对于第二次迭代，我们用方程（3.15）从下方控制 n_N（$t - s_1$，$[s - s_1]_{2,\,N}$，$s_1' - s_1$）。这意味着我们将 t 替换为 $t - s_1$，$[s]_N$ 替换为（$[s - s_1]_{2,\,N}$，$s_1' - s_1$）并且，由于使用了记号 s_1'，我们将 s_2' 称为（3.15）右端的积分变量。于是，对于 $t - s_1 \geq s_2 - s_1$

$$n_N(t - s_1, [s - s_1]_{2,N}, s_1' - s_1) \geq a_- e^{-(s_2 - s_1)a_+} \int_{s_N \leq s_1' \leq s_2'} n_N(t - s_2, [s - s_2]_{3,N}, [s' - s_2]_2) d[s']_2.$$

将此方程与（3.15）结合，我们得到

$$n_N(t, [s]_N) \geq a_-^2 e^{-s_2 a_+} \int_{s_N \leq s_1' \leq s_2'} n_N(t - s_2, [s - s_2]_{3,N}, [s' - s_2]_2) d[s']_2, \qquad \text{for} \quad t \geq s_2. \tag{3.16}$$

可以看出，我们现在已经对 n_N 的最后两个变量进行了积分。

重复这一迭代，最终我们将得到：

$$n_N(t, [s]_N) \geq a_-^N e^{-s_N a_+} \int_{s_N \leq s_1' \leq \ldots \leq s_N'} n_N(t - s_N, [s' - s_N]_N) d[s']_N \qquad \text{for} \quad t \geq s_N,$$

对于先前的数据 n_N（$t - s_N$），我们在整个可容许集合 $\mathcal{C}_N$ 上积分。根据概率归一化条件（3.2），可得

$$\int_{s_N \leq s_1' \leq \ldots \leq s_N'} n_N(t - s_N, [s' - s_N]_N) d[s']_N = 1.$$

因此，我们得到了所需的下界（3.11）。

第三步：使用 *Doeblin* 方法。给定 $t^* > 0$ 以及初始数据 $n_N(0)$ 满足条件（3.1），我们利用（3.11）得出：对于任意时刻 t^*

$$n_N(t^*, [s]_N) \geq a_-^N e^{-s_N a_+} \mathbb{I}^{s_N \leq t^*} \mathbb{I}^{\mathcal{C}_N}. \tag{3.17}$$

现在我们可以应用 Doeblin 方法（参见附录A）。

首先，我们需要证明，$n_N(t)$ 的总质量在演化过程中保持守恒，这正是命题（3.2）（证明见 [17]）。其次，我们需要证明，存在一个正数 α和一个概率测度 ν 无论初始数据 $n_N(0)$ 如何取值，只要将其归一化为概率，就有

$$n_N(t^*, [s]_N) \geq \alpha \nu.$$

为了将下界（3.17写成 $\alpha\nu$的形式，我们先计算该下界的总测度：

$$\int_{\mathcal{C}_N} a_-^N e^{-s_N a_+} \mathbb{I}^{s_N \leq t^*} d[s]_N = a_-^N \int_{0 \leq s_N \leq t^*} \frac{1}{(N-1)!} s_N^{N-1} e^{-s_N a_+} ds_N =: \alpha_N(t^*). \tag{3.18}$$

由于下界的总测度为 $\alpha_N(t^*)$，我们可以写成

$$n_N(t^*, [s]_N) \geq \alpha_N(t^*) \frac{a_-^N e^{-s_N a_+} \mathbb{I}^{s_N \leq t^*} \mathbb{I}^{\mathcal{C}_N}}{\alpha_N(t^*)}, \tag{3.19}$$

其中 $\frac{1}{\alpha_N(t^*)}$ 是归一化因子，而 $\frac{a_-^N \exp(-s_N a_+)\alpha_N \mathbb{I}^{s_N \le t^*} \mathbb{I}^{\mathcal{C}_N}}{(\,)}$ 根据方程（3.18）是一个概率密度。现在我们可以应用 Doeblin 方法。由此可知，存在一个稳态 n_N^*，并且对于任意初始数据 $n_N(0)$，相应的解满足（其中 $\lambda_N(t^*)$ 在（3.10）中引入）

$$\|n_N(t) - n_N^*\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} \le \frac{1}{1-\alpha_N(t^*)} e^{-\lambda_N(t^*)t} \|n_N(0) - n_N^*\|_{L^1(\mathcal{C}_N)}, \quad \forall t \ge 0.$$

这里 t^* 可以选取为任意正数。

第四步。紧性。 由于稳态也是演化方程的一个解，我们可以将引理 3.2 的结果用于 $n_N^*([s]_N)$，并令 $t \to \infty$。所述结果随即得出。 □

4 层级模型作为强极限 $N \to +\infty$

似乎很难赋予边界条件 $N \to \infty$ 以明确的含义，也很难确定无限维情形下适当的导数概念。为避免这些困难，我们提出仅定义无限时更新方程的解的 K边缘分布。这样，我们就可以像经典动力学理论中那样写出一种 BBGKY 层级的形式，[4]。

为此，我们假设对于所有 N，初始数据是一致的，并且按照定义 2.1，存在一致族 $n^{0,}{}_\infty{}^{(K)}$使得

$$\sup_K \|n_N^{(K)}(0) - n_\infty^{0,(K)}\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \to 0 \qquad \text{as} \quad N \to \infty. \tag{4.1}$$

我们的策略如下。假设这些极限在足够强的范数下存在。

$$n_\infty^{(K)}(t, [s]_K) = \lim_{N\to\infty} n_N^{(K)}(t, s_1, s_2, \ldots s_K), \qquad K = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

该　支撑性质和引理 3.2 中 N次方程的紧性界给出

$$n_\infty^{(K)} \ge 0 \quad \text{is supported in } \mathcal{C}_K \qquad \text{and} \qquad \int_{\mathcal{C}_K} n_\infty^{(K)}(t, [s]_K) d[s]_K = 1.$$

在此极限下，我们得到一个无限耦合的层级系统，其中 $K = 1$、2、.....

$$\begin{cases} \partial_t n_\infty^{(K)} + \sum_{i=1}^{K} \partial_{s_i} n_\infty^{(K)} + p_K([s]_K) n_\infty^{(K)} + E_\infty^{(K)}(t, [s]_K) = 0, \\ n_\infty^{(K)}(t, s_1 = 0, s_2, \ldots s_K) = \int_{u=0}^{\infty} \left[p_K n_\infty^{(K)} + E_\infty^{(K)} \right](t, s_2, \ldots, s_K, u) du, \\ n_\infty^{(K)}(t = 0, [s_K]) = n_\infty^{0,(K)}([s_K]). \end{cases} \tag{4.3}$$

耦合项 $E_\infty^{(K)}(t, [s]_K)$ 是将表达式（3.4形式化地取极限所得的结果，写作

$$E_\infty^{(K)}(t, [s]_K) = \sum_{i=K+1}^{\infty} \int_{s_{K+1}=0}^{\infty} \cdots \int_{s_i=0}^{\infty} \varphi_i([s]_i) n_\infty^{(i)}(t, [s]_i) \, d[s]_{K+1,i}, \tag{4.4}$$

$$\|E_\infty^{(K)}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le \sum_{i=K+1}^{\infty} \|\varphi_i\|_\infty \|n_\infty^{(i)}\|_{L^1(\mathcal{C}^i)}.$$

我们将这一层级定义为无限时间方程的解，其特征由以下定理刻画。

定理 4.1 （层级的强收敛与唯一性）。 在假设 (2.6)、(3.1)、(4.1)下， 我们有

(i) 对所有 $N \ge 1$ 和 $K \in \mathbb{N}$，序列 $\{n_N^{(K)}\}_N$ 是 $C([0,T];\, L^1(\mathcal{C}_K))$ 中的柯西序列；因此它有一个一致的极限 $n_\infty^{(K)} \in C((0,\ \infty);\ L^1(\mathcal{C}_K))$。

(ii) $E_N^{(K)}(t,[s]_K) \to E_\infty^{(K)}(t,[s]_K)$ 属于 $C((0,T);\ L^1(\mathcal{C}_K))$ 当 $N \to \infty$ 时。
(iii) $\{n_\infty^{(K)}\}_K$ 是层级 *(4.3)–(4.4)* 的唯一一致弱解。*(iv)* 同时假设 *(3.7)*，
则对所有 $t > 0$， $n_\infty^{(K)}(t,[s]_K) \le C_K \bar{n}^{(K)}([s]_K) e^{\varepsilon_K t}$。

性质 (iii) 的一致性使我们稍后能够在 $\mathcal{C}_\infty$ 上定义一个解，见第 6 节。这里，我们再次使用弱解这一概念，并将定义 2.2 显然地推广到每个 K，见定义 6.2。
注意，我们还给出了（见（4.7））以下误差估计

$$\|n_N(t) - n_\infty^{(N)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} \le \|n_N(0) - n_\infty^{(N)}(0)\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} + 2\varepsilon_N t. \tag{4.5}$$

*Pro*的。第一步。柯西序列。对于 $N_1 \le N_2$， 令 $m(t) := n^{(N_1)}{}_{N_2}(t) - n_{N_1}(t)$。它满足 es

$$\begin{cases} \partial_t m + \sum_{i=1}^{N_1} \partial_{s_i} m + p_{N_1}([s]_{N_1}) m = E_{N_2}^{(N_1)}, \\ m(t, s_1 = 0, [s]_{2,N_1}) = \int_{u=0}^{\infty} \left[p_{N_1} m - E_{N_2}^{(N_1)}\right](t,[s]_{2,N_1},u)du. \end{cases}$$

因此，我们还有

$$\begin{cases} \partial_t |m| + \sum_{i=1}^{N_1} \partial_{s_i} |m| + p_{N_1}([s]_{N_1})|m| \le |E_{N_2}^{(N_1)}|, \\ |m|(t, s_1 = 0, [s]_{2,N_1}) \le \int_{u=0}^{\infty} \left[p_{N_1}|m| + |E_{N_2}^{(N_1)}|\right](t,[s]_{2,N_1},u)du. \end{cases}$$

对该不等式积分可得

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_{N_1}} |m(t,[s]_{N_1})| d[s]_{N_1} \le 2\int_{\mathcal{C}_{N_1}} |E_{N_2}^{(N_1)}| d[s]_{N_1}. \tag{4.6}$$

现在利用（$|E^{(N_1)}{}_{N_2}|$，结合（3.6），我们估计并得出

$$2\int_{\mathcal{C}_{N_1}} |E_{N_2}^{(N_1)}| d[s]_{N_1} \le \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \|\varphi_i\|_\infty = 2\varepsilon_{N_1,N_2}.$$

由此，回顾（4.6）以及 m 的定义，我们立即得出

$$\|n_{N_2}^{(N_1)}(t) - n_{N_1}(t))\|_{L^1(\mathcal{C}_{N_1})} \le \|n_{N_2}^{(N_1)}(0) - n_{N_1}(0)\|_{L^1(\mathcal{C}_{N_1})} + 2\varepsilon_{N_1,N_2} t, \tag{4.7}$$

由于边缘分布受总范数控制，我们还可得

$$\|n_{N_2}^{(K)}(t) - n_{N_1}^{(K)}(t))\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le \|n_{N_2}^{(N_1)}(0) - n_{N_1}(0)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 2\varepsilon_{N_1,N_2}t,$$

由假设（2.6）、（4.1），可知序列 $(n_N^{(K)})_N$ 是柯西序列，因此存在极限 $n_\infty^{(K)}$，如（i）中所述。于是，（4.5）由（4.7）立即得出。

第二步。对 $E_N^{(K)}$ 的误差估计。此估计由假设（2.6）得出。从（3.4）出发，取 $J < N$（充分大）

$$\begin{aligned}|E_N^{(K)} - E_\infty^{(K)}| &\le \sum_{i=K+1}^{N} \|\varphi_i\|_\infty \int_{s_K \le s_{K+1} \le \dots} |n_N^{(i)} - n_\infty^{(i)}| d[s]_{K+1,i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \|\varphi_i\|_\infty \int_{s_N \le s_{N+1} \le \dots} n_\infty^{(i)} d[s]_{N+1,i} \\ &\le \sum_{i=K+1}^{J} \|\varphi_i\|_\infty \int_{s_K \le s_{K+1} \le \dots} |n_N^{(i)} - n_\infty^{(i)}| d[s]_{K+1,i} + 3\varepsilon_J.\end{aligned}$$

对于所有 $\epsilon > 0$，我们可以先选取 J，使得 $\varepsilon_J \le \epsilon$，然后取足够大的 N，使右端的第一项也小于 ϵ。这就证明了（ii）。

第三步。唯一性。证明唯一性等价于证明：当所有 n^0, $^{(K)}([s]_K)$ 均为零时，所有 $n_\infty^{(K)}$也都为零。注意这里的 $n_\infty^{(K)}$是两个概率之差，因此其质量至多为 2，而非 1。

我们有

$$\begin{cases} \partial_t |n_\infty^{(K)}| + \sum_{i=1}^{K} \partial_{s_i} |n_\infty^{(K)}| + p_K([s]_K)|n_\infty^{(K)}| \le |E_\infty^{(K)}(t,[s]_K)|, \\ |n_\infty^{(K)}(t, s_1 = 0, [s]_{2,K})| \le \int_{u=0}^{\infty} \left[p_K |n_\infty^{(K)}| + |E_\infty^{(K)}|\right](t,[s]_{2,K},u)du, \\ n_\infty^{(K)}(t=0,[s]_K) = 0. \end{cases}$$

因此，积分后可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_K} |n_\infty^{(K)}| d[s]_K + \int_{\mathcal{C}_K} p_K([s]_K)|n_\infty^{(K)}| d[s]_K \\ &\quad \le \int_{\mathcal{C}_K} |E_\infty^{(K)}(t,[s]_K)| d[s]_K + \int_{0 \le s_2 \le \dots \le s_K} |n_\infty^{(K)}(t, s_1 = 0, [s]_{2,K})| d[s]_{2,K},\end{aligned}$$

and

$$\int_{0 \le s_2 \le \dots \le s_K} |n_\infty^{(K)}(t, s_1 = 0, s_2, \dots s_K)| d[s]_{2,K} = \int_{\mathcal{C}_K} \left[p_K([s]_K)|n_\infty^{(K)}| + |E_\infty^{(K)}(t,[s]_K)|\right] d[s]_K,$$

因此我们有

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_K} |n_\infty^{(K)}| d[s]_K \le 2\int_{\mathcal{C}_K} |E_\infty^{(K)}(t,[s]_K)| d[s]_K \le 4\sum_{i=K+1} \|\varphi_i\|_\infty.$$

最后，对于所有 $J < K$，我们得出结论

$$\int_{\mathcal{C}_J} |n_\infty^{(J)}(t)| d[s]_J \le \int_{\mathcal{C}_K} |n_\infty^{(K)}| d[s]_K \le 4t\varepsilon_K \to 0 \quad as \quad K \to \infty.$$

因此，所有边缘分布 $n_\infty^{(J)}$均消失。

第四步。 L^∞ 界。这可直接由对 L^∞ 关于 n_K 的界取极限得到，正如命题 3.1中所述。

定理 4.1的证明至此完成。 □

5 通过 Doeblin 方法得到 $N \to \infty$ 的一致时间极限

5.1 思路与主要结果

定理4.1 建立了无限时间方程（4.3）的层级解 $\{n_\infty^{(K)}(t)\}_K$。该解通过对 N时模型 $n_N(t)$ 取局部时间极限得到，如式（4.5）所示。这里我们关注更强的一致时间极限，并对 ε_N附加一个小量条件。首先，我们希望证明

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|n_N(t) - n_\infty^{(N)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} \to 0, \qquad \text{as } N \to \infty. \tag{5.1}$$

这一估计需要对长时间范围进行控制，而我们利用 Doeblin 条件（将在（5.6）中介绍）获得了这种控制。

其次，由于我们有一致时间近似，因此无限时间方程的平稳解可以由 N-时方程的平稳解近似，从而说明

$$\|n_N^* - n_\infty^{*,(N)}\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} \to 0, \qquad \text{as} \quad N \to \infty. \tag{5.2}$$

最后，对于 N-时方程，其长时间行为已在第 3.4 节中得到刻画。每个解都以指数速率在 L^1 范数下收敛到唯一稳态 λ_N。然而，当 λ_N 趋于无穷时，该速率退化为 0，这使得我们无法直接推导出无限时间方程的长时间行为。尽管如此，在我们关于 ε_N 的小量条件下，事实证明， λ_N 的退化性可以得到补偿，从而对于每个 N-边缘分布

$$n_\infty^{(N)}(t) \to n_\infty^{*,(N)}, \quad \text{in } L^1(\mathcal{C}_N) \qquad \text{as } t \to \infty. \tag{5.3}$$

受这些观察的启发，我们陈述以下结果。

定理5.1。 假设 （3.1）、（2.6）和 （2.8）。此外，假设更新率以下述意义充分快速地收敛

$$\varepsilon_N = o\left(\frac{1}{N}\left(\frac{a_-}{a_+}\right)^N\right), \quad as\ N \to \infty, \qquad \varepsilon_N := \sum_{i=N+1}^{\infty} \|\phi_i\|_\infty. \tag{5.4}$$

于是，收敛结果 (5.1)–(5.3) 成立，且稳态无限层级 $n^{*,(N)}_\infty$是唯一的。

为证明此定理，我们首先在第 5.2 节给出一个一般框架；该框架启发了第 5.3 节中关于一致时间极限及其在抽象小性条件下所产生后果的结果。事实上，定理 5.1 是更一般、更精确的定理 5.5的一个具体版本。为得到具体条件（5.4），我们在第 5.4 节仔细研究第 3.4 节中的常数。

5.2 一致时间近似框架

我们从对 K 方程解的边缘分布 n_N （1.2）在具有相容的初始概率密度族的条件下的局部时间控制开始。根据第4.7节中（4）的证明，在 $N_1 = K$、 $N_2 = N$的条件下，我们推得对所有 $t \geq 0$ 和 $\tau \geq 0$的控制。

$$\|n_K(t+\tau) - n_N^{(K)}(t+\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \leq \|n_K(\tau) - n_N^{(K)}(\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 2\varepsilon_{K,N}t, \tag{5.5}$$

现在我们尝试利用 Doeblin 条件给出一个关于时间一致的界。如果存在 $t_K^* > 0$, $\alpha_K \in$ (0,1) 和一个概率密度ν_K ，使得 K-时问题满足 Doeblin 条件，则称该问题满足 Doeblin 条件。

$$n_K(t_K^*) \geq \alpha_K \nu_K, \tag{5.6}$$

独立于初始概率密度 n_K(0)。

注 5.2. 在第 3.4 节中，*Doeblin* 条件 (5.6) 是在假设 (2.8) 下建立的，并给出了常数 α 和 t^* 的具体表达式。在本小节中，我们不作 (2.8) 这一假设，而是采用更抽象的条件 (5.6)。我们将在第 (2.8) 小节中利用假设 5.4具体建立这一条件。

命题 5.3。 给定 K，假设 K-次问题满足 *Doeblin* 条件（5.6）。那么在假设 （2.6） 和 （2.7）下，我们有一致估计

$$\limsup_{k\to\infty} \|n_K(kt_K^*) - n_N^{(K)}(kt_K^*)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \leq 2\frac{t_K^*\varepsilon_{K,N}}{\alpha_K}, \tag{5.7}$$

$$\limsup_{t\to+\infty} \|n_K(t) - n_N^{(K)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \leq 4\frac{t_K^*\varepsilon_{K,N}}{\alpha_K}. \tag{5.8}$$

命题 5.3 的证明。 首先，我们证明，对于所有 $\tau \geq 0$,

$$\|n_K(t_K^* + \tau) - n_N^{(K)}(t_K^* + \tau)\|_{L^1(\mathcal{C}^K)} \leq (1-\alpha_K)\|n_K(\tau) - n_N^{(K)}(\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 2\varepsilon_{K,N}t_K^*. \tag{5.9}$$

为此，我们将与 K-次问题相关的半群记为 $S_t^{(K)}$ 。利用 Doeblin 定理，我们有

$$\|n_K(t_K^* + \tau) - S_{t_K^*}^{(K)}\big(n_N^{(K)}(\tau)\big)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \leq (1-\alpha_K)\|n_K(\tau) - n_N^{(K)}(\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)}.$$

然后，将控制条件（5.5）应用于 $S_{t_K^*}^{(K)}(n_N^{(K)}(\tau))$和 $n_N(t_K^* + \tau)$ ，我们有

$$\|S_{t_K^*}^{(K)}\big(n_N^{(K)}(\tau)\big) - n_N^{(K)}(t_K^* + \tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \leq \|n_N^{(K)}(\tau) - n_N^{(K)}(\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 2\varepsilon_{K,N}t_K^* = 2\varepsilon_{K,N}t_K^*.$$

我们通过三角不等式合并上述两个估计，得到

$$\|n_K(t_K^* + \tau) - n_N^{(K)}(t_K^* + \tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \leq (1-\alpha_K)\|n_K(\tau) - n_N^{(K)}(\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 2\varepsilon_{K,N}t_K^*.$$

其次，我们迭代（5.9）得到

$$\|n_K(kt^*+\tau)-n_N^{(K)}(kt^*+\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le (1-\alpha_K)^k\|n_K(\tau)-n_N^{(K)}(\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 2t^*\varepsilon_{K,N}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(1-\alpha_K)^i\right)$$

并由此得到

$$\|n_K(kt^*+\tau)-n_N^{(K)}(kt^*+\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le (1-\alpha_K)^k\|n_K(\tau)-n_N^{(K)}(\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 2\frac{t_K^*\varepsilon_{K,N}}{\alpha_K}. \tag{5.10}$$

取 $\tau=0$，不等式（5.8）便立即成立。

第三，对于 $\tau\in(0,t_K^*)$，我们利用估计（4.7）得到

$$\begin{aligned}\|n_K(\tau)-n_N^{(K)}(\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} &\le \|n_K(0)-n_N^{(K)}(0)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 2\tau\varepsilon_{K,N}\\ &\le \|n_K(0)-n_N^{(K)}(0)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 2\frac{t_K^*\varepsilon_{K,N}}{\alpha_K}.\end{aligned}$$

结合（5.10），可得

$$\|n_K(kt_K^*+\tau)-n_N^{(K)}(kt_K^*+\tau)\|_{L^1(\mathcal{C}^K)} \le (1-\alpha_K)^k\|n_K(0)-n_N^{(K)}(0)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} + 4\frac{t_K^*\varepsilon_{K,N}}{\alpha_K}. \tag{5.11}$$

进而（5.8）成立。 □

稳态 n_K^* 可以通过第 K 节中的 Doeblin 方法构造。根据命题 3.4，我们立即得到稳态之间的一个估计。

推论 5.4（稳态之间的距离）。在与命题 5.3 相同的条件下，假设 $K<N$-次问题和 N-次问题的稳态 K均存在。则有

$$\|n_K^*-n_N^{*,(K)}\|_{L^1(\mathcal{C}^K)} \le 2\frac{t_K^*\varepsilon_{K,N}}{\alpha_K}. \tag{5.12}$$

请注意，命题 5.3 中的界虽然对时间一致，但当 $N\to\infty$时可能并无实际意义。这促使我们考察以下量

$$2\frac{t_K^*\varepsilon_{K,N}}{\alpha_K} \le 2\frac{t_K^*\varepsilon_K}{\alpha_K},$$

其中 ε_K 定义见（2.7）。若能选择 $N\to\infty$，使得当α_N时，t_N^*则可得到一致时间极限

$$2\frac{t_N^*\varepsilon_N}{\alpha_N}\to 0, \qquad \text{as } N\to\infty. \tag{5.13}$$

这里，更新率的衰减性质发挥着核心作用。正如我们稍后将讨论的那样，一般而言，t_N^*/α_N 会在 $N\to\infty$时发散至无穷。因此，我们需要 ε_N 衰减得足够快，以抵消 t_N^*/α_N的发散。

5.3 一致时间极限及其推论

在给出确保（5.13）成立的具体条件之前，我们先改进定理 4.1 ，使其适用于（5.13）得到满足的情形。

定理 5.5。 假设 (2.6) 且对每个 K *Doeblin* 条件 (5.6) 均以 $\alpha_K, t_K^* > 0$. 若进一步满足(5.13) ，则有

(i)（一致时间极限）假设初始数据满足 (4.1)。则对每个 $K, n_N^{(K)}(t)$ 在 $C_b([0,+\infty)\ L^1(\mathcal{C}^K))$中构成柯西序列，其极限 $n_\infty^{(K)}(t)$ 是无限时间方程的层级解 (4.3)。此外，我们有一致时间近似

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|n_N(t) - n_\infty^{(N)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}^N)} \to 0, \qquad as\ N\to\infty. \tag{5.14}$$

(ii)（稳态的极限）当 N趋于无穷大时， $n^{*,(K)}_{,N}$ 存在唯一的（强）极限 $n^{*,(K)}_{,\infty}$，它是无限时间层级的稳态，并且我们有误差估计

$$\|n_N^* - n_\infty^{*,(N)}\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} \le 2\frac{t_N^*\varepsilon_N}{\alpha_N} \to 0, \qquad as \quad N\to\infty. \tag{5.15}$$

(iii)（无限时间方程的长期行为）对于无限时间方程n_∞（t）的一般解，其每个边缘分布都会随时间收敛到 n_∞^*的边缘分布。对于每个 N，我们有

$$n_\infty^{(N)}(t) \to n_\infty^{*,(N)}, \quad in\ L^1(\mathcal{C}_N) \qquad as\ t\to\infty. \tag{5.16}$$

(iv)（唯一性）如上所定义的无限时间方程的稳态解 $n^{*,(N)}_{,\infty}$是唯一的。

证明。第一部分。一致时间极限。固定 $K\in\mathbb{N}$。注意，函数的 L^1 范数可以控制其边缘分布的 L^1 范数。具体而言，对于 $K\le N_1\le N_2$，我们有

$$\|n_{N_1}^{(K)}(t) - n_{N_2}^{(K)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le \|n_{N_1}^{(N_1)}(t) - n_{N_2}^{(N_1)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_{N_1})} = \|n_{N_1}(t) - n_{N_2}^{(N_1)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_{N_1})},$$

对于每个 $t\ge 0$。因此我们得到

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|n_{N_1}^{(K)}(t) - n_{N_2}^{(K)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le \sup_{t\in[0,+\infty)} \|n_{N_1}(t) - n_{N_2}^{(N_1)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_{N_1})}. \tag{5.17}$$

由一致时间界（5.11），我们得到

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|n_{N_1}(t) - n_{N_2}^{(N_1)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_{N_1})} \le \|n_{N_1}(0) - n_{N_2}^{(N_1)}(0)\|_{L^1(\mathcal{C}_{N_1})} + 4\frac{t_{N_1}^*\varepsilon_{N_1}}{\alpha_{N_1}},$$

将其与（5.17）结合，我们推出 $K\le N_1\le N_2$

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|n_{N_1}^{(K)}(t) - n_{N_2}^{(K)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le \|n_{N_1}(0) - n_{N_2}^{(N_1)}(0)\|_{L^1(\mathcal{C}_{N_1})} + 4\frac{t_{N_1}^*\varepsilon_{N_1}}{\alpha_{N_1}}. \tag{5.18}$$

当 $N_1\to\infty$ 时，由于关于初始数据的假设，第一项趋于零（4.1），第二项则由（5.13）趋于零，因此（5.18）表明，对于固定的 K， $\{n_N^{(K)}\ (t)\}_N$ 是一个柯西序列

在 $C_b\big([0,+\infty)\ \ L^1(\mathcal{C}_K)\big)$ 中，其极限为 $n_\infty^{(K)}(t)$。如定理 4.1 中所示，我们可以验证，该极限 $n_\infty^{(K)}$是层级问题（4.3）–（4.4）的一个相容解。

此外，我们可以得到一个更具体的估计。固定 $K = N_1 = N$ 在（5.18）中，并令 N_2 趋于无穷大，从而得到

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|n_N(t) - n_\infty^{(N)}(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le \|n_N(0) - n_\infty^{0,(N)}\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} + 4\frac{t_N^*\varepsilon_N}{\alpha_N}, \tag{5.19}$$

并且（5.14）得证，这归功于（4.1）和（5.13）。

第二部分。稳态的极限。n_N^* 的存在性和唯一性由 Doeblin 定理保证。对于 $K \le N_1 \le N_2$ 我们立即有

$$\|n_{N_1}^{*,(K)} - n_{N_2}^{*,(K)}\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le \|n_{N_1}^* - n_{N_2}^{*,(N_1)}\|_{L^1(\mathcal{C}_{N_1})} \le 2\frac{t_{N_1}^*\varepsilon_{N_1}}{\alpha_{N_1}}, \tag{5.20}$$

如推论 5.4，即在 (5.7) 中取极限。

根据（5.13）、（5.20）可知，对于固定的 K，$\{n_N^{*,(K)}\}_N$ 是 $L^1(\mathcal{C}^K)$ 中的柯西序列。将其极限记为 $n^*{}_\infty^{(K)}$。然后固定 K，N_1 并令 N_2 在（5.20）中趋于无穷大，从而得到具体的误差估计

$$\|n_{N_1}^{*,(K)} - n_\infty^{*,(K)}\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} \le 2\frac{t_{N_1}^*\varepsilon_{N_1}}{\alpha_{N_1}},$$

其在 N_1 趋于无穷时由（5.13）趋于零。取 $K = N_1$，我们推出（5.15）。

与定理 4.1 类似，通过在弱形式中取极限，我们可以看到 $n^*{}_\infty^{(K)}$ 是无限时层级问题的稳态解。

第三部分。无限时间方程的长期行为。对于无限维问题 $n_\infty(t)$ 的解，我们可以构造初始数据为 $n^0{}_\infty^{(N)}$ 的 N 问题的解 $n_N(t)$。利用三角不等式，对于 $N \ge K$，我们有，

$$\begin{aligned}\|n_\infty^{(K)}(t) - n_\infty^{*,(K)}\|_{L^1(\mathcal{C}_K)} &\le \|n_\infty^{(N)}(t) - n_\infty^{*,(N)}\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} \\ &\le \|n_\infty^{(N)}(t) - n_N(t)\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} + \|n_N(t) - n_N^*\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} + \|n_N^* - n_\infty^{*,(N)}\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} \\ &\le 4\frac{t_N^*\varepsilon_N}{\alpha_N} + \|n_N(t) - n_N^*\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} + 2\frac{t_N^*\varepsilon_N}{\alpha_N},\end{aligned}$$

其中我们用到了（5.19）和（5.15）。对于足够大的 N，利用假设（5.13），可以使两个误差项任意小。最后，对 N 问题应用 Doeblin 定理，我们知道，对于所有足够大的 t，$\|n_N(t) - n_N^*\|_{L^1(\mathcal{C}_N)} \to 0$。因此证明完成。

第四部分。在第 (iii) 部分中，我们刚刚证明了每个解在长时间内都收敛到 n_∞^*。因此，n_∞^* 是无限时间问题的唯一稳态。 □

5.4 迈向一致的 Doeblin 条件

定理5.5 与定理 5.1 的区别在于其抽象的 Doeblin 假设（5.13）。现在给出确保条件（5.13）成立的具体条件。

命题 5.6. 假设 (2.8)成立，则可以选取 $t_N^* > 0$ 和 $\alpha_N \in (0,1)$ 使条件 (5.6)成立，其中

$$\frac{\alpha_N}{t_N^*} \geq \frac{a_-}{2N}\left(\frac{a_-}{a_+}\right)^{N-1}. \tag{5.21}$$

结合定理5.5 与命题 5.6，我们得到定理 5.1。

定理的证明 *5.1*。 根据命题 α_N 和 t_N^*，选取满足条件（5.21）的量。然后，由于假设（5.6）关于5.4的衰减， ε_N，条件（5.13）成立。因此，我们可以应用定理 5.5 ，得出定理 5.1的所有结论。 □

命题证明*5.6*。 根据定理 3.3、方程（3.19）和定义（3.10），对于任意 $t^* > 0$，我们可以选择 $\alpha = \alpha_N(t^*) > 0$ 使其满足 Doeblin 条件（5.6），其中

$$\frac{\alpha_N(t^*)}{t^*} = \frac{(a_-)^N}{t^*}\int_0^{t^*} \frac{1}{(N-1)!}s^{N-1}e^{-sa_+}ds. \tag{5.22}$$

现在我们想要找到一个合适的 t^*，使得（5.22）的右侧较大且易于计算。为此，我们通过对积分进行变量替换来重写（5.22）

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_N(t^*)}{t^*} &= \frac{(a_-)^N}{a_+t^*}\frac{1}{(a_+)^{N-1}}\int_0^{t^*}\frac{1}{(N-1)!}(a_+s)^{N-1}e^{-sa_+}d(a_+s)\\ &= a_-\left(\frac{a_-}{a_+}\right)^{N-1}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{1}{(N-1)!}\tilde{s}^{N-1}e^{-\tilde{s}}d\tilde{s},\end{aligned}$$

取 $\tau = a_+t^*$。然后我们选择 $t_N^* = N/a_+$，即 $\tau = N$，从而得到

$$\frac{\alpha_N(t_N^*)}{t_N^*} = a_-\left(\frac{a_-}{a_+}\right)^{N-1}\frac{1}{N}\int_0^N\frac{1}{(N-1)!}\tilde{s}^{N-1}e^{-\tilde{s}}d\tilde{s} \geq \frac{a_-}{2N}\left(\frac{a_-}{a_+}\right)^{N-1},$$

这里我们使用以下关于不完全伽马函数的不等式（参见综述 [12, 第 5.1 节，公式 (5.6)]和 [22]）

$$\int_0^N\frac{1}{(N-1)!}\tilde{s}^{N-1}e^{-\tilde{s}}d\tilde{s} \geq \frac{1}{2}.$$

作出上述 t_N^*和 $\alpha_N(t_N^*)$ 选择后，命题 5.6得证。 □

量 α_N/t_N^*与定理 λ_N中 N 次模型的指数收敛速率密切相关。事实上，由于 (3.3)，对于 α_N 较小，我们有

$$\lambda_N = -\frac{\ln(1-\alpha_N)}{t_N^*} \approx \frac{\alpha_N}{t_N^*}.$$

有鉴于此，我们可以将 (5.13) 理解为利用 ε_N的快速衰减来补偿 λ_N的退化。命题 5.6 则对 λ_N 如何恶化提供了一些线索。

这种退化对于强范数下的收敛速率至关重要。直观地说，对于 N次模型，至少需要尖峰出现 N 次，才能消除初始依赖，这解释了 $\frac{1}{N}$在（5.21）中的因子。另一个因子 $\left(\frac{a_-}{a_+}\right)^{N-1}$由于呈指数形式而占主导地位，可能不那么容易理解，这或许反映了更新率异质性的影响。

6 测度解在 $\mathcal{C}_\infty$ 上作为弱极限 $N \to +\infty$

迄今为止，无限时更新方程被理解为层级（4.3），并且定理4.1 针对 L^1 初始数据证明了适定性。现在，我们将解的概念推广到测度，定义弱形式，并证明其适定性。

回顾一下，第4 节中研究的层级解满足 $t \geq 0$,

$$n_\infty^{(K)}(t, [s]_K) = \int_{s_K}^{\infty} n_\infty^{(K+1)}(t, [s]_{K+1}) ds_{K+1}.$$

于是，柯尔莫哥洛夫扩张定理，见附录B，使我们能够构造一个无限维测度 $n_\infty(t) \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$ 对于每个 $t \geq 0$，使得对于每个 K 测度 $n_\infty^{(K)}(t)$ 恰好是 K在 $n_\infty(t)$ 上的边缘分布 $\mathcal{C}_K$。通过这种方式，我们为无限维对象$n_\infty(t)$赋予了精确定义。就拓扑而言，我们使用以下弱拓扑。

定义 *6.1*（弱拓扑和取值于 $\mathcal{M}(\mathcal{C}_\infty)$ 的弱连续函数）。 (*i*) 给定 $\{f_j\}_j$ 中 $\mathcal{M}(\mathcal{C}_\infty)$ 的一列元素，如果对于每个 $K \geq 1$， K边缘分布 $\{f_j^{(K)}\}_j$弱收敛于 $f(K)$ 中的 $\mathcal{M}(\mathcal{C}_K)$，则称其弱收敛于一个元素 $f \in \mathcal{M}(\mathcal{C}_\infty)$。 (*ii*) 基于此弱拓扑，我们称 $f(t, [s]_\infty)$ 是 $C_w\big([0, +\infty)$ 中的一个元素；如果对于每个 $K \geq 1$ 我们有 $f^{(K)} \in C_w\big([0, +\infty)$；则 $\mathcal{M}(\mathcal{C}_\infty)\big)$ $\mathcal{M}(\mathcal{C}_K)\big)$。

接下来，我们定义无限时更新方程（定义 ）的弱测度解概念（见定义1.1），并且上文定义的 $n_\infty(t)$ 是一个弱测度解。它等价于第4节中构造的层级系统的解，见引理6.4。这样的定义提供了另一种视角，可将层级系统视为无限维空间中的统一对象，从而有助于证明其在蒙日-康托罗维奇距离下的收敛性，见第7.2节。

6.1 $\mathcal{C}_\infty$上的无限时更新方程的弱解

我们首先回顾层级模型（4.3）–（4.4）的弱解定义。

定义 6.2 (弱层级解)。 给定 $n_\infty^{(K)}(t) \in C_w\big([0, +\infty); \mathcal{P}(\mathcal{C}_K)\big)$ 对所有 $K \geq 1$，一个相容族 $\{n_\infty^{(K)}\}_K$ 是方程 (4.3)的弱解，若对所有正的 $T > 0$、正整数 K 以及所有测试函数 $\psi \in C_b^1\big([0, T] \times \mathcal{C}_K\big)$，均有：

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \int_{\mathcal{C}_K} n_\infty^{(K)}(t, d[s]_K)\Big(\partial_t \psi(t, [s]_K) + \sum_{i=1}^{K} \partial_{s_i} \psi(t, [s]_K) + p_K([s]_K)\big(\psi(\tau[s]_K) - \psi([s]_K)\big)\Big) dt \\ &\quad = \int_0^T \int_{\mathcal{C}_K} E_\infty^{(K)}(t, d[s]_K)\big(\psi(t, \tau[s]_K) - \psi(t, [s]_K)\big) d[s]_K dt \\ &\quad\quad + \int_{\mathcal{C}_K} \psi(0, [s]_K) n_\infty^{(K)}(0, d[s]_K) - \int_{\mathcal{C}_K} \psi(T, [s]_K) n_\infty^{(K)}(T, d[s]_K). \end{aligned} \tag{6.1}$$

回顾定义 4.4，现在将该项写作 $E_\infty^{(K)}$,

$$E_\infty^{(K)}(t, d[s]_K) = \sum_{i=K+1}^{+\infty} \int_{s_K \leq s_{K+1} \leq \ldots \leq s_i} n_\infty^{(i)}(t, [s]_K, d[s]_{K+1,i}) \varphi_i([s]_i),$$

根据假设（2.6），我们得到如下分解：

$$p_K([s]_K) + \sum_{i=K+1}^{\infty} \varphi_i([s]_i) = p_\infty([s]_\infty).$$

利用这些关系，我们可以用 n_∞来表示方程（6.1）。由此，我们定义 $C_w\big([0,+\infty)$中的以下等价弱解概念；$\mathcal{M}(\mathcal{C}_\infty)$），其中我们也可以类似地定义带测度数据的有限时方程的弱解。

定义 6.3（无限时更新方程的弱解）。给定 $n_\infty(0) \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$，元素 $n_\infty \in C_w\big([0,+\infty)$；$\mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$）是无限时更新方程（1.1）的弱解，若对任意 $T \geq 0$、整数 $K \geq 1$ 以及任意测试函数 $\psi \in C_b^1\big([0,T] \times \mathcal{C}_K\big)$，都有

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{\mathcal{C}_\infty} n_\infty(t, d[s]_\infty)\Big(\partial_t \psi(t,[s]_K) + \sum_{i=1}^{K} \partial_{s_i}\psi(t,[s]_K) + p_\infty([s]_\infty)\big(\psi(t,\tau[s]_K) - \psi(t,[s]_K)\big)\Big)dt \\ = \int_{\mathcal{C}_\infty} \psi(0,[s]_K) n_\infty(0, d[s]_\infty) - \int_{\mathcal{C}_\infty} \psi(T,[s]_K) n_\infty(T, d[s]_\infty). \end{aligned} \tag{6.2}$$

引理 6.4（等价性引理）。假设更新率满足（2.6）。设 $n_\infty \in C_w\big([0,+\infty)$；$\mathcal{M}(\mathcal{C}_\infty)$）是无限时更新方程（1.1）的弱解，则边缘分布族 $\{n_\infty^{(K)}\}_K$ 是层级模型（4.3）的弱解；设 $\{n_\infty^{(K)}\}_K$ 是层级模型的弱解，则其柯尔莫哥洛夫扩张 n_∞ 是无限时更新方程的弱解。

该引理显然是弱解定义中方程 (6.1) 与 (6.2) 等价的推论。

对于具有 L^1 初始数据的层级解，我们通过极限 $N \to \infty$（来自 N次模型的定理4.1）获得了适定性。该结果可以直接推广到具有测度初始数据的情形。基于上述等价性，这也意味着无限时更新方程（1.1）在 $C_w\big([0,+\infty)$中具有唯一的弱解；$\mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$），按照定义6.3被视为无限维测度。

定理 6.5 (测度解的适定性). 假设(2.6) 并考虑一致的初始分布层级 $\{n_\infty^{0,(K)}\}_K$，其中，对于所有 K，$\Big(n_\infty^{0,(K+1)}\Big)^{(K)} = n^{0}{}_{,\infty}^{(K)} \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_K)$。那么，我们有

(i) 层级系统 (4.3)-(4.4) 在定义 6.2 的意义下有唯一的弱解 $\{n_\infty^{(K)}(t)\}_K$。
(ii) 等价地，无限时间方程 (1.1) 在定义 6.3 的意义下有唯一的弱解 $n_\infty(t)$。这里，初始数据 $n_\infty^0 \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$ 是 $\{n_\infty^{0,(K)}\}_K$ 的 *Kolmogorov* 扩张。
(iii) 设 $n_N(t)$ 为 N 时方程的解，更新率为 p_N，满足 (2.6)，初始数据为 $n^{0,(N)}_\infty \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_N)$。则对每个边缘分布，都有局部时间强收敛。更准确地说，对每个固定的$T > 0$ 和 $K \in \mathbb{N}^+$，采用第 2 节的记号，

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|n_N^{(K)}(t) - n_\infty^{(K)}(t)\|_{\mathcal{M}^1(\mathcal{C}_K)} \to 0, \qquad \text{as } N \to \infty.$$

定理6.5 第 (i) 和 (iii) 部分的证明与定理4.1的证明相同，L^1只是将测度的范数替换为全变差范数。第 (ii) 部分由引理6.4中的等价性得出。

6.2 通过紧性得到弱极限 $N \to \infty$

通过紧性方法，可以更直接地证明有限时方程中的极限 $N \to \infty$；该方法也可用于其他目的（例如命题6.9）。这里的极限是在测度的弱意义下成立的，这在测度框架中很自然。在对初始数据作出适当假设后，该结果可由定理6.5中边缘分布的强收敛性推出。

定理 6.6（弱极限）。 假设 (2.6) 和 (2.8) 成立，并给定初始数据 $n_\infty(0) \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$ 使得 *at*

$$\int_{\mathcal{C}_\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|s_i|}{2^i}\, n_\infty(0, d[s]_\infty) < +\infty. \tag{6.3}$$

令 $n_\infty(t)$ 为按定义 6.3 的意义下无限时间方程的唯一测度解。令 $n_N(t)$为初始数据为 $n_\infty^{(N)}(0) \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_N)$的相应 N-时间方程的解。那么，当 $N \to \infty$ 时，有以下弱极限。

(i) 对所有 $t \geq 0$、整数 $K \geq 1$ 和测试函数 $\phi \in C_b^0(\mathcal{C}_K)$,

$$\int_{\mathcal{C}_N} n_N(t, d[s]_N)\phi([s]_K) \to \int_{\mathcal{C}_\infty} n_\infty(t, d[s]_\infty)\phi([s]_K), \qquad \textit{as } N \to +\infty. \tag{6.4}$$

(ii) 对所有 $T \geq 0$、整数 $K \geq 1$ 和测试函数 $\psi \in C_b^0\big([0,T] \times \mathcal{C}_K\big)$,

$$\int_0^T \int_{\mathcal{C}_N} n_N(t, d[s]_N)\psi(t, [s]_K)dt \to \int_0^T \int_{\mathcal{C}_\infty} n_\infty(t, d[s]_\infty)\psi(t, [s]_K)dt, \qquad \textit{as } N \to +\infty. \tag{6.5}$$

要证明这一结果，首先需要证明这一族 $\{n_N\}_N$ 的紧性。

引理 6.7。 给定一列概率测度 $\{n_N\}_{N\geq 1}$，$n_N \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_N)$，且满足一致有界条件 ，

$$\int_{\mathcal{C}_N} \sum_{i=1}^{N} \frac{|s_i|}{2^i}\, n_N(d[s]_N) \leq C_0 < +\infty, \quad \forall N \in \mathbb{N}^+. \tag{6.6}$$

那么，我们可以找到一个子序列 $\{n_{N_j}\}_{j\geq 1}$ 和一个无限维测度 $n_\infty \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$，使得对每个 K-边缘分布，以下弱极限成立

$$n_{N_j}^{(K)} \to n_\infty^{(K)}, \quad \textit{weakly in } \mathcal{P}(\mathcal{C}_K), \quad \textit{as } N_j \textit{ goes to infinity.} \tag{6.7}$$

证明。 一致有界条件 (6.6) 意味着，对每个 K-边缘分布

$$\int_{\mathcal{C}_K} \Big(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{2^i}|s_i|\Big) n_N^{(K)}(d[s]_K) \leq \int_{\mathcal{C}_N} \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i}|s_i|\Big) n_N(d[s]_N) \leq C_0 < +\infty, \tag{6.8}$$

对于 $N \geq K$ 一致有界。因此 $\{n_N^{(K)}\}$ 是 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_K)$ 中的紧序列，这使我们能够提取一个子序列 $\{n_{N_j}\}_{j\geq 1}$，使得对于 $\mathcal{C}_K$ 上的概率测度 $n_\infty^{(K)}$,

$$n_{N_j}^{(K)} \to n_\infty^{(K)}, \quad \text{weakly in } \mathcal{P}(\mathcal{C}_K), \quad \text{as } N_j \text{ goes to infinity.} \tag{6.9}$$

从 $K = 1$出发，通过对角线论证，我们可以提取一个新的子序列，仍记为$\{n_{N_j}\}$，使得（6.9）对每个 $K \geq 1$均成立。
接下来需要定义 n_∞。为此，我们断言，根据我们的对角线构造，以下相容关系成立

$$\left(n_\infty^{(K+1)}\right)^{(K)} = n_\infty^{(K)}, \tag{6.10}$$

事实上，由（6.9）可知，对所有 $\psi([s]_{K+1}) \in C_b^0(\mathcal{C}_{K+1})$

$$\int_{\mathcal{C}_{K+1}} \psi([s]_{K+1}) n_{N_j}^{(K+1)}(d[s]_{K+1}) \to \int_{\mathcal{C}_{K+1}} \psi([s]_{K+1}) n_\infty^{(K+1)}(d[s]_{K+1}), \quad \text{as } N_j \text{ goes to infinity.}$$

取 ψ 使其仅依赖于上述方程中的前 K 个变量 $[s]_K$，并对6.9）应用于$n_{N_j}^{(K)}$，即可得到（6.10）。由（6.10，我们应用柯尔莫哥洛夫扩张定理，得到一个无限维测度 $n_\infty \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$，使得 $n_\infty^{(K)}$确实是其第K维边缘分布 n_∞。 □

引理 6.7 给出了一列有限维测度的紧性判据 $\{n_N\}$，其中每个n_N 都属于 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_N)$。它自然地导出空间$\mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$中一列测度的紧性判据，其中弱极限的含义见定义 6.1。

推论 6.8 (关于 $\mathcal{C}_\infty$ 上的紧性)。 对于一列关于 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$ 的无限维测度 $\{n_{\infty,j}\}_j$，假设一致有界性条件成立

$$\int_{\mathcal{C}_\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|s_i|}{2^i}\, n_{\infty,j}(d[s]_\infty) \leq C_0 < +\infty, \quad \forall j.$$

那么我们可以提取一个子序列，它弱收敛到某个 $n_\infty \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$，其意义见定义 6.1。

现在我们可以证明定理 6.6。

定理 6.6 的证明。 由引理 3.2 中的一致矩估计以及初始界（6.3），我们得到，对 N 一致的界（6.6）对 $n_N(t)$ 在每个时刻 $t \geq 0$ 都成立。因此，对于固定时刻 t，我们可以应用引理 6.7，得到一个子序列，使得（6.4）在时刻 t 成立。然后，通过对角线论证，我们可以进一步提取一个子序列，使得（6.4）对所有 $t \in [0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$（一个可数点集）都成立。此时，我们还无法将极限测度识别为无限维问题的解。

为了将这一收敛性推广到任意 $t \in [0, +\infty)$，只需证明：若 6.4) 对 $\{t_n\}$成立，且 $t_n \to t$ 当 $n \to \infty$ 时成立，则 6.4) 对 t 也成立。这可由一个等度连续性估计推出。具体而言，我们将证明，对于固定的 $K \geq 1$ 和 $\psi \in C_b^0(\mathcal{C}_K)$，映射

$$t \longmapsto \int_{\mathcal{C}_N} n_N(t, d[s]_N) \psi([s]_K) \tag{6.11}$$

对 $N \geq K$是一致连续的。为此，我们将使用弱形式（2.9），但这需要 $\psi \in C_b^1(\mathcal{C}_K)$。事实上，对于 $\psi \in C_b^1(\mathcal{C}_K)$，(2.9) 蕴含映射（6.11）是 Lipschitz连续的，且其 Lipschitz 常数关于 N 一致，因为更新率具有一致的上界（2.8）。对于一般的 $\psi \in C_b^0(\mathcal{C}_K)$，我们仍可通过稠密性论证得到一致连续性。

现在，对于每个时刻 $t \geq 0$，我们都有极限。由控制收敛定理可得关于时间积分的极限（6.5）。这使我们能够将弱形式中的极限从（2.9）传递到（6.2）。因此，根据定理 6.5中的唯一性，我们可以将极限测度确定为无限时间问题的解。由此，子序列收敛可提升为整个序列收敛。

□

6.3 无限时间更新方程的稳态

通过紧致性，我们还可以证明无限时间方程存在稳态。

命题 6.9. 假设 (2.6) 和 (2.8)。那么，无限时间更新方程存在稳态。

根据定义 6.3，稳态 $n_\infty^* \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$ 满足

$$\int_{\mathcal{C}_\infty} n_\infty(t, d[s]_\infty)\Big(\sum_{i=1}^{K} \partial_{s_i}\psi([s]_K) + p_\infty([s]_\infty)\big(\psi(\tau[s]_K) - \psi([s]_K)\big)\Big) = 0, \tag{6.12}$$

对所有 $K \geq 1$ 和 $\psi([s]_K) \in C_b^1(\mathcal{C}_K)$ 都成立。

证明。 定理 3.3表明，对于每个 $N \geq 1$， N-时方程都有唯一稳态 n_N^*，且这些稳态满足一致的矩界（3.13）。因此，我们可以应用引理 6.7，从 n_N^* 中选取一个按（6.7）意义弱收敛的子序列，其极限给出了无限时间方程的一个稳态。

□

演化问题长期收敛到稳态的性质将在第 5 节和第7节中研究。在这两节中，我们都证明了稳态的唯一性，但还需要对更新率作出额外假设，例如（5.6）和（5.21）。

7 蒙日-康托罗维奇距离下向稳态的指数收敛

对于 N-时方程，我们已通过 Doeblin 方法证明了向稳态的指数收敛，所用距离为 L^1 或全变差距离（定理 3.3）。然而，正如下例所示，全变差距离不适用于无限时间方程。

考虑分别集中于以下位置的两个狄拉克质量 $\delta_{[s^1]_\infty}$ 和 $\delta_{[s^2]_\infty}$

$$[s^1]_\infty = (k_1, 2k_1, ..., Nk_1, ...), \quad [s^2]_\infty = (k_2, 2k_2, ..., Nk_2, ...),$$

取两个正实数 $k_1 \neq k_2$。设 $n_\infty^1(t)$ 和 $n_\infty^2(t)$ 分别为具有初始数据 $\delta_{[s^1]_\infty}$ 和 $\delta_{[s^2]_\infty}$的无限时间方程（1.1）的解。我们断言，全变差距离

在 $n^1_\infty(t)$ 与 $n^2_\infty(t)$ 之间始终保持为 2。事实上，由于有限次跳跃不会改变尾部行为， $n^1_\infty(t)$ 和 $n^2_\infty(t)$ 的支撑集将位于 $\mathcal{C}_\infty$ 的互不相交子集中。更准确地说

$$\begin{aligned}\text{supp } n^1_\infty(t) &\subseteq \{[s]_\infty \in \mathcal{C}_\infty : \exists N \text{ s.t. } s_{n+1} - s_n = k_1, \quad \forall n \geq N\},\\ \text{supp } n^2_\infty(t) &\subseteq \{[s]_\infty \in \mathcal{C}_\infty : \exists N \text{ s.t. } s_{n+1} - s_n = k_2, \quad \forall n \geq N\}.\end{aligned}$$

由于 $k_1 \neq k_2$， $n^2_\infty(t)$ 的 $n^1_\infty(t)$ 的支撑集互不相交，因此全变差距离

$$\|n^1_\infty(t) - n^2_\infty(t)\|_{\mathcal{M}^1(\mathcal{C}_\infty)} = \|n^1_\infty(t)\|_{\mathcal{M}^1(\mathcal{C}_\infty)} + \|n^2_\infty(t)\|_{\mathcal{M}^1(\mathcal{C}_\infty)} = 2.$$

与这个例子一致，我们也看到， L^1 中 N-次方程的收敛速率会随 $N \to \infty$ （第 5.4 节）退化。在第 5 节中，我们通过对更新率作快速衰减假设来弥补这一点，从而对每个 N-边缘分布得到长期收敛。不过，该结果是定性的，并未给出收敛速率。

如上所述，为了获得指数收敛，我们需要使用总变差以外的适当度量。这促使我们采用蒙日-康托罗维奇距离（简称 M.-K. 距离）。M.-K. 距离可应用于偏微分方程， [9] 尤其是更新方程等结构化方程，参见 [10]。通常，需要专门设计输运代价，以适应特定问题的结构。

对于 N时方程，我们找到了一个合适的成本函数，从而可以得到 M.-K. 距离的指数收敛，并且具有关于N 一致的更新率（即当 $N \to\infty$时不会退化）。这自然地延伸到无限时间方程向稳态的指数收敛。第 N时情形和无限时间情形分别在第7.1 节和第7.2节中讨论，同时给出了更新率所需的某些假设。

7.1 在蒙日-康托罗维奇距离下对稳态的一致收敛

给定距离 $V([s]_N, [s']_N)$ 在 $\mathcal{C}_N$(可能是 $N = \infty$，参见第 7.2 节），也称为成本函数，我们可以定义两个概率测度 n_N 和m_N 在 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_N)$ 之间相应的 M.-K. 运输距离为

$$\begin{cases}\mathcal{T}_V(n_N, m_N) := \inf\limits_{\omega_N \in \mathcal{H}(n_N, m_N)} \iint V([s]_N, [s']_N)\omega_N(d[s]_N, d[s']_N),\\ \mathcal{H}(n_N, m_N) = \{\omega_N \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_N \times \mathcal{C}_N) \text{ with marginals } n_N \text{ and } m_N\}.\end{cases} \tag{7.1}$$

有关最优传输和 M.-K. 距离的更多内容，请参见例如 [23, 20]。

接下来，我们将证明在 M.-K. 距离意义下关于维数一致的指数收敛。具体而言，收敛速率不依赖于系统的维数，但与 $p_N([s]_N)$ 的一种利普希茨常数变体有关。

该结果的一个关键要素是考虑以下成本函数

$$V_{N,\beta,a}([s]_N, [s']_N) := \sum_{i=1}^{N} \frac{|s_i - s'_i| \wedge a}{(1+\beta)^i} \leq \frac{a}{\beta}, \tag{7.2}$$

其中， a、 $\beta > 0$ 是两个参数。直观而言，它通过因子 $\frac{1}{1+\beta}$ 降低较早尖峰时间的重要性，并施加截断以使成本函数有界。我们将在证明中看到，这些设计如何使得收敛速率能够对 N 一致。

定理 7.1（M-K 距离下的指数收缩）。对于 N 次更新方程，我们假设更新率满足（2.8），并且可以选择 β、$a>0$ 和 $\delta>0$ 使得

$$\left|p_N([s]_N)-p_N([s']_N)\right| \le \delta\, V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N), \qquad \textit{for all } [s]_N,[s']_N \in \mathcal{C}_N, \tag{7.3}$$

并且 $\delta>0$ 足够小，具体来说

$$\gamma := \frac{\beta a_-}{1+\beta} - \frac{a\delta}{\beta} > 0. \tag{7.4}$$

那么，对于方程 N次迭代式 $n_N(t)$和 $m_N(t)$的两个解，以下指数收缩性质成立

$$\mathcal{T}_{V_{N,\beta,a}}(n_N(t),m_N(t)) \le \mathcal{T}_{V_{N,\beta,a}}(n_N(0),m_N(0))e^{-\gamma t}, \tag{7.5}$$

其中$\mathcal{T}_{V_{N,\ \beta,\ a}}$是由成本函数 (7.2)诱导的 *M.-K.* 距离。特别地，(7.5) 意味着以收敛速率 $\gamma>0$指数收敛至稳态。

(7.3) 中的常数 δ可以理解为 $p_N([s]_N)$ 相对于 V_N、$_\beta$、$_a([s]_N$、$[s']_N)$ 的利普希茨常数。假设它足够小，以确保 (7.4) 中的收敛速率 $\gamma>0$。特别地，如果我们能找到固定的 β、$a>0$ 和 $\delta>0$，使得 (7.3)–(7.4) 对所有 $N\ge 1$均成立，那么对于 N次迭代方程将实现长期指数收敛，并具有关于 N一致的收敛速率 $\gamma>0$。

我们首先给出定理 7.1 的证明，随后讨论确保 (7.3)-(7.4) 成立的更新率的显式条件，并给出示例。

定理 7.1 的证明。步骤 1。耦合的演化。我们采用耦合法。给定两个初始数据$n_N(0)$ 和 $m_N(0)$，以及一个初始耦合 $\omega_N(0)\in\mathcal{H}(n_N(0)\ m_N(0))$（定义见 (7.1)），我们希望确定耦合测度 $w_N(t)$ 的演化。换言之，对于每个时刻 t，$\omega_N(t)$ 都是 $n_N(t)$ 与 $m_N(t)$ 之间的耦合。根据 M.-K. 距离的定义 (7.1)，我们有：

$$\mathcal{T}_{V_{N,\beta,a}}\big(n_N(t),m_N(t)\big) \le \int_{\mathcal{C}_N\times\mathcal{C}_N} V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\omega_N(t,d[s]_N,d[s']_N) =: T_{V_{N,\beta,a}}(\omega_N), \tag{7.6}$$

其中我们将 $T_{V_{N,\ \beta,\ a}}(\omega_N)$ 定义为耦合测度 ω_N的输运代价。我们将以一种能够估计 (7.6) 右端的方式构造 $\omega_N(t)$ 的演化。

为了找到这样的适当耦合 $\omega_N(t)$，我们采用如下策略 [10]。我们将 $\omega_N(t)$ 定义为以下方程的弱解

$$\begin{aligned}
\partial_t\omega_N(t,[s]_N,[s']_N) &+ \sum_{i=1}^{N}\Big((\partial_{s_i}+\partial_{s'_i})\omega_N(t,[s]_N,[s']_N)\Big) + \max\big\{p_N([s]_N),p_N([s']_N)\big\}\omega_N(t,[s]_N,[s']_N)\\
&= \delta_0(s_1)\delta_0(s'_1)\iint \min\big\{p_N([s]_{2,N},u),p_N([s']_{2,N},u')\big\}\omega_N(t,[s]_{2,N},du,d[s']_{2,N},du')\\
&\quad + \delta_0(s_1)\int \big(p_N([s]_{2,N},u)-p_N([s']_N)\big)_+\omega_N(t,[s]_{2,N},du,[s']_N)\\
&\quad + \delta_0(s'_1)\int \big(p_N([s]_N)-p_N([s']_{2,N},u')\big)_+\omega_N(t,[s]_N,[s']_{2,N},du').
\end{aligned} \tag{7.7}$$

用弱解的术语来说，这意味着我们希望找到一个 $\omega_N(t)$，使得对于任意的 $0 \le T < +\infty$ 和测试函数 $\psi \in C_b^1\big([0,T] \times \mathcal{C}_N \times \mathcal{C}_N\big)$,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \iint_{\mathcal{C}_N \times \mathcal{C}_N} \psi(t,[s]_N,[s']_N)\omega_N(t,d[s]_N,d[s']_N)dt \\
&= \int_0^T \iint_{\mathcal{C}_N \times \mathcal{C}_N} \sum_{i=1}^N \Big(\frac{\partial}{\partial_{s_i}} + \frac{\partial}{\partial_{s_i'}}\Big)\psi(t,[s]_N,[s']_N)\omega_N(t,d[s]_N,d[s']_N)dt \\
&\quad + \int_0^T \iint_{\mathcal{C}_N \times \mathcal{C}_N} \Big(\Big[\psi(t,\tau[s]_N,\tau[s']_N) - \psi(t,[s]_N,[s']_N)\Big] \min\big\{p_N([s]_N), p_N([s']_N)\big\} \\
&\quad + \Big[\psi(t,\tau[s]_N,[s']_N) - \psi(t,[s]_N,[s']_N)\Big]\big(p_N([s]_N) - p_N([s']_N)\big)_+ \\
&\quad + \Big[\psi(t,[s]_N,\tau[s']_N) - \psi(t,[s]_N,[s']_N)\Big]\big(p_N([s']_N) - p_N([s]_N)\big)_+\Big)\omega_N(t,d[s]_N,d[s']_N)dt.
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

微观描述。上述方程可以看作 $\mathcal{C}_N \times \mathcal{C}_N$ 上随机过程的概率分布演化。给定一个位于 $([s]_N,[s']_N)$ 的粒子，它将以 $\min\{p_N([s]_N)\ p_N([s']_N)\}$ 的速率跳转到 $(\tau[s]_N,\tau[s']_N)$，以 $\big(p_N([s]_N) - p_N([s']_N)\big)_+$ 的速率跳转到 $(\tau[s]_N,[s']_N)$，并以 $\big(p_N([s']_N) - p_N([s]_N)\big)_+$ 的速率跳转到 $([s]_N,\tau[s']_N)$（回顾一下，移位算子 τ 定义见方程 (2.2)）。考虑边缘分布，我们可以看到，给定一个位于 $[s]_N$ 的粒子，它将以 $p_N([s]_N)$ 的速率跳转到 $\tau[s]_N$，因为，

$$
\min\{p_N([s]_N), p_N([s']_N)\} + \big(p_N([s]_N) - p_N([s']_N)\big)_+ = p_N([s]_N). \tag{7.9}
$$

演化的存在性。 方程 (7.8) 的解的存在性与 [10, 第 4],节中的情形类似，该节利用先验紧性估计来处理双时方程的耦合。

定理 7.1 的证明策略。 在上述微观描述下，我们可以看到，如果一个耦合粒子从 $([s]_N,[s']_N)$ 跳到 $(\tau[s]_N,\tau[s']_N)$，输运代价将按如下方式衰减:

$$
V_{N,\beta,a}(\tau[s]_N,\tau[s']_N) \le \frac{1}{1+\beta} V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N). \tag{7.10}
$$

这基本上就是 M.-K. 距离中指数收敛的原因。同时，我们还需要控制从 $([s]_N,[s']_N)$ 跳到 $(\tau[s]_N,[s']_N)$ 或 $([s]_N,\tau[s']_N)$ 的异步跳跃，其速率为 $\big|p_N([s]_N) - p_N([s']_N)\big|$。借助假设 (7.3)，通过利用 $V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)$ 来控制 $\big|p_N([s]_N) - p_N([s']_N)\big|$，即可做到这一点。

步骤 2：*M.-K.* 距离估计。 现在，我们按照上文提到的控制异步跳跃的思路来估计 M.-K. 距离。

尽管 $V_{N,\ \beta,\ a}$ 并非 C^1，但通过正则化论证，我们仍可将其用作（7.8）中的测试函数。此外，方向导数项 $\Big(\frac{\partial}{\partial_{s_i}} + \frac{\partial}{\partial_{s_i'}}\Big)V_{N,\ \beta,\ a}([s]_N,[s']_N)$ 消失，因为 $V_{N,\ \beta,\ a}([s]_N,[s']_N)$

仅取决于每个 $s_i - s_i'$，因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\iint_{\mathcal{C}_N\times\mathcal{C}_N} V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\omega_N(t,d[s]_N,d[s']_N)\\
&=\iint_{\mathcal{C}_N\times\mathcal{C}_N}\Big(\Big[V_{N,\beta,a}(\tau[s]_N,\tau[s']_N)-V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\Big]\big(p_N([s]_N)\wedge p_N([s']_N)\big)\\
&\quad+\Big[V_{N,\beta,a}(\tau[s]_N,[s']_N)-V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\Big]\big(p_N([s]_N)-p_N([s']_N)\big)_+\\
&\quad+\Big[V_{N,\beta,a}([s]_N,\tau[s']_N)-V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\Big]\big(p_N([s']_N)-p_N([s]_N)\big)_+\Big)\omega_N(t,d[s]_N,d[s']_N).
\end{aligned}\tag{7.11}$$

对于方程（7.11）倒数第二行，利用 $0\le V_{N,\ \beta,\ a}\le\frac{a}{\beta}$ 以及（7.3），可得

$$\begin{aligned}
&\Big|V_{N,\beta,a}(\tau[s]_N,[s']_N)-V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\Big|\le\frac{a}{\beta},\\
&\Big|V_{N,\beta,a}([s]_N,\tau[s']_N)-V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\Big|\le\frac{a}{\beta},\\
&(p_N([s]_N)-p_N([s']_N))_+ + (p_N([s']_N)-p_N([s]_N))_+\le\delta V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N).
\end{aligned}$$

对于方程（7.11）倒数第三行，注意到

$$\begin{aligned}
&V_{N,\beta,a}(\tau[s]_N,\tau[s']_N)-V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)=\frac{\beta}{1+\beta}V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N),\\
&p_N([s]_N)\wedge p_N([s']_N)\ge a_-.
\end{aligned}$$

结合上述方程，可将方程（7.11）写为

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_N\times\mathcal{C}_N} V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\omega_N(t,d[s]_N,d[s']_N)\\
&\qquad\le-\iint_{\mathcal{C}_N\times\mathcal{C}_N}\frac{\beta a_-}{1+\beta}V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\omega_N(t,d[s]_N,d[s']_N)\\
&\qquad\quad+\iint_{\mathcal{C}_N\times\mathcal{C}_N}\frac{a\delta}{\beta}V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\omega_N(t,d[s]_N,d[s']_N).
\end{aligned}$$

回顾方程（7.6）中 $T_{V_{N,\ \beta,\ a}}(\omega_N)$ 的定义，可得

$$\frac{d}{dt}T_{V_{N,\beta,a}}\big(\omega_N(t)\big)\le T_{V_{N,\beta,a}}\big(\omega_N(t)\big)\Big(-\frac{\beta a_-}{1+\beta}+\frac{a\delta}{\beta}\Big)=-\gamma T_{V_{N,\beta,a}}\big(\omega_N(t)\big),$$

其中 $\gamma>0$ 定义见（7.4）。由格朗沃尔不等式及（7.1）可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{V_{N,\beta,a}}\big(n_N(t),m_N(t)\big)&\le T_{V_{N,\beta,a}}\big(\omega_N(t)\big)\\
&\le e^{-\gamma t}T_{V_{N,\beta,a}}\big(\omega_N(0)\big)\\
&=e^{-\gamma t}\iint V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)\omega_N(0,d[s]_N,d[s']_N).
\end{aligned}$$

最后，在上式右侧对所有初始耦合取下确界 $w_N(0)\in\mathcal{H}(n(0)\ m(0))$，根据 M.-K. 距离的定义即可完成证明（7.1）。 □

为了给出满足假设（7.3）-（7.4）的一个显式且充分的条件，我们先定义一些常数。对于 $\beta>0$，我们将 $\varphi_i([s]_i)$ L_N 的加权最大利普希茨常数以及加权最大波动 F_N 定义为

$$\begin{cases} L_N(\beta) := \max_{1\le i\le N} \sup_{[s]_i,[s']_i} (1+\beta)^i \frac{|\varphi_i([s]_i)-\varphi_i([s']_i)|}{|s_i-s'_i|}, \\ F_N(\beta) := \max_{1\le i\le N} \sup_{[s]_i,[s']_i} (1+\beta)^i \Big|\varphi_i([s]_i)-\varphi_i([s']_i)\Big|. \end{cases} \tag{7.12}$$

引理 7.2。 在假设 (2.6) 和 (2.8) 成立且任意给定 $1\le N\le+\infty$时，若存在一个合适的 $\beta>0$和一个足够小的 $a>0$ 使得，

$$F_N(\beta)<\frac{a_-\beta^2}{1+\beta}, \qquad \text{and} \qquad aL_N(\beta)<\frac{a_-\beta^2}{1+\beta}, \tag{7.13}$$

则假设 (7.3)-(7.4) 成立，其中 δ 和 γ 定义如下，

$$\delta := \max\{\frac{F_N(\beta)}{a}, L_N(\beta)\}, \qquad \gamma := \frac{\beta a_-}{1+\beta} - \frac{F_N(\beta)\vee aL_N(\beta)}{\beta}. \tag{7.14}$$

证明。 事实上，由假设（2.8）可得

$$\begin{aligned} \frac{|p_N([s]_N)-p_N([s']_N)|}{V_{N,\beta,a}([s]_N,[s']_N)} &\le \frac{\sum_{i=1}^N |\varphi_i([s]_i)-\varphi_i([s']_i)|}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{(1+\beta)^i}(|s_i-s'_i|\wedge a)} \le \max_{1\le i\le N}\Big\{\frac{|\varphi_i([s]_i)-\varphi_i([s']_i)|}{\frac{1}{(1+\beta)^i}(|s_i-s'_i|\wedge a)}\Big\} \\ &\le \frac{F_N(\beta)}{a}\vee L_N(\beta) := \delta. \end{aligned}$$

于是，7.14）中的表达式 δ成立，因而（7.3)-（7.4）也成立。 □

虽然假设（7.13）看起来可能有所限制，但这里我们针对 $N=+\infty$给出一个明确的例子，而 $N<+\infty$ 的例子也可以由此直接得出。它也为定理 7.15中的假设（7.3）提供了一个例子。这个明确的例子是

$$p_\infty([s]_\infty) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(a_-\vee s_i)\wedge Ca_-}{(1+\beta)^i}.$$

这里的 $C>1$ 必须满足一个适当的条件，我们稍后会对此进行解释。在这个例子中， $\varphi_i([s]_i)$ 相对于 $[s]_i$ 的波动，与该波动相对于 i 的指数衰减之间存在微妙的权衡。将记号 (7.12) 扩展到 $N=\infty$ 后，我们有 $F_\infty(\beta)=(C-1)a_-$ 且$L_\infty(\beta)\le 1$。当 $C-1$ 较大时，假设 $C-1\le\frac{\beta^2}{1+\beta}$ 要求参数 β 也较大。更一般地，给定定义在 $s\ge 0$ 上的任意正的 Lipschitz 函数 $f(s)$，我们可以如下使用更新率，其中 ε 是一个足够小的正数，

$$p_\infty([s]_\infty) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+\beta)^i}\Big[(a_-\vee f(s_i))\wedge(\frac{\beta^2}{1+\beta}+1-\varepsilon)a_-\Big].$$

7.2 $\mathcal{C}_\infty$中的测度解的指数收敛

现在，我们将第 7.1 节中的指数收敛结果推广到无限时更新方程。

定理 7.3.（测度解的指数收敛）假设更新率满足(2.6)和(2.8)。我们还假设可以选取 β， $a>0$ 以及 $\delta>0$，使得对任意 $[s]_\infty$， $[s']_\infty \in \mathcal{C}_\infty$，

$$\left|p_\infty([s]_\infty)-p_\infty([s']_\infty)\right| \le \delta\, V_{\infty,\beta,a}([s]_\infty,[s']_\infty) \qquad \text{and} \qquad \gamma := \frac{\beta a_-}{1+\beta}-\frac{a\delta}{\beta}>0. \tag{7.15}$$

对于无限时间方程，给定两个不同的初始概率分布 $n_\infty(0)$ $m_\infty(0)$ $\in\mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty)$，我们有相应的全局时间解 $n_\infty(t)$ 和 $m_\infty(t)$，如定义6.3所述。这两个解满足以下 *M.-K.* 距离的指数收敛性质，

$$\mathcal{T}_{V_{\infty,\beta,a}}\big(n_\infty(t),m_\infty(t)\big) \le \mathcal{T}_{V_{\infty,\beta,a}}\big(n_\infty(0),m_\infty(0)\big)e^{-\gamma t}.$$

注意，将定理 $N<+\infty$ 7.1 的假设（7.3）-（7.4）中的替换为 $N=+\infty$，即可得到定理7.15的假设（7.3）。

原则上，可以通过在定理 7.1 中取极限 $N\to\infty$ 来证明定理 7.3，并使用定理 6.5中的局部时间强收敛。不过，我们更希望像有限时情形那样直接给出证明。为此，我们按照定义 6.3，将解视为一个无限维测度；根据引理 6.4，这与层级观点等价。

定理 7.3 的证明。我们将定理 7.3 中的耦合法推广到无限时情形。首先，我们希望构造耦合测度 $\omega_\infty(t) \in C_w\big([0,+\infty);\mathcal{M}(\mathcal{C}_\infty\times\mathcal{C}_\infty)\big)$ 的演化，从而将 (7.8) 推广到无限时情形。可以通过令 $N\to\infty$ 取定理 7.1 证明中给出的 N-时耦合测度 $\omega_N(t)$ 的极限，得到 $\omega_\infty(t)$ 的存在性；这将定理 4.1 和 6.5 中的局部时间强极限推广到耦合测度 $\omega_N(t)$。

基于 上述论证，我们有一个元素 $\omega_\infty\in C_w\big([0,+\infty);\mathcal{P}(\mathcal{C}_\infty\times\mathcal{C}_\infty)\big)$ 满足，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\iint_{\mathcal{C}_\infty\times\mathcal{C}_\infty} V_{\infty,\beta,a}([s]_\infty,[s']_\infty)\omega_\infty(t,d[s]_\infty,d[s']_\infty)\\
&=\iint_{\mathcal{C}_\infty\times\mathcal{C}_\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial_{s_i}}+\frac{\partial}{\partial_{s_i'}}\Big)V_{\infty,\beta,a}([s]_\infty,[s']_\infty)\omega_\infty(t,d[s]_\infty,d[s']_\infty)\\
&+\iint_{\mathcal{C}_\infty\times\mathcal{C}_\infty}\Big(\Big[V_{\infty,\beta,a}(\tau[s]_\infty,\tau[s']_\infty)-V_{N,\beta,a}([s]_\infty,[s']_\infty)\Big]\min\big\{p_\infty([s]_\infty),p_\infty([s']_\infty)\big\}\\
&+\Big[V_{\infty,\beta,a}(\tau[s]_\infty,[s']_\infty)-V_{\infty,\beta,a}([s]_\infty,[s']_\infty)\Big]\big(p_\infty([s]_\infty)-p_\infty([s']_\infty)\big)_+\\
&+\Big[V_{\infty,\beta,a}([s]_\infty,\tau[s']_\infty)-V_{\infty',\beta,a}([s]_\infty,[s']_\infty)\Big]\big(p_\infty([s']_\infty)-p_\infty([s]_\infty)\big)_+\Big)\omega_\infty(t,d[s]_\infty,d[s']_\infty).
\end{aligned}$$

采用定理7.1中的相同方法，我们得到，

$$\mathcal{T}_{V_{\infty,\beta,a}}\big(n_\infty(t),m_\infty(t)\big) \le \mathcal{T}_{V_{\infty,\beta,a}}\big(n_\infty(0),m_\infty(0)\big)e^{-\gamma t}.$$

证明至此完成。 □

8 结论与讨论

在第7 节中，我们采用一种截然不同的方法重新探讨长时间行为问题。具体而言，通过使用合适的蒙日-康托罗维奇距离（而非强 L^1距离），我们可以得到关于N 的一致收敛速率。不过，与（2.6）和（2.8）相比，我们仍然需要对更新率作出更多假设。一方面，在更一般情形下研究长时间行为似乎是一项艰巨的任务；另一方面，已有许多关于霍克斯过程长时间行为的研究成果（例如 [13, 6]），而霍克斯过程在形式上类似于某种特定类型的无限时间方程。我们可以探讨是否存在有别于（2.6）和（2.8）的其他假设，以及是否有其他表述方式能够简化无限时间方程收敛性的证明。

关于更新方程中可能出现的非线性，我们可以探讨什么样的非线性适合且对这一主题有意义。选择合适的非线性后，也可以进一步提出关于适定性和长期行为的问题。

层级系统的表述（4.3）与 BBGKY 层级类似，不过我们耦合的是无限多个状态变量，而非无限多个粒子。然而，我们仍可探讨无限时间方程中是否可能存在某种形式的“混沌传播”。由于在当前表述中必须满足 $s_1 \le s_2 \le \dots$，因此可以基于一些额外的重新表述来探寻“混沌传播”的可能性。同时，从启发式的角度来看，我们可以将状态变量 $s_1 \le s_2 \le \dots$ 视为具有严格顺序结构的无限多个粒子。这或许可以成为探索如何利用无限维偏微分方程描述由异质粒子组成的粒子系统的起点。

Doeblin 定理

定义 A.1。（***Markov*** 半群）。设 $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ 为一个测度空间，且 $P_t: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 为一个线性半群。若对于所有 $\mu \ge 0$ 都有 $P_t\mu \ge 0$，且对于所有 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 都有 $\int_X P_t\mu = \int_X \mu$，则称 P_t 为 *Markov* 半群。换言之，(P_t) 保持概率测度的子集 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 不变。

定义 A.2。（***Doeblin*** 条件）。设 $P_t: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 为一个 *Markov* 半群。若存在 $t_0 > 0$ 和 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 使得 (P_t) 满足 *Doeblin* 条件，则称之为满足 *Doeblin* 条件，即

$$P_{t_0}\mu \ge \alpha\nu, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \tag{A.1}$$

接下来我们陈述 Doeblin 定理。

定理 A.3。（扩展的 ***Doeblin*** 定理）。设 $P_t: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 为满足 *Doeblin* 条件的 *Markov* 半群。则该半群存在唯一的平衡态 $\mu^* \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$。此外，对于所有$\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$，有

$$\|P_t\mu - \langle\mu\rangle\mu^*\|_{\mathcal{M}^1} \le \frac{1}{1-\alpha} e^{-\lambda t}\|\mu - \langle\mu\rangle\mu^*\|_{\mathcal{M}^1}, \quad \forall t \ge 0 \tag{A.2}$$

其中 $\langle\mu\rangle := \int_X \mu$ 和 $\lambda = -\frac{\ln(1-\alpha)}{t_0}$。

当半群将 L^1 映射到自身时，将 $\mathcal{P}$替换为 L^1 后，同样的结果仍然成立。于是，$\mu^* \in L^1$ 和 ν 自动是一个 L^1 函数。

关于 Doeblin 定理的证明，读者可参见 [11]。稍作修改后，我们便可证明扩展的 Doeblin 定理。

B 柯尔莫哥洛夫扩张定理

记 $\mathcal{R}^N$ 为 R^N 上由 $N = 1, 2, ..., \infty$ 作为 σ-代数所构成的博雷尔集集合。具体而言，我们将$\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ 定义为 $\mathrm{R}^{\mathbb{N}}$ 上由乘积拓扑生成的博雷尔集集合；这里用 N 而非∞ 作为上标，以强调空间 $\mathrm{R}^{\mathbb{N}}$ 的可数维性质。

定理 B.1 （柯尔莫哥洛夫扩张定理）。 假设给定了一个概率测度序列μ_N，定义在（$\mathbb{R}^N$， $\mathcal{R}^N$）上，并且该序列是一致的，这意味着 $\mu_{N+1}^{(N)} = \mu_N$。那么，存在唯一的概率测度μ_∞ 定义在（$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$， $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$）上，使得对于任意 K，

$$\mu_\infty^{(K)} = \mu_K. \tag{B.1}$$

其证明可见于[21, 7] 例如。我们可以利用这一扩展定理，从一个层级解构造出无限时更新方程的一个解。因此，如引理6.4所示，这一构造是两类解之间等价性的一部分。

致谢

ZZ 获得了中国国家重点研发计划的支撑集，项目编号为 2021YFA1001200、2020YFA0712000，以及国家自然科学基金委员会资助，项目编号为 12031013、12171013。BP 获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧盟地平线 2020 研究与创新计划资助协议 No 740623 项下提供的资助。DS 获得了 ANR ChaMaNe 的支撑集，编号：ANR-19-CE40-0024。

ORCID iD

BenoîtPerthame：https://orcid.org/0000-0002-7091-1200。
Delphine Salort：https://orcid.org/0000-0003-4289-0286。
Zhennan Zhou：https://orcid.org/0000-0003-4822-0275。

参考文献

[1] Le Thi Thanh An、Willi Jäger 和 Maria Neuss-Radu。具有多重结构的种群系统：建模与分析。《动力系统与微分方程》，27(3-4):863–877，2015。[2] Luc Bauwens 和 Nikolaus Hautsch。利用点过程对金融高频数据建模。《金融时间序列手册》，第953–979页，2009。[3] José A Cañizo 和 Havva Yolda.s。以经过时间为结构变量的神经元种群模型的渐近行为。《非线性》，32(2):464，2019。[4] Carlo Cercignani、Reinhard Illner 和 Mario Pulvirenti。稀薄气体的数学理论，第106卷，应用数学科学。Springer-Verlag，纽约，1994。

[5] Julien Chevallier、María José Cáceres、Marie Doumic 和 Patricia Reynaud-Bouret。经过时间神经元模型的微观方法。应用科学数学模型与方法，25(14):2669–2719，2015年。[6] Manon Costa、Carl Graham、Laurence Marsalle 和 Viet Chi Tran。具有自激与抑制的霍克斯过程中的更新。应用概率进展，52(3):879–915，2020年。[7] Rick Durrett。概率论：理论与例题，剑桥统计与概率数学丛书第49卷。剑桥大学出版社，剑桥，2019年。[8] Luca Ferretti、Chris Wymant、Michelle Kendall、Lele Zhao、Anel Nurtay、Lucie Abeler-Dörner、Michael Parker、David Bonsall 和 Christophe Fraser。严重急性呼吸综合征冠状病毒2型传播的量化结果表明，可通过数字接触者追踪实现疫情控制。《科学》，368(6491)，2020年。[9] Nicolas Fournier 和 Benoît Perthame。偏微分方程的输运距离：耦合法。*EMS*数学科学综述，7(1):1–31，2020年。[10] Nicolas Fournier 和 Benoît Perthame。适用于某些结构化方程的非扩张输运距离。《*SIAM*数学分析杂志》，53(6):6847–6872，2021年。[11] Pierre Gabriel。守恒更新方程的测度解。*ESAIM*：论文集与综述，62:68–78，2018年。[12] Walter Gautschi。自Tricomi以来的不完全伽马函数。载于*Tricomi*的思想与当代应用数学，林琴科学院会议论文集，第*147*卷，林琴国家科学院。Citeseer，1998年。[13] Carl Graham。具有无界记忆的线性霍克斯过程的再生性质。《应用概率年刊》，31(6):2844–2863，2021年。[14] Khashayar Pakdaman、Benoît Perthame 和 Delphine Salort。结构化神经元群体的动力学。《非线性》，23(1):55–75，2010年。[15] Khashayar Pakdaman、Benoît Perthame 和 Delphine Salort。经过时间神经元网络模型中的弛豫与自持振荡。《*SIAM*应用数学杂志》，73(3):1260–1279，2013年。[16] Volker Pernice、Benjamin Staude、Stefano Cardanobile 和 Stefan Rotter。结构如何决定神经元网络中的相关性。《公共科学图书馆·计算生物学》，2011年。[17] Benoît Perthame、Delphine Salort 和 Nicolas Torres。适用于采用经过时间模型的神经元集合的多时间更新方程。《非线性》，即将出版。[18] Bastian Pietras、Noé Gallice 和 Tilo Schwalger。更新型脉冲神经元群体的低维发放率动力学。《物理评论*E*》，102:022407，2020年8月。[19] Patricia Reynaud-Bouret 和 Sophie Schbath。霍克斯过程的自适应估计及其在基因组分析中的应用。《统计年刊》，38(5):2781–2822，2010年。[20] Filippo Santambrogio。应用数学家的最优传输，非线性微分方程及其应用进展第87卷。Birkhäuser/Springer，Cham，2015年。

[21] 陶哲轩。《测度论导论》，《数学研究生教材》第126卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2011年。[22] L. Vietoris。关于伽马函数不完全形式的 Lochs 不等式的第三个证明。《奥地利科学院 数学与自然科学部 会议报告（第二辑）》，192(1-3):83–91,1983年。[23] 塞德里克·维拉尼。《最优传输专题》，《数学研究生教材》第58卷。美国数学学会，普罗维登斯，2003年。