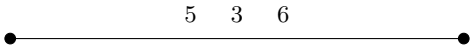
arXiv:2304.01626v1 [math.GR] 4 Apr 2023

关于三元性及其绝对几何

DIMITRI LEEMANS、KLARA STOKES 和 PHILIPPE TRANCHIDA

摘要。我们引入带三元性的几何的移动绝对几何这一概念，并证明在三元性类型为 (I_σ) 且绝对几何为广义六边形的经典情形下，移动绝对几何也能给出具有 Buekenhout 图表的有趣旗传递几何。



对于群 $G_2(k)$ 和 ${}^3D_4(k)$，其中 $k \geq 2$ 为任意整数。我们还对具有三元对合但没有对偶性的几何中的经典绝对几何进行分类，这些几何来自自同构群为 $L_2(q^3)$ 的 III类地图，其中 q 是素数的幂。随后，我们考察这些几何的移动绝对几何，展示其在此情形下的意义。

1. 引言

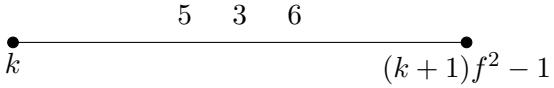
几何中的三重性概念是一个重要概念，其历史可以追溯到 Study 的论文（参见 [12, 页 435], 另见 [14] 和 [15][1]）。他的想法是利用存在于七维射影空间中的二次曲面来描述运动。他使用了由方程 $X_0X_7 + X_1X_6 + X_2X_5 + X_3X_4 = 0$ 在齐次坐标中定义的二次曲面 Q，并证明它具有一个很好的性质，Cartan 后来将其称为三重性 [6], ，并在李群的更广泛背景下定义了这一现象。Freudenthal 进一步在李代数的背景下研究了三重性 [8]。

1959年，Tits 在 [16] 二次曲面的绝对点所对应的三元对合 Q中进行了分类。他观察到，绝对点的集合以及由三元对合固定的关联直线构成一种秩二关联几何，其关联图的围长是直径的两倍。这一发现促使他定义了广义多边形——其内容见 [16]的附录。

但是，如果我们不取由三重性固定的直线，而是取被三重性移动的直线，会怎样呢？这促使我们引入移动绝对几何的概念。粗略地说，与一个三重性相关联的移动绝对几何是一个具有点和直线的秩二几何。点是绝对点（如同 Tits 的经典绝对几何中的绝对点），而直线是运动直线，也就是说，它们不由三重性固定，但我们要求它们至少包含两个绝对点。事实证明，在经典情形下，这种移动绝对几何同样给出了有趣的秩二几何。我们证明，经典情形下的移动绝对几何是对于群 $G_2(k)$ 和 ${}^3D_4(k)$ 的旗传递几何，

日期: 2023年4月5日。2020 数学主题分类。51A10,51E24,20C33.关键词和短语。关联几何，三重性，绝对几何。本研究得以开展，受益于法语社群—瓦隆-布鲁塞尔提供的协同研究行动资助。[1]有关 [15] 的英文译文，请参阅 http://neo-classical-physics.info/uploads/3/4/3/6/34363841/study-analytical_kinematics. pdf。

其中，f 是底层域的基数，k 对于 $G \cong G_2(k)$ 为 f，而 f 对于 $G \cong {}^3D_4(k)$ 为 k 的立方。此外，我们证明它们的 Buekenhout 图表如下。



我们还重新考察了 [11] 中构造的具有三重性的几何。我们证明，它们的绝对几何基本上是长度为二的路径的并，并计算了其中一些几何的移动绝对几何，发现了更有趣的几何。薄几何的绝对几何，或者更一般地说，秩为 2 的余项相当小的几何的绝对几何，通常连接性很差（此类情况的一个例子见定理 3.13）。在这种情况下，若要从三重性中得到更丰富的几何，移动绝对几何便是一个很好的候选对象。

2. 预备知识

2.1. 关联几何与陪集几何。 从本质上说，数学家感兴趣的大多数几何对象都由一些元素及其间的某种关系构成。关联系统或关联几何这一概念，使这一非常一般的概念得以精确定义。

三元组 $\Gamma = (X, *, \tau)$ 称为 I 上的关联系统，如果
(1) X 是一个集合，其元素称为 Γ的元素。(2) $*$ 是 X上的对称且自反关系，称为 Γ的关联关系。(3) τ 是从 X 到 I的映射，称为 Γ的类型映射，并且不同元素 $x, y \in X$满足 $x * y$ $\tau(x) \neq \tau(y)$。$\tau^{-1}(i)$中的元素称为类型为 i的元素。

Γ 的秩是类型集 I的基数。关联系统 Γ 中关于 I 的一个旗是两两关联的元素构成的集合。旗 F 的类型是 $t(F)$，也就是 F. 的元素类型集合。室是类型为 I的旗。如果关联系统 Γ 的所有极大旗都是室，则称其为关联几何。

设 F是 Γ的一个旗。若对所有 $y \in F$，$x \in X$ 都与 F关联，则称 $x \in X$ 与 F关联。Γ关于 F的余留，记作 Γ_F，是由 Γ中与 F关联但不属于 F的所有元素构成的关联系统。余留的秩等于 rank(Γ) - $|F|$。

Γ 的关联图是一个图，其顶点集为 X，并且当且仅当 $x * y$时，两个元素 x 和 y 通过一条边相连。每当我们谈论几何 Γ中两个元素 x 和 y 之间的距离时，我们指的是 Γ 的关联图中的距离，并将其简单记为 $d_\Gamma(x, y)$；如果上下文允许，也记为 $d(x, y)$。

令 $\Gamma = \Gamma(X, *, \tau)$ 为类型集 I 上的关联几何。Γ 的一个对偶变换是 X 的一个双射 ϕ，它保持关联关系 $*$，并且对于每个 $x, y \in X$，若 $\tau(x) = \tau(y)$，则 $\tau(\phi(x)) = \tau(\phi(y))$。此外，若 ϕ 固定每个元素的类型（即对所有 $x \in X$，$\tau(\phi(x)) = \tau(x)$），则称 ϕ 为 Γ 的自同构。对偶变换 ϕ 的类型是它在类型集 I 上诱导的置换。类型为 (i, j) 的对偶变换称为对偶，若其阶为 2。类型为 (i, j, k) 的对偶变换称为三重性，若其阶为 3。Γ 的全相关群记为 Cor(Γ)，Γ 的自同构群记为 Aut(Γ)。注意，Aut(Γ) 是 Cor(Γ) 的正规子群，因为它是 Cor(Γ) 在 I 上作用的核。

关联几何可以由一个群 G 以及一组 $(G_i)_{i \in I}$ 子群构造而成，其中这些子群属于 G。

陪集几何 $\Gamma(G, (G_i)_{i \in I})$ 是基于类型集 I的关联几何，其中 :
(1) 类型为 $i \in I$ 的元素是形如 $G_i \cdot g$、$g \in G$ 的右陪集。

(2) 关联关系由非空交集给出。更准确地说，当且仅当 $i \neq j$ 和 $G_i \cdot g \cap G_j \cdot k \neq \emptyset$ 时，元素 $G_i \cdot g$ 与元素 $G_j \cdot k$ 关联。

关联几何的许多性质，例如连通性、余连通性、余项、旗传递性等，都可以转化为 $(G, (G_i)_{i\in I})$ 的群论性质（更详细的论述见 [5]）。

Francis Buekenhout 在 [4]引入了一个与 Γ相关的新图式。他的想法是为每个秩二余项关联一组三个整数，以提供其关联图的信息。设Γ 为一个秩二几何。我们可以认为 Γ 的类型集为 $I = \{P, L\}$，分别代表点和直线。点直径记为 $d_P(\Gamma) = d_P$，是满足存在一个点 $p \in P$ 和一个元素 $x \in \Gamma$，使得 $d(p, x) = k$的最大整数 k。类似地，直线直径记为 $d_L(\Gamma) = d_L$，是满足存在一条直线 $l \in L$ 和一个元素 $x \in \Gamma$，使得 $d(l, x) = k$的最大整数 k。最后，Γ的围长 记为 $g(\Gamma) = g$，等于 Γ的关联图中最短回路长度的一半。

如果秩二几何 Γ 对某个自然数 n 满足 $d_P = d_L = g = n$，我们称其为广义 n-边形。广义二边形也称为广义二边形。从某种意义上说，它们是平凡几何，因为所有点都与所有直线关联。它们的关联图是完全二分图。广义三边形是射影平面。

设 Γ 是一个基于 I 的几何。Γ 的 Buekenhout 图表（简称图表） D 是一个顶点集为 I 的图。每条边 $\{i, j\}$ 都标记有一组 D_{ij} 秩二几何。若对于 $i \neq j \in I$ 中的每一对，Γ 中类型为 $\{i, j\}$ 的每个秩二余项都是 D_{ij} 中列出的几何之一，我们就称 Γ 属于 D。在大多数情况下，我们采用一些约定，将图表 D 转换为标记图。最常见的约定是：如果类型为 $\{i, j\}$ 的所有余项都是广义二边形，则不在两个顶点 i 和 j 之间画边；如果类型为 $\{i, j\}$ 的所有余项都是广义 n-边形，则在边 $\{i, j\}$ 上标记自然数 n。当 $n = 3$ 时，通常也会省略标记。如果边 $\{i, j\}$ 标记为三元组（d_{ij}, g_{ij}, d_{ji}），则表示类型为 $\{i, j\}$ 的每个余项都具有 $d_P = d_{ij}$、$g = g_{ij}$、$d_L = d_{ji}$。我们还可以在图表的顶点上添加信息。可以在顶点 i 上标记 Γ 中类型为 i 的元素个数 n_i。此外，如果对于余类型为 i 的所有旗 F，都有 $|\Gamma_F| = s_i + 1$，我们还会在顶点 i 上标记整数 s_i。

设 Γ 是一个关联几何，ϕ 是 Γ 的一个对偶变换。该对偶变换在 Γ 上的作用ϕ 将导出一个新的几何，称为相对于 ϕ 的 Γ 的绝对几何。

Γ 相对于 ϕ 的绝对几何是定义在 J 上的关联几何 $\Gamma_\phi = (X_\phi, *_\phi, \tau_\phi)$，其中

(1) 集合 J 是 I 上所有满足存在类型为 K 的不变旗的 ϕ-轨道 K 的集族；(2) 集合 X_ϕ 是 Γ 的所有非空 ϕ-不变旗组成的集合；(3) 关系 $*_\phi$ 由 $F *_\phi G$ 确定，当且仅当 $F \cup G$ 是 Γ 的一个旗；(4) 函数 τ_ϕ: $X_\phi \to J$ 将最小的 ϕ-不变旗 F 映射到 $\tau(F)$ 中的 ϕ-轨道集合。

这一绝对几何概念促使 Tits 于 [16] 定义了广义多边形。

2.2. **地图**。一个地图 $\mathcal{M}$ 是图到闭曲面上的二维胞腔嵌入。换言之，地图由顶点集 $V = V(\mathcal{M})$、边集 $E = E(\mathcal{M})$ 以及面集 $F = F(\mathcal{M})$ 组成；这些面是沿着 $V \cup E$ 切割曲面后得到的单连通分支。地图的一个旗 F是一个三元组 $\{v, e, f\}$，其中 $v \in V$，$e \in E$，$f \in F$，且每个元素都与另外两个元素关联。

地图 $\mathcal{M}$ 的自同构是对其元素的一种置换，它保持三个集合V、E 和 F，并将关联对映射为关联对，将非关联对映射为非关联

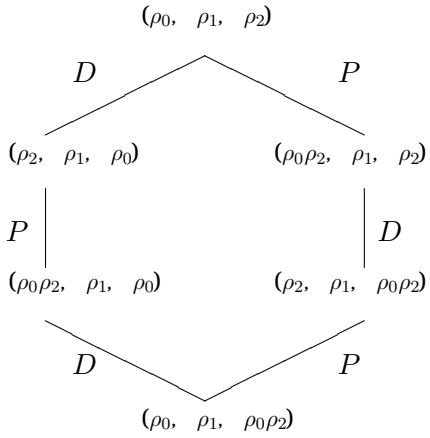


图 1. Wilson 运算在地图的单值群上的作用。

对。地图 $\mathcal{M}$ 的所有自同构构成的群记作 Aut($\mathcal{M}$)。如果 Aut($\mathcal{M}$)在 $\mathcal{M}$的旗集上只有一个轨道，则称该地图为可反射的。

总可以在地图 $\mathcal{M}$ 的旗集上定义三种运算。设 $F = \{v, e, f\}$ 是一面旗。那么， $\mathcal{M}$ 中恰有一面旗 F_0 ，在元素 e 和 f 上与 F 重合，但顶点不同。同理，分别存在唯一的旗 F_1 和 F_2，除 e 和 f 外，分别与 F 重合。这三种运算记作 ρ_0，ρ_1 和 ρ_2，它们将每面旗映射到其唯一的 i-邻接旗， $i = 0$，1，2。容易看出， ρ_0 和 ρ_2 总是可交换的。换言之，考克斯特群 $C = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \mid \rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = (\rho_0\rho_2)^2 = e\rangle \cong V_4 * C_2$ 总是在地图 $\mathcal{M}$ 的旗集上作用。若地图 $\mathcal{M}$ 是可反射的，其自同构群 Aut($\mathcal{M}$) 就是 C 对 $\mathcal{M}$ 的一面旗的稳定子取商所得的群。反过来，给定 C 的一个有限商群，就可以根据 C 在其旗上的作用重构地图 $\mathcal{M}$ 。这建立了作用于集合的 C 的有限商群与闭曲面上的地图 $\mathcal{M}$ 之间的对应关系。此对应关系是函子性的，即它将 C-等变映射对应到地图态射，反之亦然。因此，可反射的地图对应于从 C 到有限群 G 的一个满同态。

给定一个基地图 $\mathcal{M}$，可以对其应用一些运算，以获得新的地图。其中一个称为对偶算子 D ，它源自经典的对偶概念，例如多胞体中的对偶概念。对偶地图 $D(\mathcal{M})$ 是通过交换顶点和面的角色，从 $\mathcal{M}$ 得到的。从群论的角度来看，算子 D 于是只是交换ρ_0 和 ρ_2。另一个这样的算子是佩特里对偶算子 P。佩特里路径是 $\mathcal{M}$ 中的一条“左-右”路径。这意味着路径在一个顶点处向左转，下一次向右转，如此交替，直到回到起始顶点。算子 P 保持地图 $\mathcal{M}$ 的顶点和边不变，但替换其面。地图 $D(\mathcal{M})$ 的构造方式是删除 $\mathcal{M}$ 的面，然后对每条佩特里路径粘合一个边界与该佩特里路径相对应的圆盘。这相当于固定 ρ_1 和 ρ_2 ，并将 ρ_0 发送到 $\rho_0\rho_2$。于是还可以考虑这两个算子 D 和 P 的复合。Wilson 证明了这两个算子及其复合构成一个群 $\Sigma \cong S_3$ [18]。因此，算子 $D \circ P$ 和 $P \circ D$ 的阶都是 3。我们将这两个三阶算子称为地图 $\mathcal{M}$ 的三元对合，并称地图 $\mathcal{M}$ 具有三元对合，如果 $\mathcal{M}$ 同构于 $D \circ P(\mathcal{M})$ 和 $P \circ D(\mathcal{M})$。

Jones 和 Thornton 证明，群 Σ 是外自同构群 Out(Γ) =Aut(Γ)/Inn(Γ) $\cong S_3$ [10]。图 1 展示了 Σ 中六个算子对 C 的生成元的作用。

因此，对于给定的地图 $\mathcal{M}$，我们可以考虑将 $\mathcal{M}$ 经由 Σ 中的算子作用后得到的 6 个地图组成的集合。其中一些地图可能与 $\mathcal{M}$ 同构，另一些则可能不同构。Wilson 将正则地图分为四类。若地图 $\mathcal{M}$ 的 $\Sigma(\mathcal{M})$ 由 6 个两两不同构的地图组成，则它属于 I 类。若 $\Sigma(\mathcal{M})$ 分成三对同构的地图，则属于 II 类；若分成两组三个同构的地图，则属于 III 类；若 6 个地图两两同构，则属于 IV 类。

Jones 和 Thornton 证明，每个有限地图都有一个有限的、可反射的 IV类覆盖[10]。Richter、Širáň 和 Wang 证明，对于每个偶数价数，都存在一个 IV类地图 [13]。后来，Fraser、Jeans 和 Širáň 将这一结果扩展到了奇数价数 ≥ 5 [7]。根据定义，Archdeacon、Conder 和 Širáň 提出的万花筒地图也属于 IV类 [2]。

Wilson 于 1979 [18]构造了第一个 III类地图的孤立例子。当时他认为 III类地图十分罕见。据 Jones 和 Poulton 报道，Conder 在 2006 年通过计算机搜索发现了更多 III类地图的孤立例子，但 30 多年后，Jones 和 Poulton 才 [9] 构造出一个无限族的 III类可反射地图，其自同构群为 $L_2(2^{3n})$，其中 n 为正整数，由此扩展了 Wilson 的首个例子。在同一篇文章中，Jones 和 Poulton 还构造了作为其他 III类地图覆盖的 III类地图，以及平行积。Abrams 和 Ellis-Monaghan 最近也构造了不可反射的 III类地图 [1]。最后，Leemans 和 Stokes 还直接利用简单群$L_2(q^3)$构造了一个无限族的 III类可反射地图 [11] ，其中 $q = p^n$。这些地图的三元对合源自 Frobenius 自同构的存在。

2.3. 类型为 D_4 的PG(7，$\mathbb{F}$)二次曲面。设**Q** 是射影空间**P** $=$ **PG**(7，$\mathbb{F}$)中的一个双曲型二次集合，其维数为 7，定义在域 $\mathbb{F}$ 上。由于**Q** 的指数为 4，其极大子空间的维数为 3。若要更具体地描述，我们可以为**P** 选取一组齐次坐标 $\{X_0, X_1, \cdots, X_7\}$，并令二次曲面**Q** 的方程为

$$X_0X_4 + X_1X_5 + X_2X_6 + X_3X_7 = 0 \tag{1}$$

我们可以在**Q** 的极大子空间集合 M 上定义如下等价关系：对于两个子空间 m、$n \in M$，若 $m \cap n$ 的维数为奇数，则令 $m \equiv n$。显然，该关系具有自反性和对称性，也可以证明它具有传递性。此外，极大子空间恰有两个等价类，分别记为 M_1 和 M_2。若**Q** 的方程为 (1)，则 M_1 和 M_2 的代表元可取为分别通过令 $X_0 = X_2 = X_4 = X_6 = 0$ 和 $X_1 = X_3 = X_5 = X_7 = 0$ 得到的三维空间。我们称**Q** 上的点为 0-点， M_1 中的元素为 1-点， M_2 中的元素为 2-点。

于是，我们可以在 $\{0, 1, 2, 3\}$ 上定义一个秩为四的几何 Γ。**Q** 的直线是类型 3 的元素。i-点（其中 $i = 0$，1，2）是类型 i 的元素。在适用的情况下，关联由对称化包含关系给出；对于一个 1-点 m_1 和一个 2-点 m_2，我们规定$m_1 * m_2$ 当且仅当它们相交于一个平面。由此得到的几何 Γ 可以证明具有 Buekenhout 图表 D_4，见图 2.3。

该几何 Γ 允许置换 i-点的三重性。设 α 为这样一个三重性。于是，我们可以考虑相对于 α的 Γ 的绝对几何 Γ_α。我们将 Γ_α 的点和直线称为绝对点 和绝对直线。在 [16],中，Tits 证明，只要存在一个绝对直线环，绝对几何 Γ_α 就是一个广义六边形。

设 σ 是域 $\mathbb{F}$ 的一个自同构，满足 $\sigma^3 = \mathrm{Id}$。Tits 将域 $\mathbb{F}$ 上射影平面 π 的三元对合 τ 的射影类型分为四类，分别记为 (I_σ)、(II)、(III) 和 $(III)^{\pm}$ （见 [16], 第 2 节）。令人惊讶的是， τ 的三元对合与 π 的三元对合之间存在紧密联系；我们在此简要勾勒这一联系（详情见 [16], 第 4 节）。

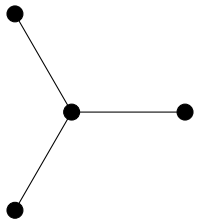


图 2. D_4 图示。

我们约定用大写字母表示点，用小写字母表示直线。此外，若 P 和 Q 是两个点，则经过它们的直线记作 (PQ)。设 P 是 $\mathbf{Q}$ 中的一个点，并令 P^α 和 P^{α^2} 为与之关联且相交的三维空间。我们将交集 $P^\alpha \cap P^{\alpha^2}$ 定义为 $P\omega$。若 P 不是绝对点，则 $P\omega$ 是一个点。反之，若 P 是绝对点，则 $P\omega$ 是一个平面；我们有时将平面 $P\omega$ 称为与 P 关联的平面。任何作为某个绝对点 P 的关联平面的平面，都称为特殊平面。类似地，包含在特殊平面中的 $\mathbf{Q}$ 的任何点都称为特殊点。注意，平面 $P\omega$ 由经过 P 的任意两条绝对直线张成。这是因为 $P^\alpha \cup P^{\alpha^2}$ 中的所有绝对点都包含在 $P\omega$ 中。

设 Q 是$\mathbf{Q}$ 中的一个非特殊点。由于 Q^α 与 $Q\omega$ 关联，因此Q^{α^2} 与 $(Q\omega)^\alpha$ 也关联。我们将平面 $Q^{\alpha^2} \cap (Q\omega)^\alpha$ 定义为 $Q\pi_1$，并将平面 $Q^\alpha \cap (Q\omega)^{\alpha^2}$定义为 $Q\pi_2$。

在这些记号下，三元对合 α 将经过 $Q\omega$且包含于 Q^{α^2} 的$\mathbf{Q}$ 中的直线映射到包含于 $(Q\omega)^\alpha$ 且经过 Q的直线。于是，我们可以如下定义一个从 $Q\pi_1$ 到其自身的共线变换 α_Q：

$$\alpha_Q(P) = Q\pi_1 \cap (P \cdot Q\omega)^\alpha$$

对任意 $P \in Q\pi_1$，其中 $(P \cdot Q\omega)$表示经过 P和 $Q\omega$的直线。

利用上述提到的射影平面三元对合分类，我们可以说，若存在$\mathbf{Q}$中的一个非特殊点 Q，使得 α_Q 分别属于类型 (I_σ),、(II)或(III)，那么$\mathbf{Q}$ 的三元对合 α 就属于类型 (I_σ),、(II)或(III)。Tits（见第 [16], 节）证明，所有满足 $\sigma \neq$Id 的类型为 (I_σ) 的三元对合 α 都射影等价，而所有其他三元对合α 都射影等价于类型为 (I_{Id}) 或类型为 (II) 的三元对合。本文只考虑 α 属于类型 (I_σ) 的情况。尽管从许多意义上说这是更一般的情况，但探究 α 属于类型 (II) 时会发生什么，也可能很有意思。

我们以介绍 $\mathbf{Q}$ 的一些实用工具和性质来结束本节。

如 [17, 第 2.4 节6], ，设 V为 $\mathbb{F}$ 上的八维向量空间。$\mathbf{Q}$ 的点和两类三维空间发挥相同作用这一事实，可以通过存在一个三线性型 $\mathcal{T}$： $V \times V \times V \to \mathbb{K}$来表达。该型 $\mathcal{T}$的特征是：$\mathbf{Q}$的两个点（X，Y）分别表示 $\mathbf{Q}$ 的一个 0-点和一个 1-点；它们关联，当且仅当 $\mathcal{T}(X, Y, Z)$ 作为 Z 的函数恒等于零。对于字母 X，Y 和 Z 的任意置换，同样的结论也成立。这个三线性型可以明确描述如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(X,Y,Z) = &\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 \\ Z_0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_4 & X_4 & X_4 \\ Y_5 & Y_5 & Y_5 \\ Z_6 & Z_6 & Z_6 \end{vmatrix} \\
&+ X_3(Z_0Y_4 + Z_1Y_5 + Z_2Y_6) + X_7(Y_0Z_4 + Y_1Z_5 + Y_2Z_6) \\
&+ Y_3(X_0Z_4 + X_1Z_5 + X_2Z_6) + Y_7(Z_0X_4 + Z_1X_5 + Z_2X_6) \\
&+ Z_3(Y_0X_4 + Y_1X_5 + Y_2X_6) + Z_7(X_0Y_4 + X_1Y_5 + X_2Y_6) \\
&- X_3Y_3Z_3 - X_7Y_7Z_7
\end{aligned} \tag{2}
$$

当三重性属于 (I_{Id}) 型时，众所周知，绝对点恰好是 $\mathbf{Q}$ 与方程为 $X_3 + X_7 = 0$ 的超平面的交集。因此，我们可以用 X_7 替换X_3，并在方程为 $\mathbf{Q}'$ 的 $\mathbf{P}' = \mathbf{PG}(6,\ \mathbb{F})$ 中研究抛物型二次曲面

$$X_0X_4 + X_1X_5 + X_2X_6 = X_3^2$$

由此可以证明（例如参见 [17, 第 2.4 节13] ）， Γ_α 的绝对直线的格拉斯曼坐标满足以下六个线性方程:

$$
\begin{aligned}
&X_{12} = X_{34}, && X_{54} = X_{32}, && X_{20} = X_{35}, \\
&X_{65} = X_{30}, && X_{01} = X_{36}, && X_{46} = X_{31},
\end{aligned} \tag{3}
$$

反过来，$\mathbf{Q}$ 上的每一条格拉斯曼坐标满足（3）的直线都是Γ_α的绝对直线。这些方程将在后文用于验证某些直线的存在性；我们将在下一节引入一种新的秩为二的几何，称为 Γ的移动绝对几何。

二次曲面$\mathbf{Q}$ 具有一种重要性质，称为全有或全无性质。这意味着，若 l是$\mathbf{Q}$ 的一条直线，且 P 是$\mathbf{Q}$ 上不属于 l的一个点，那么要么只有一条$\mathbf{Q}$上的直线经过 P 并与 l 相交，要么所有经过 P 并与 l 相交的直线都属于$\mathbf{Q}$。这一性质在下一节的证明中常有用处。

在此情境下，有一个自然的群同时作用于绝对几何和移动绝对几何。它是保持三元对合 α 的$\mathbf{P}$ 的共线变换群 G 。若 α 是类型为（I_σ）的三元对合（从现在起我们都假设如此），Tits 证明，若 σ 是恒等变换，则群 G 属于类型 G_2 ；若 σ 不是恒等变换，则它是类型为 D_4 的扭曲李群，记作 ${}^3D_4$ （参见 [16, 第 8] 节）。

3. 移动绝对几何

设 Γ 是一个图示为 D_4 的几何（见图 2.3），并设 α 是 Γ 的三重性。三重性α 必须固定图中的中心顶点，我们将属于该固定类型的元素称为直线。我们还选择其余类型中的一种 Γ ，并将属于该类型的元素称为点。在这种情况下，我们可以为 Γ 定义另一种绝对几何，它具有与经典绝对几何相同的顶点集，但考察的是被三重性移动的直线，而不是固定的直线。我们将这类直线称为运动直线，以区别于被三重性固定的直线，后者称为绝对直线。

Γ 关于 α 的移动绝对几何 是定义在 $J = \{P, L\}$ 上的点-直线几何 $\mathrm{M}\Gamma_\alpha$ ，其中

(1) 这些点称为绝对点，是满足 $p \in \Gamma$ 使得 $p, \alpha(p)$ 和 $\alpha^2(p)$ 构成 Γ 的旗的点；每个点的类型为 P；(2) 这些直线是 Γ 中不被 α 固定且至少包含两个绝对点的直线；每条直线的类型为 L；

(3) 关联由 Γ 中的关联给出，也就是说，点 p 与直线 l 关联，当且仅当 p 和 l 在 Γ 中关联。

请注意，MΓ_α 的定义在同构意义下不依赖于在 Γ中选取的点。事实上，假设我们改为将 Γ 中的点定义为类型为 $\alpha(P)$的元素。若 p 和 p' 在 Γ中的一条直线 l 上，则 $\alpha(p)$和 $\alpha(p')$均与直线 $\alpha(l)$关联。因此，MΓ_α 的直线和关联都不依赖于在 Γ中选取的点。

只要上下文已明确我们所讨论的三重性 α ，就简化记号，将 MΓ 称为 MΓ_α。

现在我们来考察 7 维射影空间中类型为 D_4 的二次曲面的移动绝对几何。

3.1. 类型为 D_4 的二次曲面。 回顾一下，$\mathbf{Q}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 7 维射影空间中的一个二次曲面，且 σ 是 $\mathbb{F}$ 的一个阶为 1 或 3 的自同构，使得 α 是类型为(I_σ)的三重性（见第 2.3 节）。令 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{F}$ 中被 σ固定的子域。我们分别用 f 和 k表示 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{K}$的基数。注意，若 σ 是恒等变换，则 $f = k$ ；若 σ不是恒等变换，则 $f = k^3$ 。

本节的主要目标是证明，在这些设定下，移动绝对几何 MΓ 是具有两种类型的几何，其中有 $d_P = 5$， $g = 3$ 和 $d_l = 6$。首先得到的结果排除了 $\mathbf{Q}$ 中某些直线存在的可能性，证明思路沿用了 [17, 定理 2.4.4] 的证明。由于经典绝对几何 Γ_α 是一个广义六边形，因此 $\mathbf{Q}$中存在一些六边形，其顶点全是绝对点，直线全是绝对直线。我们称这样的六边形为绝对六边形。

引理 3.1。 设$\mathbf{H}$是一个绝对六边形。连接$\mathbf{H}$ 中两个相对顶点的直线绝不会是圆锥曲线$\mathbf{Q}$的一条直线。

证明。 设 P 是$\mathbf{H}$ 的一个顶点， l 和 m 是$\mathbf{H}$ 中相交于 P的两条绝对直线。那么平面 $P\omega$ 由 l 和 m张成。由于 P 的选取是任意的，我们得出结论：在$\mathbf{H}$ 中，任意两个距离为二的顶点之间的直线总是$\mathbf{Q}$的一条直线，因此也是 MΓ 的一条直线，因为它不可能是绝对直线。图 3 中以蓝色虚线画出了这类直线的示例。现在假设$\mathbf{H}$ 的顶点 P 与其相对顶点 Q之间的直线是圆锥曲线$\mathbf{Q}$的一条直线。利用$\mathbf{Q}$的全有或全无性质，我们得出结论： P 与$\mathbf{H}$ 中另一点之间的所有直线都属于$\mathbf{Q}$。此外，若令 S为$\mathbf{H}$ 中不包含 P的 4 条直线所张成的空间，那么再次利用全有或全无性质，可得出结论： P 与 S 之间的所有直线都属于$\mathbf{Q}$。因此，整个六边形$\mathbf{H}$ 必定包含在$\mathbf{H}$的一个子空间 U 中。那么 U 的维数必为 3 或 2。若 U 的维数为 3，我们可以假设 $U = P^\alpha$。但我们也可以从 Q 出发，沿用同样的推理，得出 $U = Q^\alpha$，这就产生了矛盾。若 U 的维数为 2，则整个六边形$\mathbf{H}$ 都包含在一个平面内；但这样一来，必定有 3 条绝对直线构成一个三角形，这不可能，因为绝对几何是一个广义六边形。□

现在我们研究 MΓ 的一条直线上包含多少个绝对点。

引理3.2。 如果 l 是一条包含至少两个绝对点的动直线，那么它恰好包含$k + 1$ 个绝对点。

证明。 设 P 是一个绝对点， $P\omega$ 是它的关联平面。根据 [16, \$8.2.3], ，经过 P 且位于 $P\omega$ 内的绝对直线数量等于 $k + 1$。 $P\omega$ 中不存在其他绝对点，只有那些包含在这 $k + 1$ 条直线上的点。利用 [16,\$8.2.4 和 \$8.2.6], 可以通过计数论证证明这一点。

现在，设 l 是一条包含至少两个绝对点 P_1 和 P_2 的动直线。那么，存在一个绝对六边形 $\mathbf{H}$ ，使得 P_1 和 P_2 是 $\mathbf{H}$ 的顶点。我们断言 P_1 和 P_2

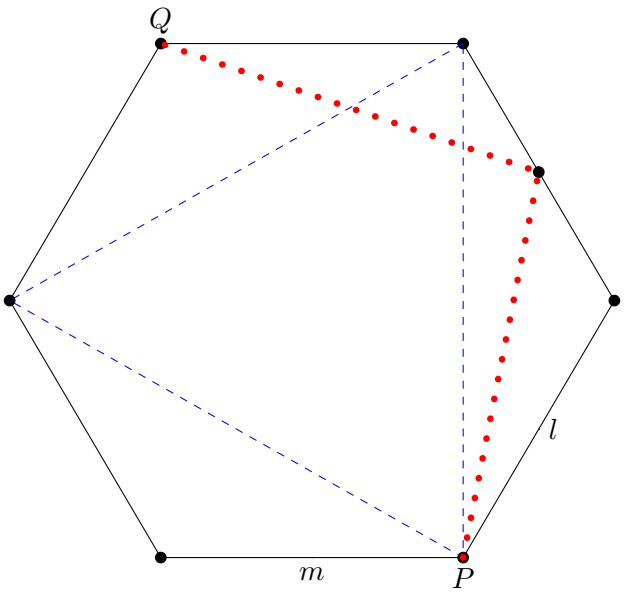


图3. 由绝对六边形的点张成的 MΓ 的一些直线。

在 **H** 中既不相邻也不相对。事实上，它们不可能相邻，否则 l 会是一条绝对直线，而引理 3.1 告诉我们它们不可能相对。

因此， P 是 **H** 的唯一顶点，与 P_1 和 P_2的距离均为一。于是， l 位于平面 $P\omega$内，而 l不包含 P。因此， l的绝对点与经过 P的绝对直线一一对应。□

作为直接推论，我们有在 $M\Gamma$ 中所有直线恰好包含 $k+1$ 个绝对点。事实上，MΓ 是旗传递的。

引理 3.3。 移动绝对几何 $M\Gamma$ 是旗传递的。

证明。取 MΓ 的两个旗 (P_1, l_1) 和 (P_2, l_2)。正如我们在引理3.2中所证明的，动直线总能置于一个绝对六边形 H 中，作为两个距离为 2 的顶点之间的一条直线。根据 [16, 定理 6.2.5.], ，我们知道保持 Q 的 P 的共线变换群 G 在满足 (PQ) 和 (PQ') 为绝对直线的绝对点三元组 (Q, P, Q') 上传递地作用。因此，存在绝对点对 (Q_1, Q_1') 和 (Q_2, Q_2')，使得 $(P_iQ_i) = l_i$(其中 $i = 1, 2$)，并且存在一个共线变换将 (P_1, Q_1', Q_1) 映射到 (P_2, Q_2', Q_2)，从而也将 l_1映射到 l_2。因此，群 G 在 MΓ 的旗上具有传递性。□

现在计算 MΓ 中经过给定绝对点 P 的直线数量。

引理3.4。 设 P 是一个绝对点。经过 P 的运动直线有 $(k+1)\ f^2$ 条 .

证明。设 x 为经过 P 的运动直线数量，并设 y 为在绝对几何 Γ 中与 P 距离为 2 的绝对顶点数量。我们首先断言 $kx = y$。事实上，若 Q 是一个与 P 距离为 2 的绝对点，则存在一个绝对点 R ，使得 (PR) 和 (RQ) 是绝对直线。因此，三个点都位于 $R\omega$ 中，而直线 (PQ) 是 MΓ 的一条直线。但是，(PQ) 上的任何其他点 Q' 都会得到同一条直线，因为 $(PQ') = (PQ)$。根据引理 3.2，MΓ 的任意一条直线上都有 $k+1$ 个点。由此便证明了该断言。

现在只需找出 y 是什么。包含 P的绝对直线有 $k+1$ 条。每条这样的直线都包含 $f+1$ 个绝对点。因此，我们得到 $(k+1)\ f$ 个 Γ中与 P相邻的点。经过每个

这样的相邻点有 k 条新的绝对直线，每条直线都包含 f 个新的绝对点。因此，我们数得 Γ中距 P为2的 k（$k+1$）f^2 个潜在绝对点。由于 Γ 的围长为6，我们不可能重复计算任何点，因此 $y = k$（$k+1$）f^2 且 $x =$（$k+1$）f^2。□

结合旗传递性与前面的结果，我们现在可以计算 MΓ 的直线数。

引理 3.5. [16, §8.2.4] 有$(k^2f^2 + kf + 1)(f + 1)$ 点MΓ。

引理 3.6。 $(k^2f^2 + kf + 1)(f + 1)f^2$ 条直线位于MΓ中。

证明。 根据引理3.5，有 $(k^2f^2 + kf + 1)(f + 1)$ 个绝对点。MΓ 的直线数可以通过将点数乘以每个点上的直线数（即，根据引理3.4，$(k+1)f^2$）， 再除以每条直线上的点数（即，根据引理3.2，$(k+1)$）来计算。□

引理 3.7。 $M\Gamma$ 中的每条直线恰好包含于一个特殊平面中，并且每个特殊平面包含 $M\Gamma$ 中的 f^2 条直线。

证明。令 P 为一个绝对点， $P\omega$ 为其关联平面。我们断言，$P\omega$ 中除包含 P 的那些直线外，所有直线都是 MΓ 的直线。事实上， $P\omega$ 中一条不包含 p 的直线 l 必须与 $P\omega$ 中每一条包含 P 的直线相交。这意味着 l 包含 $k+1$ 个绝对点，而 l 不可能是绝对直线，否则我们将在 Γ 中找到一个由绝对直线组成的三角形。

这为我们提供了一种将每个绝对点 f^2 关联到 MΓ 的直线的方法。显然，我们可以用这种方式对 MΓ 的每条直线进行计数。此外，由于根据引理 3.6，我们知道 MΓ 中直线的数量是点的 f^2 倍，因此可以推断，用这种方式我们不会对任何直线重复计数，从而证明引理。□

此处我们要指出，尽管认为三重性 α 作用于 MΓ 的直线集似乎很自然，但事实并非如此。事实上，若 l 是 MΓ 的一条直线，那么 $\alpha(l)$ 仍是一条直线，但它至多包含一个绝对点。为此，设 $P\omega$ 是包含 l 的唯一特殊平面，并假设 $\alpha(l)$ 也包含两个绝对点。那么 $\alpha(l)$ 也包含在某个唯一的特殊平面 $R\omega$ 中，其中 R 是一个绝对点。因此，直线 $\alpha^2(l)$ 必定是 (PQ)。但 Q 是 l 上的一点，因为 $l = \alpha^2(\alpha(l))$。因此，(PQ) 是 M $P\omega$ 的一条直线，包含 P 和 Q，故必定是一条绝对直线，矛盾。

现在，我们计算 MΓ 中距给定直线 l 不超过 4 的直线数量上界。稍后将利用这一结果证明，MΓ 中存在两条直线 l 和 l'，使得在 MΓ 的关联图中， l 与 l' 之间的距离为 6。

引理 3.8。 令 l 为一条运动直线，并令 $C = (k + 1)f^2$ 表示通过一个点的运动直线数。在关联图 MΓ 中，距离 l 不超过4 的运动直线至多有 $1+(k+1)(C-1)+k(k+1)(C-1)^2$ 条。

证明。用 $A(l, k)$ 表示 MΓ 中与 l 在 MΓ 的关联图中距离恰好为 k 的元素数量。如果 k 为奇数，这些元素将全部为点；如果 k 为偶数，则将全部为直线。因此，我们需要计算数量 $A(l, 0)$ $+ A(l, 2) + A(l, 4)$。显然，我们有 $A(l, 0) = 1$。同样清楚的是， $A(l, 2) = (k + 1)(C - 1)$。事实上， l 上恰好有 $(k + 1)$ 个绝对点，并且每个绝对点上有 C 条直线，其中一条每次都是 l 。之后，由于 MΓ 中存在三角形，要得到精确数量就变得更加困难，但我们可以忽略三角形，仍然得到上界。让我们估计 $A(l, 3)$。我们有 $A(l, 2)$ 条与 l 距离为 2 的直线，而这些直线中的每一条都会产生 k 个与 l 距离为 3 的绝对点。这给出了 $k(k + 1)(C - 1)$ 个潜在的点。因此， $A(l, 3) \leq k(k + 1)(C - 1)$。我们以同样的方式计算 $A(l, 4)$。穿过 $A(l, 3)$ 中的每一个点都有

C动直线。这就给出了 $k(k+1)(C-1)^2$ 条潜在直线，位于 $A(l,\ 4)$ 中，这正是完成证明所需的。□

在证明主要定理，即定理 3.11 之前，我们还需要两个引理。第一个引理用于证明，MΓ 中的某些点构形彼此相距不远；第二个引理则是证明 $d_l = 6$ 属于 MΓ的关键。

引理 3.9。设 l 是一条绝对直线，P_1 和 P_2 是 l 上的顶点。存在一个不在 l 上的绝对顶点 P，使得 (PP_1) 和 (PP_2) 是 **Q** 中的动直线。

证明。直线 l 必须至少还包含另一个点 P_3，而该点是一个绝对点。设**H** 是一个包含 P_1 和 P_3 的六边形。由于 P_1 和 P_3 在**H**中相邻，因此**H**中存在唯一的顶点 $P \neq P_1$ 或 P_3。但这样一来，P_1，P_2，P_3 和 Q 都在平面 $P\omega_3$ 上，而直线 $(PP1)$ 和 (PP_2) 不可能是绝对直线，否则就会存在一个绝对三角形。□

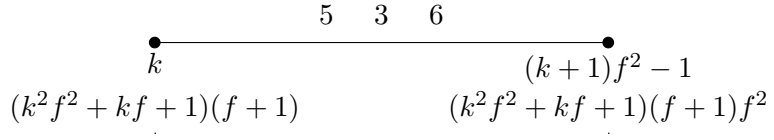
引理 3.10. 存在两条动直线 l 和 l'，它们在MΓ的关联图中的距离至少为6 。

证明。对于 $f = k^3$，由引理 3.8 可得此结论，除了 $f = 8$ 和 $k = 2$的情况；对于这些情况，我们可以使用 Magma [3] 或其他程序来验证该结论。事实上，由引理 3.6 可知，MΓ中共有 $A = (k^2f^2 + kf + 1)(f + 1)f^2$ 条直线。由引理 3.8 还可知，若选取一条直线 l 作为基直线，则与l距离不超过 4 的直线至多有$B = 1 + (k+1)(C-1) + k(k+1)(C-1)^2$,条，其中 $C = (k+1)f^2$。将 A 和 B 视为 f中的多项式。当 $f = k^3$时，A 的首项为 5 阶，而 B 的首项为 4 阶。简单分析即可表明，只要 $k \geq 3$，就有 $A > B$。关于如何在计算机上构造 MΓ，从而验证该结论在较小情形下也成立，请参见引理 3.12 及其后的说明。

另一方面，如果 σ 是恒等变换，我们就需要采用不同的方法，因为在这种情况下，$B > A$，除非 $f = k$ 足够小。我们将明确证明存在一对距离为 6 的直线。在这种情况下，已知绝对点恰好是 **Q** 与方程为 $X_3 + X_7 = 0$的超平面的交集。因此，将 X_7 替换为 $-X_3$后，我们可以转而在维数为 6 的射影空间中工作，并使用格拉斯曼坐标，通过上一节所述的方程组 (3) 刻画绝对直线。令 e_i 为齐次坐标除第 i^{th} 个坐标外均为 0、且第 i^{th} 个坐标可设为 1 的点。利用方程 (2) 中的三线性型 $\mathcal{T}$，我们可以验证，除 $i = 3$ 或 7 以外的所有 e_i都是绝对点。利用方程组 (3)，我们还可以验证，路径$e_0 - e_5 - e_2 - e_4 - e_1 - e_6 - e_0$ 构成一个由绝对直线和绝对点组成的六边形。我们断言，直线 l =(e_5e_6) 和 l' =(e_1e_2) 是 MΓ 中的直线，且它们在 MΓ的关联图中的距离为 6。换言之，我们必须证明，MΓ 中不存在一条直线连接 l 中的某个点与 l'中的某个点。简单计算表明，任何连接 l 与 l' 的直线都满足方程组 (3)。这意味着，任何这样的直线要么是绝对直线，要么不是圆锥曲线 **Q**上的直线。□

现在，我们可以证明本节的主要定理了。

定理 3.11。设**Q** 是有限域 $\mathbb{F}$ 上的 7 维射影空间**P** 中的一个二次曲面，其基数为 f，并设 Γ 是其关联几何，图表为 D_4。设 σ 是 $\mathbb{F}$ 的一个阶为 $o(\sigma) = 1$ 或3 的自同构，并设 α 是 Γ 的一个(I_σ)型三重性。移动绝对几何$M\Gamma_\alpha$ 是一个旗传递几何，其 ***Buekenhout*** 图表如下，其中 $f = k^{o(\sigma)}$。



此外，群 G 在$\mathrm{M}\Gamma_\alpha$ 上旗传递地作用，其中 G 是 $G_2(k)$ 当 $o(\sigma) = 1$ ，而且${}^3D_4(k)$ 当 $o(\sigma) = 3$。

证明。 根据引理 3.3，MΓ 是旗传递的。我们已经证明，点、直线、每条直线上的点数以及每个点上的直线数均如图所示（分别见引理 3.5、3.6、3.2、3.4）。因此，剩下要证明的是 $d_P = 5$, $g = 3$ 和 $d_L = 6$。设 P_1 和 P_2 是**Q**中的两个点。那么，存在一个绝对六边形**H** ，使得 P_1 和 P_2 是**H**的顶点。固定这个六边形。我们已经证明了图 3 中虚线的存在。因此，MΓ中存在三角形。由于所有直线都是射影空间中的直线，任意两条直线至多有一个公共点，因此 $M\Gamma$ 的围长 g 必为 3。

我们断言， P_1 和 P_2 在 MΓ 的关联图中的距离至多为 4。先假设 P_1 和 P_2 在**H**中相邻。由引理 3.9， P_1 和 P_2 之间的距离为 4。如果它们是**H**的相对顶点，则它们在关联图中的距离同样为 4。事实上，设 l是**H** 的一条直线，它到 P_1 和 P_2的距离均为 3。于是，在 l 上存在一个点 P ，且该点不是**H**的顶点，因为即使在 $f = 2$ 的最小情形下，每条直线上也有 3 个点。由于绝对直线上的每个点都是绝对点， P 是一个绝对点。此外， P_1P和 PP_2 是**Q** 的直线，因为六边形中任意连续的 3 个顶点都位于由中间顶点发出的两条直线所张成的平面内。 P_1P 和 PP_2 是运动直线，否则我们将会在绝对图形中找到三角形。两个绝对点之间这样一条长度为 2 的路径由图 3 中的虚线表示。

这表明， $M\Gamma$ 的关联图中两个绝对顶点之间的最大距离为 4。这意味着顶点 P 与动直线 l 之间的最大距离为 3 或 5。

距离不可能为 3。事实上，取点 P 为**H** 的一个顶点，并令 l 为连接 P_1与 P_2 的直线，其中 P_1 是**H** 中 P 的一个邻点，而 P_2 是**H**中与 P 相对的顶点。于是，根据「一个或全部」公理，连接 P与 l中某点的唯一一条直线是 PP_1（因为 $PP2$不可能是**Q**的一条直线）。因此，MΓ 中不存在连接 P 与 l 中某点的直线，所以它们之间的距离严格大于 3。这就证明了 $d_P = 5$。

只需证明 $d_L = 6$。由于 $d_P = 5$, d_L 只能是 5 或 6。引理 3.10 表明，存在两条彼此距离为 6 的直线。因此 $d_L = 6$。□

本节最后，我们将说明如何使用计算机构造与二次曲面**Q** 相关联的移动绝对几何 MΓ 。群 G 是保持三重性 α的共线变换群。根据 σ 是否为恒等变换，群 G 同构于$G_2(q)$或 ${}^3D_4(q)$（更多详情见 [16, 第 6] 节）。

引理 3.12. 设 H 是 G 中绝对点 P的稳定子。那么 H 在包含于 $P\omega$中的$\mathrm{M}\Gamma$ 的 f^2 条直线上传递地作用。

证明。 我们已在引理 3.3 中提到， G 在满足 (Q', Q) 和 (Q'', Q') 为绝对直线的绝对点三元组（Q, Q', Q''）上传递地作用。因此，若固定一个绝对点P 以及包含 P的两条绝对直线 l_1 和 l_2 ，我们便可立即推出， H 仍在上述满足条件的三元组中传递地作用，其中 $Q' = P$、 $Q \in l_1$ 和 $Q'' \in l_2$。只需注意，MΓ 的任意一条 f^2 直线都可写成 (QQ'')，其中 $Q \in l_1$ 和 $Q'' \in l_2$。□

G 中绝对点 P 的稳定子，无论考虑经典绝对几何还是我们的移动绝对几何，都是相同的。因此，对于 G的任何已知表示，通常都很容易找到这样的稳定子。由引理 3.12 可知，$P\omega$中 MΓ 的一条直线的稳定子 K'是 H的一个指数为 f^2的子群。因此，我们可以通过查阅 H 的极大子群列表来找到 K'。设 l 是 MΓ 中与 P 关联的一条直线，使得 $\{P, l\}$ 构成一个旗。由于 G 在 MΓ上传递地作用， l 的稳定子必为 K'的一个共轭元。我们可以

然后寻找一个合适的 K'的共轭元，即 K' 的一个共轭元 K，使得 $H \cap K$ 具有正确的基数（即 $\frac{|H|}{|H\cap K|} = (k+1)f^2$）。随后，移动绝对几何 MΓ 便可构造为陪集几何 Γ(G, $\{H, K\}$)。

3.2. **III类地图**。在他们最近发表的文章中 [11], , Leemans 和 Stokes 展示了如何利用简单群 $L_2(q^3)$ 构造具有三元对合但没有对偶性（即 III 类地图）的可反射地图，其中 $q = p^n$ 取素数 p。

他们还展示了如何从这些地图之一构造关联几何 Δ，其元素为该地图的顶点、边、面和佩特里路径。如果一个面与一条佩特里路径共享一条边，则认为它们关联；其余关联关系则由对称化包含关系给出。随后他们指出，由于 Δ 是由 III 类地图构造而成，因此它在关联几何的意义下也具有三元对合但没有对偶性。我们回顾这类几何的精确构造。

设 $G = L_2(q^3)$，并设 ρ_0, ρ_1, ρ_2 是生成 G 的三个对合，且 $\alpha \in \mathrm{Out}(G)$ 是一个阶为 3 的外自同构，使得

(1) α 循环置换 ρ_0，ρ_2 和 $\rho_0\rho_2$，(2) α 固定 ρ_1，(3) ρ_0 与 ρ_2 可交换，

(4) $\langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \rangle = G$，且 (5) Aut($L_2(q^3)$) 中不存在交换 ρ_0 和 ρ_2 并固定 ρ_1 的元素。

对于满足上述条件的任意选择 q、ρ_0，ρ_1，ρ_2 和 α，Leemans 和 Stokes 构造了一个陪集几何 $\Delta = \Gamma(G; \{G_0, G_1, G_2, G_3\})$，其中

- $G_0 = \langle \rho_0, \rho_1 \rangle$
- $G_1 = \langle \rho_0, \rho_2 \rangle$
- $G_2 = \langle \rho_1, \rho_2 \rangle$
- $G_3 = \langle \rho_1, \rho_0\rho_2 \rangle$

我们首先分析 Δ 的经典绝对几何。

定理 3.13。设 $\Delta = \Gamma(G;\ \{G_0, G_1, G_2, G_3\})$ 如上所述，并设 Δ_α 是相对于三重性 α 的其绝对几何。那么 Δ_α 是一个图，由互不相交的 $\frac{|L_2(q|)}{2}$条长度为2的路径组成。——

证明。我们首先证明，Δ_α 是长度为 2 的路径之并，接着计算 Δ_α的边数。

假设至少有一条边 e 被 α 固定，并将它的端点标记为 v_1 和 v_2。首先注意，v_1 和 v_2 是绝对点。事实上，由于 α 固定了 e 并保持关联，我们得到 $v_i * e$，这意味着对于 $i = 1$，2，有 $\alpha(v_i) * e$ 以及 $\alpha^2(v_i) * e$。将 $\alpha(v_i)$标记为 F_i，并将 $\alpha^2(v_i)$标记为P_i。

图 4 展示了固定边 e周围的局部图示。该图示应理解为绘制在原始 III 类地图所在的底曲面上。

从 v_1 或 v_2 引出的所有边中，恰有一条边也与三元组 v_i，F_i，P_i关联。我们将这条边标记为 e'。容易看出，e' 也必定被 α固定。因此我们证明了固定边成对出现。将 e' 的另一个端点标记为 v_3。还需证明，从 v_1、v_2 和 v_3 引出的所有边中，没有其他边会被 α固定。

令 F_3 为包含 e' 但不包含 F_1的面。于是我们注意到，顶点 v_i 周围所有边构成的集合必定被 α 映射到 F_3的边集。这是因为，如果边 x 与顶点 v_i关联，那么 $\alpha(x)$ 必须与 $\alpha(v_i) = F_i$关联。对于 v_1，这已经足以证明结论，因为 F_1 中与 v_1 关联的边只有 e 和 e'。对于 v_2，还有一条边 $x \neq e$ 同时与 v_2 和 F_2关联。但是 x 与 P_1 关联，因此 $\alpha(x)$ 必须关联

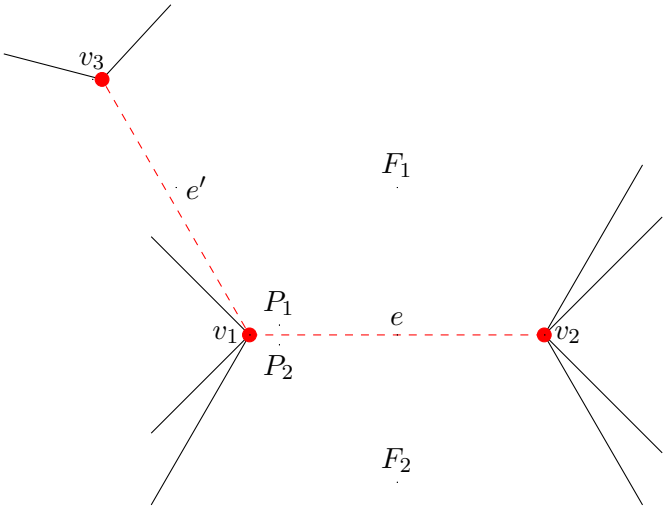


图 4. 固定边周围的局部图示。虚线边及其端点对应于绝对几何的元素。

到 $\alpha(P_1) = v_1$，所以不能被固定。v_3 的情形与 v_2相同。只有一条边 $y \neq e'$ 同时与 v_3 和 F_3 关联。但是 y 又与 P_1 关联，因此 $\alpha(y)$ 必须与 v_1 关联，所以不能被固定。这就证明了 Δ_α 是长度为 2 的路径的并。

现在我们将证明，Δ_α 的边数等于 $|L_2(q)|$。为此，我们将证明，Δ_α 的边与 α 在 $L_2(q^3)$上的作用的不动点之间存在一一对应。自同构 α 是一个域自同构，因此它逐点固定一个子域子群，该子群与 $L_2(q)$同构，且是 $L_2(q^3)$的子群。在此我们用到 Γ 是一个陪集几何这一事实。由于 ρ_0 与 ρ_2 可交换，极大抛物子群 $G_1 = \{Id_G, \rho_0, \rho_2, \rho_0\rho_2\} = \{Id_G, \rho_0, \alpha(\rho_0)\ \alpha^2(\rho_0)\}$。因此，$\Gamma$ 的边具有如下形式：$G_1 \cdot x = \{x, \rho_0 x, \alpha(\rho_0)x、\ \alpha^2(\rho_0)x\}$，其中 $x \in G$为某个元素。假设这样的 $G_1 \cdot x$ 被 α固定。那么 $G_1 \cdot x$ 必定是若干个 α-轨道的并。由于 α 在 G 上的轨道长度为 1 或 3，$G_1 \cdot x$ 只能由 4 个不动点组成，或由 1 个不动点和一个大小为 3 的轨道组成。容易看出，前一种情况不可能成立，因为这将意味着 G_1 也由 4 个不动点组成，因此 α 应为恒等变换。因此，每个不动的 $G_1 \cdot x$ 恰好包含 α的 1 个不动点。当然，如果 x 被 α固定，那么 $G_1 \cdot x$ 也被固定，因为 $x \in G_1 \cdot x \cap \alpha(G_1 \cdot x)$。□

这完全刻画了在 [11] 中使用 $L_2(q)$ 构造的 III类地图所得到的关联几何的绝对几何。请注意，在这种情况下，绝对几何与生成元 ρ_0，ρ_1 和 ρ_2 以及三重性 α的选择无关。

这里问题的核心在于，Δ 的余项太小，无法使绝对几何具有研究意义。移动绝对几何受余项大小的制约没那么强，下面我们将通过一些例子来说明这一点。

我们编写了一个 Magma 程序，用于根据 $L_2(q^3)$ 计算移动绝对几何 $M\Delta_\alpha$，并同时给出生成集 $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$。该程序使用的算法遵循以下五个步骤：

1. 计算陪集几何 $\Gamma(G, \{G_0, G_1, G_2, G_3\})$。 2. 求一个三重性 $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$：群 $G = L_2(q^3)$ 是一个作用于$q^3 + 1$ 个点上的置换群。因此，群 G 是 $\mathrm{Sym}(q^3 + 1)$ 的一个子群。在 $\mathrm{Sym}(q^3 + 1)$ 中构造 G 的中心化子群 $C = C_{\mathrm{Sym}(q^3+1)}(G)$。$C$ 的元素可以视为 ..... 的自同构。

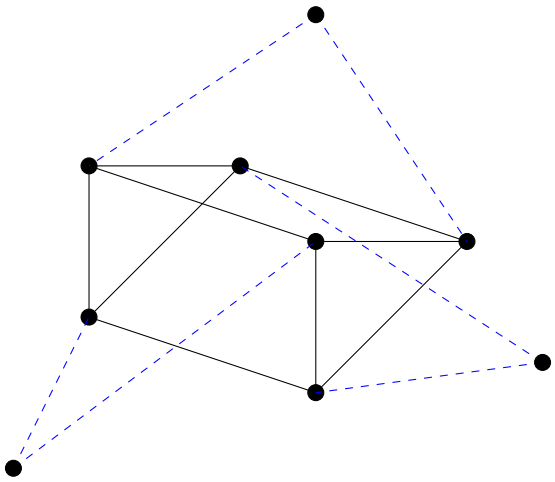


图 5. $G = L_2(8)$ 的两种绝对几何。经典绝对几何由顶点和虚线边组成；移动绝对几何由顶点和实线边组成。

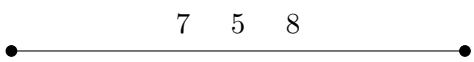
G 通过共轭作用。由于 Aut(G) 是 G 的一个 3 阶扩张，只要$C \neq G$ 我们知道 $C = \mathrm{Aut}(G)$。在 $C \setminus G$ 中寻找一个 3 阶元素，使其中心化ρ_1 并置换 ρ_0、ρ_2 和 $\rho_0\rho_2$。那就是三重性 α。

3. 计算绝对点：对于每个陪集 $G_0 \cdot x$，检查 $G_0 \cdot x \cap (G_0 \cdot x)^\alpha$ 是否为空。保留交集非空的那些陪集。注意，这样做已足够，因为 α 是三重性，因此 $v * \alpha(v)$ 蕴含 $\alpha^{-1}(v) = \alpha^2(v) * v$。

4. 计算边：给定一个陪集 $G_1 \cdot x$，检查 $\alpha x \alpha^{-1} x^{-1}$ 是否属于 G_1。保留那些 $\alpha x \alpha^{-1} x^{-1}$ 不属于 G_1 的陪集。事实上，$(G_1 \cdot x)^\alpha = \alpha G_1 \cdot x\alpha^{-1} = \alpha G_1 \cdot (\alpha^{-1}\alpha)x\alpha^{-1} = G_1 \cdot \alpha x \alpha^{-1}$。5. 将每条移动边与其端点匹配，并创建一个图。

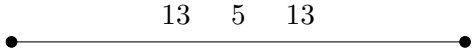
我们通过提及几个由上述算法计算出的移动绝对几何示例来结束本文。请注意，移动绝对几何不仅取决于底层域 $\mathbb{F}$ 的基数 q，还取决于生成集 $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ 和三重性 α 的选择。我们还约定，如果 $M\Delta_\alpha$ 包含孤立顶点，则将其移除。

(1) 对于 $G = L_2(2^3)$，生成集 $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ 在共轭意义下只有一种选择。我们知道，Δ_α 总是由 3 条长度为 2 的路径不交并组成。在这种情况下，$M\Delta_\alpha$ 是一个以三角形为底的棱柱。在图 5 中，我们展示了 $M\Delta_\alpha$，虚线表示 Δ_α 如何在 Δ 内附着到 $M\Delta_\alpha$ 上。(2) 对于 $G = L_2(4^3)$，存在一个移动绝对几何 $M\Delta_\alpha$，它由 15 条边和 12 个五边形作不交并组成。它有 90 个顶点（度为 3 时）和 75 条边，围长为 5，直径为 7，且其自同构群同构于 $2 \times A_5$。(3) 对于 $G = L_2(5^3)$，出现以下移动绝对几何 $M\Delta_\alpha$： 1. 一个有 60 个顶点的图，围长为 3，直径为 8，且其自同构群同构于 $2 \times A_5$。该图是顶点传递的。2. 一个有 30 个度为 4 的顶点、60 条边的图，该图是弧传递的，并具有 Bueken- hout 图示：



其自同构群为 $2 \times \mathrm{Sym}(5)$。(4) 对于 $G = L_2(7^3)$，出现以下移动绝对几何 $M\Delta_\alpha$：1. 一个有 84 个顶点、度为 4 的图，它存在完美匹配。2. 一个有 168 个顶点、度为 4 的图。它是连通的，围长为 3，直径为 9，且其自同构群同构于 $L_2(7)$。

(5) 对于 $G = L_2(9^3)$，存在一个移动绝对几何 $M\Delta_\alpha$，它是一个有 180 个顶点、每个顶点度数为 4、共 360 条边的图。它的 Buekenhout 图表为：



参考文献

[1] L. Abrams 和 J. A. Ellis-Monaghan。从旧有成果中创造新对偶性：生成带状图的几何对偶性、Petrie 对偶性、Wilson 对偶性及三元对合。组合、概率与计算，31(4):574–597，2022。[2] D. Archdeacon、M. Conder 和 J. Širáň。三元对称性与万花筒式正则地图。美国数学会汇刊，366(8):4491–4512，2014。[3] W. Bosma、J. Cannon 和 C. Playoust。Magma 代数系统。I. 用户语言。符号计算杂志，24(3-4):235–265，1997。[4] F. Buekenhout。几何与群的图表。组合论杂志 *A* 辑，27(2):121–151，1979。[5] F. Buekenhout 和 A. M. Cohen。图表几何：与经典群和建筑相关，第 57 卷。Springer Science & Business Media，2013。[6] E. Cartan。对偶原理与单群及半单群理论。数学科学通报，49:361–374，1925。[7] J. Fraser、O. Jeans 和 J. Širáň。任意价数的正则自对偶及自 Petrie 对偶地图。*arXiv* 预印本 *arXiv:1807.11692*，2018。[8] H. Freudenthal。八元数、例外群与八元数几何。乌得勒支国立大学数学研究所，乌得勒支，1952。[9] G. A. Jones 和 A. Poulton。具有三元对合但不具有对偶性的地图。欧洲组合学杂志，31(7):1805–1818，2010。[10] G. A. Jones 和 J. S. Thornton。地图上的运算与外自同构。组合论杂志 *B* 辑，35(2):93–103，1983。[11] D. Leemans 和 K. Stokes。由具有 Wilson 三元对合的地图产生的具有三元对合的关联几何。创新关联几何，即将出版。[12] I. R. Porteous。拓扑几何。剑桥大学出版社，第 2 版，1981。[13] R. B. Richter、J. Širáň 和 Y. Wang。正则地图的自对偶与自 Petrie 对偶。图论杂志，69(2):152–159，2012。[14] E. Study。运动几何学。Teubner，莱比锡，1903。[15] E. Study。解析运动学的基础与目标。柏林数学学会会议录，12:36–60，1913。[16] J. Tits。关于三元对合及由此导出的一些群。*IHÉS* 数学出版物，2 60，1959 13: – 。[17] H. Van Maldeghem。广义多边形。Springer Science & Business Media，2012。[18] S. Wilson。正则地图上的算子。太平洋数学杂志，81(2):559–568，1979。

布鲁塞尔自由大学，数学系，C.P.216 - 代数与组合学，胜利大道，1050 布鲁塞尔，比利时，ORCID 编号 0000-0002-4439-502X。电子邮箱地址：Leemans.Dimitri@ulb.be

于默奥大学数学与数理统计系，901 87 于默奥，瑞典，ORCID 编号 0000-0002-5040-2089。电子邮箱地址：klara.stokes@umu.se

布鲁塞尔自由大学，数学系，C.P.216 - 代数与组合学，胜利大道，1050 布鲁塞尔，比利时，ORCID 编号 0000-0003-0744-4934。电子邮箱地址：tranchida.philippe@gmail.com