arXiv:2304.01630v1 [math.CV] 4 Apr 2023

Hardy 空间和 Bergman 空间的最小 L^2 积分

QI'AN GUAN 和袁征

Abstract. 本文研究 Hardy 空间和 Bergman 空间的最小 L^2 积分，并给出它们之间的一些关系，这些关系可视为共轭 Hardy 核的 Saitoh 猜想有限点版本的解。作为应用，我们给出 Hardy 空间的最优 L^2 延拓定理，并刻画最优 L^2 延拓定理中等式成立的条件。

1. Introduction

设 D 为一个平面正则区域，其边界由有限条解析 Jordan 曲线构成（见 [18, 22]）。

定义 1.1（见 [18, 12]）。若全纯函数 f 在 D 上满足 Hardy 空间 $H^2(D)$ 的条件，即 $|f(z)|^2$ 存在调和主函数 $U(z)$，也就是说， $|f(z)|^2 \leq U(z)$ 在 D. 上成立，则称其属于 Hardy 空间 $H^2(D)$。

每个函数 $f(z) \in H^2(D)$ 在属于 $L^2(\partial D)$ 的 ∂D 上几乎处处具有 Fatou 非切向边界值（见 [1]），为简便起见，我们也用 f 表示非切向边界值。共轭 Hardy H^2 核 $\hat{} K_t(z,\overline{w})$ 定义如下：

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} f(z) \overline{\hat{K}_t(z, \overline{w})} \left(\frac{\partial G_D(z,t)}{\partial v_z} \right)^{-1} |dz|$$

对任意 $f \in H^2(D)$，该式均成立，其中 $G_D(z,t)$ 是 D 上的格林函数， $\partial/\partial v_z$ 表示沿外法向单位向量 v_z 的方向导数。固定 $t \in D$, $^{\partial G_D}{}_{(z,\ t)}\ {}_{\partial v_z}$ 后，由于边界的解析性，它在~~∂D~~ 上为正且连续（见 $\hat{} \hat{}$[18], [5]）。当 $t = w = z$ 时，为简便起见， $K(z)$ 表示 $K_t(z,\overline{w})$。

在 [5], ，Guan 证明了以下定理，该定理由 Saitoh 提出猜想（见 [18]）：

定理 1.2（[5]）。如果 D 不是单连通的，那么 $\hat{} K(z) > \pi B(z)$，其中 $B(z)$ 是 D上的 Bergman 核。

通过讨论加权核函数，我们 [12] 给出了 Saitoh 猜想的加权版本，以及 Saitoh 猜想关于高阶导数的加权版本。

在 [13], 中，我们研究了平面区域乘积上的两类加权 Hardy 空间。下面回顾它们的定义。

Date: 2023年4月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 30H10 30H20 31C12 30E20。*Key words and phrases.* Hardy 空间、Bergman 空间、最小 L^2 积分、乘积流形、凹性。

设 D_j 是由有限条解析 Jordan 曲线围成的平面区域，对任意 $1\leq j\leq n$均成立。设 $M=\prod_{1\leq j\leq n}D_j$ 是 $\mathbb{C}^n$中的一个有界域。令 $M_j=\prod_{1\leq l\leq n,\ l\neq j}D_l$，则 $M=D_j\times M_j$ 且 $\partial M=\cup_{1\leq j\leq n}\partial D_j\times\overline{M_j}$。

设 ρ 是 ∂M 上的勒贝格可测函数，满足 $\inf_{\partial M}\rho>0$。现在，我们回顾 Hardy 空间 $H^2_\rho(M,\partial M)$（见 [13]）。注意，$\partial M=\cup_{j=1}^n\partial D_j\times\overline{M_j}$。设 $d\mu_j$ 是 M_j 上的勒贝格测度，其中任意 $1\leq j\leq n$，而 $d\mu$ 是定义在 ∂M 上的测度，其定义为

$$\int_{\partial M}hd\mu=\sum_{1\leq j\leq n}\frac{1}{2\pi}\int_{M_j}\int_{\partial D_j}h(w_j,\hat{w}_j)|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)$$

对于任意 $h\in L^1(\partial M)$，其中 $\hat{}w_j:=(w_1,\ldots,w_{j-1},w_{j+1},\ldots,w_n)\in M_j$。对于任意 $f\in H^2(D_j)$，$\gamma_j(f)$ 表示 f 在 ∂D_j 上几乎处处的非切向边界值。

定义 1.3（[13]）。设 $f\in L^2(\partial M,\rho d\mu)$。如果存在 $f^*\in\mathcal{O}(M)$，使得对于任意 $1\leq j\leq n$，$f\in H^2_\rho(M,\partial M)$，则称其为 $f\in H^2_\rho(M,\partial M)$，其中 $\hat{}w_j$ 上的 $f^*(\cdot,\hat{}w_j)\in H^2(D_j)$ 对任意 $\hat{}w_j\in M_j$，且 $f=\gamma_j(f^*)$ 在 $\partial D_j\times M_j$ 上几乎处处成立。

$H^2_\rho(M,\partial M)$ 是一个希尔伯特空间（见 [13]），其范数为 $\ll\cdot\gg_{\partial M,\ \rho}$，定义为

$$\ll f,g\gg_{\partial M,\rho}:=\int_{\partial M}f\overline{g}\rho d\mu.$$

记 $P_{\partial M}(f)=f^*$对任意 $f\in H^2_\rho(M,\partial M)$ 均成立。$P_{\partial M}$ 是从 $H^2(M,\partial D_j\times M_j)$ 到 $\mathcal{O}(M)$ 的线性单射（见 [13]）。当 $n=1$、$P_{\partial M}=\gamma_1^{-1}$ 时，因此 $H^2_\rho(M,\partial M)$ 可以看作乘积空间上 $H^2(D)$ 的加权推广。

记 $S:=\prod_{1\leq j\leq n}\partial D_j$。令 λ 是 S 上的勒贝格可测函数，使得 $\inf_S\lambda>0$。下面回顾另一类 Hardy 空间 $H^2_\lambda(M,S)$。

定义 1.4（[13]）。令 $f\in L^2(S,\lambda d\sigma)$，其中 $d\sigma:=\frac{1}{(2\pi)^n}|dw_1|\ldots|dw_n|$。如果存在 $\{f_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\subset\mathcal{O}(M)\cap C(\overline{M})\cap L^2(S,\lambda d\sigma)$ 使得 $\lim^{m\to+\infty}\|f_m-f\|^2_{S,\ \lambda}=0$，则称 $f\in H^2_\lambda(M,S)$，其中 $\|g\|_{S,\ \lambda}:=\left(\int_S|g|^2\lambda d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$ 对任意 $g\in L^2(S,\lambda d\sigma)$ 均成立。

记

$$\ll f,g\gg_{S,\lambda}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_S f\overline{g}\lambda|dw_1|\ldots|dw_n|$$

对于任意 $f,g\in L^2(S,\lambda d\sigma)$，则 $H^2_\lambda(M,S)$ 是一个配备内积 $\ll\cdot,\cdot\gg_{S,\lambda}$ 的希尔伯特空间（见 [13]）。存在一个线性单射 $P_S\colon H^2_\lambda(M,S)\to\mathcal{O}(M)$，满足 $P_S(f)=f$ 对于任意 $f\in\mathcal{O}(M)\cap C(\overline{M})\cap L^2(S,\lambda d\sigma)$（见 [13]）。当 $n=1,P_S=\gamma_1^{-1}$ 时，因此 $H^2_\lambda(M,S)$ 也可视为乘积空间上 $H^2(D)$ 的加权推广。

在 [13], 中，我们讨论了空间 $H^2_\rho(M,\partial M)$ 和 $H^2_\lambda(M,S)$ 的一些性质及核函数，并探讨了它们与 M 上加权 Bergman 核之间的关系；这些核可视为 Saitoh 猜想乘积形式的解。

注意到，上述 Hardy 空间和 Bergman 空间的核函数可以看作某些与单点相关的极小 L^2 积分的倒数，例如：

$$\hat{K}(z)=\frac{1}{\inf\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f(z)|^2\left(\frac{\partial G_D(z,t)}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|:f\in H^2(D)\,\&\,f(z)=1\right\}},$$

and

$$B(z)=\frac{1}{\inf\left\{\int_D|f|^2:f\in\mathcal{O}(D)\,\&\,f(z)=1\right\}}.$$

本文研究 Hardy 空间和 Bergman 空间中更一般的极小 L^2 积分，并给出它们之间的一些关系。作为应用，我们给出 Hardy 空间的最优 L^2 延拓定理，并刻画最优 L^2 延拓定理中等式成立的条件。

1.1. 平面区域上的极小 L^2 积分。设 D 是一个由有限条解析 Jordan 曲线围成的平面区域，且 $Z_0:=\{z_1,\ldots,z_m\}\subset D$，其中$m$是正整数。

设 ψ 是 $\overline{D}$上的勒贝格可测函数，满足：ψ 在 D上是次调和的，$\psi\equiv0$ 在 ∂D 上成立，并且对任意 $z_j\in Z_0$，Lelong 数 $v(dd^c\psi,z_j)>0$，其中 $d^c=\frac{\partial-\bar{\partial}}{2\pi\sqrt{-1}}$。假设 $\psi\in C^1(U\cap\overline{D})$，且$\frac{\partial\psi}{\partial v_z}$在 ∂D上为正，其中U 是 ∂D 的一个开邻域，$\partial/\partial v_z$ 表示沿外法向单位向量 v_z的导数。

设 k_j 是关于 $1\le j\le m$ 的非负整数。设 φ 是定义在 $\overline{D}$ 上的勒贝格可测函数，满足 $\varphi+2\psi$ 在 D 上为次调和函数，其 Lelong 数

$$v(dd^c(\varphi+2\psi),z_j)\ge2(k_j+1)$$

对任意 $1\le j\le n$，且 φ 在任意 z 处连续。此外，我们假设以下两个陈述之一成立：

(1) $(\psi-p_jG_D(\cdot,z_j))(z_j)>-\infty$，其中 $p_j=v(dd^c(\psi)\ z_j)>0$ 对任意 $1\le j\le m$ 成立；
(2) 对任意 $1\le j\le m$，存在 $a_j\in[0,1)$，使得 $\varphi+2a_j\psi$ 在 z_j 附近为次调和函数。

设 c 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的正勒贝格可测函数，满足 $c(t)e^{-t}$ 在 $[0,+\infty)$ 上递减，$\lim_{t\to0+0}c(t)=c(0)=1$，且 $\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt<+\infty$。记

$$\tilde{\rho}:=e^{-\varphi}c(-2\psi),$$

并假设 $\tilde{\rho}$ 在 $D\backslash Z$的任意紧子集上都有正的下界，其中$Z\subset\{\psi=-\infty\}$ 是 D的一个离散子集。记

$$\rho:=e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}$$

在 ∂D上。

考虑以下两个极小积分。设 $\mathfrak{a}=(a_{j,\ l})\,(1\le j\le m,0\le l\le k_j)$，其中 $a_{j,\ l}\in\mathbb{C}$ 使得 $\sum_{1\le j\le m}\sum_{0\le l\le k_j}|a_{j,\ l}|\ne0$。记为

$$M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho}):=\inf\Bigg\{\int_D|f|^2\tilde{\rho}:f\in\mathcal{O}(D)\\ \text{s.t. }f^{(l)}(z_j)=l!a_{j,l}\text{ for any }0\le l\le k_j\text{ and any }1\le j\le m\Bigg\}.$$

and

$$M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho):=\inf\Bigg\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f|^2\rho|dz|:f\in H^2(D)\\ \text{s.t. }f^{(l)}(z_j)=l!a_{j,l}\text{ for any }0\le l\le k_j\text{ and any }1\le j\le m\Bigg\}.$$

回顾一些记号（另见 [3], 参见 [14, 9, 6]）。设 $p:\Delta\to D$ 是从单位圆盘 Δ 到 D 的万有覆盖。若存在一个特征 χ（它是 D 的基本群的表示），使得 $g^\star f=\chi(g)f$，其中 $|\chi|=1$ 且 g 是基本群 D 的一个元素，则称 Δ 上的全纯函数 f 为乘法函数。已知，对于 D 上的任意调和函数u，存在一个 χ_u 和一个乘法函数 $f_u\in\mathcal{O}^{\chi_u}(D)$，使得$|f_u|=p^\star(e^u)$。回顾格林函数 $G_D(z,z_j)$，存在一个 χ_{z_j} 和一个乘法函数 $f_{z_j}\in\mathcal{O}^{\chi_{z_j}}(D)$，使得 $|f_{z_j}(z)|=p^\star\left(e^{G_D(z,\ z_j)}\right)$（参见[22, 21]）。

$M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)$ 与 $M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho})$ 之间的关系如下:

定理 1.5. 假设 $M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho})<+\infty$。那么

$$M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)\leq\frac{M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho})}{\pi\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}\tag{1.1}$$

成立，并且等式成立当且仅当以下陈述成立:

(1) $\varphi+2\psi=2\sum_{1\leq j\leq m}(k_j+1)G_D(\cdot,z_j)+2u$，其中 u是定义在 D上的调和函数;

(2) $\psi=\sum_{1\leq j\leq m}p_jG_D(\cdot,z_j)$, where $p_j=\nu(dd^c(\psi),z_j)>0$;

(3) $\chi_{-u}=\prod_{1\leq j\leq m}\chi_{z_j}$，其中 χ_{-u} 和 χ_{z_j} 分别是与函数 $-u$ 和 $G_D(\cdot,z_j)$ 相关联的特征标;

(4) 对任意 $1\leq j\leq m$，$\lim_{z\to z_j}\frac{p_*\left(f_u\left(\prod_{1\leq j\leq m}f_{z_j}^{k_j+1}\right)\left(\sum_{1\leq j\leq m}p_j\frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}\right)\right)}{(z-z_j)^{k_j}dz}=c_0a_{j,k_j}$ 并且 $a_{j,\ l}=0$ 对任意 $l<k_j$，其中 $c_0\neq0$ 是一个与 j无关的常数。

当 $m=1$时，定理 1.5 给出了高阶导数的 Saitoh 猜想加权版本的一个解，详见 [12]。

注 1.6. 假设定理 1.5 中的四个陈述成立，那么我们知道 $\frac{p_*\left(f_u\left(\prod_{1\leq j\leq m}f_{z_j}^{k_j+1}\right)\left(\sum_{1\leq j\leq m}p_j\frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}\right)\right)}{c_0dz}$是$D$上的一个（单值）全纯函数，并记作 F_0。

那么 $F_0^{(l)}(z_j)=l!a_{j,\ l}$ 对任意 $0\leq l\leq k_j$ 和任意$1\leq j\leq m$，且存在 $f_0\in H^2(D)$ 使得 $f_0^*=F_0$,

$$M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho})=\int_D|F_0|^2\tilde{\rho}\ \ and\ \ M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f_0|^2\rho|dz|.$$

我们证明第 3 节中的注记。

设 $Z_0:=\{z_j:\ 1\leq k\leq m\}$ 是 D的一个子集。设 λ 是 ∂D上的正连续函数。通过求解狄利克雷问题，存在一个 $\overline{D}$ 上的正连续函数，也记为 λ，使得 $\log\lambda$ 在 D 上调和。令 $c_\beta(z)$ 为 D 上的对数容量（见 [19]），其局部定义为

$$c_\beta(z):=\exp\lim_{\tilde{z}\to z}(G_D(\tilde{z},z)-\log|\tilde{z}-z|).$$

利用定理 1.5，我们给出 Hardy 空间的如下最优 L^2 延拓定理，并刻画该延拓定理中等式成立的情形。

推论 1.7. 设 k_j 为非负整数，并设 $a_j\in\mathbb{C}$ 对任意 j均成立。假设 $\sum_{1\leq j\leq m}\frac{2|a_j|^2t_j}{(k_j+1)\ c_\beta(z_j)^{\ 2(k_j+1)}\lambda(z_j)}\in(0,+\infty)$。那么存在 $f\in H^2(D)$，使得

$f^{(l)}(z_j) = 0$ 对 $0 \le l < k_j$ 成立，且 $f^{(k_j)}(z_j) = k_j!\ a_j$ 对任意 $1 \le j \le m$ 均成立，并且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} |f|^2 \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial v_z}\right)^{-1} |dz| \le \sum_{1\le j\le m} \frac{2|a_j|^2 t_j}{(k_j+1)c_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}\lambda(z_j),$$

其中 $\psi := \sum_{1\le j\le m}(k_j+1)G_D(\cdot, z_j)$ 且 $t_j := e^{-2\sum_{1\le j_1\le m,\ j_1\ne j}(k_j+1)G_D(z_j,\ z_{j_1})}$。

此外，记 $M_H := \inf\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f|^2\lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|:\ f\in H^2(D)$，使得 $f^{(l)}(z_j) = 0$ 对 $0 \le l < k_j$ 且 $f^{(k_j)}(z_j) = k_j! a_j$ 对任意 $1 \le j \le m\}$，则等式

$$M_H = \sum_{1\le j\le m} \frac{2|a_j|^2 t_j}{(k_j+1)c_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}\rho(z_j)$$

当且仅当以下陈述成立时成立：

(1) $\chi_{\frac{1}{2}\log\lambda} = \prod_{1\le j\le m}\chi_{z_j}^{k_j+1}$；

(2) 对任意 $1 \le j \le m$,

$$\lim_{z\to z_j} \frac{p_*\left(f_{-\frac{1}{2}\log\lambda}\left(\prod_{1\le j\le m} f_{z_j}^{k_j+1}\right)\left(\sum_{1\le j\le m}(k_j+1)\frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}\right)\right)}{(z-z_j)^{k_j}dz} = c_0 a_j,$$

其中 $c_0 \ne 0$ 是一个与 j 无关的常数。

推论 1.7 推出以下结果。

推论 1.8. 设 k 为非负整数。则存在一个常数 C（依赖于 k），使得对于任意 $a_{j,\ l}\in\mathbb{C}$, 其中 $1 \le j \le m$ 和 $0 \le l \le k$，存在 $f \in H^2(D)$，使得 $f^{(l)}(z_j) = a_{j,\ l}$ 对任意 $1 \le j \le m$ 和 $0 \le l \le k$ 均成立，并且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f|^2|dz| \le C\sum_{1\le j\le m}\sum_{0\le l\le k}|a_{j,l}|^2.$$

1.2. Hardy 空间 $H^2_\rho(M, \partial M)$ 的极小 L^2 积分。设 D_j 是一个由有限条解析 Jordan 曲线围成的平面区域，对任意 $1 \le j \le n$ 均成立。设 $M = \prod_{1\le j\le n} D_j$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界域。

设 $Z_j = \{z_{j,1}, z_{j,2}, ..., z_{j,m_j}\} \subset D_j$ 对任意 $j \in \{1, 2, ..., n\}$ 均成立，其中 m_j 为正整数。记

$$Z_0 := \prod_{1\le j\le n} Z_j \subset M.$$

令 $\psi = \max_{1\le j\le n}\{\sum_{1\le k\le m_j} p_{j,k}G_{D_j}(\cdot, z_{j,k})\}$ 在 M 上。令 $V_{z_{j,k}} \Subset D_j$ 为 $z_{j,k}$ 的一个邻域，满足对于任意 j 和 $k \ne k'$，都有 $V_{z_{j,k}} \cap V_{z_{j,k'}} = \emptyset$。记 $I_1 := \{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) :$ 对任意 $j \in \{1, 2, ..., n\}\}$, V_β，都有 $1 \le \beta_j \le m_j := \prod_{1\le j\le n} V_{z_{j,\beta_j}}$；并且 $z_\beta := (z_{1,\beta_1}, z_{2,\beta_2}, \ldots, z_{n,\beta_n}) \in M$，对于任意 $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$，都有 $\in I_1$。

令 φ_j 为定义在 D_j 上的次调和函数，它满足：对于任意 $z \in \partial D_j$，φ_j 在 z 处连续。记

$$\varphi(w_1, \ldots, w_n) := \sum_{1\le j\le n}\varphi_j(w_j)$$

在 M 上。设 f_0 是一个全纯函数 $\cup_{\beta\in I_1} V_\beta$。对于任意 $\beta \in I_1$，设 J_β 是 $\mathcal{O}_{z_\beta}$ 的一个理想，满足 $\mathcal{I}(\varphi + 2\psi)_{z_\beta} \subset J_\beta$。注意，对于任意 $\tilde{z} \in D_j$, $\frac{\partial G_{D_j}(z, \tilde{z})}{\partial v_z}$ 由于边界的解析性，它是 ∂D_j 上的一个正连续函数（见

[18],[5]），其中 $\partial/\partial v_z$ 表示沿着外法向单位向量 v_z 的导数。设 ρ 是 ∂M 上的勒贝格可测函数，使得

$$\rho(w_1,\ldots,w_n)=\left(\sum_{1\leq k\leq m_j}p_{j,k}\frac{\partial G_{D_j}(w_j,z_{j,k})}{\partial v_{w_j}}\right)^{-1}\times\prod_{1\leq l\leq n}e^{-\varphi_l(w_l)}$$

在 $\partial D_j\times M_j$ 上。设 c 是定义在 $[0,+\infty$ 上的正函数，满足 $c(t)e^{-t}$ 在 $[0,+\infty$ 上递减，$\lim_{t\to 0+0}c(t)=c(0)=1$ 且 $\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt<+\infty$。记

$$\tilde{\rho}=c(-2\psi)\prod_{1\leq j\leq n}e^{-\varphi_j}$$

在 M 上。

考虑以下两个极小积分。记

$$M(Z_0,J,\tilde{\rho}):=\inf\left\{\int_M|f|^2\tilde{\rho}:f\in\mathcal{O}(D)\text{ s.t. }(f-f_0,z_\beta)\in J_\beta\text{ for any }\beta\in I_1\right\}$$

and

$$M_H(Z_0,J,\rho):=\inf\Bigg\{\|f\|^2_{\partial M,\rho}:f\in H^2_\rho(M,\partial M)\text{ s.t. }(f^*-f_0,z_\beta)\in J_\beta\text{ for any }\beta\in I_1\Bigg\}.$$

记

$$G(t):=\inf\left\{\int_{\{2\psi<-t\}}|f|^2\tilde{\rho}:f\in\mathcal{O}(\{2\psi<-t\})\text{ s.t. }(f-f_0,z_\beta)\in J_\beta\text{ for any }\beta\in I_1\right\}$$

对任意 $t\geq 0$。注意，$\tilde{\rho}=c(-2\psi)\prod_{1\leq j\leq n}e^{-\varphi_j}$ 且 $G(0)=M(Z_0,J_\beta,\tilde{\rho})$。由于对任意 $\beta\in I_1$，$\mathcal{I}(\varphi+2\psi)_{z_\beta}\subset J_\beta$，由定理 2.23 可知 $G(h^{-1}(r))$ 是凹函数，其中 $h(t)=\int_t^{+\infty}c(s)e^{-s}ds$。

我们给出 $M_H(Z_0,J,\rho)$ 与 $M(Z_0,J,\tilde{\rho})$ 之间的关系。

定理 1.9. 假设 $M(Z_0,J,\tilde{\rho})<+\infty$. 那么

$$M_H(Z_0,J,\rho)\leq\frac{M(Z_0,J,\tilde{\rho})}{\pi\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}\tag{1.2}$$

成立，并且当且仅当 $G(h^{-1}(r))$ 在 $[0,\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt]$ 上是线性的，且存在 $f\in H^2_\rho(M,\partial M)$，使得 $(f^*-f_0,z_\beta)\in J_\beta$ 对任意 $\beta\in I_1$，$M_H(Z_0,J,\rho)=\|f\|^2_{\partial M,\rho}$ 且 $M(Z_0,J,\tilde{\rho})=\int_M|f^*|^2\tilde{\rho}$ 时，等式成立。

注 1.10. 设 $\hat{}\rho$ 是 $\overline{M}$ 上任意一个勒贝格可测函数，并满足：$\inf_{\overline{M}}\hat{}\rho>0$，$-\log\hat{}\rho$ 在 M 上是多重次调和的，且对于任意 $(w_j,\hat{}w_j)\in\partial D_j\times M_j\subset\partial M$ 以及任意 $1\leq j\leq n$，有 $\hat{}\rho(w_j,\hat{}w_j)\leq\liminf_{w\to w_j}\hat{}\rho(w,\hat{}w_j)$，其中 $M_j=\prod_{l\neq j}D_l$。

设 $\rho(w_1,\ldots,w_n)=\left(\sum_{1\leq k\leq m_j}p_{j,k}\frac{\partial G_{D_j}(w_j,z_{j,k})}{\partial v_{w_j}}\right)^{-1}\times\hat{}\rho$ 在 $\partial D_j\times M_j$ 上，并设 $\tilde{\rho}=c(-2\psi)\hat{}\rho$ 在 M 上。定理 1.9 中的不等式 (1.2) 在这种情形下也成立（我们在定理 1.9 证明的步骤 1 中证明这一说明）。

利用定理 1.5 和定理 2.29（关于 $G(h^{-1}(r))$ 的凹性退化为线性的刻画），我们得到以下定理。

定理 1.11。假设对于任意 $\beta \in I_1$，$J_\beta = \mathcal{I}(2\psi)_{z_\beta}$，且在 V_{β^*} 上 $f_0 = \prod_{1\le j\le n}(w_j - z_{j,1})^{\tilde{\alpha}_j}$，其中 $\beta^* = (1, 1, ..., 1) \in I_1$。那么等式

$$M_H(Z_0, J, \rho) = \frac{M(Z_0, J, \tilde{\rho})}{\pi \int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt}$$

成立当且仅当以下陈述成立：

(1) 对任意 $j \in \{1, 2, ..., n\}$，$\varphi_j = 2\log|g_j| + 2u_j$，其中 u_j 是定义在 D_j 上的调和函数，g_j 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数，且满足对于任意 $k \in \{1, 2, ..., m_j\}$，$g_j(z_{j,k}) \neq 0$；

（2）存在一个非负整数 $\gamma_{j,k}$ 对于任意 $j \in \{1, 2, ..., n\}$ 和 $k \in \{1, 2, ..., m_j\}$，满足 $\Pi_{1\le k\le m_j}\chi^{\gamma_{j,k}+1}_{z_{j,k}} = \chi_{j,-u_j}$ 以及 $\sum_{1\le j\le n}\gamma_{j,\beta_j+1}p_{j,\beta_j} = 1$ 对任意 ~~$\beta \in I_1$~~ 均成立，其中 χ_{-u_j} 和 $\chi_{z_{j,k}}$ 分别是与函数 $-u_j$ 和 $G_{D_j}(\cdot, z_{j,k})$ 相关联的特征标；

（3）$f_0 = c_\beta\Pi_{1\le j\le n}(w_j - z_{j,\beta_j})^{\gamma_{j,\beta_j}} + g_\beta$ 在 V_β 上对任意 $\beta \in I_1$ 成立，其中 c_β 是一个常数，g_β 是 V_β 上的全纯函数，并满足 $(g_\beta, z_\beta) \in \mathcal{I}(\psi)_{z_\beta}$；

(4) $\lim_{z\to z_\beta} \frac{c_\beta\Pi_{1\le j\le n}(w_j - z_{j,\beta_j})^{\gamma_{j,\beta_j}}dw_1\wedge dw_2\wedge...\wedge dw_n}{\wedge_{1\le j\le n}g_j(P_j)_*\left(f_{u_j}\left(\Pi_{1\le k\le m_j}f^{\gamma_{j,k}+1}_{z_{j,k}}\right)\left(\sum_{1\le k\le m_j}p_{j,k}\frac{df_{z_{j,k}}}{f_{z_{j,k}}}\right)\right)} = c_0$ *for any* $\beta \in I_1$，其中 $c_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 是一个与 β、P_j 无关的常数：$\Delta \to D_j$ 是万有覆盖，f_{u_j} 是一个全纯函数 Δ，满足 $|f_{u_j}| = P_j^*(e^{u_j})$，并且 $f_{z_{j,k}}$ 是 Δ 上的全纯函数，满足 $|f_{z_{j,k}}| = P_j^*\left(e^{G_{D_j}(\cdot, z_{j,k})}\right)$ 对任意 $j \in \{1, 2, ..., n\}$ 和 $k \in \{1, 2, ..., m_j\}$ 成立。

当 $m_j = 0$ 对任意 $1 \le j \le n$ 成立时，上述定理是 Saitoh 猜想的乘积形式的一个解，详见 [13]。

注记 1.12. 假设定理 1.11 中的四个陈述均成立，则我们知道 $\frac{c_0\wedge_{1\le j\le n}g_j(P_j)_*\left(f_{u_j}\left(\Pi_{1\le k\le m_j}f^{\gamma_{j,k}+1}_{z_{j,k}}\right)\left(\sum_{1\le k\le m_j}p_{j,k}\frac{df_{z_{j,k}}}{f_{z_{j,k}}}\right)\right)}{dw_1\wedge dw_2\wedge...\wedge dw_n}$ 是 D_j 上的一个（单值）全纯函数，记为 F_0。于是，对于任意 $\beta \in I_1$，有 $(F_0 - f_0, z_\beta) \in \mathcal{I}(2\psi)_{z_\beta}$，并且存在 $\tilde{F}_0 \in H^2_\rho(M, \partial M)$ 使得 $\tilde{F}_0^* = F_0$，

$$M(Z_0, J, \tilde{\rho}) = \int_M |F_0|^2\tilde{\rho} \ \ and \ \ M_H(Z_0, J, \rho) = \|\tilde{F}_0\|^2_{\partial M,\rho}.$$

我们证明第4节中的注记。

记 $E_\beta := \left\{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) : \sum_{1\le j\le n}\frac{\alpha_j+1}{p_{j,\beta_j}} = 1 \ \&\ \alpha_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\right\}$ 对任意 $\beta \in I_1$，并假设 $f_0 = \sum_{\alpha\in E_\beta}d_{\beta,\alpha}\prod_{1\le j\le n}(w_j - z_{j,\beta_j})^{\alpha_j}$ 在 V_β 上。记

$$c_{j,k} := \exp\lim_{z\to z_{j,k}}\left(\frac{\sum_{1\le k_1\le m_j}p_{j,k_1}G_{D_j}(z, z_{j,k_1})}{p_{j,k}} - \log|w_{j,k}(z)|\right)$$

对任意 $j \in \{1, 2, ..., n\}$ 和 $k \in \{1, 2, ..., m_j\}$。

利用定理 1.11，我们得到以下关于乘积空间上 Hardy 空间的最优 L^2 延拓定理，并给出该延拓定理中等式成立的刻画。

推论 1.13. 假设 $\sum_{\beta\in I_1}\sum_{\alpha\in E_\beta}\frac{|d_{\beta,\alpha}|^2 2^n\pi^{n-1}e^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\le j\le n}(\alpha_j+1)c_j^{2\alpha_j+2}}\in(0,+\infty)$。则存在 $f\in H^2_\rho(M,\partial M)$，满足对任意 $\beta\in I_1$，都有 $(f^*-f_0,z_\beta)\in\mathcal{I}(2\psi)_{z_\beta}$并且

$$\|f\|^2_{\partial M,\rho}\le\sum_{\beta\in I_1}\sum_{\alpha\in E_\beta}\frac{|d_{\beta,\alpha}|^2 2^n\pi^{n-1}e^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\le j\le n}(\alpha_j+1)c_{j,\beta_j}^{2\alpha_j+2}}.$$

此外，假设 $f_0=\prod_{1\le j\le n}(w_j-z_{1,\beta_1})^{\tilde{\alpha}_j}$在 V_{β^*}上成立，其中 $\beta^*=(1,1,...,1)\in I_1$，则等式

$$M_H(Z_0,\mathcal{I}(2\psi),\rho)=\sum_{\beta\in I_1}\sum_{\alpha\in E_\beta}\frac{|d_{\beta,\alpha}|^2 2^n\pi^{n-1}e^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\le j\le n}(\alpha_j+1)c_{j,\beta_j}^{2\alpha_j+2}}$$

成立当且仅当以下陈述成立：

(1) 对任意 $j\in\{1,2,...,n\}$，$\varphi_j=2\log|g_j|+2u_j$，其中 u_j是 $\mathcal{C}$ 上的调和函数，g_j 是 D_j 上满足 $g_j(z_{j,k})\neq 0$ 的全纯函数；

(2) 存在一个非负整数$\gamma_{j,k}$，对任意 $j\in\{1,2,...,n\}$ 和 $k\in\{1,2,...,m_j\}$，满足 $\Pi_{1\le k\le m_j}\chi_{j,z_j}^{\gamma_{j,k}}(z_{j,k+1},z_{j,k})=\chi_{j,-u_j}$，且对任意 $\beta\in I_1$，$\sum_{1\le j\le n}\frac{\gamma_{j,\beta_j+1,\beta_j}}{p_j}=1$；

(3) $f_0=c_\beta\Pi_{1\le j\le n}(w_j-z_{j,\beta_j})^{\gamma_{j,\beta_j}}+g_\beta$ 对于任意 V_β，其中 c_β 是一个常数，g_β是定义在 V_β上的全纯函数，且满足 $(g_\beta,z_\beta)\in\mathcal{I}(\psi)_{z_\beta}$；

(4) $\lim_{z\to z_\beta}\frac{c_\beta\Pi_{1\le j\le n}(w_j-z_{j,\beta_j})^{\gamma_{j,\beta_j}}dw_1\wedge dw_2\wedge...\wedge dw_n}{\wedge_{1\le j\le n}g_j(P_j)_*\left(f_{u_j}\left(\Pi_{1\le k\le m_j}f_{z_{j,k}}^{\gamma_{j,k}+1}\right)\left(\sum_{1\le k\le m_j}p_{j,k}\frac{df_{z_{j,k}}}{f_{z_{j,k}}}\right)\right)}=c_0$ *for any* $\beta\in I_1$，其中 $c_0\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$是一个与 β无关的常数。

Denote that $L_k:=\{\sum_{1\le j\le n}\alpha_j\le k:\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_{\ge 0}\}$.

推论 1.14. 设 k 是一个非负整数。则存在一个常数 C（依赖于 k 和 Z_0），使得对于任意$a_{\beta,\alpha}\in\mathbb{C}$，其中 $\beta\in I_1$ 和 $\alpha\in L_k$，存在 $f\in H^2_\rho(M,\partial M)$，使得 $\partial^\alpha f^*(z_\beta)=a_{\beta,\alpha}$对于任意 $\beta\in I_1$和 $\alpha\in L_k$，并且

$$\|f\|^2_{\partial M,\rho}\le C\sum_{\beta\in I_1,\alpha\in L_k}|a_{\beta,\alpha}|^2,$$

其中 $\partial^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial w_n}\right)^{\alpha_n}$。

1.3. Hardy 空间 $H^2_\chi(M,S)$ 的最小 L^2 积分。设 D_j 为具有有限边界分支且边界由解析 Jordan 曲线组成的平面正则区域，其中任意 $1\le j\le n$。设 $M=\prod_{1\le j\le n}D_j$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域。记$S:=\prod_{1\le j\le n}\partial D_j$。

设任意 $j\in\{1,2,...,n\}$ 均有 $Z_j=\{z_{j,1},z_{j,2},...,z_{j,m_j}\}\subset D_j$，其中 m_j为正整数。记

$$Z_0:=\prod_{1\le j\le n}Z_j\subset M.$$

设 $\psi=\max_{1\le j\le n}\{\sum_{1\le k\le m_j}2G_{D_j}(\cdot,z_{j,k})\}$。设$V_{z_{j,k}}\Subset D_j$是 $z_{j,k}$ 的一个邻域，满足对于任意 j 和 $k\neq k'$，均有$V_{z_{j,k}}\cap V_{z_{j,k'}}=\emptyset$。记 $I_1:=\{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n):1\le\beta_j\le m_j$，对于任意 $j\in\{1,2,...,n\}\}$，$V_\beta:=\prod_{1\le j\le n}V_{z_{j,\beta_j}}$以及$z_\beta:=(z_{1,\beta_1},z_{2,\beta_2},\ldots,z_{n,\beta_n})\in M$，对任意 $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\in I_1$。

设 φ_j 是定义在 D_j 上的次调和函数，并且对于任意 $z \in \partial D_j$，φ_j 在 z 处连续。记

$$\varphi(w_1, \ldots, w_n) := \sum_{1 \le j \le n} \varphi_j(w_j)$$

在 M 上。设 f_0 是一个全纯函数 $\cup_{\beta \in I_1} V_\beta$。设 ρ 是 ∂M 上的勒贝格可测函数，使得

$$\rho(w_1, \ldots, w_n) = \left(\sum_{1 \le k \le m_j} 2 \frac{\partial G_{D_j}(w_j, z_{j,k})}{\partial v_{w_j}} \right)^{-1} \times \prod_{1 \le l \le n} e^{-\varphi_l(w_l)}$$

在 $\partial D_j \times M_j$ 上。设 c 是 $[0, +\infty$ 上的正函数），满足：$c(t)e^{-t}$ 在 $[0, +\infty$ 上递减，$\lim_{t \to 0+0} c(t) = c(0) = 1$ 且 $\int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt < +\infty$。设

$$\lambda(w_1, \ldots, w_n) = \prod_{1 \le j \le n} \left(\sum_{1 \le k \le m_j} 2 \frac{\partial G_{D_j}(w_j, z_{j,k})}{\partial v_{w_j}} \right)^{-1} e^{-\varphi_j(w_j)}$$

在 $S = \prod_{1 \le j \le n} \partial D_j$ 上。注意，λ 在 S 上连续。

设 h_j 是定义在 Z_j 的某个邻域上的全纯函数，对任意满足存在 $k \in \{1, \ldots, m_j\}$ 使得 $h_j(z_{j,\ k}) \neq 0$ 的 $1 \le j \le n$ 均成立。记为 $h_0 = \prod_{1 \le j \le n} h_j$。考虑以下极小积分。对任意 $\beta \in I_1$，设 J_β 为 $\mathcal{O}_{z_\beta}$ 的极大理想。记为

$$M_S(Z_0, J, \lambda) := \inf \Big\{ \|f\|^2_{S,\lambda} : f \in H^2_\lambda(M, S) \\ \text{s.t. } f^*(z_\beta) = h_0(z_\beta) \text{ for any } \beta \in I_1 \Big\}$$

and

$$M_H(Z_0, J, \rho) := \inf \Big\{ \|f\|^2_{\partial M,\rho} : f \in H^2_\rho(M, \partial M) \\ \text{s.t. } f^*(z_\beta) = h_0(z_\beta) \text{ for any } \beta \in I_1 \Big\}.$$

$M_S(Z_0, J, \lambda)$ 与 $M_H(Z_0, J, \rho)$ 之间的关系。

定理 1.15. 假设 $M_H(Z_0, J, \rho) < +\infty$。那么

$$M_S(Z_0, J, \lambda) \le \frac{M_H(Z_0, J, \rho)}{n\pi^{n-1}} \tag{1.3}$$

成立，并且当且仅当以下三个陈述成立时，等式成立

(1) 对任意 $1 \le j \le n$，$\varphi_j = 2u_j$，u_j 是一个调和 函数，定义在 D_j 上；

(2) $\prod_{1 \le k \le m_j} \chi_{j,\ z_{j,\ k}} = \chi_{j,\ -u_j}$ 对任意 $1 \le j \le n$；

(3) 对任意 j，存在一个常数 $c_j \neq 0$，使得

$$\lim_{z \to z_{j,k}} \frac{P^*_j \left(f_{u_j} \left(\prod_{1 \le k \le m_j} f_{z_{j,k}} \right) \left(\sum_{1 \le k \le m_j} \frac{df_{z_{j,k}}}{f_{z_{j,k}}} \right) \right)}{h_j dw_j} = c_j$$

对任意 $1 \le k \le m_j$ 均成立。

2. Preparations

本节将进行一些准备工作。

2.1. 关于 Hardy 空间 $H^2(D)$ 的一些结果。设 D 是一个具有有限边界分支的平面正则区域，其边界分支均为解析 Jordan 曲线（见 [18], [22]）。本节回顾与 Hardy 空间 $H^2(D)$ 相关的一些性质。

令 $H^2(D)$（见 [18]）表示 D 上的解析 Hardy 类，它定义为所有满足以下条件的解析函数 $f(z)$ 的集合：这些函数在 D上使次调和函数 $|f(z)|^2$具有调和主函数 $U(z)$:

$$|f(z)|^2 \leq U(z) \text{ on } D.$$

于是，每个函数 $f(z) \in H^2(D)$ 几乎处处在 ∂D 上具有 Fatou 非切向边界值，且该值属于 $L^2(\partial D)$（见 [1]）。众所周知（见 [17]），如果次调和函数在 D中有调和主函数，则存在最小调和主函数。将 $|f|^2$的最小调和主函数记为 u_f。

设 $z_0 \in D$。令 $L^2(\partial D, \rho)$ 为 ∂D 上复值可测函数h 构成的空间，其范数定义为

$$\|h\|^2_{\partial D,\rho} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} |h|^2 \rho |dz|,$$

其中 $\rho = \frac{\partial G_D(z,z_0)}{\partial v_z}$ 是 ∂D 上的正连续函数，这是由∂D的解析性所致； $G_D(z, z_0)$ 是 D 上的格林函数，而 $\partial/\partial v_z$ 表示沿外法向单位向量 v_z的导数。

下面的引理给出 Hardy 空间 $H^2(D)$ 的一些相关性质。

引理 2.1（[17]）。（a）若 $f \in H^2(D)$，则存在 ∂D 上的函数 f_*，使得 f 几乎处处在 ∂D 上具有非切向边界值 f_*。映射 $\gamma\colon f \mapsto f_*$ 是从 $H^2(D)$ 到 $L^2(\partial D, \rho)$ 的单射线性映射，并且

$$\|f_*\|^2_{\partial D,\rho} = u_f(z_0)$$

对任意 $f \in H^2(D)$ 均成立，其中 u_f 是 $|f|^2$ 的最小调和主函数。

(b) $g \in \gamma(H^2(D))$ 当且仅当

$$\int_{\partial D} g(z)\phi(z)dz = 0$$

对于在 $\overline{D}$ 的某个邻域上定义的任意全纯函数 ϕ，该结论成立。

(c) γ 的逆映射由下式给出

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial D} \frac{f_*(z)}{z-w}dz \tag{2.1}$$

对于任意 $z \in D$。

引理 2.1 中的等式 (2.1) 推出以下引理。

引理 2.2. 若 $\lim_{n\to+\infty} \|\gamma(f_n)\|_{\partial D,\rho} = 0$ 对于 $f_n \in H^2(D)$ 成立，则 f_n 在 D 的任意紧子集上一致收敛于 0。

引理 2.3。对于任意紧集 $V \subset D$ 和非负整数 k，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$|f^{(k)}(w)|^2 \leq C\int_{\partial D} |f_*|^2 |dz|$$

对任意 $w \in V$和 $f \in H^2(D)$。

证明。由等式 (2.1)，我们有

$$f^{(k)}(w)=\frac{(-1)^{k+1}k!}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial D}\frac{f_*(z)}{(z-w)^{k+1}}dz$$

对任意 $w\in D$ 和 $f\in H^2(D)$。因此，存在一个常数 $C>0$，使得$|f^{(k)}(w)|^2\le C\int_{\partial D}|f_*|^2|dz|$ 对任意 $w\in V$成立。□

引理 2.4（[17]）。 $H^2(D)$ 是一个配备内积的希尔伯特空间

$$\ll f,g\gg_{\partial D,\rho}=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}f_*\overline{g_*}\rho|dz|,$$

其中 $\rho=\frac{\partial G_D(z,\ z_0)}{\partial v_z}$。此外， $\mathcal{O}(D)\cap C(\overline{D})$ 在 $H^2(D)$ 中稠密。

引理2.5. 对任意 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$，设 $f_n\in H^2(D)$。假设 f_n 在 D 的任意紧子集上均匀收敛于 0，并且存在 $f\in L^2(\partial D,\rho)$，使得 $\lim_{n\to+\infty}\|\gamma(f_n)-f\|_{\partial D,\ \rho}=0$。那么我们有 $f=0$。

证明。由引理 2.1 和引理 2.4 可知，存在 $f_0\in H^2(D)$，使得 $\gamma(f_0)=f$。利用引理 2.2，可得 f_n-f_0 在 D 的任意紧子集上均匀收敛于 0，即 $f_0=0$，这意味着 $f=0$。□

设 $\{D_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是一个具有解析边界的区域递增序列，满足 $z_0\in D_1$ 和 $\cup_{k=1}^{+\infty}D_k=D$。设 $G_{D_k}(\cdot,z_0)$ 为 D_k 的格林函数。

引理 2.6（见 [17]）。$\|f_*\|^2_{\partial D,\ \rho}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_k}|f|^2\frac{\partial G_{D_k}(z,\ z_0)}{\partial v_z}|dz|$对任意 $f\in H^2(D)$ 均成立。

我们回顾一下 D 上格林函数 $G_D(\cdot,z_j)$ 的一个众所周知的性质。

引理 2.7（参见 [10]）。设 $Z_0':=\{z_j:\ j\in\mathbb{Z}_{\ge1}\ \&\ j<\gamma\}$ 是 D 的离散子集，其中 $\gamma\in\mathbb{Z}_{\ge1}\cup\{+\infty\}$。设 ψ 是 D 上的负次调和函数，满足$\frac{1}{2}v(dd^c\psi,z_j)\ge p_j>0$，对任意 j 均成立，其中 p_j是一个常数。则 $2\sum_{1\le j<\gamma}p_jG_D(\cdot,z_j)$ 是 D 上的次调和函数，满足 $2\sum_{1\le j<\gamma}p_jG_D(\cdot,z_j)\ge\psi$，且$2\sum_{1\le j<\gamma}p_jG_D(\cdot,z_j)$ 在 $D\backslash Z_0'$ 上是调和函数。

我们回顾以下基本公式。

引理 2.8（见 [13]）。 $\frac{\partial\psi}{\partial v_z}=\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$在 ∂D上，其中 $\partial/\partial v_z$表示沿外法向单位向量 v_z方向的导数。

设 $\psi=\sum_{1\le j\le m}p_jG_D(\cdot,z_j)$，其中 $p_j>0$和 $\{z_j\}\subset D$满足 $z_j\ne z_k$，且 $j\ne k$。则存在 ∂D 的一个邻域 U 以及 $r_0\in(0,1)$，使得$\{z\in D:\ \psi(z)\ge\log\ r_0\}\Subset U$，且 $dG_D(\cdot,z_j)$在$U\cap\overline{D}$上满足 $\ne0$，对任意 j均成立。

以下引理将在定理 1.5 的证明中使用。

引理 2.9. 设 φ 是$U\cap\overline{D}$ 上的一个正勒贝格可测函数，满足对于任意 $\tilde{z}\in\partial D$，$\lim_{z\to\tilde{z}}\varphi(z)=\varphi(\tilde{z})$。那么

$$\int_{\partial D}|f|^2\varphi|dz|=\lim_{r\to1-0}\int_{\partial D_r}|f|^2\varphi|dz| \tag{2.2}$$

对任意 $f\in H^2(D)$ 均成立，其中 $D_r=\{z\in\overline{D}:\ \psi(z)<\log\ r\}$ for $r\in[r_0,1]$。

证明。由引理 2.7 可知，$\psi-\log r=\sum_{1\leq j\leq m}p_jG_{D_r}(\cdot,z_j)$ on D_r。因此，利用引理 2.6 可得

$$\begin{aligned}\lim_{r\to1-0}\int_{\partial D_r}|\tilde{f}|^2\frac{\partial\psi}{\partial v_z}|dz| &= \sum_{1\leq j\leq m}p_j\lim_{r\to1-0}\int_{\partial D_r}|\tilde{f}|^2\frac{\partial G_{D_r}(z,z_j)}{\partial v_z}|dz|\\ &= \sum_{1\leq j\leq m}p_j\int_{\partial D}|\tilde{f}|^2\frac{\partial G_D(z,z_j)}{\partial v_z}|dz|\\ &= \int_{\partial D}|\tilde{f}|^2\frac{\partial\psi}{\partial v_z}|dz|\end{aligned}\tag{2.3}$$

对任意 $\tilde{f}\in H^2(D)$ 均成立。由于对于任意 $\tilde{z}\in\partial D_1$，$\lim_{z\to\tilde{z}}\varphi(z)=\varphi(\tilde{z})$，且 $dG_D(\cdot,z_j)\neq0$ 在 $U\cap\overline{D}$ 上对任意 j 成立，因此存在一个正数 L_1 使得

$$\frac{1}{L_1}<\inf_{\{z\in\overline{D}:\psi(z)\geq\log r_0\}}\min\{|\bigtriangledown\psi|,\varphi\}\leq\sup_{\{z\in\overline{D}:\psi(z)\geq\log r_0\}}\max\{|\bigtriangledown\psi|,\varphi\}<L_1,$$

其中 $|\bigtriangledown\cdot|^2=\left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\cdot}{\partial y}\right)^2$。

根据引理 2.4，存在 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}\subset\mathcal{O}(D)\cap C(\overline{D})$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\partial D}|f_n-f|^2\varphi|dz|=0.\tag{2.4}$$

由等式 (2.3) 和引理 2.8 可知

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to1-0}\int_{\partial D_r}|f_n-f|^2\varphi|dz| &\leq L_1^2\limsup_{r\to1-0}\int_{\partial D_r}|f_n-f|^2\frac{\partial\psi}{\partial v_z}|dz|\\ &\leq L_1^2\int_{\partial D}|f_n-f|^2\frac{\partial\psi}{\partial v_z}|dz|\\ &\leq L_1^4\int_{\partial D}|f_n-f|^2\varphi|dz|.\end{aligned}\tag{2.5}$$

利用控制收敛定理，我们知道

$$\lim_{r\to1-0}\int_{\partial D_r}|f_n|^2\varphi|dz|=\int_{\partial D}|f_n|^2\varphi|dz|\tag{2.6}$$

对任意 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 均成立。由等式 (2.4)、不等式 (2.5) 和等式 (2.6) 可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{r\to1-0}\left(\int_{\partial D_r}|f|^2\varphi|dz|\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leq&\liminf_{n\to+\infty}\left(\limsup_{r\to1-0}\left(\int_{\partial D_r}|f_n|^2\varphi|dz|\right)^{\frac{1}{2}}+\limsup_{r\to1-0}\left(\int_{\partial D_r}|f_n-f|^2\varphi|dz|\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ \leq&\liminf_{n\to+\infty}\left(\left(\int_{\partial D}|f_n|^2\varphi|dz|\right)^{\frac{1}{2}}+L_1^2\left(\int_{\partial D}|f_n-f|^2\varphi|dz|\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ =&\left(\int_{\partial D}|f|^2\varphi|dz|\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

根据 Fatou 引理，可得

$$\liminf_{r\to 1-0}\left(\int_{\partial D_r}|f|^2\varphi|dz|\right)^{\frac{1}{2}}\geq\left(\int_{\partial D}|f|^2\varphi|dz|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此，等式 (2.2) 成立。 □

设 $Z_0:=\{z_j:\ 1\leq j\leq m\}$ 是 D的一个子集。设 ρ 是 ∂D上的正连续函数。设 $\mathfrak{a}=(a_{j,l})\ (1\leq j\leq m, 0\leq l\leq k_j)$，其中 $a_{j,l}\in\mathbb{C}$ 使得$\sum_{1\leq j\leq m}\sum_{0\leq l\leq k_j}|a_{j,l}|\neq 0$。记

$$M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho}):=\inf\Bigg\{\int_D|f|^2\tilde{\rho}:f\in\mathcal{O}(D)\\ \text{s.t. } f^{(l)}(z_j)=l!a_{j,l}\text{ for any }0\leq l\leq k_j\text{ and any }1\leq j\leq m\Bigg\}.$$

and

$$M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho):=\inf\Bigg\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f|^2\rho|dz|:f\in H^2(D)\\ \text{s.t. } f^{(l)}(z_j)=l!a_{j,l}\text{ for any }0\leq l\leq k_j\text{ and any }1\leq j\leq m\Bigg\}.$$

引理 2.10。若 $M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)<+\infty$，则存在唯一的 $f\in H^2(D)$，使得 $M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f|^2\rho|dz|$，且 $f^{(l)}(z_j)=l!a_{j,l}$对任意 $0\leq l\leq k_j$及任意 $1\leq j\leq m$均成立。

证明。首先，我们证明 f 的存在性。由于 $M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)<+\infty$，因此存在 $\{f_s\}_{s\in\mathbb{Z}_{>0}}\subset H^2(D)$，使得

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f_s|^2\rho|dz|=M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho),$$

并且 $f_s^{(l)}(z_j)=l!\ a_{j,l}$ 对于任意 $0\leq l\leq k_j$ 和任意 $1\leq j\leq m$。因此，存在 $\{f_s\}_{s\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 的一个子序列（仍记为 $\{f_s\}_{s\in\mathbb{Z}_{>0}}$），满足：$\{f_s\}_{s\in\mathbb{Z}_{>0}}$在希尔伯特空间 $L^2(\partial D,\rho)$ 中弱收敛于函数 $g\in L^2(\partial D,\rho)$，并且 $\{f_s\}_{s\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 在 D 的任意紧子集上一致收敛于函数 $f\in\mathcal{O}(D)$。于是我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|g|^2\rho|dz|\leq\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f_s|^2\rho|dz|=M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho).\tag{2.7}$$

由引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}g(z)\phi(z)dz&=\int_{\partial D}g(z)\left(\phi(z)\frac{dz}{|dz|\rho(z)}\right)\rho(z)|dz|\\&=\lim_{s\to+\infty}\int_{\partial D}f_s(z)\left(\phi(z)\frac{dz}{|dz|\rho(z)}\right)\rho(z)|dz|\\&=\lim_{s\to+\infty}\int_{\partial D}f_s(z)\phi(z)dz\\&=0\end{aligned}$$

对于定义在 $\overline{D}$ 的某个邻域上的任意全纯函数 ϕ，以及

$$\begin{aligned} f(w) &= \lim_{s\to+\infty} f_s(w) \\ &= \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D} \frac{f_s(z)}{z-w} dz \\ &= \lim_{s\to+\infty} \int_{\partial D} f_s(z) \left(\frac{dz}{|dz|(z-w)\rho(z)} \right) \rho(z)|dz| \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D} \frac{g(z)}{z-w} dz. \end{aligned}$$

因此，由引理 2.1 可知，$f \in H^2(D)$ 和 $\gamma(f) = g$。由不等式 (2.7) 和 $M_H(Z_0, \mathfrak{a}, \rho)$ 的定义，得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} |f|^2 \rho |dz| = M_H(Z_0, \mathfrak{a}, \rho).$$

因此，我们得到 f 存在。

其次，我们用反证法证明 f 的唯一性：若不然，则存在两个不同的 $g_1 \in H^2(D)$ 和 $g_2 \in H^2(D)$，满足 $\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} |g_s|^2 \rho |dz| = M_H(Z_0, \mathfrak{a}, \rho)$，且 $g_s^{(l)}(z_j) = l! a_{j,l}$ 对任意 $0 \le l \le k_j$ 及任意 $1 \le j \le m$ 均成立，其中 $s = 1, 2$。注意到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} |\frac{g_1+g_2}{2}|^2 \rho |dz| + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} |\frac{g_1-g_2}{2}|^2 \rho |dz| = M_H(Z_0, \mathfrak{a}, \rho),$$

因此我们得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} |\frac{g_1+g_2}{2}|^2 \rho |dz| < M_H(Z_0, \mathfrak{a}, \rho),$$

这与 $M_H(Z_0, \mathfrak{a}, \rho)$ 的定义矛盾。

因此，引理 2.10 已得证。 □

下文中，设 ψ 如定理 1.5 所述。下面的引理将在引理 2.13 的证明中用到。

引理 2.11（[12]）。设 f 是 D上的全纯函数。假设

$$\liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in D:\psi(z)\ge \log r\}} |f(z)|^2}{1-r} < +\infty,$$

则有 $f \in H^2(D)$。

我们回顾下面的余面积公式。

引理 2.12（见 [2]）。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，且 $u \in C^1(\Omega)$。那么对任意 $g \in L^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega g(x) |\bigtriangledown u(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{u^{-1}(t)} g(x) dH_{n-1}(x) \right) dt,$$

其中 H_{n-1} 是 $(n-1)$ 维豪斯多夫测度。

设 $\tilde{\rho}$ 是定义在 $\overline{D}$ 上的勒贝格可测函数，并满足 $\inf_{\overline{D}} \tilde{\rho} > 0$ 且 $\tilde{\rho}(z) \le \liminf_{w\to z} \tilde{\rho}(w)$ 对任意 $z \in \partial D$ 均成立。记

$$\rho = \left(\frac{\partial \psi}{\partial v_z} \right)^{-1} \tilde{\rho}$$

在 ∂D 上。下面给出 $f \in H^2(D)$ 的一个充分条件。

引理 2.13. 设 f 是 D上的全纯函数。假设

$$\liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in D:\psi(z)\geq \log r\}} |f(z)|^2\tilde{\rho}}{1-r} < +\infty,$$

则有 $f \in H^2(D)$，并且

$$\int_{\partial D} |f|^2\rho|dz| \leq \liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in D:\psi(z)\geq \log r\}} |f(z)|^2\tilde{\rho}}{1-r}. \tag{2.8}$$

证明。注意到 $\inf_{\overline{D}} \tilde{\rho} > 0$，由引理 2.11 可知 $f \in H^2(D)$。因此，只需证明不等式 (2.8)。

注意到 f 在 ∂D上具有 Fatou 非切向边界值。由引理 2.8 可得

$$\int_{\partial D} |f|^2\rho|dz| = \int_{\partial D} |f|^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1} \tilde{\rho}|dz| = \int_{\partial D} |f|^2\tilde{\rho} \left|\bigtriangledown\psi\right|^{-1} |dz|.$$

由于 $\frac{\partial\psi}{\partial v_z} > 0$ 在 ∂D上， $\psi = 0$ 在 ∂D 上，且对任意 $z \in \partial D$， $\tilde{\rho}(z) \leq \liminf_{w\to z} \tilde{\rho}(w)$，由 Fatou 引理和引理 2.12 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} |f|^2\tilde{\rho} \left|\bigtriangledown\psi\right|^{-1} |dz| \\
\leq &\liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\log r}^{0} \left(\int_{\{z\in D:\psi(z)=t\}} |f|^2\rho \left|\bigtriangledown\psi\right|^{-1} |dz|\right) dt}{-\log r} \\
= &\liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in D:\psi(z)\geq \log r\}} |f|^2\tilde{\rho}}{1-r} \times \frac{1-r}{-\log r} \\
= &\liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in D:\psi(z)\geq \log r\}} |f|^2\tilde{\rho}}{1-r}.
\end{aligned}$$

因此，不等式 (2.8) 成立。 □

2.2. ∂M上的 Hardy 空间。设 D_j 是一个具有有限边界分支的平面正则区域，其中对于任意 $1 \leq j \leq n$，边界分支均为解析 Jordan 曲线。 let

$$M = \prod_{1\leq j\leq n} D_j$$

是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域。在本节中，我们回顾并给出关于 ∂M 上 Hardy 空间的一些性质，这些性质将在主要定理的证明中使用。

2.2.1. 关于 $H^2(M, \partial D_j \times M_j)$ 的一些结果。

令 $M_j = \prod_{1\leq l\leq n, l\neq j} D_l$，则 $M = D_j \times M_j$。对于任意 $1 \leq j \leq n$，令 $z_j \in D_j$。回顾一下， $H^2(D_j)$ 表示 D_j 上的 Hardy 空间，并且存在一个保范线性映射 $\gamma_j : H^2(D_j) \to L^2(\partial D_j, \frac{\partial G_{D_j}(z,z_j)}{\partial v_z})$（见第 2.1 节），满足：对于任意 $f \in H^2(D_j)$， $\gamma_j(f)$ 表示 f 在 ∂D_j 上几乎处处的非切向边界值，其中 $G_{D_j}(\cdot, z_j)$ 是 D_j 上的格林函数。

令 $d\mu_j$ 为 M_j 上的勒贝格测度，对任意 $1 \leq j \leq n$，并令 $d\mu$ 为定义在 ∂M 上的测度，其定义为

$$\int_{\partial M} h d\mu = \sum_{1\leq j\leq n} \frac{1}{2\pi} \int_{M_j} \int_{\partial D_j} h(w_j, \hat{w}_j)|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)$$

对任意 $h \in L^1(\partial M)$，其中 $\hat{w}_j := (w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_n)$。为简便起见，将 $d\mu|_{\partial D_j \times M_j}$ 记为 $d\mu$。考虑 $\partial D_j \times M_j$上的一个空间。记

$$\{f \in L^2(\partial D_j \times M_j, d\mu) : \exists f^* \in \mathcal{O}(M), \text{s.t. } f^*(\cdot, \hat{w}_j) \in H^2(D_j) \text{ for any } \hat{w}_j \in M_j \\ \& \, f = \gamma_j(f^*) \text{ a.e. on } \partial D_j \times M_j\}$$

由 $H^2(M, \partial D_j \times M_j)$ 给出。在 [13], 中，我们证明存在唯一的线性单射 $P_{\partial M,j}$，它从 $H^2(M, \partial D_j \times M_j)$ 映射到 $\mathcal{O}(M)$，使得 $P_{\partial M,j}(f)$（为简便起见，记作 f^*）对任意 $f \in H^2(M, \partial D_j \times M_j)$ 满足以下条件：

(1) $P_{\partial M,j}(f)(\cdot, \hat{w}_j) \in H^2(D_j)$，对任意 $\hat{w}_j \in M_j$ 均成立；

(2) $f = \gamma_j(P_{\partial M,j}(f))$ 在 $\partial D_j \times M_j$ 上几乎处处成立。

设 ρ 是定义在 ∂M 上的勒贝格可测函数，且满足 $\inf_{\partial M} \rho > 0$。记

$$\ll f, g \gg_{\partial D_j \times M_j, \rho} := \frac{1}{2\pi} \int_{M_j} \int_{\partial D_j} f(w_j, \hat{w}_j) \overline{g(w_j, \hat{w}_j)} \rho |dw_j| d\mu_j(\hat{w}_j)$$

对任意 f、$g \in L^2(\partial D_j \times M_j, \rho d\mu) \subset L^2(\partial D_j \times M_j, d\mu)$ 均成立。记

$$H^2_\rho(M, \partial D_j \times M_j) := \{f \in H^2(M, \partial D_j \times M_j) : \|f\|_{\partial D_j \times M_j, \rho} < +\infty\}.$$

$H^2_\rho(M, \partial D_j \times M_j)$ 是一个赋有内积 $\ll \cdot, \cdot \gg_{\partial D_j \times M_j, \ \rho}$的希尔伯特空间（见 [13]）。

我们回顾以下引理。

引理 2.14（[13]）。对于 M 的任意紧子集 K，存在一个正常数 C_K，使得

$$|f^*(z)| \leq C_K \|f\|_{\partial D_j \times M_j, \rho}$$

对任意 $z \in K$ 和 $f \in H^2_\rho$（M，$\partial D_j \times M_j$）均成立。

下文中，假设 $\rho|_{\partial D_1 \times M_1} = \rho_1 \times \lambda_1$，其中 ρ_1 是 ∂D_1 上的正勒贝格可测函数，而 λ_1 是 M_1 上的正勒贝格可测函数，使得 A^2（M_1，λ_1）：$= \{f \in \mathcal{O}(M_1) : \int_{M_1} |f|^2 \lambda_1 < +\infty\}$ 是一个关于内积 $\ll f, g \gg_{M_1, \ \lambda_1} := \int_{M_1} f\overline{g}\lambda_1$ 的希尔伯特空间，即，λ_1 是 M_1 上的可容许权重（见第 2.4 节）。

引理 2.15（[13]）。假设 $H^2_\rho(M, \partial D_1 \times M_1) \neq \{0\}$。那么我们有$H^2_{\rho_1}(D_1, \partial D_1) \neq \{0\}$ 以及 $A^2(M_1, \lambda_1) \neq \{0\}$。此外，$\{e_m(z)\tilde{e}_l(w)\}_{m,l \in \mathbb{Z}_{>0}}$是 $H^2_\rho(M, \partial D_1 \times M_1)$ 的完备正交归一基，其中 $\{e_m\}_{m \in \mathbb{Z}_{>0}}$是 $H^2_{\rho_1}(D_1, \partial D_1)$ 的完备正交归一基，而 $\{\tilde{e}_m\}_{m \in \mathbb{Z}_{>0}}$是 $A^2(M_1, \lambda_1)$ 的完备正交归一基。

设对于任意 $1 \leq j \leq n$ 和 $1 \leq k \leq m_j$，$p_{j,k}$ 均为正实数。设 $\psi_1 = \sum_{1 \leq k \leq m_1} p_{1,k} G_{D_1}(\cdot, z_{1,k})$ 定义在 D_1 上，并设 $\psi_1 = \max_{2 \leq j \leq n} \{\sum_{1 \leq k \leq m_j} p_{j,k} G_{D_j}(\cdot, z_{j,k})\}$ 定义在 M_1 上。

引理 2.16. 假设 ρ_1 是定义在 $U \cap \overline{D}_1$上的正勒贝格可测函数，并且对于任意 $\tilde{z} \in \partial D_1$，当 z趋于 $\tilde{z}$时，$\lim_{z \to \tilde{z}} \rho_1$的极限为 $= \rho_1$，其中 U 是∂D_1的一个邻域。那么

(2.9)

$$\|f\|_{\partial D_1 \times M_1, \rho} = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to 1-0} \int_{M_{1,r}} \int_{\partial D_{1,r}} |f^*(w_1, \hat{w}_1)|^2 \rho_1(w_1) |dw_1| \lambda_1(\hat{w}_1) d\mu_1(\hat{w}_1)$$

对于任意 $f \in H^2_\rho(M, \partial D_1 \times M_1)$，下式成立，其中 $D_{1,r} = \{z \in \overline{D}_1 : \psi_1(z) < \log r\}$，且 $\hat{}M_{1,r} = \{z \in M_1 : \psi_1(z) < \log r\}$，当 $r \in [0,1]$时。

证明。由引理 2.7 可知

$$\psi_1 - \log r = \sum_{1 \le k \le m_1} p_{1,k} G_{D_{1,r}}(\cdot, z_{1,k}) \tag{2.10}$$

在 $D_{1,r}$ 上，其中 $G_{D_{1,r}}(\cdot, z_{1,k})$ 是 $D_{1,r}$ 上的格林函数。对于定义在 D_1 上的任意全纯函数 h 以及任意 $\tilde{z} \in D_1$，由于 $|h|^2$ 是次调和函数，我们知道 $\int_{\partial D_{1,r}} |h(z)|^2 \frac{\partial G_{D_{1,r}}(z,\tilde{z})}{\partial v_z} \overline{|dz|}(z,\tilde{z})$ 关于 r 单调递增。结合引理 2.6，可得

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\partial D_{1,r}} |h(z)|^2 \frac{G_{D_{1,r}}(z,\tilde{z})}{\partial v_z} |dz| = \int_{\partial D_1} |h(z)|^2 \frac{G_{D_1}(z,\tilde{z})}{\partial v_z} |dz|$$

对于 $h \in H^2(D_1)$。因此，由 Levi 定理和等式 (2.10) 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \to 1-0} \int_{M_{1,r}} \int_{\partial D_{1,r}} |\tilde{f}^*(w_1, \hat{w}_1)|^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial v_z} |dw_1| \lambda_1(\hat{w}_1) d\mu_1(\hat{w}_1) \\
=&\lim_{r \to 1-0} \sum_{1 \le k \le m_1} p_{1,k} \int_{M_{1,r}} \int_{\partial D_{1,r}} |\tilde{f}^*(w_1, \hat{w}_1)|^2 \frac{\partial G_{D_{1,r}}(w_1, z_{1,k})}{\partial v_z} |dw_1| \lambda_1(\hat{w}_1) d\mu_1(\hat{w}_1) \\
=&\sum_{1 \le k \le m_1} p_{1,k} \int_{M_1} \int_{\partial D_1} |\tilde{f}(w_1, \hat{w}_1)|^2 \frac{\partial G_{D_1}(w_1, z_{1,k})}{\partial v_z} |dw_1| \lambda_1(\hat{w}_1) d\mu_1(\hat{w}_1) \\
=&\int_{M_1} \int_{\partial D_1} |\tilde{f}(w_1, \hat{w}_1)|^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial v_z} \lambda_1(\hat{w}_1) |dw_1| d\mu_1(\hat{w}_1)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

对任意 $\tilde{f} \in H^2_{\frac{\partial \psi_1}{\partial v_z}\lambda_1}(M, \partial D_1 \times M_1)$ 均成立。存在正数 L_1 和$r_0 \in [0,1]$ 使得

$$\frac{1}{L_1} < \inf_{\{z \in \overline{D}_1 : \psi_1(z) \ge \log r_0\}} \min\{|\bigtriangledown \psi_1|, \rho_1\} \le \sup_{\{z \in \overline{D}_1 : \psi_1(z) \ge \log r_0\}} \max\{|\bigtriangledown \psi_1|, \rho_1\} < L_1.$$

根据引理 2.15，存在 $\{f_l\}_{l \in \mathbb{Z}_{>0}} \subset H^2_{\rho_1}(D_1, \partial D_1)$ 和 $\{g_l\}_{l \in \mathbb{Z}_{>0}} \subset A^2(M_1, \lambda_1)$，使得

$$f = \sum_{l=1}^{+\infty} f_l g_l. \tag{2.12}$$

记 $F_m := \sum_{l=m+1}^{+\infty} f_l g_l \in H^2_\rho(M, \partial D_1 \times M_1)$。由等式 (2.11) 和引理 2.8 可得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r \to 1-0} \int_{M_{1,r}} \int_{\partial D_{1,r}} |F^*_m(w_1, \hat{w}_1)|^2 \rho_1(w_1) |dw_1| \lambda_1(\hat{w}_1) d\mu_1(\hat{w}_1) \\
\le& L_1^2 \limsup_{r \to 1-0} \int_{M_{1,r}} \int_{\partial D_{1,r}} |F^*_m(w_1, \hat{w}_1)|^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial v_z} |dw_1| \lambda_1(\hat{w}_1) d\mu_1(\hat{w}_1) \\
\le& L_1^2 \int_{M_1} \int_{\partial D_1} |F_m(w_1, \hat{w}_1)|^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial v_z} \lambda_1(\hat{w}_1) |dw_1| d\mu_1(\hat{w}_1) \\
\le& L_1^4 \int_{M_1} \int_{\partial D_1} |F_m(w_1, \hat{w}_1)|^2 \rho |dw_1| d\mu_1(\hat{w}_1).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

利用引理 2.9，我们得到

(2.14)

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 1-0}\left(\int_{M_{1,r}}\int_{\partial D_{1,r}}|\sum_{1\leq l\leq m}f_l(w_1)g_l(\hat{w}_1)|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1)\right)^{\frac{1}{2}}\\
\leq&\limsup_{r\to 1-0}\sum_{1\leq l\leq m}\left(\int_{M_{1,r}}\int_{\partial D_{1,r}}|f_l(w_1)g_l(\hat{w}_1)|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1)\right)^{\frac{1}{2}}\\
=&\limsup_{r\to 1-0}\sum_{1\leq l\leq m}\left(\int_{M_{1,r}}|g_l(\hat{w}_1)|^2\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1)\int_{\partial D_{1,r}}|f_l(w_1)|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\right)^{\frac{1}{2}}\\
=&\sum_{1\leq l\leq m}\left(\int_{M_1}|g_l(\hat{w}_1)|^2\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1)\int_{\partial D_1}|f_l(w_1)|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\right)^{\frac{1}{2}}\\
=&\left(\int_{M_1}\int_{\partial D_1}|\sum_{1\leq l\leq m}f_l(w_1)g_l(\hat{w}_1)|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

对于任意 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$。由等式 (2.12)、不等式 (2.13) 和 (2.14)，可得

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 1-0}\left(\int_{M_{1,r}}\int_{\partial D_{1,r}}|f^*(w_1,\hat{w}_1)|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1)\right)^{\frac{1}{2}}\\
\leq&\liminf_{m\to+\infty}\left(\limsup_{r\to 1-0}\Big(\int_{M_{1,r}}\int_{\partial D_{1,r}}|\sum_{1\leq l\leq m}f_lg_l|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1)\Big)^{\frac{1}{2}}\right.\\
&\left.+\limsup_{r\to 1-0}\Big(\int_{M_{1,r}}\int_{\partial D_{1,r}}|F_m^*|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1)\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\\
\leq&\liminf_{m\to+\infty}\left(\Big(\int_{M_1}\int_{\partial D_1}|\sum_{1\leq l\leq m}f_l(w_1)g_l(\hat{w}_1)|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1)\Big)^{\frac{1}{2}}\right.\\
&\left.+\Big(L_1^4\int_{M_1}\int_{\partial D_1}|F_m(w_1,\hat{w}_1)|^2\rho|dw_1|d\mu_1(\hat{w}_1)\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\\
=&(2\pi)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{\partial D_1\times M_1,\rho}.
\end{aligned}
$$

由 Fatou 引理，可得

$$
2\pi\|f\|^2_{\partial D_1\times M_1,\rho}\leq\liminf_{r\to 1-0}\int_{M_{1,r}}\int_{\partial D_{1,r}}|f^*(w_1,\hat{w}_1)|^2\rho_1(w_1)|dw_1|\lambda_1(\hat{w}_1)d\mu_1(\hat{w}_1).
$$

因此，等式 (2.9) 成立。 □

2.2.2. 关于 $H^2_\rho(M,\partial M)$ 的一些结果。设 ρ是定义在∂M 上的勒贝格可测函数，满足 $\inf_{\partial M}\rho>0$。记

$$
\ll f,g\gg_{\partial M,\rho}:=\sum_{1\leq j\leq n}\frac{1}{2\pi}\int_{M_j}\int_{\partial D_j}f(w_j,\hat{w}_j)\overline{g(w_j,\hat{w}_j)}\rho|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)
$$

对任意 $f, g \in L^2(\partial M, \rho d\mu) \subset L^2(\partial M, d\mu)$。$\partial M$ 上的加权 Hardy 空间定义如下：

对于任意 $f \in L^2(\partial M, \rho d\mu)$，如果对于任意 $1 \leq j \leq n$ 和 $P_{\partial M,\ j}(f) = P_{\partial M,\ k}(f)$，都有 $f \in H^2_\rho(M, \partial D_j \times M_j)$，则称 $f \in H^2_\rho(M, \partial M)$。

记 $P_{\partial M}(f) := P_{\partial M,\ j}(f)$，其中任意 $f \in H^2_\rho(M, \partial M)$ 均成立（为简便起见，也记作 f^*），并且 $P_{\partial M}$ 是从 $H^2_\rho(M, \partial M)$ 到 $\mathcal{O}(M)$ 的线性单射。$H^2_\rho(M, \partial M)$ 是一个希尔伯特空间，其内积为 $\ll \cdot, \cdot \gg_{\partial M,\ \rho}$（见 [13]）。令 Z_0 为 M 的任意子集，并令 J_z 为 $\mathcal{O}_z$ 的理想，对任意 $z \in Z_0$ 均成立。令 f_0 为 Z_0 的某个邻域上的全纯函数。记

$$M_H(Z_0, J, \rho) := \inf \Big\{ \|f\|^2_{\partial M, \rho} : f \in H^2_\rho(M, \partial M) \\ \text{s.t. } (f^* - f_0, z) \in J_z \text{ for any } z \in Z_0 \Big\}.$$

以下引理将在引理 2.18 的证明中用到。

引理 2.17（见 [4]）。设 N 是 $\mathcal{O}^q_{\mathbb{C}^n, o}$, $1 \leq q < +\infty$ 的一个子模，且设 $f_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)^q$ 是一个由 q–元组构成的序列，它们在原点 o 的一个开邻域 U 内全纯。假设这些 f_j 在 U 中一致收敛于一个 q–元组 $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)^q$，并进一步假设所有芽 (f_j, o) 都属于 N。那么 $(f, o) \in N$。

引理 2.18。假设 $M_H(Z_0, J, \rho) < +\infty$。那么存在唯一的 $f \in H^2_\rho(M, \partial M)$，满足对于任意 $z \in Z_0$，均有 $(f^* - f_0, z) \in J_z$，且 $M_H(Z_0, J, \rho) = \|f\|^2_{\partial M, \rho}$。

证明。首先，我们证明 f 的存在性。由于 $M_H(Z_0, J, \rho) < +\infty$，存在 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{>0}} \subset H^2_\rho(M, \partial M)$，使得 $\lim_{j \to +\infty} \|f_j\|^2_{\partial M, \rho} = M_H(Z_0, J, \rho) < +\infty$ 且 $(f^*_j - f_0, z) \in J_z$ 对任意 $z \in Z_0$ 和任意 j 均成立。于是，$\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$ 有一个子列，仍记为 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$，它弱收敛于元素 $f \in H^2_\rho(M, \partial M)$，即，

$$\lim_{j \to +\infty} \ll f_j, g \gg_{\partial M, \rho} = \ll f, g \gg_{\partial M, \rho} \tag{2.15}$$

对任意 $g \in H^2_\rho(M, \partial M)$ 均成立。因此，我们有

$$\|f\|^2_{\partial M, \rho} \leq \lim_{j \to +\infty} \|f_j\|^2_{\partial M, \rho} = M_H(Z_0, J, \rho). \tag{2.16}$$

由引理 2.14 可知，$\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$ 有一个子列，仍记为 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$，满足 f^*_j 在 M 的任意紧子集上都一致收敛于全纯函数 g_0，该函数定义在 M 上。由引理 2.14，对于任意 $z \in M$，存在 $g_z \in H^2_\rho(M, \partial M)$，使得

$$\ll g, g_z \gg_{\partial M, \rho} = g(z) \tag{2.17}$$

对任意 $g \in H^2_\rho(M, \partial M)$ 都成立。由等式 (2.15) 和 (2.17)，可得

$$\lim_{j \to +\infty} f^*_j(z) = f^*(z)$$

对于任意 $z \in M$，因此我们知道 $f^* = g_0$ 和 f^*_j 在 M 的任意紧子集上一致收敛到 f^*。由引理 2.17 和 $(f^*_j - f_0, z) \in J_z$，对于任意 $z \in Z_0$ 和任意 j，可得

$$(f^* - f_0, z) \in J_z$$

对于任意 $z \in Z_0$。根据 $M_H(Z_0, J, \rho)$ 的定义以及不等式 (2.16)，我们有

$$\|f\|^2_{\partial M,\rho} = M_H(Z_0, J, \rho).$$

因此，我们得到了 f 的存在性。

现在，我们用反证法证明 f 的唯一性：否则，存在两个不同的 $g_1 \in H^2_\rho(M, \partial M)$ 和 $g_2 \in H^2_\rho(M, \partial M)$，满足 $\|g_1\|^2_{\partial M,\ \rho} = \|g_1\|^2_{\partial M,\ \rho} = M_H(Z_0, J, \rho)$、$(g_1^* - f_0, z) \in J_z$ 和 $(g_2^* - f_0, z) \in J_z$ 对任意 $z \in Z_0$ 均成立。显然，

$$(\frac{g_1^* + g_2^*}{2} - f_0, z) \in J_z.$$

注意到

$$\|\frac{g_1 + g_2}{2}\|^2_{\partial M,\rho} + \|\frac{g_1 - g_2}{2}\|^2_{\partial M,\rho} = \frac{\|g_1\|^2_{\partial M,\rho} + \|g_2\|^2_{\partial M,\rho}}{2} = M_H(Z_0, J, \rho),$$

于是我们得到

$$\|\frac{g_1 + g_2}{2}\|^2_{\partial M,\rho} < M_H(Z_0, J, \rho),$$

这与 $M_H(Z_0, J, \rho)$ 的定义矛盾。

因此，引理 2.18 已得证。 □

令 $Z_j = \{z_{j,1}, z_{j,2}, ..., z_{j,m_j}\} \subset D_j$，对任意 $j \in \{1, 2, ..., n\}$，其中 m_j 是正整数。记

$$Z_0 := \prod_{1\le j\le n} Z_j \subset M.$$

令 $\psi = \max_{1\le j\le n}\{\sum_{1\le k\le m_j} p_{j,k} G_{D_j}(\cdot, z_{j,k})\}$。

设 $\hat{}\rho$ 是定义在 $\overline{M}$ 上的勒贝格可测函数，满足 $\inf_{\overline{M}} \hat{}\rho > 0$，且对任意 $(w_j, \hat{}w_j) \in \partial D_j \times M_j \subset \partial M$ 及任意$1 \le j \le n$，有 $\hat{}\rho(w_j, \hat{}w_j) \le \liminf_{w\to w_j} \hat{}\rho(w, \hat{}w_j)$，其中 $M_j = \prod_{l\neq j} D_l$。设 ρ 是定义在 ∂M 上的勒贝格可测函数，使得

$$\rho(w_1, \ldots, w_n) := \left(\sum_{1\le k\le m_j} p_{j,k} \frac{\partial G_{D_j}(w_j, z_{j,k})}{\partial v_{w_j}}\right)^{-1} \hat{\rho}$$

对任意 $1 \le j \le n$，在 $\partial D_j \times M_j$ 上，因此我们有 $\inf_{\partial M} \rho > 0$。

下面的命题给出了 $f \in H^2_\rho(M, \partial M)$ 的一个充分条件。

命题 2.19. 设 g 是定义在 M 上的全纯函数。假设

$$\liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in M: 2\psi(z)\ge \log r\}} |g(z)|^2 \hat{\rho}}{1 - r} < +\infty,$$

那么存在 $f \in H^2_\rho(M, \partial M)$，使得 $f^* = g$ 并且

$$\|f\|^2_{\partial M,\rho} \le \frac{1}{\pi} \liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in M: 2\psi(z)\ge \log r\}} |g(z)|^2 \hat{\rho}}{1 - r}.$$

证明。若 Z_0 是单点集，则可参见 [13] 中的命题 2.19。令 $\psi(w_1, \ldots, w_n) = \max_{1\le j\le n}\{2G_{D_j}(w_j, z_{j,\ 1})\}$ 在 M 上。存在 $t_0 > 0$ 和 C，使得

$$\{z \in M : \tilde{\psi}(z) \ge -t\} \subset \{z \in M : \psi(z) \ge -Ct\}$$

对于任意的 $t \in (0, t_0)$（见 [12]），这意味着

$$\liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in M: \tilde{\psi}(z)\ge \log r\}} |g(z)|^2 \hat{\rho}}{1 - r} < +\infty.$$

由于当 Z_0 是单点集时，命题 2.19 成立，因此存在 $f \in H^2(M, \partial M)$，使得 $f^* = g$。

在下面的部分中，我们将证明

$$\sum_{1\le j\le n}\int_{M_j}\int_{\partial D_j}|f|^2\rho|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)\le 2\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\{z\in M:2\psi(z)\ge\log r\}}|g(z)|^2\hat{\rho}}{1-r}.$$

任取 K_j M_j 的一个紧子集，其中任意 $1\le j\le n$，并记

$$\Omega_{j,r}:=\{z\in D_j:2\sum_{1\le k\le m_j}p_{j,k}G_{D_j}(z,z_{j,k})\ge\log r\}\times K_j\subset\{z\in M:2\psi(z)\ge\log r\}$$

对任意 $1\le j\le n$。存在 $r_1\in(0,1)$，使得 $\Omega_{j,\,r_1}\cap\Omega_{j',\,r_1}=\emptyset$ 对任意 $j\ne j'$，且 $|\bigtriangledown\psi_j|\ne 0$ 在 $\{z\in D_j$ 上满足：$2\psi_j\ge\log\, r\}$，其中 $\psi_j=\sum_{1\le k\le m_j}p_{j,\,k}G_{D_j}(\cdot,z_{j,\,k})$ 在 D_j 上。注意，$f(\cdot,\hat{w}_1)=\gamma_1(g(\cdot,\hat{w}_1))$ 表示 $g(\cdot,\hat{w}_1)$ 在 ∂D_1 上几乎处处的非切向边界值，对任意 $\hat{w}_1\in M_1$。如

$$\hat{\rho}(w_1,\hat{w}_1)\le\liminf_{w\to w_1}\hat{\rho}(w,\hat{w}_1)$$

对于任意 $(w_1,\hat{w}_1)\in\partial D_1\times M_1$，由 Fatou 引理、引理 2.8 和引理 2.12 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{K_1}\int_{\partial D_1}|f(w_1,\hat{w}_1)|^2\rho|dw_1|d\mu_1(\hat{w}_1)\\
=&\int_{K_1}\left(\int_{\partial D_1}\frac{|\gamma_1(g(\cdot,\hat{w}_1))|^2}{\sum_{1\le k\le m_j}p_{1,k}\frac{\partial G_{D_1}(w_1,z_{1,k})}{\partial v_{w_1}}}\hat{\rho}|dw_1|\right)d\mu_1(\hat{w}_1)\\
\le&\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\log r}^0\left(\int_{K_1}\left(\int_{\{\psi_1=s\}}\frac{|g|^2\hat{\rho}}{|\bigtriangledown\psi_1|}|dw_1|\right)d\mu_1(\hat{w}_1)\right)ds}{-\log r}\\
=&\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\Omega_{1,r^2}}|g|^2\hat{\rho}}{-\log r}\\
=&2\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\Omega_{1,r}}|g|^2\hat{\rho}}{-\log r}.
\end{aligned}$$

通过类似的讨论，我们有

$$\int_{K_j}\int_{\partial D_j}|f(w_j,\hat{w}_j)|^2\rho|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)\le 2\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\Omega_{j,r}}|g|^2\hat{\rho}}{-\log r}\tag{2.18}$$

对于任意 $1\le j\le n$。由于 $\Omega_{j,\,r}\cap\Omega_{j',\,r}=\emptyset$ 对于任意 $j\ne j'$ 和 $r\in(r_1,1)$，由 K_j 的任意性及不等式 (2.18) 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le j\le n}\int_{M_j}\int_{\partial D_j}|f(w_j,\hat{w}_j)|^2\rho|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)\\
\le&2\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\{z\in M:2\psi(z)\ge\log r\}}|g|^2\hat{\rho}}{-\log r}\\
=&2\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\{z\in M:2\psi(z)\ge\log r\}}|g|^2\hat{\rho}}{1-r}\\
<&+\infty.
\end{aligned}$$

因此，命题 2.19 成立。 □

以下引理将在引理 2.21 的证明中使用。

引理 2.20（[20]）。设 u 是 Ω 上的次调和函数。若 $v(dd^c u, z_0) < 1$，则 e^{-2u} 在 z_0 的某个邻域上是 L^1。

设 φ_j 是 D_j上的次调和函数，并且对于任意 $z \in \partial D_j$，φ_j 在 z 处连续。设 $\rho = \prod_{1\le j\le n} e^{-\varphi_j}$ 在 $\overline{M}$ 上。

引理 2.21。假设 $n > 1$。设 $f \in H^2_\rho(M, \partial M)$。那么对于 M的任意紧子集 K，有 $\int_K |f^*|^2 e^{-\varphi} < +\infty$。

证明。由于对于任意 $z \in \partial D_j$，φ_j 在 z 处连续，对于任意 j，由魏尔斯特拉斯定理（见 [3]）和 Siu 分解定理可知，存在 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数 g_j，使得 $\varphi_j - 2\log|g_j|$ 在 D_j 上是次调和函数，且 Lelong 数

$$v(dd^c(\varphi_j - 2\log|g_j|), z) \in [0, 2)$$

对任意 $z \in D_j$ 都成立。引理 2.20 表明，$\prod_{1\le j\le n} e^{-(\varphi_j - 2\log|g_j|)}$ 在 M 上局部可积。因此，只需证明 $\frac{f^*}{\prod_{1\le j\le n} g_j}$ 是全纯的。

由于对任意 $\hat{w}_1 \in M_1$，$f^*(\cdot, \hat{w}_1) \in H^2(D_1)$，且 $\gamma_1(f^*) = f$ 在 $\partial D_1 \times M_1$ 上几乎处处成立，由引理 2.1 可知，对任意 $K_1 \Subset D_1$，存在 $C_{K_1} > 0$ 使得

$$\sup_{w_1\in K_1} |f^*(w_1, \hat{w}_1)|^2 \le C_{K_1} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_1} |f(z_1, \hat{w}_1)|^2 |dz_1|, \tag{2.19}$$

对几乎处处的 $\hat{w}_1 \in M_1$ 都成立。注意，$\inf_{M} \frac{\rho}{e^{-2\log|g_l|}} > 0$。由于 $f \in H^2_\rho(M, \partial M)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{M_j}\int_{\partial D_j} \left|\frac{f^*}{g_l}\right|^2 |dz_j| d\mu_j(\hat{w}_j) \\
\le& C_0 \int_{M_j}\int_{\partial D_j} |f^*|^2 e^{-2\log|g_l|} \frac{\rho}{e^{-2\log|g_l|}} |dz_j| d\mu_j(\hat{w}_j) \\
\le& C_0 \|f\|^2_{\partial M, \rho} \\
<& +\infty
\end{aligned} \tag{2.20}$$

对任意 $1 \le j, l \le n$ 都成立。由于 $g_2 \not\equiv 0$，不等式 (2.19) 和 (2.20) 推出

$$\begin{aligned}
&\int_{M_1}\int_{K_1} \left|\frac{f^*}{g_2}(w_1, \hat{w}_1)\right|^2 \\
\le& C_1 \int_{M_1} \sup_{w_1\in K_1} \left|\frac{f^*}{g_2}(w_1, \hat{w}_1)\right|^2 d\mu_1(\hat{w}_1) \\
\le& C_1 C_{K_1} \int_{M_1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_1} \left|\frac{f^*}{g_2}(z_1, \hat{w}_1)\right|^2 |dz_1|\right) d\mu_1(\hat{w}_1) \\
<& +\infty
\end{aligned}$$

对于任意 K_1，这意味着 $\frac{f^*}{g_2}$ 在 M 上是全纯的。因此，$\frac{f^*}{\prod_{1\le j\le n} g_j} \in \mathcal{O}(M)$。

□

2.3. 极小 L^2 积分的凹性。本节回顾关于极小 L^2 积分的凹性的一些结果（见 [9, 10, 11]）。

设 M 是一个 n–维 Stein流形，且 K_M 是 M上的典范（全纯）线丛。设 ψ是 M上的多重次调和函数，且φ 是 M上的勒贝格可测函数，使得 $\varphi+\psi$ 是 M上的多重次调和函数。取 $T=-\sup_M \psi > -\infty$。

定义 2.22. 若正可测函数 c 在$(T,+\infty)$上属于类 $\mathcal{P}_T$，并且满足以下两个条件，则称其为该类函数:

(1) $c(t)e^{-t}$ 关于 t单调递减;

(2) 存在 M 的闭子集 E，使得 $E\subset\{z\in Z:\ \psi(z)=-\infty\}$；对于任意紧子集 $K\subseteq M\backslash E$，$e^{-\varphi}c(-\psi)$ 在 K 上有正的下界，其中 Z 是 M 的某个解析子集。

设 Z_0 是 $\{\psi=-\infty\}$ 的子集，满足 $Z_0\cap Supp(\{\mathcal{O}/\mathcal{I}(\varphi+\psi)\})\neq\emptyset$。设$U\supseteq Z_0$ 是 M 的开子集，并设 f 是 U 上的一个全纯 $(n,0)$ 形式。设 $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{I}(\varphi+\psi)|_U$ 是 U 上 $\mathcal{O}$ 的一个解析子层。

记

$$\inf\left\{\int_{\{\psi<-t\}}|\tilde{f}|^2e^{-\varphi}c(-\psi):(\tilde{f}-f)\in H^0(Z_0,(\mathcal{O}(K_M)\otimes\mathcal{F})|_{Z_0})\right.$$
$$\left.\&\ \tilde{f}\in H^0(\{\psi<-t\},\mathcal{O}(K_M))\right\},$$

为 $G(t;c)$（为避免误解，我们将 $G(t;c)$ 记作 $G(t)$），其中 $t\in[T,+\infty)$，$c\in\mathcal{P}_T$ 满足 $\int_T^{+\infty}c(l)e^{-l}dl<+\infty$，$|f|^2:=\sqrt{-1}^{n^2}f\wedge\bar{f}$ 对任意 $(n,0)$ 形式 f 均成立，并且（$\tilde{f}-f$）$\in H^0(Z_0,(\mathcal{O}(K_M)\otimes\mathcal{F})|_{Z_0})$ 表示（$\tilde{f}-f,z_0$）$\in(\mathcal{O}(K_M)\otimes\mathcal{F})_{z_0}$ 对所有 $z_0\in Z_0$ 均成立。

我们回顾一些关于 $G(t)$ 凹性的结果。

定理 2.23（[9]）。假设 $G(T)<+\infty$。那么，$G(h^{-1}(r))$ 关于 $r\in(0,\int_T^{+\infty}c(l)e^{-l}dl)$ 是凹的，$\lim_{t\to T+0}G(t)=G(T)$ 且 $\lim_{t\to+\infty}G(t)=0$，其中 $h(t)=\int_t^{+\infty}c(l)e^{-l}dl$。

下面的推论给出了 $G(h^{-1}(r))$ 的凹性退化为线性时的一个必要条件。

推论 2.24（[9]）。假设 $G(T)\in(0,+\infty)$。若 $G(h^{-1}(r))$ 关于 $r\in(0,\int_T^{+\infty}c(l)e^{-l}dl)$ 是线性的，其中 $h(t)=\int_t^{+\infty}c(l)e^{-l}dl$，则存在唯一的全纯（$n,0$）形式 Fon M，满足（$F-f$）$\in H^0(Z_0,(\mathcal{O}(K_M)\otimes\mathcal{F})|_{Z_0})$，并且对任意 $t\geq T$，$G(t;c)=\int_{\{\psi<-t\}}|F|^2e^{-\varphi}c(-\psi)$。此外，

$$\int_{\{-t_1\leq\psi<-t_2\}}|F|^2e^{-\varphi}a(-\psi)=\frac{G(T_1;c)}{\int_{T_1}^{+\infty}c(l)e^{-l}dl}\int_{t_2}^{t_1}a(t)e^{-t}dt$$

对于 $(T,+\infty)$ 上任意非负可测函数 a，其中 $+\infty\geq t_1>t_2\geq T$。

我们回顾与$G(t)$相关的全纯 $(n,0)$ 形式的存在性与唯一性。

引理 2.25（[9]）。假设对于某个 $t\in[T,+\infty)$，$<+\infty$ $G(t)$。那么存在唯一的全纯（$n,0$）形式 F_t，定义在 $\{\psi<-t\}$ 上，并满足（F_t-f）$\in$。

$H^0(Z_0,(\mathcal{O}(K_M)\otimes\mathcal{F})|_{Z_0})$，且 $\int_{\{\psi<-t\}}|F_t|^2e^{-\varphi}c(-\psi)=G(t)$。此外，对于任意满足（$\hat{}F-f$）$\in H^0(Z_0,(\mathcal{O}(K_M)\otimes\mathcal{F})|_{Z_0})$ 且 $\int_{\{\psi<-t\}}|\hat{}F|^2e^{-\varphi}c(-\psi)<+\infty$ 的全纯（$n,0$）形式 $\hat{}F$，我们有如下等式：

$$\begin{aligned}&\int_{\{\psi<-t\}}|F_t|^2e^{-\varphi}c(-\psi)+\int_{\{\psi<-t\}}|\hat{F}-F_t|^2e^{-\varphi}c(-\psi)\\=&\int_{\{\psi<-t\}}|\hat{F}|^2e^{-\varphi}c(-\psi).\end{aligned}$$

下面我们回顾一些刻画 $G(h^{-1}(r))$的凹性退化为线性的条件。

假设 M =Ω是一个存在非平凡格林函数 G_Ω的开黎曼曲面。设 $Z_0=\{z_1,z_2,\ldots,z_m\}\subset$Ω是Ω的一个有限子集，满足：$z_j\neq z_k$ 对任意 $j\neq k$。

我们回顾一些记号（参见 [3], ，另见 [14, 9, 6]）。令 $p:\ \Delta\to$Ω为从单位圆盘 Δ 到Ω的万有覆盖。若存在一个特征 χ（即Ω的基本群的表示），使得 $g^\star f=\chi(g)f$，其中 $|\chi|=1$，且 g 是Ω的基本群的一个元素，则称全纯函数 f 在 Δ 上为乘法函数。已知，对Ω上的任意调和函数u，都存在一个 χ_u 和一个乘法函数 $f_u\in\mathcal{O}^{\chi_u}$(Ω)，使得$|f_u|=p^\star(e^u)$。回忆一下，对于格林函数 $G_\Omega(z,z_j)$，存在一个χ_{z_j}和一个乘法函数$f_{z_j}\in\mathcal{O}^{\chi_{z_j}}$(Ω)，使得 $|f_{z_j}(z)|=p^\star\left(e^{G_\Omega(z,\ z_j)}\right)$（参见 [22, 21]）。

下面的定理给出了 $G(h^{-1}(r))$ 的凹性退化为线性时的刻画。

定理 2.26（[10], 另见 [7]）。设 $G(0)\in(0,+\infty)$ 且 $p_j=\frac{1}{2}v(dd^c(\psi)\ z_j)>0$对任意 $j\in\{1,2,\ldots,m\}$成立。对于任意 $j\in\{1,2,\ldots,m\}$，假设以下条件之一成立：

(A) $\varphi+a\psi$ 在 z_j 附近对某个 $a\in[0,1)$ 是次调和的；(B) $(\psi-2p_jG_\Omega(\cdot,z_j))(z_j)>-\infty$。

那么，$G(h^{-1}(r))$ 关于 r 是线性的，当且仅当以下陈述成立：

(1) $\psi=2\sum_{1\leq j\leq m}p_jG_\Omega(\cdot,z_j)$;

(2) $\varphi+\psi=2\log|g|+2\sum_{1\leq j\leq m}G_\Omega(\cdot,z_j)+2u$ 以及 $\mathcal{F}_{z_j}=\mathcal{I}(\varphi+\psi)^{z_j}$对任意$j\in\{1,2,\ldots,m\}$成立，其中 g是 Ω 上的全纯函数，满足 $ord_{z_j}(g)=ord_{z_j}(f)$ 对任意 $j\in\{1,2,\ldots,m\}$成立，且 u是 Ω 上的调和函数;

(3) $\prod_{1\leq j\leq m}\chi_{z_j}=\chi_{-u}$，其中 χ_{-u} 和 χ_{z_j} 分别是与函数 $-u$ 和 $G_\Omega(\cdot,z_j)$ 相关联的特征标;

(4) $\lim_{z\to z_k}\frac{f}{gp_*\left(f_u(\prod_{1\leq j\leq m}f_{z_j})\left(\sum_{1\leq j\leq m}p_j\frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}\right)\right)}=c_0\ for\ any\ k\in\{1,2,\ldots,m\}$,

其中 $c_0\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$是独立于 0 的常数，$u$ 是 上的调和函数，g 是 上的全纯函数，f_u 满足 $|f_u|=p^*(e^u)$ 且 f_{z_j} 是 上的全纯函数 Δ 满足 $|f_{z_j}|=p^*\left(e^{G_\Omega(\cdot,z_j)}\right)$

注 2.27 ([10])。当定理 2.26 中的四个陈述成立时，

$$c_0gp_*(f_u(\Pi_{1\leq j\leq m}f_{z_j})(\sum_{1\leq j\leq m}p_j\frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}))$$

是 Ω 上唯一的全纯 (1, 0) 形式 F，满足 $(F-f,z_j)\in(\mathcal{O}(K_\Omega))_{z_j}\otimes\mathcal{F}_{z_j}$，对任意 $j\in\{1,2,...,m\}$，以及 $G(t)=\int_{\{\psi<-t\}}|F|^2e^{-\varphi}c(-\psi)$，对任意 $t\geq 0$。

我们回顾最优 L^2 延拓问题中等式成立的以下刻画。

定理 2.28 ([10])。对于任意 $j\in\{1,2,...,m\}$，令 k_j 为非负整数。令 ψ 为 Ω 上的负次调和函数，并满足对于任意 $j\in\{1,2,...,m\}$，$\frac{1}{2}v(dd^c\psi,z_j)=p_j>0$。令 φ 为 Ω 上的勒贝格可测函数，使得 $\varphi+\psi$ 在 Ω 上为次调和函数，$\frac{1}{2}v(dd^c(\varphi+\psi)\ z_j)=k_j+1$，且 $\alpha_j:=(\varphi+\psi-2(k_j+1)G_\Omega(\cdot,z_j))(z_j)>-\infty$，对于任意 j。令 $c(t)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的正可测函数，满足 $c(t)e^{-t}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，且 $\int_0^{+\infty}c(s)e^{-s}ds<+\infty$。对于任意 j，令 a_j 为常数。

设 f 是 V_0 上满足 $f=a_jw_j^{k_j}dw_j$ 于 V_{z_j} 的全纯 (1, 0) 形式。那么，存在 Ω 上的全纯 (1, 0) 形式 F，使得 $(F-f,z_j)\in(\mathcal{O}(K_\Omega)\otimes\mathcal{I}(2(k_j+1)G_\Omega(\cdot,z_j)))_{z_j}$ 并且

$$\int_\Omega|F|^2e^{-\varphi}c(-\psi)\leq(\int_0^{+\infty}c(s)e^{-s}ds)\sum_{1\leq j\leq m}\frac{2\pi|a_j|^2e^{-\alpha_j}}{p_jc_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}. \tag{2.21}$$

此外，等式 $(\int_0^{+\infty}c(s)e^{-s}ds)\sum_{1\leq j\leq m}\frac{2\pi|a_j|^2e^{-\alpha_j}}{p_jc_\beta\ z_j\ \ ()^{2(k_j+1)}}=\inf\{\int_\Omega|\tilde{F}|^2e^{-\varphi}c(-\psi):$ ~ ~F 是 Ω 上满足 $(F-f,z_j)\in(\mathcal{O}(K_\Omega)\otimes\mathcal{I}(2(k_j+1)G_\Omega(\cdot,z_j)))_{z_j}$ 的全纯 (1, 0) 形式，当且仅当以下陈述成立：

(1) $\psi=2\sum_{1\leq j\leq m}p_jG_\Omega(\cdot,z_j)$；

(2) $\varphi+\psi=2\log|g|+2\sum_{1\leq j\leq m}(k_j+1)G_\Omega(\cdot,z_j)+2u$，其中 g 是在 Ω 上的全纯函数，且 $g(z_j)\neq 0$ 对任意 $j\in\{1,2,...,m\}$ 均成立，而 u 是在 Ω 上的调和函数；

(3) $\Pi_{1\leq j\leq m}\chi_{z_j}^{k_j+1}=\chi_{-u}$，其中 χ_{-u} 和 χ_{z_j} 分别是与函数 $-u$ 和 $G_\Omega(\cdot,z_j)$ 相关联的特征标；

$\lim_{z\to z}{}_k\frac{f}{gp_*(f_u(\Pi_{1\leq j\leq m}f_{z_j}^{k_j+1})(\sum_{1\leq j\leq m}p_j\frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}))}=c_0$ 对于任意 $k\in\{1,2...,m\}$，其中 $c_0\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 是一个与 k 无关的常数。

下文中，我们考虑 M 为开黎曼曲面之乘积流形的情形。

设 Ω$_j$ 是一个开黎曼曲面，它存在非平凡的格林函数G_{Ω_j}，且对任意 $1\leq j\leq n$。设

$$M=\prod_{1\leq j\leq n}\Omega_j$$

是一个 n–维复流形，并设 π_j 是从M 到 Ω$_j$的自然投影。设 K_M 是 M上的典范（全纯）线丛。设 φ_j 是 Ω$_j$上的次调和函数，并设

$$\varphi=\sum_{1\leq j\leq n}\pi_j^*(\varphi_j).$$

令 $Z_j=\{z_{j,1},z_{j,2},...,z_{j,m_j}\}\subset\Omega_j$，其中 m_j 是任意正整数 $j\in\{1,2,...,n\}$。记为

$$Z_0:=\prod_{1\leq j\leq n}Z_j\subset M.$$

令 $\psi=\max_{1\le j\le n}\{\pi_j^*(2\sum_{1\le k\le m_j}p_{j,k}G_{D_j}(\cdot,z_{j,k}))\}$，其中 $p_{j,k}>0$ 是一个常数。令 $\mathcal{F}_z=\mathcal{I}(\psi)_z$，其中 $z\in Z_0$ 为任意值。

设 $w_{j,k}$ 是邻域 $V_{z_{j,k}}\Subset\Omega_j$ 上的局部坐标，满足 $w_{j,k}(z_{j,k})=0$，其中 $j\in\{1,2,...,n\}$ 和 $k\in\{1,2,...,m_j\}$ 任意，且 $V_{z_{j,k}}\cap V_{z_{j,k'}}=\emptyset$ 对任意 j 和 $k\neq k'$ 均成立。记 $I_1:=\{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n):\ 1\le\beta_j\le m_j$，其中 $j\in\{1,2,...,n\}\}$, $V_\beta:=\prod_{1\le j\le n}V_{z_{j,\beta_j}}$ 对任意 $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ 均成立；并且 $w_\beta:=(w_{1,\beta_1},w_{2,\beta_2},...,w_{n,\beta_n})$ 是 $z_\beta:=(z_{1,\beta_1},z_{2,\beta_2},...,z_{n,\beta_n})\in M$ 上的局部坐标。

设 f_0 是定义在 $\cup_{\beta\in I_1}V_\beta$ 上的全纯 $(n,0)$ 形式。设 c 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的正函数，满足 $c(t)e^{-t}$ 在 $[0,+\infty)$ 上递减，$\lim_{t\to0+0}c(t)=c(0)=1$ 且 $\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt<+\infty$。

定理 2.29 ([11])。假设 $G(0)\in(0,+\infty)$ 且对任意 $\beta\in I_1$，$\varphi(z_\beta)>-\infty$。$G(h^{-1}(r))$ 关于 $r\in(0,\int_0^{+\infty}c(s)e^{-s}ds]$ 是线性的，当且仅当以下陈述成立：

(1) 对任意 $j\in\{1,2,...,n\}$，$\varphi_j=2\log|g_j|+2u_j$，其中 u_j 是 Ω_j 上的调和函数，g_j 是 Ω_j 上满足 $g_j(z_{j,k})\neq0$ 的全纯函数，且对任意 $k\in\{1,2,...,m_j\}$；

(2) 对任意 $j\in\{1,2,...,n\}$ 和 $k\in\{1,2,...,m_j\}$，存在一个非负整数 $\gamma_{j,k}$，使得 $\Pi_{1\le k\le m_j}\chi_{j,z_j}^{\gamma_{j,k}+1}(\cdot,z_{j,k})=\chi_{-u_j}$ 且 $\sum_{1\le j\le n}\gamma_{j,\beta_j}+1=1$ 对任意 $\beta\in I_1$ 均成立，其中 χ_{-u_j} 和 $\chi_{z_{j,k}}$ 分别是与函数 $-u_j$ 和 $G_{\Omega_j}(\cdot,z_{j,k})$ 相关联的特征标；

(3) $f=(c_\beta\Pi_{1\le j\le n}w_{j,\beta_j}^{\gamma_{j,\beta_j}}+g_\beta)dw_{1,\beta_1}\wedge dw_{2,\beta_2}\wedge...\wedge dw_{n,\beta_n}$ 在 V_β 上对任意 $\beta\in I_1$ 均成立，其中 c_β 是一个常数，g_β 是定义在 V_β 上的全纯函数，并满足 $(g_\beta,z_\beta)\in\mathcal{I}(\psi)_{z_\beta}$；

(4) $\lim_{z\to z_\beta}\frac{c_\beta\Pi_{1\le j\le n}w_{j,\beta_j}^{\gamma_{j,\beta_j}}dw_{1,\beta_1}\wedge dw_{2,\beta_2}\wedge...\wedge dw_{n,\beta_n}}{\wedge_{1\le j\le n}\pi_j^*(g_j(P_j)_*(f_{u_j}(\Pi_{1\le k\le m_j}f_{z_{j,k}}^{\gamma_{j,k}+1})(\sum_{1\le k\le m_j}p_{j,k}\frac{df_{z_{j,k}}}{f_{z_{j,k}}})))}=c_0$ *for any* $\beta\in I_1$，其中 $c_0\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 是一个与 o 无关的常数，P_j 是万有覆盖，f_{u_j} 是一个全纯函数，Δ 满足 $|f_{u_j}|=P_j^*(e^{u_j})$ 且 $f_{z_{j,k}}$ 是定义在 Δ 上的全纯函数，满足 $|f_{z_{j,k}}|=P_j^*(e^{G_{\Omega_j}(\cdot,z_{j,k})})$，对任意 $j\in\{1,2,...,n\}$ 和 $k\in\{1,2,...,m_j\}$ 均成立。

以下引理将在注 2.31 的证明中用到。

引理 2.30（见 [11]）。设 $\psi=\max_{1\le j\le n}\{2p_j\log|w_j|\}$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的多重次调和函数，其中 $p_j>0$。设 $f=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\ge0}}b_\alpha w^\alpha$（泰勒展开）是定义在 $\{\psi<-t_0\}$ 上的全纯函数，其中 $t_0>0$。那么

$$\int_{\{\psi<-t\}}|f|^2d\lambda_n=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\ge0}}e^{-\sum_{1\le j\le n}\frac{\alpha_j+1}{p_j}t}\frac{|b_\alpha|^2\pi^n}{\Pi_{1\le j\le n}(\alpha_j+1)}$$

对任意 $t\ge t_0$ 均成立。

注 2.31. 定理 2.29 中的要求"对任意 $\beta\in I_1$，$\varphi(z_\beta)>-\infty$"可以去掉。

证明。只需证明 $G(h^{-1}(r))$ 的线性可以推出 $\varphi(z_\beta)>-\infty$，对任意 $\beta\in I_1$ 均成立。

假设 $G(h^{-1}(r))$ 关于 $r \in (0, \int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt]$ 是线性的。由推论 2.24 可知，存在 M 上的全纯 $(n,0)$ 形式 F，使得对任意 $\beta \in I_1$，均有 $(F-f, z_\beta) \in \mathcal{I}(\psi)_{z_\beta}$，并且

$$\int_{\{\psi<-t\}} |F|^2 e^{-\varphi} = \frac{G(0)}{\int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt} e^{-t} \tag{2.22}$$

对于任意 $t \geq 0$。

首先，我们证明对于任意 $\beta \in I_1$，$(F, z_\beta) \notin \mathcal{I}(\psi)_{z_\beta}$。我们用反证法证明这一点：否则，存在 $\beta_0 \in I_1$，使得 $(F, z_{\beta_0}) \in \mathcal{I}(\psi)_{z_{\beta_0}}$。于是我们有

$$(f, z_{\beta_0}) \in \mathcal{I}(\psi)_{z_{\beta_0}}.$$

存在 $t>0$，使得 $\{\psi < -t\} \cap V_{\beta_0} \Subset V_{\beta_0}$. 推论 2.24 告诉我们，$F$ 是在 ψ 的任意次水平集上的唯一“极小形式”，因此我们有 $F \equiv 0$ 在$\{\psi<-t\}\cap V_{\beta_0}$上，这意味着

$$F \equiv 0$$

在 M 上。因此我们得到，对于任意 $\beta \in I_1$，$(f, z_\beta) \in \mathcal{I}(\psi)_{z_\beta}$，这与$G(0)>0$矛盾。

现在，我们证明对于任意 $\beta_{p_j} \in I_1$，$\varphi_j(z_\beta) > -\infty$。任取 $\beta \in I_1$，不失一般性，设 $|w_j(z)| = e^{\sum_{1\leq k\leq m_j} \frac{k}{p_j,\beta_j} G_{\Omega_j}(z,\, z_{j,\,k})}$ 在 $V_{z_{j,\,\beta_j}}$ 上，因此$\psi = \max_{1\leq j\leq n}\{2p_{j,\beta_j}\log|w_j|\}$在 V_β 上。存在 $t_0>0$ 使得

$$\{\psi < -t_0\} \cap V_\beta \Subset V_\beta.$$

记为

$$c_t := \sup_{\{\psi<-t\}\cap V_\beta} \varphi < +\infty$$

对于任意 $t \geq t_0$。由于 $\varphi = \sum_{1\leq j\leq n} \varphi_j$ 是多重次调和的，我们知道

$$\lim_{t\to+\infty} c_t = \varphi(z_\beta) = \sum_{1\leq j\leq n} \varphi_j(z_{j,\beta_j}).$$

令 $F = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} d_\alpha w^\alpha dw_1\wedge\ldots\wedge dw_n$ 在 z_β 附近。记 $E_\beta = \{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}: \sum_{1\leq j\leq n} \frac{\alpha_j+1}{p_j,\beta_j} \leq 1\}$。由于 $(F, z_\beta) \notin \mathcal{I}(\psi)_{z_\beta}$，我们有

$$\sum_{\alpha\in E_\beta} |d_\alpha|^2 > 0.$$

引理 2.30 告诉我们

$$\begin{aligned}
\int_{\{\psi<-t\}} |F|^2 e^{-\varphi} &\geq e^{-c_t} \int_{\{\psi<-t\}\cap V_\beta} |F|^2 \\
&= e^{-c_t} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} e^{-\sum_{1\leq j\leq n} \frac{\alpha_j+1}{p_{j,\beta_j}} t} \frac{|d_\alpha|^2(2\pi)^n}{\Pi_{1\leq j\leq n}(\alpha_j+1)} \\
&\geq e^{-c_t} \sum_{\alpha\in E_\beta} e^{-\sum_{1\leq j\leq n} \frac{\alpha_j+1}{p_{j,\beta_j}} t} \frac{|d_\alpha|^2(2\pi)^n}{\Pi_{1\leq j\leq n}(\alpha_j+1)}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

对于任意 $t\geq t_0$。由等式 (2.22) 和不等式 (2.23) 可得

$$\begin{aligned}\frac{G(0)}{\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}&=\lim_{t\to+\infty}e^t\int_{\{\psi<-t\}}|F|^2e^{-\varphi}\\&\geq\lim_{t\to+\infty}e^{-c_t}\sum_{\alpha\in E_\beta}e^{\left(1-\sum_{1\leq j\leq n}\frac{\alpha_j+1}{p_{j,\beta_j}}\right)t}\frac{|d_\alpha|^2(2\pi)^n}{\Pi_{1\leq j\leq n}(\alpha_j+1)},\end{aligned}\tag{2.24}$$

注意到 $\frac{G(0)}{\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}\in(0,+\infty)$ 和 $1-\sum_{1\leq j\leq n}\frac{\alpha_j+1}{p_{j,\beta_j}}\geq 0$ 对任意 $\alpha\in E_\beta$，不等式 (2.24) 表明

$$\lim_{t\to+\infty}c_t>-\infty,$$

因此我们有 $\varphi(z_\beta)>-\infty$。 □

记

$$c_{j,k}:=\exp\lim_{z\to z_{j,k}}\left(\frac{\sum_{1\leq k_1\leq m_j}p_{j,k_1}G_{\Omega_j}(z,z_{j,k_1})}{p_{j,k}}-\log|w_{j,k}(z)|\right)$$

对任意 $j\in\{1,2,...,n\}$ 和 $k\in\{1,2,...,m_j\}$。

注记 2.32（[11]）。当定理 2.29 中的四个陈述成立时，

$$c_0\wedge_{1\leq j\leq n}\pi_j^*(g_j(P_j)_*(f_{u_j}(\Pi_{1\leq k\leq m_j}f_{z_{j,k}}^{\gamma_{j,k}+1})(\sum_{1\leq k\leq m_j}p_{j,k}\frac{df_{z_{j,k}}}{f_{z_{j,k}}})))$$

是唯一的全纯 $(n,0)$ 形式 F 在 M 上满足 $(F-f,z_\beta)\in(\mathcal{O}(K_M))_{z_\beta}\otimes\mathcal{I}(\psi)_{z_\beta}$ 的形式，其中任意 $\beta\in I_1$ 以及

$$G(t)=\int_{\{\psi<-t\}}|F|^2e^{-\varphi}c(-\psi)=\left(\int_t^{+\infty}c(s)e^{-s}ds\right)\sum_{\beta\in I_1}\frac{|c_\beta|^2(2\pi)^ne^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\leq j\leq n}(\gamma_{j,\beta_j}+1)c_{j,\beta_j}^{2\gamma_{j,\beta_j}+2}}$$

任意 $t\geq 0$。

记 $E_\beta:=\{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n):\sum_{1\leq j\leq n}\frac{\alpha_j+1}{p_{j,\beta_j}}=1\ \&\ \alpha_j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。设 f 是 $\cup_{\beta\in I_1}V_\beta$ 上的全纯 $(n,0)$ 形式，满足 $f=\sum_{\alpha\in E_\beta}d_{\beta,\alpha}w_\beta^\alpha dw_{1,\beta_1}\wedge dw_{2,\beta_2}\wedge...\wedge dw_{n,\beta_n}$ 在 V_β 上对任意 $\beta\in I_1$成立。

我们回顾最优 L^2 延拓问题中等式成立的以下刻画。

定理 2.33（[11]）。如果 $\sum_{\beta\in I_1}\sum_{\alpha\in E_\beta}\frac{|d_\beta|^2\cdot\frac{\alpha!^2\ 2\pi\ ^n e^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\leq j\leq n}\ \alpha_j+1\ c_j^{2\alpha_j+2}}()()_{,\beta_j}}{}\in(0,+\infty)$，则存在 M 上的全纯 $(n,0)$ 形式 F，满足 $(F-f,z_\beta)\in(\mathcal{O}(K_M)\otimes\mathcal{I}(\psi))_{z_\beta}$，其中任意 $\beta\in I_1$ 以及

$$\int_M|F|^2e^{-\varphi}c(-\psi)\leq(\int_0^{+\infty}c(s)e^{-s}ds)\sum_{\beta\in I_1}\sum_{\alpha\in E_\beta}\frac{|d_{\beta,\alpha}|^2(2\pi)^ne^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\leq j\leq n}(\alpha_j+1)c_{j,\beta_j}^{2\alpha_j+2}}.$$

此外，假设在 V_{β^*} 上有 $f=w_{\beta^*}^{\alpha_{\beta^*}}dw_{1,1}\wedge dw_{2,1}\wedge...\wedge dw_{n,1}$，其中 $\beta^*=(1,1,...,1)\in I_1$，则对任意 $\beta\in I_1\}=(\int_0^{+\infty}c(s)e^{-s}ds)\sum_{\beta\in I_1}\sum_{\alpha\in E_\beta}\frac{|d_\beta|^2\cdot\frac{\alpha!^2\ 2\pi\ ^n e^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\leq j\leq n}\ \alpha_j+1\ c_j^{2\alpha_j+2}}()()_{,\beta_j}$，等式 $\inf\{\int_M|\tilde{F}|^2e^{-\varphi}c(-\psi):\tilde{F}\in H^0(M,\mathcal{O}(K_M))\ \&\ (\tilde{F}-f,z_\beta)\in(\mathcal{O}(K_M)\otimes\mathcal{I}(\max_{1\leq j\leq n}\{2\sum_{1\leq k\leq m_j}p_{j,k}\pi_j^*(G_{\Omega_j}(\cdot,z_{j,k}))\}))_{z_\beta}$ 成立，当且仅当以下陈述成立：

(1) 对任意 $j \in \{1,2,...,n\}$，$\varphi_j = 2\log|g_j| + 2u_j$，其中 u_j 是 Ω_j 上的调和函数，g_j 是 Ω_j 上满足 $g_j(z_{j,k}) \neq 0$ 的全纯函数，对任意 $k \in \{1,2,...,m_j\}$；

(2) 存在一个非负整数 $\gamma_{j,k}$ 对于任意 $j \in \{1,2,...,n\}$ 和 $k \in \{1,2,...,m_j\}$，满足 $\Pi_{1\leq k\leq m_j}\chi^{\gamma_{j,k}}_{j,z_j,k+1} = \chi_{j,-u_j}$ 以及 $\sum_{1\leq j\leq n}\gamma_{j,\beta_j+1,\beta_j} = 1$ 对于任意 ~~$\beta \in I_1$~~；

(3) $f = (c_\beta \Pi_{1\leq j\leq n} w_{j,\beta_j}^{\gamma_{j,\beta_j}} + g_\beta) dw_{1,\beta_1} \wedge dw_{2,\beta_2} \wedge ... \wedge dw_{n,\beta_n}$ 在 V_β 上对任意 $\beta \in I_1$ 成立，其中 c_β 是一个常数，g_β 是定义在 V_β 上的全纯函数，满足 $(g_\beta, z_\beta) \in \mathcal{I}(\psi)_{z_\beta}$；

(4) $\lim_{z\to z_\beta} \frac{c_\beta \Pi_{1\leq j\leq n} w_{j,\beta_j}^{\gamma_{j,\beta_j}} dw_{1,\beta_1}\wedge dw_{2,\beta_2}\wedge...\wedge dw_{n,\beta_n}}{\wedge_{1\leq j\leq n}\pi_j^*(g_j(P_j)_*(f_{u_j}(\Pi_{1\leq k\leq m_j} f_{z_{j,k}}^{\gamma_{j,k}+1})(\sum_{1\leq k\leq m_j} p_{j,k}\frac{df_{z_{j,k}}}{f_{z_{j,k}}})))} = c_0$ *for any* $\beta \in I_1$，其中 $c_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 是一个与 β 无关的常数，f_{u_j} 是满足 $|f_{u_j}| = P_j^*(e^{u_j})$ 和 $f_{z_{j,k}}$ 是在 Δ 上满足 $|f_{z_{j,k}}| = P_j^*(e^{G^{\Omega_j}(\cdot, z_{j,k})})$ 的全纯函数，对任意 $j \in \{1,2,...,n\}$ 和 $k \in \{1,2,...,m_j\}$ 均成立。

2.4. 其他一些所需结果。本节回顾并给出一些引理，这些引理将用于主要定理的证明。

设 $U \subset \mathbb{C}^n$ 是一个开集。现在回顾 [15] 和 [16] 中给出的可容许权重的定义。

定义 2.34（见 [15, 16]）。如果非负可测函数 ρ 定义在 U 上，并且对任意 $z_0 \in U$ 都满足以下条件：存在 U 中的一个邻域 V_{z_0} 和一个常数 $C_{z_0} > 0$，使得

$$|f(z)|^2 \leq C_{z_0} \int_U |f|^2 \rho$$

对任意 $z \in V_{z_0}$ 以及定义在 U 上的任意全纯函数 f，均成立。

设 ρ 是 U 上的可容许权重。加权Bergman空间 $A^2(U,\rho)$ 定义如下：

$$A^2(U,\rho) := \left\{ f \in \mathcal{O}(U) : \int_U |f|^2 \rho < +\infty \right\}.$$

记

$$\ll f, g \gg_{U,\rho} := \int_U f\overline{g}\rho$$

且 $||f||_{U,\rho} := (\int_U |f|^2\rho)^{\frac{1}{2}}$，对任意 $f, g \in A^2(U,\rho)$ 均成立。

引理 2.35（见 [15, 16]）。$A^2(U,\rho)$ 是一个可分希尔伯特空间，其内积为 $\ll \cdot,\cdot \gg_{U,\rho}$。

我们回顾权重为可容许权重的一个充分条件。

引理 2.36（见 [13]）。设 ρ 是 U 上的非负勒贝格可测函数，且 S 是 U 的解析子集。假设对任意 $K \Subset U\backslash S$，存在 $a > 0$ 使得 $\int_K \rho^{-a} < +\infty$。那么 ρ 是 U 上的可容许权重。

设 $U \subset \mathbb{C}^n$ 和 $W \subset \mathbb{C}^m$ 是两个开集。设 ρ_1 和 ρ_2 分别是定义在 U 和 W 上的非负 Lebesgue 可测函数。假设对于任意相对紧集 $U_1 \Subset U$ ($W_2 \Subset W$)，都存在一个实数 $a_1 > 0 (a_2 > 0)$，使得 $\rho_1^{-a_1} (\rho_2^{-a_2})$ 在 U_1 (W_2) 上可积。设 $M := U \times W$ 且

$\rho = \rho_1 \times \rho_2$。由引理 2.36可知， ρ_1、 ρ_2 和 ρ 分别是定义在 U、 W 和 M 上的可容许权重。

下面的引理给出了 Bergman 空间的乘积性质。

引理 2.37（见 [8]）。设 $\{f_i(z)\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 和 $\{g_j(w)\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 分别是 $A^2(U,\rho_1)$ 和 $A^2(W,\rho_2)$ 的完备正交归一基。那么， $\{f_i(z)g_j(w)\}_{i,j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 是 $A^2(M,\rho)$ 的完备正交归一基。

设 D_j, M, M_j, Z_j, Z_0, I_1 与第 2.2 节中的定义相同。记

$$S := \prod_{1\leq j\leq n} \partial D_j.$$

我们回顾一下 S 上 Hardy 空间的定义及其一些性质。

设 λ 是 S 上的勒贝格可测函数，满足 $\inf_S \lambda > 0$。设 $f \in L^2(S,\lambda d\sigma)$，其中 $d\sigma := \frac{1}{(2\pi)^n}|dw_1|\ldots|dw_n|$。如果存在 $\{f_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset \mathcal{O}(M) \cap C(\overline{M}) \cap L^2(S,\lambda d\sigma)$，使得 $\lim_{m\to+\infty}\|f_m - f\|^2_{S,\lambda} = 0$，其中 $\|g\|_{S,\lambda} := \left(\int_S |g|^2\lambda d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$ 对任意 $g \in L^2(S,\lambda d\sigma)$ 成立，则称 $f \in H^2_\lambda(M,S)$。

记作。

$$\ll f, g \gg_{S,\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_S f\overline{g}\lambda|dw_1|\ldots|dw_n|$$

对于任意的 $f, g \in L^2(S,\lambda d\sigma)$，则 $H^2_\lambda(M,S)$ 是一个配备内积 $\ll\cdot,\cdot\gg_{S,\lambda}$ 的希尔伯特空间（见 [13]）。存在一个线性单射 $P_S\colon H^2_\lambda(M,S) \to \mathcal{O}(M)$，满足 $P_S(f) = f$ 对于任意的 $f \in \mathcal{O}(M) \cap C(\overline{M}) \cap L^2(S,\lambda d\sigma)$（见 [13]）。为简便起见，将 $P_S(f)$ 记作 f^*。

我们回顾关于 $H^2_\lambda(M,S)$ 的三个引理，这些引理将在引理 2.42 的证明中用到。

引理 2.38 ([13])。对于 M 的任意紧子集 K，存在一个正常数 C_K，使得

$$|f^*(z)| \leq C_K\|f\|_{S,\lambda}$$

对任意 $z \in K$ 和 $f \in H_\lambda(M,S)$ 成立。

引理 2.39（[13]）。假设 $M_S(Z_0,J,\lambda) < +\infty$。那么存在唯一的全纯函数 $f \in H^2_\lambda(M,S)$，使得对于任意 $\beta \in I_1$，均有 $f^*(z_\beta) = h_0(z_\beta)$，并且 $M_S(Z_0,J,\lambda) = \|f\|^2_{S,\lambda}$。

设 $M_a = \prod_{1\leq j\leq n_a} D_j$ 是 $\mathbb{C}^{n_a}$ 中的有界域，其中 D_j 是平面正则区域，具有有限个边界分支，且这些边界分支均为解析 Jordan 曲线，对任意 $1 \leq j \leq n_a$ 均成立。记 $S_a := \prod_{1\leq j\leq n_a}\partial D_j$。设 $M_b = \prod_{1\leq j\leq n_b} D_j$ 是 $\mathbb{C}^{n_b}$ 中的一个 $\tilde{}$ 有界域，其中 D_j 是平面正则区域，具有有限个边界分支，且这些边界分支均为解析 Jordan 曲线，对任意 $1 \leq j \leq n_b$ 均成立。记 $S_b := \prod_{1\leq j\leq n_b}\partial\tilde{D}_j$。记 $M := M_a \times M_b \subset \mathbb{C}^{n_a+n_b}$ $(n = n_a + n_b)$ 且 $S := S_a \times S_b$。

引理 2.40 ([13])。设 λ_a 是 S_a 上的勒贝格可测函数，满足 $\inf_{S_a}\lambda_a > 0$；再设 λ_a 是 S_b 上的勒贝格可测函数，满足 $\inf_{S_b}\lambda_b > 0$。记 $\lambda := \lambda_a\lambda_b$ 在 S 上。假设 $H^2_\lambda(M,S) \neq \{0\}$。则有 $H^2_{\lambda_a}(M_a,S_a) \neq \{0\}$ 且 $H^2_{\lambda_b}(M_b,S_b) \neq \{0\}$。此外， $\{e_m(z)\tilde{e}_l(w)\}_{m,\,l\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $H^2_\lambda(M,S)$ 的完备正交归一基，其中 $\{e_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $H^2_{\lambda_a}(M_a,S_a)$ 的完备正交归一基，而 $\{\tilde{e}_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $H^2_{\lambda_b}(M_b,S_b)$ 的完备正交归一基。

下面给出三个乘积性质，这些性质将在定理 1.15 的证明中用到。

设 $Z_j=\{z_{j,1},z_{j,2},...,z_{j,m_j}\}\subset D_j$，对任意 $j\in\{1,2,...,n\}$，其中 m_j 是正整数。记

$$Z_0:=\prod_{1\le j\le n}Z_j\subset M.$$

记 $I_1:=\{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n):\ 1\le\beta_j\le m_j$，对任意 $j\in\{1,2,...,n\}\}$, $V_\beta:=\prod_{1\le j\le n}V_{z_{j,\beta_j}}$且 $z_\beta:=(z_{1,\beta_1},z_{2,\beta_2},\ldots,z_{n,\beta_n})\in M$，对任意 $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\in I_1$。设 h_j 是定义在 Z_j 的邻域上的全纯函数，对任意满足存在 $k\in\{1,\ldots,m_j\}$ 使得 $h_j(z_{j,k})\neq 0$的 $1\le j\le n$。记作$h_0=\prod_{1\le j\le n}h_j$。

设 ρ_1和 ρ_2是定义在 ∂D_1和 S_1上的两个 Lebesgue 可测函数，分别满足 $\inf_{\partial D_1}\rho_1>0$和$\inf_{S_1}\rho_2>0$。设 λ_1和 λ_2分别是定义在 D_1和 M_1上的两个非负 Lebesgue 可测函数，满足：对于任意相对紧子集 $R_1\Subset D_1$ ($R_2\Subset M_1$)，存在 $a>0$，使得 $\lambda_1^{-a}(\lambda_2^{-a})$在 R_1 (R_2) 上可积。根据引理 2.36，我们知道 λ_1和 λ_2 分别是定义在 D_1 和 M_1 上的可容许权重。

让我们考虑以下极小积分。令 J_β 为任意 $\beta\in I_1$的$\mathcal{O}_{z_\beta}$ 极大理想。记其为。

$$M_{H,1}(Z_0,J,\rho_1\lambda_2):=\inf\Big\{\|f\|^2_{\partial D_1\times M_1,\rho_1\lambda_2}:f\in H^2_\rho(M,\partial D_1\times M_1)\\ \text{s.t. } f^*(z_\beta)=h_0(z_\beta)\text{ for any }\beta\in I_1\Big\},$$

$$M_{\partial D_1}:=\inf\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_1}|f|^2\rho_1|dz_1|:f\in H^2(D_1)\right.\\ \left.\text{s.t. } f(z_{j,k})=h_1(z_{j,k})\text{ for any }1\le k\le m_1\right\}$$

and

$$M_{M_1}:=\inf\Big\{\int_{M_1}|f|^2\lambda_2:f\in\mathcal{O}(M_1)\\ \text{s.t. } f(z_\gamma)=\prod_{2\le l\le n}h_l(z_{l,\gamma_l})\text{ for any }\gamma\in I_{1,1}\Big\},$$

其中$I_{1,1}:=\{\gamma=(\gamma_2,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{Z}^{n-1}:\ 1\le\gamma_l\le m_l$对任意 $2\le l\le n\}$和$z_\gamma:=(z_{2,\gamma_2},\ldots,z_{n,\gamma_n})\in M_j$对任意$\gamma\in I_{1,1}$.

引理 2.41. $M_{H,1}(Z_0,J,\rho_1\lambda_2)=M_{\partial D_1}\times M_{M_1}$。

证明。根据 $M_{H,1}(Z_0,J,\rho_1\lambda_2)$、$M_{\partial D_1}$和 M_{M_1}的定义，我们有

$$M_{H,1}(Z_0,J,\rho_1\lambda_2)\le M_{\partial D_1}\times M_{M_1}.$$

因此，只需证明 $M_{H,1}(Z_0,J,\rho_1\lambda_2)\ge M_{\partial D_1}\times M_{M_1}$。

不失一般性，假设 $M_{H,1}(Z_0,J,\rho_1\lambda_2)<+\infty$。存在$f_0\in H^2_{\rho_1\lambda_2}(M,\partial D_1,\times M_1)$，满足对于任意 $\beta\in I_1$，$f_0^*(z_\beta)=h_0(z_\beta)$，并且

$$M_{H,1}(Z_0,J,\rho_1\lambda_2)=\|f_0\|^2_{\partial D_1\times M_1,\rho_1\lambda_2}. \tag{2.25}$$

由于 $H^2_{\rho_1\lambda_2}(M,\partial D_1\times M_1)\neq\emptyset$，由引理 2.15，$H^2_{\rho_1}(D_1,\partial D_1)\neq\{0\}$ 且 $A^2(M_1,\lambda_2)\neq\{0\}$。

设 $\{e_l\}_{l\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $H^2_{\rho_1}(D_1,\partial D_1)$ 的完备正交归一基，满足 $e_l(z_{1,\ l})\neq 0$ 对于 $1\leq l\leq m_1$，且 $e_l(z_{1,\ k})=0$ 对于 $0\leq k<l$。记】【。

$$K_1:=\{e_l\}_{l>m_1}.$$

如果存在 $s\in\{2,\dots,n\}$ 使得当$l<s$ 时 $\gamma_l=\tilde{\gamma}_l$ 且 $\gamma_s>\tilde{\gamma}_s$，我们称 $\gamma<\tilde{\gamma}$ 为 $\gamma,\ \tilde{\gamma}\in I_{1,\ 1}$。设 $\{\tilde{e}_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $A^2(M_1,\lambda_2)$的一组完备正交归一基，满足存在 $N_1\in\mathbb{Z}_{>0}$ 使得当 $m>N_1$ 时$\sum_{\gamma\in I_{1,\ 1}}|\tilde{e}_m(z_\gamma)|=0$，且当 $m\leq N_1$时$\sum_{\gamma\in I_{1,\ 1}}|\tilde{e}_m(z_\gamma)|\neq 0$，并且当 $m\leq N_1$时，s_m 关于 m 严格递增，其中 $s_m:=\inf\{\gamma\in I_{1,1}:\ \tilde{e}_m(z_\gamma)\neq 0\}$。记为。

$$K_2:=\{\tilde{e}_m\}_{m>N_1}.$$

引理 2.15 表明，$\{e_m(z)\tilde{e}_l(w)\}_{m,\ l\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是$H^2_{\rho_1\lambda_2}(M,\partial D_1\times M_1)$的一组完备正交归一基。于是我们有

$$f_0=\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}a_{l,m}e_l\tilde{e}_m.$$

根据引理 2.14，我们知道

$$f_0^*=\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}a_{l,m}e_l^*\tilde{e}_m\ \ \text{(compactly uniform convergence)}.$$

由于存在 $k\in\{1,\dots,m_1\}$ 使得 $h_1(z_{1,\ k})\neq 0$，不失一般性，假设 $h_z(z_{1,\ 1})\neq 0.$。由于对任意 $\beta\in I_1$，$f_0^*(z_\beta)=h_0(z_\beta)=\prod_{1\leq j\leq n}h_j(z_{j,\ \beta_j})$，我们得到

$$\frac{\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}a_{l,m}e_l^*(z_{1,1})\tilde{e}_m(z_\gamma)}{h_1(z_{1,1})}=\prod_{2\leq j\leq n}h_j(z_{j,\gamma_j})$$

对任意 $\gamma\in I_{1,\ 1}$。注意，$\sum_{l,\ m\in\mathbb{Z}_{>0}}a_{l,\ m}e_l^*(z_{1,\ 1})\tilde{e}_m\in\mathcal{O}(M_1)$，并且

$$\begin{aligned}&\int_{M_1}|\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}a_{l,m}e_l^*(z_{1,1})\tilde{e}_m|^2\lambda_2\\=&\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}|a_{l,m}e_l^*(z_{1,1})|^2\\=&|e^*(z_{1,1})|^2\|f_0\|^2_{\partial D_1\times M_1,\rho_1\lambda_2}\\<&+\infty.\end{aligned}$$

因此，我们有 $M_{M_1}<+\infty$。由于 $H^2_{\rho_1}(D_1,\partial D_1)\neq\emptyset$ 且 D_1 是由有限条解析 Jordan 曲线围成的平面正则区域，我们知道 $M_{\partial D_1}<+\infty$。

设 $f_1\in H^2_{\rho_1}(D_1,\partial D_1)$ 满足对任意 $1\leq k\leq m_1$ and，$f_1^*(z_{1,k})=h_1(z_{1,k})$

$$M_{\partial D_1}=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_1}|f_1|^2\rho_1|dz_1|.$$

设 $f_2\in\mathcal{O}(M_1)$ 满足：对于任意 $\gamma\in I_{1,1}$，$f_2(z_\gamma)=\prod_{2\leq j\leq n}h_j(z_{j,\gamma_j})$ 且

$$M_{M_1}=\int_{M_1}|f_2|^2\lambda_2.$$

那么我们知道,

$$\int_{\partial D_1} f_1 \overline{f} \rho_1 |dz_1| = 0 \tag{2.26}$$

对任意 $f \in K_1$，并且

$$\int_{M_1} f_2 \overline{g} \lambda_2 = 0 \tag{2.27}$$

对任意 $g \in K_2$。记

$$F_0 := f_0 - f_1 f_2, \tag{2.28}$$

于是，对任意 $\beta \in I_1$，我们有 $F_0 \in H^2_{\rho_1\lambda_2}(M, \partial D_1 \times M_1)$ 和 $F_0^*(z_\beta) = 0$。由于$\{e_m(z)\tilde{e}_l(w)\}_{m,\ l\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $H^2_{\rho_1\lambda_2}(M, \partial D_1 \times M_1)$ 的完备正交归一基，因此存在 $\{b_{l,m}\}_{l,\ m\in\mathbb{Z}_{>0}} \subset \mathbb{C}$ 使得

$$F_0 = \sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}} b_{l,m} e_l \tilde{e}_m = F_1 + F_2,$$

其中 $F_1 := \sum_{1\le l\le m_1} \sum_{1\le m\le N_1} b_{l,\ m} e_l \tilde{e}_m$ 且 $F_2 := \sum_{e_l\in K_1 \text{ 或 } \tilde{e}_m\in K_2} b_{l,\ m} e_l \tilde{e}_m$。注意，对于任意 $\beta \in I_1$，$F_2^*(z_\beta) = 0$；对于任意 $\beta \in I_1$，$F_1^*(z_\beta) = 0$。根据 $\{e_l\}_{1\le l\le m_1}$ 和 $\{\tilde{e}_m\}_{1\le m\le N_1}$的构造，我们知道 $b_{l,\ m} = 0$ 对于 $1 \le l \le m_1$ 和 $1 \le m \le N_1$成立，即，
$F_1 \equiv 0$.
注意 $F_0 = F_2 = \sum_{e_l\in K_1 \text{ 或 } \tilde{e}_m\in K_2} b_{l,\ m} e_l \tilde{e}_m$，则由等式 (2.25)、(2.26)、(2.27) 和 (2.28) 可得

$$\begin{aligned} M_{H,1}(Z_0, J, \rho_1\lambda_2) &= \|f_0\|^2_{\partial D_1\times M_1, \rho_1\lambda_2} \\ &= \|F_2\|^2_{\partial D_1\times M_1, \rho_1\lambda_2} + \|f_1 f_2\|^2_{\partial D_1\times M_1, \rho_1\lambda_2} \\ &\ge M_{\partial D_1} \times M_{M_1}. \end{aligned}$$

因此，引理 2.41 成立。 □

考虑以下极小积分。记

$$M_S(Z_0, J, \rho_1\rho_2) := \inf\Big\{ \|f\|^2_{S,\rho_1\rho_2} : f \in H^2_{\rho_1\rho_2}(M, S) \\ \text{s.t. } f^*(z_\beta) = h_0(z_\beta) \text{ for any } \beta \in I_1 \Big\},$$

and

$$M_{S_1} := \inf\Big\{ \|f\|^2_{S_1,\rho_2} : f \in H^2_{\rho_2}(M_1, S_1) \\ \text{s.t. } f^*(z_\gamma) = \prod_{2\le j\le n} h_j(z_{j,\gamma_j}) \text{ for any } \gamma \in I_{1,1} \Big\}.$$

我们给出如下乘积性质:

引理 2.42. $M_S(Z_0, J, \rho_1\rho_2) = M_{\partial D_1} \times M_{S_1}$。

证明。证明与引理 2.41 的证明类似。根据 $M_S(Z_0, J, \rho_1\rho_2)$,$M_{\partial D_1}$ and M_{S_1} 的定义，我们有

$$M_S(Z_0, J, \rho_1\rho_2) \le M_{\partial D_1} \times M_{S_1}.$$

因此，只需证明 $M_S(Z_0, J, \rho_1\rho_2) \ge M_{\partial D_1} \times M_{S_1}$。

不失一般性，假设 $M_S(Z_0, J, \rho_1\rho_2) < +\infty$。由引理 2.39，存在满足 $f_0^*(z_\beta) = h_0(z_\beta)$ 的 $f_0 \in H^2_{\rho_1\rho_2}(M, S)$，对任意 $\beta \in I_1$ and

$$M_S(Z_0, J, \rho_1\rho_2) = \|f_0\|^2_{S,\rho_1\rho_2}. \tag{2.29}$$

由于 $H^2_{\rho_1\rho_2}(M, S) \neq \emptyset$，根据引理 2.40，$H^2_{\rho_1}(D_1, \partial D_1) \neq \{0\}$ 以及 $H^2_{\rho_2}(M_1, S_1) \neq \{0\}$。

设 $\{e_l\}_{l\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $H^2_{\rho_1}(D_1, \partial D_1)$ 的一组完备正交归一基，满足：对于 $1 \leq l \leq m_1$， $e_l(z_{1,l}) \neq 0$；对于 $0 \leq k < l$， $e_l(z_{1,k}) = 0$。记

$$K_1 := \{e_l\}_{l>m_1}.$$

如果存在 $s \in \{2, \ldots, n\}$，使得当 $l < s$ 时 $\gamma_l = \tilde{\gamma}_l$，且 $\gamma_s > \tilde{\gamma}_s$，则称 $\gamma < \tilde{\gamma}$ 对于 $\gamma, \tilde{\gamma} \in I_{1,1}$。设 $\{\tilde{e}_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $H^2_{\rho_2}(M_1, S_1)$ 的一组完备正交归一基，满足存在 $N_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得当 $m > N_1$ 时 $\sum_{\gamma\in I_{1,1}} |\tilde{e}_m(z_\gamma)| = 0$，且当 $m \leq N_1$ 时 $\sum_{\gamma\in I_{1,1}} |\tilde{e}_m(z_\gamma)| \neq 0$；此外，当 $m \leq N_1$ 时， s_m 关于 m 严格递增，其中 $s_m :=\inf\{\gamma \in I_{1,1} : \tilde{e}_m(z_\gamma) \neq 0\}$。记

$$K_2 := \{\tilde{e}_m\}_{m>N_1}.$$

引理 2.40 表明， $\{e_m(z)\tilde{e}_l(w)\}_{m,\ l\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是$H^2_{\rho_1\rho_2}(M, S)$的一组完备正交归一基。于是我们有

$$f_0 = \sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}} a_{l,m} e_l \tilde{e}_m.$$

由引理 2.38 可知,

$$f_0^* = \sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}} a_{l,m} e_l^* \tilde{e}_m^* \quad \text{(compactly uniform convergence)}.$$

由于存在 $k \in \{1, \ldots, m_1\}$，使得 $h_1(z_{1,\ k}) \neq 0$，不失一般性，设 $h_z(z_{1,\ 1}) \neq 0.$。注意到 $\sum_{l,\ m\in\mathbb{Z}_{>0}} |a_{l,\ m} e_l^*(z_{1,\ 1})|^2 < +\infty$，于是我们有

$$\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}} a_{l,m} e_l^*(z_{1,1}) \tilde{e}_m \in H^2_{\rho_2}(M_1, S_1).$$

由于对于任意 $\beta \in I_1$， $f^*(z_\beta) = h_0(z_\beta) = \prod_{1\leq j\leq n} h_j(z_{j,\ \beta_j})$，因此可得

$$\frac{\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}} a_{l,m} e_l^*(z_{1,1}) \tilde{e}_m^*(z_\gamma)}{h_1(z_{1,1})} = \prod_{2\leq j\leq n} h_j(z_{j,\gamma_j})$$

对于任意 $\gamma \in I_{1,\ 1}$。因此，我们有 $M_{S_1} < +\infty$。类似地，我们有 $M_{\partial D_1} < +\infty$。设 $f_1 \in H^2_{\rho_1}(D_1, \partial D_1)$ 满足对于任意 $1 \leq k \leq m_1$， $f_1^*(z_{1,\ k}) = h_1(z_{1,\ k})$，并且

$$M_{\partial D_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_1} |f_1|^2 \rho_1 |dz_1|.$$

设 $f_2 \in H^2_{\rho_2}(M_1, S_1)$ 满足：对于任意 $\gamma \in I_{1,1}$， 都有 $f_2^*(z_\gamma) = \prod_{2\leq j\leq n} h_j(z_{j,\gamma_j})$，且

$$M_{M_1} = \|f_2\|^2_{S_1,\rho_2}.$$

那么我们知道

$$\int_{\partial D_1} f_1 \overline{f} \rho_1 |dz_1| = 0 \tag{2.30}$$

对于任意 $f \in K_1$，且

$$\ll f_2, g \gg_{S_1,\rho_2} = 0 \tag{2.31}$$

对于任意 $g \in K_2$。记.....

$$F_0 := f_0 - f_1 f_2, \tag{2.32}$$

于是，对于任意 $\beta \in I_1$，我们有 $F_0 \in H^2_{\rho_1\rho_2}(M,S)$ 和 $F_0^*(z_\beta) = 0$。由于 $\{e_m(z)\tilde{e}_l(w)\}_{m,l\in\mathbb{Z}_{>0}}$是 $H^2_{\rho_1\rho_2}(M,S)$ 的完备正交归一基，因此存在 $\{b_{l,m}\}_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}} \subset \mathbb{C}$使得

$$F_0 = \sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}} b_{l,m} e_l \tilde{e}_m = F_1 + F_2,$$

其中 $F_1 := \sum_{1\le l\le m_1}\sum_{1\le m\le N_1} b_{l,m}e_l\tilde{e}_m$，且 $F_2 := \sum_{e_l\in K_1 \text{ or } \tilde{e}_m\in K_2} b_{l,m}e_l\tilde{e}_m$。
注意，对于任意 $\beta \in I_1$，$F_2^*(z_\beta) = 0$，于是对于任意 $\beta \in I_1$，$F_1^*(z_\beta) = 0$。
根据 $\{e_l\}_{1\le l\le m_1}$ 和 $\{\tilde{e}_m\}_{1\le m\le N_1}$的构造，我们知道对于 $1 \le l \le m_1$ 和 $1 \le m \le N_1$，$b_{l,m} = 0$，即
注意到 $F_0 = F_2 = \sum_{e_l\in K_1 \text{ 或 } \tilde{e}_m\in K_2} b_{l,m}e_l\tilde{e}_m$，$F_1 \equiv 0$. 由等式 (2.29)、(2.30)、(2.31) 和 (2.32) 可得

$$M_S(Z_0,J,\rho_1\rho_2) = \|f_0\|^2_{S,\rho_1\rho_2} = \|F_2\|^2_{S,\rho_1\rho_2} + \|f_1f_2\|^2_{S,\rho_1\rho_2} \ge M_{\partial D_1}\times M_{S_1}.$$

因此，引理 2.42 成立。 □

考虑以下极小积分。记

$$M_{D_1} := \inf\Big\{\int_{D_1}|f|^2\lambda_1 : f\in\mathcal{O}(D_1) \\ \text{s.t. } f(z_{1,k}) = h_1(z_{1,k}) \text{ for any } 1\le k\le m_1\Big\},$$

and

$$M_M := \inf\Big\{\int_M |f|^2\lambda_1\lambda_2 : f\in\mathcal{O}(M) \\ \text{s.t. } f(z_\beta) = h_0(z_\beta) \text{ for any } \beta\in I_1\Big\}.$$

引理2.43. $M_M = M_{D_1}\times M_{M_1}$.

证明。证明与引理 2.41 的证明类似。根据 M_M、M_{D_1} 和 M_{M_1}的定义，有 $M_M \le M_{D_1}\times M_{M_1}$。因此，只需证明 $M_M \ge M_{D_1}\times M_{M_1}$。

不失一般性，假设 $M_M < +\infty$。存在满足 $f_0(z_\beta) = h_0(z_\beta)$ 的 $f_0 \in \mathcal{O}(M)$，对任意 $\beta \in I_1$，并且

$$M_M = \int_M |f_0|^2\lambda_1\lambda_2. \tag{2.33}$$

设 $\{e_l\}_{l\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $A^2(D_1,\lambda_1)$ 的一组完备正交归一基，存在 $N_1\in\mathbb{Z}_{>0}$ 使得当 $l > N_1$ 时，$\sum_{1\le k\le m_1}|e_l(z_{1,k})| = 0$；当 $l \le N_1$时，$\sum_{1\le k\le m_1}|e_l(z_{1,k})| \ne$为 0；并且当 $l \le N_1$时，s_l 关于 l 严格递增，其中$s_l :=$ inf$\{k\in\{1,\dots,m_1\} : e_l(z_{1,k}) \ne 0\}$。记该

$$K_1 := \{e_l\}_{l>N_1}.$$

设 $\{\tilde{e}_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $A^2(M_1,\lambda_2)$ 的完备正交归一基，满足存在 $N_2\in\mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $\sum_{\gamma\in I_{1,1}}|\tilde{e}_m(z_\gamma)| = 0$，当 $m > N_2$ 且

$\sum_{\gamma\in I_{1,\ 1}}|\tilde{e}_m(z_\gamma)|\neq 0$，当 $m\leq N_2$，并且 $\tilde{s}_m$ 关于 m 严格递增，当 $m\leq N_2$ 时，其中 $\tilde{s}_m:=\inf\{\gamma\in I_{1,1}:\ \tilde{e}_m(z_\gamma)\ \neq 0\}$。记

$$K_2:=\{\tilde{e}_m\}_{m>N_2}.$$

引理 2.37 表明，$\{e_m(z)\tilde{e}_l(w)\}_{m,\ l\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是$A^2(M,\lambda_1\lambda_2)$的完备正交归一基。于是我们有

$$f_0=\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}a_{l,m}e_l\tilde{e}_m.$$

由于存在 $k\in\{1,\ldots,m_1\}$ 使得 $h_1(z_{1,\ k})\neq 0$，不失一般性，假设 $h_z(z_{1,\ 1})\neq 0.$。由于对于任意 $\beta\in I_1$，$f_0(z_\beta)\ =h_0(z_\beta)\ =\prod_{1\leq j\leq n}h_j(z_{j,\ \beta_j})$，我们得到

$$\frac{\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}a_{l,m}e_l(z_{1,1})\tilde{e}_m(z_\gamma)}{h_1(z_{1,1})}=\prod_{2\leq j\leq n}h_j(z_{j,\gamma_j})$$

对于任意$\gamma\in I_{1,\ 1}$。注意到$\sum_{l,\ m\in\mathbb{Z}_{>0}}a_{l,\ m}e_l(z_{1,\ 1})\tilde{e}_m\in\mathcal{O}(M_1)$，并且

$$\begin{aligned}&\int_{M_1}|\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}a_{l,m}e_l(z_{1,1})\tilde{e}_m|^2\lambda_2\\=&\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}|a_{l,m}e_l(z_{1,1})|^2\\=&|e(z_{1,1})|^2\int_M|f_0|^2\lambda_1\lambda_2\\<&+\infty.\end{aligned}$$

因此，我们有 $M_{M_1}<+\infty$。类似地，我们有 $M_{D_1}<+\infty$。

设 $f_1\in\mathcal{O}(D_1)$ 满足：对任意 $1\leq k\leq m_1$，有 $f_1(z_{1,k})=h_1(z_{1,k})$，且

$$M_{D_1}=\int_{D_1}|f_1|^2\lambda_1.$$

设 $f_2\in\mathcal{O}(M_1)$ 满足：对任意$\gamma\in I_{1,1}$，有 $f_2(z_\gamma)\ =\prod_{2\leq j\leq n}h_j(z_{j,\gamma_j})$，且

$$M_{M_1}=\int_{M_1}|f_2|^2\lambda_2.$$

于是我们知道

$$\int_{D_1}f_1\overline{f}\lambda_1=0 \tag{2.34}$$

对任意 $f\in K_1$，且

$$\int_{M_1}f_2\overline{g}\lambda_2=0 \tag{2.35}$$

对任意 $g\in K_2$。记

$$F_0:=f_0-f_1f_2, \tag{2.36}$$

那么，对于任意 $\beta\in I_1$，我们有 $F_0\in A^2(M,\lambda_1\lambda_2)$ 和 $F_0(z_\beta)\ =0$。由于 $\{e_m(z)\tilde{e}_l(w)\}_{m,\ l\in\mathbb{Z}_{>0}}$是 $A^2(M,\lambda_1\lambda_2)$ 的完备正交归一基，因此存在 $\{b_{l,m}\}_{l,\ m\in\mathbb{Z}_{>0}}\subset\mathbb{C}$，使得

$$F_0=\sum_{l,m\in\mathbb{Z}_{>0}}b_{l,m}e_l\tilde{e}_m=F_1+F_2,$$

其中 $F_1 := \sum_{1\le l\le N_1}\sum_{1\le m\le N_2} b_{l,\ m}e_l\tilde{e}_m$，且 $F_2 := \sum_{e_l\in K_1 \text{ 或 } \tilde{e}_m\in K_2} b_{l,\ m}e_l\tilde{e}_m$。注意，对于任意 $\beta\in I_1$，$F_2(z_\beta)=0$，于是对于任意 $\beta\in I_1$，$F_1(z_\beta)=0$。根据 $\{e_l\}_{1\le l\le N_1}$ 和 $\{\tilde{e}_m\}_{1\le m\le N_2}$ 的构造，我们知道对于 $1\le l\le N_1$ 和 $1\le m\le N_2$，$b_{l,\ m}=0$，即:

$$F_1\equiv 0.$$

注意，$F_0=F_2=\sum_{e_l\in K_1 \text{ 或 } \tilde{e}_m\in K_2} b_{l,\ m}e_l\tilde{e}_m$，那么由等式 (2.33)、(2.34)、(2.35) 和 (2.36) 可知

$$M_M=\int_M |f_0|^2\lambda_1\lambda_2=\int_M |F_2|^2\lambda_1\lambda_2+\int_M |f_1f_2|^2\lambda_1\lambda_2\ge M_{D_1}\times M_{M_1}.$$

因此，引理2.43成立。 □

3. Proofs of Theorem 1.5, Remark 1.6, Corollary 1.7 and Corollary1.8

在本节中，我们证明定理 1.5、注 1.6、推论 1.7 和推论 1.8。

3.1. 定理 1.5 的证明。我们分三步证明定理 1.5。

步骤 1：不等式 (1.1) 的证明

记

$$\inf\Big\{\int_{\{2\psi<-t\}}|f|^2\tilde{\rho}: f\in\mathcal{O}(\{2\psi<-t\})\\ \text{s.t. } f^{(l)}(z_j)=a_{j,l}\text{ for any }0\le l\le k_j\text{ and any }1\le j\le m\Big\}$$

为 $G(t)$，其中 $t\ge 0$。注意，$\tilde{\rho}=e^{-\varphi}c(-2\psi)$ 且 $G(0)=M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho})$。由于对于任意 $1\le j\le m$，$v(dd^c(\varphi+2\psi)\ z_j)\ge 2(k_j+1)$，由定理 2.23 可知 $G(h^{-1}(r))$ 是凹函数，其中 $h(t)=\int_t^{+\infty}c(s)e^{-s}ds$。

由引理 2.25，存在一个定义在 D 上的全纯函数 F_0，使得对于任意 $0\le l\le k_j$ 和任意 $1\le j\le m$，$f^{(l)}(z_j)=a_{j,\ l}$，并且

$$G(0)=\int_D |F_0|^2\tilde{\rho}.$$

根据 $G(t)$的定义，我们有

$$G(-\log r)\le\int_{\{2\psi<\log r\}}|F_0|^2\tilde{\rho}$$

对于任意 $r\in(0,1]$,，结合 $G(h^{-1}(r))$ 的凹性，我们得到

$$\frac{\int_{\{z\in D:2\psi(z)\ge\log r\}}|F_0(z)|^2\tilde{\rho}}{\int_0^{-\log r}c(t)e^{-t}dt}\le\frac{G(0)-G(-\log r)}{\int_0^{-\log r}c(t)e^{-t}dt}\le\frac{G(0)}{\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}<+\infty. \tag{3.1}$$

由于对于任意 $z\in\partial D$，$\lim_{t\to 0+0}c(t)=c(0)=1$ 且 $\lim_{w\to z}\varphi(w)=\varphi(z)$，由引理 2.13 和不等式 (3.1) 可得 $F_0\in H^2(D)$，并且

$$\begin{aligned} M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)&\leq\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|F_0|^2\rho|dz|\\ &\leq\frac{1}{2\pi}\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\{z\in D:\psi\geq\log r\}}|F_0|^2\tilde{\rho}}{1-r}\\ &=\frac{1}{2\pi}\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\{z\in D:2\psi\geq\log r\}}|F_0|^2\tilde{\rho}}{\int_0^{-\log r}c(t)e^{-t}dt}\times\frac{\int_0^{-\log r}c(t)e^{-t}dt}{1-r^{\frac{1}{2}}}\\ &\leq\frac{1}{\pi\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho}) \end{aligned}\tag{3.2}$$

因此，不等式 (1.1) 成立。

步骤 2：刻画的必要性

假设等式

$$M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)=\frac{M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho})}{\pi\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}\tag{3.3}$$

成立。结合不等式 (3.1) 和不等式 (3.2)，我们得到

$$\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\{z\in D:2\psi(z)\geq\log r\}}|F_0(z)|^2\tilde{\rho}}{\int_0^{-\log r}c(t)e^{-t}dt}=\liminf_{r\to 1-0}\frac{G(0)-G(-\log r)}{\int_0^{-\log r}c(t)e^{-t}dt}=\frac{G(0)}{\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}.$$

由于 $G(h^{-1}(r))$ 是凹函数，我们知道 $G(h^{-1}(r))$ 关于 $r\in(0,\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt)$ 是线性的。由定理 2.26，我们得到

(1) $\varphi+2\psi=2\log|g_1|+2\sum_{1\leq j\leq m}G_D(\cdot,z_j)+2u_1$，其中 g_1 是定义在 D 上的全纯函数，满足 $ord_{z_j}(g_1)=\min\{l:a_{j,l}\neq 0\}$，且 u_1 是定义在 D 上的调和函数；

(2) $\psi=\sum_{1\leq j\leq m}p_jG_D(\cdot,z_j)$；

(3) $\chi_{-u_1}=\prod_{1\leq j\leq m}\chi_{z_j}$；

(4) 对任意 $1\leq j\leq m$，

$$\lim_{z\to z_j}\frac{g_1p_*\left(f_{u_1}\left(\prod_{1\leq j\leq m}f_{z_j}\right)\left(\sum_{1\leq j\leq m}p_j\frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}\right)\right)}{\sum_{0\leq l\leq k_j}a_{j,l}(z-z_j)^l dz}=c_0\tag{3.4}$$

成立，其中 $c_0\neq 0$ 是与 j 无关的常数。

由于 $v(dd^c(\varphi+2\psi),z_j)\geq 2(k_j+1)$，由上述陈述 (1) 和 (4) 可知，对于任意 $1\leq j\leq m$，$ord_{z_j}(g_1)=k_j$，并且对于任意 $l<k_j$，$a_j=0$。根据魏尔斯特拉斯定理（见 [3]），存在一个定义在 D 上的全纯函数 g_0，使得在 $\Omega\backslash Z_0$ 上 $dg_0\neq 0$，且对于任意 j，$ord_{z_j}(g)=k_j$。记

$$g_2:=\frac{g_1}{g_0}\quad\text{and}\quad u_2:=u_1+\log|g_0|-\sum_{1\leq j\leq m}k_jG_D(\cdot,z_j)$$

在 D 上。注意，u_2 在 D 上是调和的，而 g_2 在满足 $dg_2(z_j)\neq 0$ 的 D 上对任意 $1\leq j\leq m$ 都是调和的。结合上面的陈述 (1) 和 (3)，我们得到

$$\varphi+2\psi=2\log|g_2|+2\sum_{1\leq j\leq m}(k_j+1)G_D(\cdot,z_j)+2u_2$$

and

$$\chi_{-u_2} = \prod_{1\le j\le m} \chi_{z_j}^{k_j+1}.$$

下面我们证明 $g_2 \neq 0$ 在 D 上。于是 $u := \log|g_2| + u_2$ 在 D 和 $\chi_{-u} = \prod_{1\le j\le m} \chi_{z_j}^{k_j+1}$ 上是调和的。结合等式 (3.4)，$\log|g_1| + u_1 = \log|g_0| + \log|g_2| + u_1 = u + \sum_{1\le j\le m} k_j G_D(\cdot, z_j)$ 和 $a_{j,l} = 0$ 对任意 $l < k_j$，我们得到

$$\lim_{z\to z_j} \frac{p_*\left(f_u\left(\prod_{1\le j\le m} f_{z_j}^{k_j+1}\right)\left(\sum_{1\le j\le m} p_j \frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}\right)\right)}{a_{j,k_j}(z-z_j)^{k_j}dz} = c_0,$$

因此，该刻画的必要性成立。

记 $h := \varphi + 2\psi - 2\sum_{1\le j\le m}(k_j+1)G_D(\cdot, z_j)$ 于 $\overline{D}$ 上。则 h 在 D 上是次调和的，并且对于任意 $z \in \partial D$，h 在 z 处连续。只需证明 h 在 D 上是调和的。通过求解狄利克雷问题，存在一个定义在 $\overline{D}$ 上的连续函数 $\tilde{h}$，它满足 $h = \tilde{h}$ 于 ∂D 上，且 $\tilde{h}$ 在 D 上是调和的。由于 h 在 D 上是次调和的，我们有

$$h \le \tilde{h}$$

在 $\overline{D}$ 上。记

$$\tilde{\varphi} := \varphi + \tilde{h} - h.$$

于是我们有 $\tilde{\varphi}|_{\partial D} = \varphi|_{\partial D}$ 和 $\tilde{\varphi} + 2\psi = 2\sum_{1\le j\le m}(k_j+1)G_D(\cdot, z_j) + h$。记

$$\tilde{\rho}_1 := e^{-\tilde{\varphi}} c(-2\psi)$$

在 $\overline{D}$ 上。注意到 $\tilde{\rho}_1 \le \tilde{\rho}$。根据定义，我们有

$$M(Z_0, \mathfrak{a}, \tilde{\rho}) \ge M(Z_0, \mathfrak{a}, \tilde{\rho}_1).$$

结合等式 (3.3) 和不等式 (1.1)，我们有

$$M_H(Z_0, \mathfrak{a}, \rho) \le \frac{M(Z_0, \mathfrak{a}, \tilde{\rho}_1)}{\pi\int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt} \le \frac{M(Z_0, \mathfrak{a}, \tilde{\rho})}{\pi\int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt} = M_H(Z_0, \mathfrak{a}, \rho),$$

这表明

$$M(Z_0, \mathfrak{a}, \tilde{\rho}) = M(Z_0, \mathfrak{a}, \tilde{\rho}_1).$$

由于 $M(Z_0, \mathfrak{a}, \tilde{\rho}) < +\infty$ 且 $\sum_{1\le j\le m}\sum_{0\le l\le k_j} |a_{j,l}| \neq 0$，我们有 $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}$，这意味着 $2\log|g_2|$ 在 D 上是调和的，即在 D 上有 $g_2 \neq 0$。

因此，定理 1.5 中刻画的必要性得到了证明。

步骤 3：刻画的充分性

假设定理 1.5 中的四个陈述 (1) – (4) 成立。根据魏尔斯特拉斯定理（见 [3]），存在一个全纯函数 g_0，其定义于 D，使得 $dg_0 \neq 0$ 在 $\Omega\backslash Z_0$ 上成立，并且对于任意 j，有 $ord_{z_j}(g) = k_j$。记 $\tilde{u} = u + \sum_{1\le j\le m} k_j G_D(\cdot, z_j) - \log|g_0|$ 是 Ω 上的一个调和函数。因此，我们有 $\varphi + 2\psi = 2\log|g_0| + \sum_{1\le j\le m} 2G_D(\cdot, z_j) + 2\tilde{u}$，$\chi_{-\tilde{u}} = \chi_{-u}\prod_{1\le j\le m}\chi_{z_j}^{-k_j} = \prod_{1\le j\le m}\chi_{z_j}$，并且

$$\lim_{z\to z_j} \frac{g_0 p_*\left(f_{\tilde{u}}\left(\prod_{1\le j\le m} f_{z_j}\right)\left(\sum_{1\le j\le m} p_j \frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}\right)\right)}{a_{j,k_j}(z-z_j)^{k_j}dz} = c_0$$

对任意 j。然后，根据定理 2.26，我们知道 $G(h^{-1}(r))$ 关于 $r \in (0, \int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt)$ 是线性的，其中 $G(t)$ 的定义来自步骤 1。

利用推论 2.24 和注 2.27，我们得到

$$G(t)=\int_{\{2\psi<-t\}}|F_0|^2\tilde{\rho} \tag{3.5}$$

对于任意 $t\geq 0$ 和

$$\begin{aligned}F_0=&\frac{g_0p_*\left(f_{\tilde{u}}\left(\prod_{1\leq j\leq m}f_{z_j}\right)\left(\sum_{1\leq j\leq m}p_j\frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}\right)\right)}{c_0dz}\\=&\frac{p_*\left(f_u\left(\prod_{1\leq j\leq m}f_{z_j}^{k_j+1}\right)\left(\sum_{1\leq j\leq m}p_j\frac{df_{z_j}}{f_{z_j}}\right)\right)}{c_0dz},\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，p 是从单位圆盘 Δ 到 D的万有覆盖，$f_{\tilde{u}}$ 是定义在 Δ 上的全纯函数，满足 $|f_{\tilde{u}}|=p^*(e^{\tilde{u}})$；$f_{z_0}$是定义在 Δ 上的全纯函数，满足 $|f_{z_j}|=p^*(e^{G_D(\cdot,z_j)})$，对任意 j 均成立；并且 $f_u=\frac{f_{\tilde{u}}g_0}{\prod_{1\leq j\leq m}f_{z_j}^{k_j}}$满足$|f_u|=p^*(e^u)$。
注意到 $u=\frac{\varphi}{2}+\psi-\sum_{1\leq j\leq m}(k_j+1)G_D(\cdot,z_j)$ 可以延拓为定义在$\overline{D}$上的连续函数，因此我们知道

$$|F_0|\in C(\overline{D}).$$

设 $f\in H^2(D)$ 满足 $f^{(l)}(z_j)=l!a_{j,l}$ 对任意 $1\leq l\leq k_j$ 及任意 $1\leq j\leq m$均成立。注意到，对于任意 j，$(f-F_0,z_j)\in\mathcal{I}(\varphi+2\psi)_{z_j}$，$c(t)e^{-t}$ 是递减的，且对任意 $t>0$，$\{\psi<-t\}\Subset D$，由 $\int_D|F_0|^2\tilde{\rho}<+\infty$ 可知

$$\begin{aligned}\int_{\{2\psi<-t\}}|f|^2\tilde{\rho}&\leq 2\int_{\{2\psi<-t\}}|f-F_0|^2e^{-\varphi}c(-2\psi)+2\int_D|F_0|^2\tilde{\rho}\\&\leq 2C\int_{\{2\psi<-t\}}|f-F_0|^2e^{-\varphi-2\psi}+2\int_D|F_0|^2\tilde{\rho}\\&<+\infty\end{aligned}$$

对任意 $t>0$。由引理 2.25 可得

$$\int_{\{2\psi<-t\}}|f|^2\tilde{\rho}=\int_{\{2\psi<-t\}}|F_0|^2\tilde{\rho}+\int_{\{2\psi<-t\}}|f-F_0|^2\tilde{\rho},$$

这意味着

$$\int_{\{2\psi<-t\}}F_0\overline{F_0-f}\tilde{\rho}=0$$

对任意 $t>0$。由引理 2.12 和引理 2.8 可知，存在 $r_1>0$使得

$$\int_{\{z\in D:\psi(z)=r\}}F_0\overline{F_0-f}e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|=0$$

对任意 $r\in(-r_1,0)$均成立，这意味着

$$\int_{\{z\in D:\psi(z)=r\}}|f|^2e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|\geq\int_{\{z\in D:\psi(z)=r\}}|F_0|^2e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|. \tag{3.7}$$

由 $|F_0|\in C(\overline{D})$，根据控制收敛定理、引理 2.9 以及等式 (3.7)，可得

$$\int_{\partial D}|f|^2e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|\geq\int_{\partial D}|F_0|^2e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|,$$

那么我们有

$$M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|F_0|^2e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|. \tag{3.8}$$

注意，$\lim_{t\to 0+0}c(t)=c(0)=1$。由等式 (3.5)、控制收敛定理和引理 2.12 可得

$$\begin{aligned}\frac{M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho})}{\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}&=\frac{G(0)}{\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}\\&=\lim_{r\to 1-0}\frac{\int_{\{z\in D:2\psi(z)\geq\log r\}}|F_0|^2\tilde{\rho}}{\int_0^{-\log r}c(t)e^{-t}dt}\\&=\frac{1}{2}\int_{\partial D}|F_0|^2e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|.\end{aligned}$$

结合等式 (3.8)，可得

$$M_H(Z_0,\mathfrak{a},\rho)=\frac{M(Z_0,\mathfrak{a},\tilde{\rho})}{\pi\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}.$$

因此，定理 1.5 得证。

3.2. 注 1.6 的证明。由定理 1.5 证明中的等式 (3.5)、(3.6) 和 (3.8)，注 1.6 得证。

3.3. 推论 1.7 的证明。本节我们证明推论 1.7。

记 $M:=\inf\{\int_D|f|^2\lambda:\ f\in\mathcal{O}(D)$，使得 $f^{(l)}(z_j)=0$ 对 $0\leq l<k_j$和 $f^{(k_j)}(z_j)=k_j!a_j$ 对任意 $1\leq j\leq m\}$.。由定理 1.5 和定理 2.28 （取 $c\equiv 1$），我们有

$$M_H\leq\frac{M}{\pi}\leq\sum_{1\leq j\leq m}\frac{2|a_j|^2t_j}{(k_j+1)c_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}\lambda(z_j). \tag{3.9}$$

由引理 2.10，存在 $f\in H^2(D)$，使得 $f^{(l)}(z_j)=0$ 对 $0\leq l<k_j$ 且$f_{(k_j)}(z_j)=k_j!a_j$对任意 $1\leq j\leq m$，并且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f|^2\lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_z}\right)^{-1}|dz|\leq\sum_{1\leq j\leq m}\frac{2|a_j|^2t_j}{(k_j+1)c_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}\lambda(z_j).$$

在接下来的部分中，我们证明等号成立的刻画$M_H=\sum_{1\leq j\leq m}\frac{2|a_j|^2t_j}{(k_j+1)c_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}\lambda(z_j)$。

首先，我们证明必要性。假设 $M_H=\sum_{1\leq j\leq m}\frac{2|a_j|^2t_j}{(k_j+1)c_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}\lambda(z_j)$，则由不等式（3.9）可得

$$M_H=\frac{M}{\pi}.$$

利用定理 1.5，我们知道推论 1.7 中的两个陈述均成立。

其次，我们证明充分性。假设推论 1.7 中的两个陈述成立。定理 1.5 表明 $M_H=\frac{M}{\pi}$，而定理 2.28 表明 $\frac{M}{\pi}=\sum_{1\leq j\leq m}\frac{2|a_j|^2t_j}{(k_j+1)c_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}\lambda(z_j)$。于是我们有 $M_H=\sum_{1\leq j\leq m}\frac{2|a_j|^2t_j}{(k_j+1)c_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}\lambda(z_j)$。因此，推论 1.7 成立。

3.4. 推论 1.8 的证明。我们用归纳法证明推论 1.8。

若 $k=0$，则由推论 1.7 可知，推论 1.8 成立。

假设 $k\geq 1$，且存在常数 C_1，使得对于任意 $\tilde{a}_{j,\ l}\in\mathbb{C}$，其中$1\leq j\leq m$ 且 $0\leq l\leq k-1$，存在 $f\in H^2(D)$，使得 $f^{(l)}(z_j)=\tilde{a}_{j,\ l}$ 对于任意$1\leq j\leq m$ 和 $0\leq l\leq k-1$，且 $\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f|^2|dz|\leq C_1\sum_{1\leq j\leq m}\sum_{0\leq l\leq k-1}|\tilde{a}_{j,\ l}|^2$.那么存在 $f_1\in H^2(D)$，使得 $f_1^{(l)}(z_j)=a_{j,\ l}$ 对于任意 $1\leq j\leq m$ 和$0\leq l\leq k-1$，且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f_1|^2|dz|\leq C_1\sum_{1\leq j\leq m}\sum_{0\leq l\leq k-1}|a_{j,l}|^2. \tag{3.10}$$

由引理 2.3 和不等式 (3.10)，可得

$$\sum_{1\leq j\leq m}|f_1^{(k)}(z_j)|^2\leq\frac{C_2}{2\pi}\int_{\partial D}|f_1|^2|dz|\leq C_1C_2\sum_{1\leq j\leq m}\sum_{0\leq l\leq k-1}|a_{j,l}|^2. \tag{3.11}$$

根据推论 1.7，存在 $f_2\in H^2(D)$，使得对任意 j, $f_2^{(l)}(z_j)=0$，当 $0\leq l\leq k-1$ 且 $f_2^{(k)}(z_j)=a_{j,\ k}-f_{(k)1}(z_j)$ 时，均有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f_2|^2|dz|\leq C_3\sum_{1\leq j\leq m}|a_{j,k}-f_1^{(k)}(z_j)|^2, \tag{3.12}$$

其中 C_3 是一个与 $a_{j,\ k}$无关的常数。记

$$f:=f_1+f_2,$$

那么有 $f^{(l)}(z_j)=a_{j,\ l}$，当 $1\leq j\leq m$ 且 $0\leq l\leq k$时。结合不等式 (3.10)、(3.11) 和 (3.12)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|f|^2|dz|\\
\leq&\frac{1}{\pi}\int_{\partial D}|f_1|^2|dz|+\frac{1}{\pi}\int_{\partial D}|f_2|^2|dz|\\
\leq&C_1\sum_{1\leq j\leq m}\sum_{0\leq l\leq k-1}|a_{j,l}|^2+C_3\sum_{1\leq j\leq m}|a_{j,k}-f_1^{(k)}(z_j)|^2\\
\leq&C_1\sum_{1\leq j\leq m}\sum_{0\leq l\leq k-1}|a_{j,l}|^2+2C_3\sum_{1\leq j\leq m}|a_{j,k}|^2+2C_3C_1C_2\sum_{1\leq j\leq m}\sum_{0\leq l\leq k-1}|a_{j,l}|^2.
\end{aligned}$$

取 $C=$最大值$\{C_1+2C_1C_2C_3,2C_3\}$，则由归纳法可得推论 1.8。

4. Proofs of Theorem 1.9, Theorem 1.11, Remark 1.12, Corollary 1.13 and Corollary 1.14

本节中，我们证明定理 1.9、定理 1.11、注记 1.12、推论 1.13 和推论 1.14。

4.1. 定理 1.9 的证明。我们分三个步骤证明定理 1.9。

步骤 1：不等式 (1.2) 的证明

记 $\hat{}\rho:=\prod_{1\leq j\leq n}e^{-\varphi_j}$，则我们有 $-\log\hat{}\rho$ 在 M 上是多重次调和的，并且对任意 $(w_j,\hat{}w_j)\in\partial D_j\times M_j\subset\partial M$ 和任意$1\leq j\leq n$，$\hat{}\rho(w_j,\hat{}w_j)\leq\liminf_{w\to w_j}\hat{}\rho(w,\hat{}w_j)$。

根据引理 2.25，存在一个定义在 M 上的全纯函数 F_0，使得对任意 $\beta \in I_1$，$(F_0 - f_0, z_\beta) \in J_\beta$，并且

$$G(0) = \int_M |F_0|^2 \tilde{\rho}.$$

根据 $G(t)$的定义，我们有

$$G(-\log r) \leq \int_{\{2\psi < \log r\}} |F_0|^2 \tilde{\rho}$$

对任意 $r \in (0,1]$, ，结合 $G(h^{-1}(r))$的凹性，我们得到

$$\frac{\int_{\{z\in M: 2\psi(z)\geq \log r\}} |F_0(z)|^2 \tilde{\rho}}{\int_0^{-\log r} c(t)e^{-t}dt} \leq \frac{G(0) - G(-\log r)}{\int_0^{-\log r} c(t)e^{-t}dt} \leq \frac{G(0)}{\int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt} < +\infty. \tag{4.1}$$

由于 $\lim_{t\to 0+0} c(t) = c(0) = 1$ 且 $\hat{}\rho(w_j, \hat{}w_j) \leq \liminf_{w\to w_j} \hat{}\rho(w, \hat{}w_j)$ 对任意 $(w_j, \hat{}w_j) \in \partial D_j \times M_j \subset \partial M$ 及任意 $1 \leq j \leq n$均成立，由命题 2.19 和不等式 (4.1)可知，存在 $\tilde{F}_0 \in H^2_\rho(M, \partial M)$使得 $\tilde{F}_0^* = F_0$，并且

$$\begin{aligned} M_H(Z_0, J, \rho) &\leq \|\tilde{F}_0\|^2_{\partial M,\rho} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in D: 2\psi\geq \log r\}} |F_0|^2 \tilde{\rho}}{1-r} \\ &= \frac{1}{\pi} \liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in D: 2\psi\geq \log r\}} |F_0|^2 \tilde{\rho}}{\int_0^{-\log r} c(t)e^{-t}dt} \times \frac{\int_0^{-\log r} c(t)e^{-t}dt}{1-r} \\ &\leq \frac{M(Z_0, J, \tilde{\rho})}{\pi \int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt} \end{aligned} \tag{4.2}$$

由此，不等式 (1.2)成立。

步骤 2：刻画的必要性

假设等式

$$M_H(Z_0, J, \rho) = \frac{M(Z_0, J, \tilde{\rho})}{\pi \int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt}$$

成立。结合不等式 (4.1) 和不等式 (4.2)，我们得到

$$\liminf_{r\to 1-0} \frac{\int_{\{z\in M: 2\psi(z)\geq \log r\}} |F_0(z)|^2 \tilde{\rho}}{\int_0^{-\log r} c(t)e^{-t}dt} = \liminf_{r\to 1-0} \frac{G(0) - G(-\log r)}{\int_0^{-\log r} c(t)e^{-t}dt} = \frac{G(0)}{\int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt}$$

and

$$M_H(Z_0, J, \rho) = \|\tilde{F}_0\|^2_{\partial M,\rho}.$$

由于 $G(h^{-1}(r))$ 是凹的，我们知道 $G(h^{-1}(r))$ 关于 $r \in [0, \int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt]$ 是线性的。

步骤 3：刻画的充分性

假设 $G(h^{-1}(r))$ 关于 $r \in [0, \int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt]$ 是线性的，并且

$$M_H(Z_0, J, \rho) = \|\tilde{F}_0\|^2_{\partial M,\rho}. \tag{4.3}$$

利用推论 2.24，我们得到

$$G(t)=\int_{\{2\psi<-t\}}|F_0|^2\tilde{\rho}$$

对于任意 $t\geq 0$。因此，不等式 (4.1) 变为等式，这表明

$$\frac{1}{\pi}\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\{z\in D:2\psi\geq\log r\}}|F_0|^2\tilde{\rho}}{1-r}=\frac{M(Z_0,J,\tilde{\rho})}{\pi\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}. \tag{4.4}$$

注意到

$$\hat{}\{z\in M:\ 2\psi(z)=s\}=\cup_{1\leq j\leq m}\{w_j\in D_j:\ 2\psi_j(w_j)=s\}\times\{\hat{}w_j\in M_j:\ 2\psi_j(\hat{}w_j)\leq s\},\ \hat{}\text{其中 }s\in(-\infty,0),\ \psi_j:=\max_{1\leq j'\leq m,\ j'\neq j}\{\sum_{1\leq k\leq m_j}p_{j',k}G_{D_j}(\cdot,z_{j',k})\}\text{在 }M_j\text{ 和 }\psi_j:=\sum_{1\leq k\leq m_j}p_{j,k}G_{D_j}(\cdot,z_{j,k})\text{上 }D_j。\text{记作}$$

$$M_{j,s}:=\{\hat{w}_j\in M_j:2\hat{\psi}_j(\hat{w}_j)\leq s\}$$

and

$$D_{j,s}:=\{w_j\in D_j:2\psi_j(w_j)\leq s\}$$

对于 $1\leq j\leq n$。由引理 2.8 可知，存在 $r_0\in(0,1)$，使得$\bigtriangledown\psi_j\neq 0$ 在 $D_j\backslash D_{j,\log r_0}$ 对于任意 $1\leq j\leq n$。由引理 2.12，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\{z\in M:2\psi(z)\geq\log r\}}|F_0|^2\tilde{\rho}\\
=&\sum_{1\leq j\leq n}\int_{\{z\in M:2\psi(z)\geq\log r\ \&\ \psi_j(z)>\hat{\psi}_j(z)\}}|F_0|^2\tilde{\rho}\\
=&\sum_{1\leq j\leq n}\int_{\log r}^{0}\int_{M_{j,s}}\int_{\partial D_{j,s}}\frac{|F_0(w_j,\hat{w}_j)|^2\tilde{\rho}}{2|\bigtriangledown\psi_j|}|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)ds\\
=&\sum_{1\leq j\leq n}\int_{\log r}^{0}\int_{M_{j,s}}\int_{\partial D_{j,s}}\frac{|F_0(w_j,\hat{w}_j)|^2}{2|\bigtriangledown\psi_j|}\times c(-2\psi)\prod_{1\leq l\leq n}e^{-\varphi_l}|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)ds\\
=&\sum_{1\leq j\leq n}\int_{\log r}^{0}c(-s)\int_{M_{j,s}}\int_{\partial D_{j,s}}\frac{|F_0(w_j,\hat{w}_j)|^2}{2|\bigtriangledown\psi_j|}\times\prod_{1\leq l\leq n}e^{-\varphi_l}|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)ds.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$\tilde{}$对于 $r\in(r_0,1)$。根据引理 2.16 和 $F_0^*=F_0$,

$$\lim_{s\to 0}\sum_{1\leq j\leq n}\int_{M_{j,s}}\int_{\partial D_{j,s}}\frac{|F_0(w_j,\hat{w}_j)|^2}{|\bigtriangledown\psi_j|}\times e^{-\varphi}|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)ds=2\pi\|\tilde{F}_0\|^2_{\partial M,\rho}.$$

由于 $\lim_{s\to 0+0}c(s)=c(0)=1$，等式 (4.5) 意味着

$$\frac{1}{\pi}\liminf_{r\to 1-0}\frac{\int_{\{z\in D:2\psi\geq\log r\}}|F_0|^2\tilde{\rho}}{1-r}=\|\tilde{F}_0\|^2_{\partial M,\rho}. \tag{4.6}$$

结合不等式 (4.2)、等式 (4.3)、(4.4) 和 (4.6)，我们得到 $M_H(Z_0,J,\rho)=\frac{M(Z_0,\ J,\ \tilde{\rho})}{\pi\int_0^{+\infty}c(t)e^{-t}dt}$。因此，定理 1.9 得证。

4.2. 定理 1.11 的证明。由于根据魏尔斯特拉斯定理（见 [3]），φ_j 对任意 $z \in \partial D_j$ 在 z 处连续，定理 1.11 中的陈述 (1) 等价于：对任意 $j \in \{1, 2, ..., n\}$，$\varphi_j = 2\log|g_j| + 2u_j$，其中 u_j 是 D_j 上的调和函数，g_j 是 D_j 上满足 $g_j(z_{j,k}) \neq 0$ 的全纯函数。于是，利用定理 2.29 和注 2.31，四个陈述成立当且仅当 $G(h^{-1}(r))$ 是线性的。

我们沿用定理 1.9 证明中的记号。根据定理 1.9，只需证明：如果 $G(h^{-1}(r))$ 是线性的，那么

$$M_H(Z_0, J, \rho) = \|\tilde{F}_0\|^2_{\partial M,\rho}, \tag{4.7}$$

其中 F_0 是定义在 M 上的全纯函数（在定理 1.9 的证明中引入），满足 $\tilde{F}_0^* = F_0$,

$$M(Z_0, J, \tilde{\rho}) = \int_M |F_0|^2\tilde{\rho} \tag{4.8}$$

并且对任意 $\beta \in I_1$，$(F_0 - f_0, z_\beta) \in \mathcal{I}(2\psi)_{z_\beta}$。

下文假设 $G(h^{-1}(r))$ 在 $[0, \int_0^{+\infty} c(t)e^{-t}dt]$ 上是线性的。利用推论 2.24，我们得到

$$G(t) = \int_{\{2\psi<-t\}} |F_0|^2\tilde{\rho} \tag{4.9}$$

对任意 $t \geq 0$ 均成立。

设 f 是 $H^2_\rho(M, \partial M)$ 中满足以下条件的任意元素：对任意 $\beta \in I_1$，$(f^* - F_0, z_\beta) \in \mathcal{I}(2\psi)_{z_\beta}$。由定理 2.29 可知，$\varphi_j = 2\log|g_j| + 2u_j$，其中 u_j 是 D_j 上的调和函数，g_j 是 D_j 上满足$g_j(z_{j,k}) \neq 0$ （$1 \leq k \leq m_j$）的全纯函数，因此 φ_j 在 $z_{j,k}$ 附近有界。注意到 $c(t)e^{-t}$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减，于是 $\int_M |F_0|^2e^{-\varphi}c(-2\psi) < +\infty$ 意味着

$$|f^*|^2e^{-\varphi}c(-2\psi) \leq C|f^* - F_0|^2e^{-2\psi} + 2|F_0|^2e^{-\varphi}c(-2\psi)$$

在 z_β 附近可积。对于任意 $z \in M\backslash\{z_\beta : \beta \in I_1\}$，由于 $c(-2\psi)$ 在 z 附近有界，由引理 2.21 可知 $|f^*|^2e^{-\varphi}c(-2\psi)$ 在 z 附近可积。因此，我们得到

$$\int_{\{2\psi<-t\}} |f^*|^2e^{-\varphi}c(-2\psi) < +\infty$$

对任意 $t > 0$ 均成立。由等式 (4.9)，我们有

$$\int_{\{2\psi<-t\}} (f^* - F_0)\overline{F_0}\tilde{\rho} = 0,$$

这意味着

$$\sum_{1\leq j\leq n} \int_{-\infty}^{t} c(-s) \int_{M_{j,s}} \int_{\partial D_{j,s}} \frac{(f^* - F_0)\overline{F_0}}{|\bigtriangledown \psi_j|} \times \prod_{1\leq l\leq n} e^{-\varphi_l}|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)ds = 0$$

对于任意 $t > 0$，根据引理 2.12，其中 $M_{j,s}$ 和 $D_{j,s}$ 的定义可参见定理 1.9 的证明。因此,

$$\sum_{1\leq j\leq n} \int_{M_{j,s}} \int_{\partial D_{j,s}} \frac{(f^* - F_0)\overline{F_0}}{|\bigtriangledown \psi_j|} \times \prod_{1\leq l\leq n} e^{-\varphi_l}|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j) = 0,$$

这表明

(4.10)

$$\sum_{1\le j\le n}\int_{M_{j,s}}\int_{\partial D_{j,s}}\frac{|f^*|^2e^{-\varphi}}{|\bigtriangledown\psi_j|}|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)\ge\sum_{1\le j\le n}\int_{M_{j,s}}\int_{\partial D_{j,s}}\frac{|F_0|^2e^{-\varphi}}{|\bigtriangledown\psi_j|}|dw_j|d\mu_j(\hat{w}_j)$$

对于任意 $s>0$。结合等式 (4.10) 和引理 2.16，我们知道

$$\|f^*\|_{\partial M,\rho}\ge\|\tilde{F}_0\|_{\partial M,\rho},$$

这意味着等式 (4.7) 成立。

因此，定理 1.11 已得证。

4.3. 注记 1.12 的证明。当定理 1.11 中的四个陈述成立时，$G(h^{-1}(r))$ 是线性的。根据注记 2.32、等式 (4.7) 和 (4.8)，注记 1.12 得证。

4.4. 推论 1.13 的证明。由定理 1.9 和定理 2.33（取 $c\equiv 1$），我们得到

$$M_H(Z_0,\mathcal{I}(2\psi),\rho)\le\frac{M(Z_0,\mathcal{I}(2\psi),\rho)}{\pi}\le\sum_{\beta\in I_1}\sum_{\alpha\in E_\beta}\frac{|d_{\beta,\alpha}|^2 2^n\pi^{n-1}e^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\le j\le n}(\alpha_j+1)c_{j,\beta_j}^{2\alpha_j+2}}. \tag{4.11}$$

根据引理 2.18，存在 $f\in H^2_\rho(M,\partial M)$，使得对于任意 $\beta\in I_1$，$(f^*-f_0,z_\beta)\in\mathcal{I}(2\psi)^{z_\beta}$，并且

$$\|f\|^2_{\partial M,\rho}\le\sum_{\beta\in I_1}\sum_{\alpha\in E_\beta}\frac{|d_{\beta,\alpha}|^2 2^n\pi^{n-1}e^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\le j\le n}(\alpha_j+1)c_{j,\beta_j}^{2\alpha_j+2}}.$$

在接下来的部分中，我们证明等号成立的刻画。

$$M_H(Z_0,\mathcal{I}(2\psi),\rho)=\sum_{1\le j\le m}\frac{2|a_j|^2t_j}{(k_j+1)c_\beta(z_j)^{2(k_j+1)}}\rho(z_j). \tag{4.12}$$

首先，我们证明必要性。假设等式 (4.12) 成立，则由不等式 (4.11)，我们有

$$M_H(Z_0,\mathcal{I}(2\psi),\rho)=\frac{M(Z_0,\mathcal{I}(2\psi),\rho)}{\pi}.$$

利用定理 1.11，我们知道推论 1.13 中的四个陈述成立。

其次，我们证明充分性。假设推论 1.13 中的四个陈述成立。定理 1.11 表明 $M_H(Z_0,\mathcal{I}(2\psi)\ \rho)\ =\ {}^{M}{}_{(Z_0,\mathcal{I}(2\psi)\ \rho)\ \pi}$，定理 2.33 表明 ${}^{M}{}_{(Z_0,\mathcal{I}(}$ $\overline{\qquad\qquad\qquad}$ ${}_{\pi}{}^{2\psi\ \ \rho}\ =\sum_{\beta\in I_1}\sum_{\alpha\in E_\beta}\frac{|d_{\beta)}|^2 2^n\pi^{n-1}e^{-\varphi(z_\beta)}}{\Pi_{1\le j\le n}\ \alpha_j+1\ c_j^{2\alpha_j+2}}\ (),\beta_j$，于是等式 (4.12) 成立。

因此，推论 1.13 得证。

4.5. 推论 1.14 的证明。我们用归纳法证明推论 1.14。

如果 $k=0$，则由推论 1.13 可知推论 1.14 成立。

假设 $k\ge 1$，且存在一个常数 C_1，使得对于任意 $\tilde{a}_{\beta,\ \alpha}\in\mathbb{C}$，其中 $\beta\in I_1$ 且 $\alpha\in L_{k-1}$，存在 $f\in H^2_\rho(M,\partial M)$，使得 $\partial^\alpha f^*(z_\beta)=a_{\beta,\ \alpha}$ 对于任意 $\beta\in I_1$ 和 $\alpha\in L_{k-1}$，且 $\|f\|^2_{\partial M,\ \rho}\le C_1\sum_{\beta\in I_1,\ \alpha\in L_{k-1}}|\tilde{a}_{\beta,\ \alpha}|^2$. 那么存在

$f_1 \in H^2_\rho(M,\partial M)$，使得 $\partial^\alpha f_1^*(z_\beta) = a_{\beta,\ \alpha}$对于任意 $\beta \in I_1$和 $\alpha \in L_{k-1}$，且

$$\|f_1^*\|^2_{\partial M,\rho} \le C_1 \sum_{\beta\in I_1,\alpha\in L_{k-1}} |a_{\beta,\alpha}|^2. \tag{4.13}$$

由引理 2.14 和不等式 (4.13)，我们得到

$$\sum_{\beta\in I_1|\alpha|=k} |\partial^\alpha f_1^*(z_\beta)|^2 \le C_2\|f_1^*\|^2_{\partial M,\rho} \le C_1C_2 \sum_{\beta\in I_1,\alpha\in L_{k-1}} |a_{\beta,\alpha}|^2, \tag{4.14}$$

其中 $|\alpha| = \sum_{1\le j\le n}\alpha_j$。由推论 1.13（取 $f_0 = \sum_{|\alpha|=k}(a_{\beta,\ \alpha} - \partial^\alpha f_1^*(z_\beta))\prod_{1\le j\le n}(w_j - z_{j,\ \beta_j})^{\alpha_j}$在 V_β上，且 $\psi = 2(n+k)\max\{\sum_{1\le k\le m_j} G_{D_j}(\cdot, z_{j,\ k})\}$），可知存在 $f_2 \in H^2_\rho(M,\partial M)$，使得对任意 $\beta \in I_1$, $\partial^\alpha f_2^*(z_\beta) = 0$在 $\alpha \in L_{k-1}$上以及 $\partial^\alpha f_2^*(z_\beta) = a_{\beta,\ \alpha} - \partial^\alpha f_1^*(z_\beta)$，并且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} |f_2|^2|dz| \le C_3 \sum_{\beta\in I_1,|\alpha|=k} |a_{\beta,\alpha} - \partial^\alpha f_1^*(z_\beta)|^2, \tag{4.15}$$

其中， C_3 是一个与$a_{\beta,\ \alpha}$无关的常数。记该。

$$f := f_1 + f_2,$$

那么我们有 $\partial^\alpha f^*(z_\beta) = a_{\beta,\alpha}$ 当 $\beta \in I_1$ 且 $\alpha \in L_k$ 时。结合不等式 (4.13)、(4.14) 和 (4.15)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|f\|^2_{\partial M,\rho}\\
\le& 2\|f_1\|^2_{\partial M,\rho} + 2\|f_2\|^2_{\partial M,\rho}\\
\le& C_1 \sum_{\beta\in I_1,\alpha\in L_{k-1}} |a_{\beta,\alpha}|^2 + C_3 \sum_{\beta\in I_1,|\alpha|=k} |a_{\beta,\alpha} - \partial^\alpha f_1^*(z_\beta)|^2\\
\le& C_1 \sum_{\beta\in I_1,\alpha\in L_{k-1}} |a_{\beta,\alpha}|^2 + 2C_3 \sum_{\beta\in I_1,|\alpha|=k} |a_{\beta,\alpha}|^2 + 2C_3C_1C_2 \sum_{\beta\in I_1,\alpha\in L_{k-1}} |a_{\beta,\alpha}|^2.
\end{aligned}$$

取 $C = \max\{C_1 + 2C_1C_2C_3, 2C_3\}$，因此由归纳法可知推论 1.13 成立。

5. Proof of Theorem 1.15

我们分三步证明定理 1.15：首先，证明不等式 (1.3)；其次，证明该刻画的必要性；最后，证明该刻画的充分性。

步骤 1. 根据引理 2.18，存在唯一的 $F_0 \in H^2_\rho(M,\partial M)$，满足对于任意 $\beta \in I_1$，$F_0^*(z_\beta) = h_0(z_\beta)$，且 $M_H(Z_0,J,\rho) = \|F_0\|^2_{\partial M,\ \rho}$。对于任意 $1 \le j \le n$，记为 that

$$\begin{aligned}
M_{H,j}(Z_0,J,\rho) := \inf\Big\{&\|f\|^2_{\partial D_j\times M_j,\rho} : f \in H^2_\rho(M,\partial D_j \times M_j)\\
&\text{s.t. } f^*(z_\beta) = h_0(z_\beta) \text{ for any } \beta \in I_1\Big\}.
\end{aligned}$$

根据 $M_H(Z_0,J,\rho)$ 和 $M_{H,\ j}(Z_0,J,\rho)$ 的定义，我们有

$$M_H(Z_0,J,\rho) = \|F_0\|^2_{\partial M,\rho} \ge \sum_{1\le j\le n} M_{H,j}(Z_0,J,\rho). \tag{5.1}$$

对于任意 $1\le j\le n$，记

$$M_{D_j}:=\inf\Big\{\int_{D_j}|f|^2e^{-\varphi_j}:f\in\mathcal{O}(D_j)\\ \text{s.t. } f(z_{j,k})=h_j(z_{j,k})\text{ for any }1\le k\le m_j\Big\},$$

$$M_{\partial D_j}:=\inf\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_j}|f|^2\Big(\sum_{1\le k\le m_j}2\frac{\partial G_{D_j}(w_j,z_{j,k})}{\partial v_{w_j}}\Big)^{-1}e^{-\varphi_j}|dw_j|:\\ f\in H^2(D_j)\text{ s.t. }f(z_{j,k})=h_j(z_{j,k})\text{ for any }1\le k\le m_j\Big\}$$

and

$$M_{M_j}:=\inf\Big\{\int_{M_j}|f|^2\prod_{1\le l\le n,l\neq j}e^{-\varphi_l}:f\in\mathcal{O}(M_j)\\ \text{s.t. }f(z_\gamma)=\prod_{1\le l\le n,l\neq j}h_l(z_{l,\gamma_l})\text{ for any }\gamma\in I_{1,j}\Big\},$$

其中 $I_{1,\ j}:=\{\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_{j-1},\gamma_{j+1},\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{Z}^{n-1}:\ 1\le\gamma_l\le m_l$对任意 $l\neq j\}$以及 $z_\gamma:=(z_{1,\ \gamma_1},\ldots,z_{j-1,\ \gamma_{j-1}},z_{j+1,\ \gamma_{j+1}},\ldots,z_{n,\ \gamma_n})\in M_j$对任意 $\gamma\in I_{1,\ j}$。由定理 1.5、引理 2.42、引理 2.41、引理2.43以及不等式（5.1）可得,

$$\begin{aligned}M_H(Z_0,J,\rho)\ge&\sum_{1\le j\le n}M_{H,j}(Z_0,J,\rho)\\=&\sum_{1\le j\le n}M_{\partial D_j}\times M_{M_j}\\=&\sum_{1\le j\le m}M_{\partial D_j}\times\prod_{1\le l\le n,l\neq j}M_{D_l}\\\ge&\pi^{n-1}\sum_{1\le j\le m}M_{\partial D_j}\times\prod_{1\le l\le n,l\neq j}M_{\partial D_l}\\=&n\pi^{n-1}M_S(Z_0,J,\lambda).\end{aligned}\tag{5.2}$$

步骤 2。假设等式 $M_S(Z_0,J,\lambda)=M_H(Z_0,\ J,\ \rho)$ 成立。由于存在 $k\in\{1,\ldots,m_j\}$ 使得 $h_j(z_{j,\ k})\neq 0$，我们知道 $M_{\partial D_j}>0$和 $M_{D_j}>0$。由不等式（5.2）和定理 1.5可得,

$$M_{D_j}=\pi M_{\partial D_j}$$

对于任意 $1\le j\le n$，定理 1.15 中的三个结论均成立。

步骤 3。假设定理 1.15 中的三个陈述成立。定理 1.5 告诉我们,

$$M_{D_j}=\pi M_{\partial D_j}\tag{5.3}$$

对任意 $1\le j\le n$ 均成立。对于任意 $1\le j\le n$，记为

$$F_j=\frac{P_j^*\left(f_{u_j}\left(\prod_{1\le k\le m_j}f_{z_{j,k}}\right)\left(\sum_{1\le k\le m_j}\frac{df_{z_{j,k}}}{f_{z_{j,k}}}\right)\right)}{c_jdz}\in\mathcal{O}(D_j).$$

由注 1.6 可知，存在 $f_j \in H^2(D_j)$ 使得 $f_j^* = F_j$，并且我们有

$$M_{D_j} = \int_{D_j} |F_j|^2 e^{-\varphi_j} \tag{5.4}$$

and

$$M_{\partial D_j} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_j} |f_j|^2 \Big(\sum_{1\le k\le m_j} 2\frac{\partial G_{D_j}(w_j, z_{j,k})}{\partial v_{w_j}} \Big)^{-1} e^{-\varphi_j} |dw_j|. \tag{5.5}$$

于是存在 $\tilde{F}_0 \in H^2_\rho(M, \partial M)$，使得 $\tilde{F}_0 = f_j \times \prod_{1\le l\le n, l\ne j} F_l$ 在 $\partial D_j \times \tilde{M_j}$ 上对任意 $1 \le j \le n$ 成立，且 $F_0^* = \prod_{1\le j\le n} F_j$。由引理 2.41、引理2.43、等式（5.4）和（5.5），我们知道

$$M_{H,j}(Z_0, J, \rho) = \|\tilde{F}_0\|^2_{\partial D_j \times M_j, \rho}. \tag{5.6}$$

注意到，对任意 $1 \le j \le n$ 和 $1 \le k \le m_j$，$F_j(z_{j,k}) = h_j(z_{j,k})$，因此对任意 $\beta \in I_1$，$F_0^*(z_\beta) = h_0(z_\beta)$。不等式（5.6）表明

$$\sum_{1\le j\le n} M_{H,j}(Z_0, J, \rho) = \sum_{1\le j\le n} \|\tilde{F}_0\|^2_{\partial D_j \times M_j, \rho} \ge M_H(Z_0, J, \rho).$$

结合不等式（5.1），得到

$$\sum_{1\le j\le n} M_{H,j}(Z_0, J, \rho) = M_H(Z_0, J, \rho). \tag{5.7}$$

利用不等式（5.2）、等式（5.3）和（5.7），得到

$$M_H(Z_0, J, \rho) = n\pi^{n-1} M_S(Z_0, J, \lambda).$$

因此，定理 1.15 得证。

致谢。作者谨向包世杰博士和米志通博士致谢，感谢他们审阅稿件并指出一些笔误。第一作者受到中国国家重点研发计划项目 2021YFA1003100、国家自然科学基金项目 NSFC-11825101、NSFC-11522101 和 NSFC-11431013 的资助。

References

[1] P.L. Duren，《H^p 空间理论》，Academic Press，纽约和伦敦，1970年。[2] H. Federer，《曲率测度》，Trans. Amer. Math. Soc. 93（1959），418–491。[3] O. Forster，《黎曼曲面讲义》，数学研究生教材，81，Springer-Verlag，纽约—柏林，1981年。[4] H. Grauert 和 R. Remmert，《相干解析层》，数学科学基础丛书，265，Springer-Verlag，柏林，1984年。[5] Q.A. Guan，《共轭 Hardy H^2 核的 Saitoh 猜想证明》，J. Math. Soc. Japan 71（2019），第4期，1173–1179。[6] Q.A. Guan、Z.T. Mi 和 Z. Yuan，《具有 Lebesgue 可测增益的最小 L^2 积分的凹性 II》，https://www.researchgate.net/publication/354464147，另见 arXiv:2211.00473。[7] Q.A. Guan、Z.T. Mi 和 Z. Yuan，《边界点、最小 L^2 积分与凹性 III——黎曼曲面上的线性》，arXiv:2203.15188v2。[8] Q.A. Guan、Z.T. Mi 和 Z. Yuan，《边界点、最小 L^2 积分与凹性 IV——开黎曼曲面上的纤维化》，arXiv:2204.07266v2。[9] Q.A. Guan 和 Z. Yuan，《具有 Lebesgue 可测增益的最小 L^2 积分的凹性》，https://www.researchgate.net/publication/353794984，另见 arXiv:2209.03637。

[10] Q.A. Guan 和 Z. Yuan, 《具有 Lebesgue 可测增益的最小L^2 积分 III——开黎曼曲面》, https://www.researchgate.net/publication/356171464, 另见 arXiv:2211.04951。[11] Q.A. Guan 和 Z. Yuan, 《具有 Lebesgue 可测增益的最小 L^2 积分 IV: 开黎曼曲面的乘积》, Peking Math J（2022）。https://doi.org/10.1007/s42543-022-00053-1。[12] Q.A. Guan 和 Z. Yuan, 《Saitoh 猜想的加权版本》, 已被 Publ. Res. Inst. Math. Sci. 接收, arXiv:2207.10976v2。[13] Q.A. Guan 和 Z. Yuan, 《平面区域乘积上的 Hardy 空间、核函数与 Saitoh 猜想》, arXiv:2210.14579v2。[14] Q. A. Guan 和 X.Y. Zhou, 《具有最优估计的一个延拓问题的解及其应用》, Ann. of Math.（2）181（2015）, 第3期, 1139–1208。[15] Z. Pasternak-Winiarski, 《再生核对积分权的依赖性》, J. Funct. Anal. 1990, 94（1）, 110–134。[16] Z. Pasternak-Winiarski, 《允许 Bergman 型再生核的权》, Internat. J. Math. Math. Sci. 15（1992）, 第1期, 1–14。[17] W. Rudin, 《H_p类解析函数》, Trans. Amer. Math. Soc. 78（1955）, 46–66。[18] S. Saitoh, 《再生核理论及其应用》, Pitman 数学研究札记系列, 189, Longman Science & Technical, Harlow; 与 John Wiley & Sons, Inc.（纽约）在美国联合出版, 1988年, x+157 页。[19] L. Sario 和 K. Oikawa, 《容量函数》, 数学科学基础丛书, 149, Springer-Verlag, 纽约, 1969年。Mr 0065652。Zbl 0059.06901。[20] H. Skoda, 《$\mathbb{C}^n$中的有限阶或无限阶解析子集》, Bull. Soc. Math. France 100（1972）, 353–408。[21] N. Suita, 《黎曼曲面上的容量与核》, Arch. Rational Mech. Anal. 46（1972）, 212–217。[22] A. Yamada, 《与再生核、theta 函数及 Suita 猜想相关的主题（日文）》, 《再生核理论及其应用》（京都, 1998）, S¯urikaisekikenky¯usho K¯oky¯uroku, 1067（1998）, 39–47。

Qi'an Guan: School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing, 100871, China.

Email address: guanqian@math.pku.edu.cn

Zheng Yuan: School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing, 100871, China.

Email address: zyuan@pku.edu.cn