相对阶为二的系统的严格负虚状态反馈控制。 ⋆

James Dannatt * **Ian R. Petersen** **

*澳大利亚国立大学电气、能源与材料工程研究院，澳大利亚首都领地堪培拉 *2600*（电子邮件：*jameshd1987@gmail.com*）。

**澳大利亚国立大学电气、能源与材料工程研究院，澳大利亚首都领地堪培拉 *2600*（电子邮件：*i.r.petersen@gmail.com*）

arXiv:2304.01687v1 [math.OC] 4 Apr 2023

摘要： 本文提出了一种严格负虚状态反馈控制方法，适用于相对阶为二的负虚系统，例如配备共置传感器和执行器的柔性结构。我们证明，通过在标称模型中加入一个具有去稳定作用的 PID 控制器，可以对系统应用状态反馈控制，从而得到一个具有预设稳定度的严格负虚标称闭环系统。此外，即使存在未建模溢出动力学，也能保证整个系统内部稳定。

关键词：控制设计、建模、鲁棒控制、负虚系统

1. 引言

负虚系统理论广泛适用于柔性结构的鲁棒振动控制问题（Lanzon 和 Petersen，2008年；Petersen，2016年）。这类系统通常采用一系列对应于系统共振模态的二阶传递函数之和进行建模（Preumont，1997年；Lanzon 和 Petersen，2008年；Reyes，2019年）。随后可以对该总和进行拆分，以降低系统模型的阶数，并将未建模动态视为模型不确定性。为这种降阶系统模型设计控制系统时，如果控制器未针对不确定性进行鲁棒设计，未建模的溢出动力学可能会降低控制系统性能或导致不稳定。负虚系统理论为此类系统的控制器设计提供了一种鲁棒方法（Petersen 和 Lanzon，2010年；Petersen，2015年）。

负虚系统理论中的一项关键结果指出，当满足某些增益条件时，负虚系统与严格负虚（SNI）系统构成的正反馈互联系统具有内部稳定性 Lanzon 和 Petersen（2008）；Lanzon 和 Chen（2017）。这一结果的一项重要优势是，它通过相位稳定来保证反馈互联系统的内部稳定性，而非像小增益定理那样通过增益稳定来实现。在小增益方法中，为确保稳定性，系统的频率响应需要在整个频率范围内满足增益条件 Petersen 和 Lanzon（2010）。然而，负虚系统理论只需在直流处施加增益条件，就能保证稳定性 Lanzon 和 Chen（2017）。

采用降阶模型对带有共置传感器和执行器的柔性结构进行建模，是利用负虚系统鲁棒稳定性的一种方法，因为这种方法能够保证未建模动态具有负虚性质 Petersen 和 Lanzon（2010）；Lanzon 和 Chen（2017）。由于这一性质，负虚系统在正反馈互联系统下的鲁棒稳定性推动了相关控制器综合研究，旨在构造具有负虚或严格负虚性质的闭环系统 Petersen 和 Lanzon（2010）；Reyes（2019）；Mabrok 等（2015）；Dannatt 等人（2020）；Ren 等人（2021）；Song 等人（2012）；Hu 等人（2022）；Bhowmick 和 Patra（2020）。这种闭环负虚性质进而保证闭环系统对未建模动态具有鲁棒稳定性。遗憾的是，采用模态求和法对带有共置传感器和执行器的柔性结构进行建模，会使得许多负虚系统文献中的状态反馈结果难以应用。求和中使用的二阶传递函数具有相对阶 2；由于保证负虚性质的参数受到约束，这些传递函数最终总会得到输入矩阵和输出矩阵正交的状态空间实现。文献已注意到这一问题，并提出了几种替代控制方案；关于此问题的全面总结，请参见 Reyes（2019）第 7.2 节。

本文探讨了将静态状态反馈应用于输入和输出矩阵正交的相对阶为二的系统的新方法，以实现严格负虚的闭环系统并确保整个系统内部稳定。为了解决上述正交性问题，本文提出了一种增广控制方案，该方案可改变系统的相对阶，同时让设计者能够灵活选择

⋆本研究得到澳大利亚研究理事会资助，资助项目编号为 DP160101121 和 DP190102158。

闭环系统可达到的指定稳定度。这一点很重要，因为该增广控制方案使文献中的许多负虚状态反馈结果得以应用于先前不满足这些结果通常所依赖的正交性假设的系统。

2. 预备结果

本节将给出主要结果所需的一些定义和预备结果。首先，考虑线性时不变（LTI）系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t),\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned} \tag{1}$$

以下定义涉及与系统 (1) 对应的传递函数矩阵$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$的负虚、严格负虚和无损 NI 性质。

定义 *1.* Mabrok 等（2015）：若方形传递函数矩阵 $G(s)$ 满足以下条件，则称其为负虚（NI）：

(1) G(s) 在 $Re[s] > 0$ 中没有极点。(2) 对所有满足 jw 不是 $G(s)$ 的极点的 $\omega \geq 0$，$j(G(j\omega) - G(j\omega)^*) \geq 0$。(3) 若 $s = j\omega_0$，则 $\omega_0 > 0$ 是 $G(s)$ 的极点，且为简单极点。此外，若 $s = j\omega_0$，则 $\omega_0 > 0$ 是 $G(s)$ 的极点，则留数矩阵 $K = \lim_{s\to j\omega_0}(s - j\omega_0)jG(s)$ 为半正定厄米矩阵。(4) 若 $s = 0$ 是 $G(s)$ 的极点，则它要么是简单极点，要么是二重极点。若为二重极点，则 $\lim_{s\to 0} s^2G(s) \geq 0$。

定义 *2.* Mabrok 等人（2015年）若方阵传递函数矩阵 $G(s)$ 满足以下条件，则称其为严格负虚（SNI）：

(1) G(s) has no poles in $Re[s] \geq 0$.
(2) For all $\omega > 0$ such that $j(G(j\omega) - G(j\omega)^*) > 0$.

此外，若对应的传递函数矩阵 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 为负虚（NI）或严格负虚（SNI），则称线性时不变（LTI）系统 (1) 为 NI 或 SNI 系统。

定义 *3.* Liu 和 Xiong（2016年）若方阵实有理传递函数矩阵 $G(s)$满足以下条件，则称其为无损负虚（LNI）：$G(s)$为负虚，且对所有 $\omega > 0$，$j[G(j\omega) - \tilde{G}(j\omega)] = 0$；但当 ω 为 $G(s)$的极点时除外，此时 $j\omega$。

引理 *4.* Lanzon 和 Chen（2017年）
设 $M(s)$ 是一个原点处无极点的负虚传递函数矩阵，$N(S)$ 是一个严格负虚传递函数矩阵。如图 1 所示，$M(s)$ 与 $N(s)$ 构成的正反馈互联系统内部稳定，当且仅当满足以下条件：

(1) $I - M(\infty)N(\infty)$ 是非奇异的，(2) $\bar{\lambda}[(I - M(\infty)N(\infty))^{-1}(M(\infty)N(0) - I)] < 0$，(3) $\bar{\lambda}[(I - N(0)M(\infty))^{-1}(M(0)N(0) - I)] < 0$，

其中 $\bar{\lambda}[H]$ 表示方形实值复矩阵 H的最大特征值。

本文研究如何对具有以下状态空间实现的相对阶为二的系统应用状态反馈

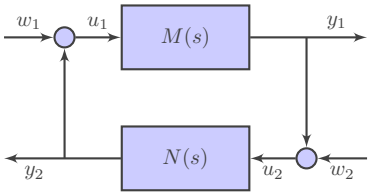

图1. 正反馈互联系统。传递函数 $M(s)$ 和 $N(s)$ 通过正反馈互连。Petersen 和 Lanzon（2010）

该系统具有正交输入矩阵和输出矩阵，目的是实现具有指定稳定度的严格负虚闭环系统。假设给定系统配备了足够的传感器，可获取标称系统的所有状态以用于反馈。系统对象可由以下线性状态空间系统描述：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u,\\ z &= C_1x.\end{aligned} \tag{2}$$

该系统对应于图 2 中所示的标称对象传递函数矩阵 $G(s)$。如果对该系统施加状态反馈控制律 $u = Kx$，则相应的闭环不确定系统具有状态空间表示

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + B_2K)x + B_1w,\\ z &= C_1x.\end{aligned} \tag{3}$$

对应的闭环传递函数为 $G_{cl}(s) = C_1(sI - A - B_2K)^{-1}B_1$。这里，我们关注的是寻找使闭环传递函数 (3) 为严格负虚且内部稳定的条件，并确定是否存在满足条件的控制器 K。如果存在控制器，使得 $G_{cl}(s) = C_1(sI - (A - B_2K)^{-1}B_1 - \Delta(s))^{-1}$ 为负虚（严格负虚），且不确定项 $\Delta(s)$ 为严格负虚（负虚），那么当满足引理 4 的条件时，图 2 所示从 w 到 z 的相关线性分式互联可保证内部稳定。

本文的结果建立在 Mabrok 等人（2012年、2015年）和 Dannatt 等人（2020年）的状态反馈结果之上。这些状态反馈结果假设系统 (2) 满足以下条件：
假设 *1.* 矩阵 C_1B_2 非奇异。
假设 *2.* 矩阵 $R = C_1B_1 + B_1^TC_1^T > 0$。

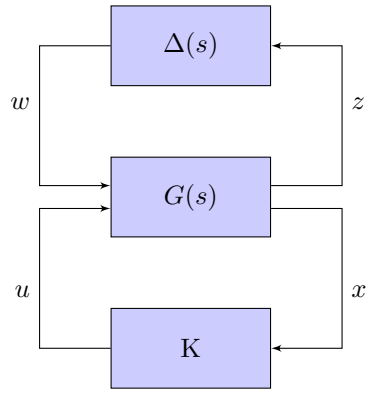

图2. 含有植物不确定性 $\Delta(s)$ 的状态反馈控制系统。

为了介绍 Mabrok 等人（2012年、2015年）以及 Dannatt 等人（2020年）提出的状态反馈方法，我们首先

需要考虑矩阵的舒尔分解

$$A_r = Q(A + \epsilon I) = A_q + \epsilon Q, \tag{4}$$

其中

$$Q = I - B_2(C_1B_2)^{-1}C_1, \tag{5}$$

$$A_q = A - B_2(C_1B_2)^{-1}C_1A = QA. \tag{6}$$

且 $\epsilon > 0$ 是定义闭环系统所需稳定度的参数。现在构造以下矩阵:

$$\tilde{A} = U^T A_r U = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{7a}$$

$$\tilde{B} = U^T B_1 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} \\ \tilde{B}_{22} \end{bmatrix}, \tag{7b}$$

$$\tilde{C} = U^T\big(B_2(C_1B_2)^{-1} - B_1R^{-1}\big) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} \\ \tilde{C}_{22} \end{bmatrix}, \tag{7c}$$

$$\tilde{Z} = U^T Z U = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T - \tilde{C}R\tilde{C}^T = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{11} & \tilde{Z}_{12} \\ \tilde{Z}_{21} & \tilde{Z}_{22} \end{bmatrix}, \tag{7d}$$

其中 A_{11} 的所有特征值都位于复平面的闭左半平面，且 A_{22} 是反稳定矩阵；即，$\sigma(A_{22}) \subset \{s : \mathrm{Re}[s] > 0\}$。这里，$U$ 是一个依赖于 ϵ 的正交矩阵，通过实舒尔变换得到；参见 Bernstein（2009）的第 5.4 节。

注*5.* A_q 的特征值对应于（2）中从 u 到 z 的传递函数的零点，此外还有一个原点处的零点。为说明这一点，令 $w \equiv 0$，并注意到（2）意味着

$$\dot{z} = C_1Ax + C_1B_2u. \tag{8}$$

根据假设，(C_1B_2) 可逆，因此可以对（8）重新排列，写成

$$u = (C_1B_2)^{-1}\dot{z} - (C_1B_2)^{-1}C_1Ax. \tag{9}$$

现在，将（9）代入（2），得到

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_2(C_1B_2)^{-1}\dot{z} - B_2(C_1B_2)^{-1}C_1Ax \\ &= (A - B_2(C_1B_2)^{-1}C_1A)x + B_2(C_1B_2)^{-1}\dot{z} \\ &= A_qx + B_2(C_1B_2)^{-1}\dot{z} \end{aligned} \tag{10}$$

这些方程定义了一个将 $\dot{z}$ 映射到 u的逆系统。考虑 $\dot{z}$ 的拉普拉斯变换，假设 $z(0) = 0$，并注意到 $\mathcal{L}(\dot{z}) = s\mathcal{L}(z) + z(0)$。因此，$A_q$ 的特征值将是从 u 到 z 的传递函数的零点，此外还有一个位于零点处的零点。

下述定理是 Dannatt 等人（2020年）中定理17的一个特例。

定理*6.* 考虑满足假设 A1–A2的含 $r = 1$不确定系统（2）。设由舒尔分解（7）得到的矩阵 A_q没有不稳定特征值。对于给定的 $\epsilon > 0$，若相应的矩阵 A_r 也没有不稳定特征值，则存在一个静态状态反馈矩阵 K，使闭环系统（3）为严格负虚，且稳定度为 ϵ。所需的状态反馈控制器矩阵 K 为

$$K = -(C_1B_2)^{-1}(C_1A + \epsilon C_1). \tag{11}$$

证明。 根据 Dannatt 等人（2020）的引理5，我们知道，如果存在实数 $P = P^T \geq 0$，使得闭环系统（3）为负虚，则

$$P\hat{A} + \hat{A}^TP + PB_1R^{-1}B_1^TP + Q = 0 \tag{12}$$

其中

$$\hat{A} = A_{cl} - B_1R^{-1}C_1A_{cl}, \qquad R = C_1B_1 + B_1^TC_1^T,$$
$$Q = A_{cl}^TC_1^TR^{-1}C_1A_{cl},$$

with $\sigma\Big(A_{cl} - B_1R^{-1}(CA_{cl} - B^TP)\Big) \subset \mathbb{C}_{\leq 0}$ and $A_{cl} = A + \epsilon I + B_2K$. Let $P = 0$. Then, (12) reduces to the condition

$$A_{cl}^TC_1^TR^{-1}C_1A_{cl} = 0. \tag{13}$$

我们将考虑矩阵 C_1A_{cl}。对于我们选择的 K，并注意到对于单输入单输出系统，(C_1B_2) 是一个标量，$C_1A_{cl} = A + \epsilon I + B_2K$ 化简为

$$\begin{aligned} C_1A_{cl} &= C_1A + \epsilon C_1 - C_1B_2(C_1B_2)^{-1}(C_1A + \epsilon C_1) \\ &= C_1A + \epsilon C_1 - C_1A - \epsilon C_1 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

因此，$P = 0$ 满足（12）。现在我们将证明 $\sigma\Big(A_{cl} - B_1R^{-1}(CA_{cl} - B^TP)\Big) \subset \mathbb{C}_{\leq 0}$。为此，我们首先考虑 $A_{cl} - B_1R^{-1}(CA_{cl} - B_1^TP)$。当$P = 0$时，我们有

$$\begin{aligned} S =& A_{cl} - B_1R^{-1}(CA_{cl} - B_1^TP) \\ =& A + \epsilon I + B_2K - B_1R^{-1}C_1(A + \epsilon I) - B_1R^{-1}C_1B_2K. \end{aligned}$$

将 $K = -(C_1B_2)^{-1}(C_1A + \epsilon C_1)$ 代入该表达式，可得

$$\begin{aligned} S =& A_\epsilon - B_2(C_1B_2)^{-1}C_1A_\epsilon - B_1R^{-1}C_1A_\epsilon + B_1R^{-1}C_1A_\epsilon \\ =& A_\epsilon - B_2(C_1B_2)^{-1}C_1A_\epsilon \\ =& A_r, \end{aligned} \tag{15}$$

其中，A_r 在（4）中定义，$A_\epsilon = A + \epsilon I$。因此，意味着

$$\sigma(A_{cl} - BR^{-1}(CA_{cl} - B^TP)) = \sigma(A_r). \tag{16}$$

由于 $\sigma(A_r) \subset \mathbb{C}_{\leq 0}$是基于我们的假设，即 A_r没有不稳定特征值，因此我们有

$$\sigma\ A_{cl} - BR^{-1}\ CA_{cl} - (\ (\ ))\ B^TP \subset \mathbb{C}_{\leq 0}。$$

接着，根据 Dannatt 等人（2020）中的引理，受扰动的闭环状态空间实现是负虚的，且 $\sigma(A_{cl}) \subset \mathbb{C}_{\leq 0}$。

Dannatt 等人（2020）中的定理 12 随后表明，与未受扰动系统相对应的实际闭环系统的所有极点都将在复平面中向左移动 ϵ。因此，根据 Dannatt 等人（2020）中的定理 12，闭环系统是严格负虚的，稳定度为 ϵ。

对于接下来的引理，考虑一个具有互异特征值 $A_q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λ_1, $\cdots$, λ_n和 $n \geq 2$的矩阵。假设满足以下条件:

(1) For all $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, $Re[\lambda_i] < 0$;
(2) For $i = n$, $\lambda_i = 0$.

假设 A_q 的特征值按如下方式排序:

$$Re[\lambda_1] \leq \cdots \leq Re[\lambda_{n-1}] < 0, \tag{17}$$

并令 γ 定义为 $\gamma = -Re[\lambda_{n-1}]$。换言之，$\gamma$是 A_q 中小于零的最大特征值的实部。

引理 *7.* 考虑一个维数为 n的不确定系统 (2)。在未受扰动时，该系统满足 Dannatt 等人（2020）中定理17的条件。假设满足以下条件:

(1) The pair $\{A, B_2\}$ is controllable;
(2) The matrix A_q, (6), has n distinct eigenvalues;

(3) 矩阵 A_q 只有一个不稳定特征值;

那么，对于范围 $0 < \epsilon < \gamma$ 内的任意 ϵ，使用 Dannatt 等人（2020）中定理17构成的闭环系统都将是严格负虚的，其稳定度为 ϵ，其中 $\gamma = -Re[\lambda_{n-2}]$。

下述定理概述了在状态反馈下，利用式（11）构成的闭环系统（3）所能达到的稳定度。

定理*8*。考虑维数为 n 的系统（2），该系统在未受扰动时满足定理6的条件。假设对 $\{A, B_2\}$ 而言，该对可控；式（6）中定义的矩阵 A_q 具有互异特征值，且矩阵 A_q没有不稳定特征值。那么，对范围 $0 < \epsilon < \gamma$ 内的任意 ϵ，使用定理6形成的闭环系统都将是严格负虚（SNI），其稳定度为 ϵ，其中 $\gamma = -Re[\lambda_{n-1}]$。此外，对于范围 $-Re[\lambda_{n-1}] < \epsilon < -Re[\lambda_{n-2}]$内的 ϵ，如果开环系统在 ϵ 处满足 Dannatt 等人（2020）中的定理17的条件，那么对范围 $-Re[\lambda_{n-2}] < \epsilon < -Re[\lambda_{n-2}]$ 内的所有 ϵ，系统都将保持严格负虚（SNI）。

证明。对于 ϵ 在范围 $0 < \epsilon < \gamma$内，其中 $\gamma = -Re[\lambda_{n-1}]$，闭环系统严格负虚可直接由定理6得出。对于 $-Re[\lambda_{n-2}] < \epsilon < -Re[\lambda_{n-2}]$，矩阵 A_q 将达到一个不稳定特征值。因此，X 的维数为一。因此，如果系统满足 Dannatt 等人（2020）中定理17针对 $-Re[\lambda_{n-2}] < \epsilon < -Re[\lambda_{n-2}]$的条件，那么对于范围$0 < \epsilon < -Re[\lambda_{n-2}]$ 内的所有 ϵ，系统都将保持严格负虚，这可直接由定理7得出。

3. 鲁棒控制框架下的负虚系统建模

在引言中，我们指出，使用与系统固有模态相对应的二阶传递函数之和，对配有共置传感器和执行器的柔性结构进行建模十分方便，因为在这种方法中，未建模动态必然具有负虚性质。下一节将概述两种用于鲁棒控制框架的 NI 系统建模方法。第一种采用引言中讨论的加性不确定性结构。第二种则针对无损负虚系统，考虑一种新的乘性不确定性结构。

3.1 具有加性不确定性的 *NI* 系统建模

具有共址位置传感器和力执行器的轻阻尼结构，可以使用二阶函数的无穷和进行建模，

$$G_T(s) = \sum_{p=1}^{M} \frac{\Gamma_p}{s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2}, \tag{18}$$

其中，$\Gamma_p = \Psi_p\Psi_p^T \geq 0$、$\omega_p$ 表示固有频率，ζ_p 与阻尼系数类似，而 Ψ_p 是一个$n \times 1$ 向量（Preumont，1997）。通过为降阶标称模型选取少量模态，和式（18）可拆分为两个求和项，如下所示

$$G_n(s) = \sum_{p=1}^{m} \frac{\Gamma_p}{s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2}, \tag{19}$$

$$\Delta(s) = \sum_{p=m+1}^{M} \frac{\Gamma_p}{s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2}, \tag{20}$$

其中，m 表示标称模型中期望包含的模态数量，G_n（s）表示截断后的“标称”模型，而 Δ（s）表示未建模的系统动态，对应于未纳入标称模型的轻阻尼模态。在设计中，我们现在只需处理降阶标称模型，该模型仅考虑关注带宽内的系统模态。在此方案中，我们将 Δ（s）视为由加性扰动表示的模型不确定性

$$G_T(s) = G_n(s) + \Delta(s). \tag{21}$$

我们可以很容易地验证，不确定性 $\Delta(s)$ 是稳定的，并且根据定义 1 具有负虚性质。这种处理具有共址力执行器和位置传感器的柔性系统中未建模溢出动力学的方法被广泛采用，因为很容易验证未建模动态将具有负虚性质。我们将在第 4 节中说明，这种方法不满足应用定理6或任何要求矩阵 $C_1B_1 > 0$ 的负虚反馈结果所需的假设。

3.2 乘性不确定性

现在考虑一种 NI 系统的替代模型，该模型可以使用乘性扰动进行描述

$$G_T(s) = G_n(s)(1 + \Delta(s)), \tag{22}$$

其中 $G_n(s)$ 是我们的标称对象，而 $\Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ 是无损负虚的。为了构造模型 (22)，使不确定性为 LNI，假设给定系统可以像式 (18) 中那样使用二阶传递函数的无穷和进行建模。然而，还假设该模型是无阻尼的（保守的），其传递函数矩阵为

$$G_T(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma_i}{s^2 + \omega_i^2}, \tag{23}$$

其中，$\Gamma_i > 0$ 和 ω_i 表示“i^{th}”模态的固有频率。

出于实际建模目的，我们选择有限且通常较少数量的模态进行建模。这将得到如下形式的降阶模型

$$G_n(s) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\Gamma_i}{s^2 + \omega_i^2}, \tag{24}$$

其中，M 是所需的模态数量。由式(22)可得

$$\Delta(s) = \frac{G_T(s)}{G_n(s)} - 1 = \frac{G_T(s) - G_n(s)}{G_n(s)} = \frac{\sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{\Gamma_i}{s^2+\omega_i^2}}{\sum_{i=1}^{M} \frac{\Gamma_i}{s^2+\omega_i^2}}. \tag{25}$$

从式 (25) 的结构可以清楚看出，对于所有 ω 的取值，$\Delta(j\omega)$ 都是实数（见 Preumont（1997）中的式 2.5），并且根据定义 3，它是无损负虚的。与采用加性不确定性结构类似，这种方法不满足应用

定理6或任何要求矩阵 $C_1B_1 > 0$ 的负虚反馈结果所需的假设。

4. 主要结果

假设我们有一个希望使用 SNI 状态反馈进行控制的系统。如果该系统是采用第 3 节中的任一种方法建模的，可以直接验证，两个模型均不满足假设 A1-A2。在这两种情况下，由于传递函数模型的结构，相应的状态空间实现 (2) 中，输出矩阵 C_1 与输入矩阵 B_1 和 B_2正交。本节提出一种通过为系统增设控制器来解决这一问题的方法，该控制器可以改变开环系统的动态特性。为此，考虑图 3 所示的增广系统。假设一个 NI 系统采用如 (21) 所示的加性不确定性结构进行建模，并且控制时仅考虑第一个模态。标称对象 $G_n(s)$ 可通过以下状态空间实现表示：

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}z, \tag{26}$$
$$\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x}, \tag{27}$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2\zeta_1\omega_1 & -\omega_1^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

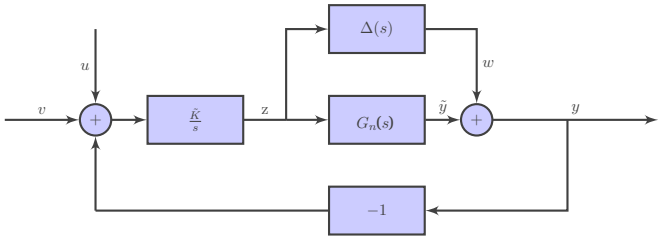

图 3. 增设积分控制的柔性悬臂模型框图。

在该方案中，标称对象通过积分控制器进行增广，以改变系统，使其满足假设 A1–A2。利用式（28）和图 3，我们可以构造增广闭环系统的实现。令 $z = x_3$ ，增广系统的一个状态空间实现为

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \tag{29}$$
$$z = C_1x, \tag{30}$$

where

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{K}\tilde{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{K} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{K} \end{bmatrix},$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

当 $K < 0$ 时，该实现满足假设 A1–A2。因此，我们可以直接应用定理6，使用以下形式的控制器实现 SNI 状态反馈：

$$K = -(C_1B_2)^{-1}(C_1A + \epsilon C_1) = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma & -\frac{\epsilon}{\tilde{K}} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

在状态反馈控制律 $u = Kx$ 下，与被控对象（30）对应的闭环系统变为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2\zeta_1\omega_1 & -\omega_1^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{K} \end{bmatrix} w,$$
$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

对于此系统，我们可以看到，从$w \to z$ 到输出的传递函数是负虚且稳定的。然而，使用定理6只能获得可忽略的性能优势。这是因为在该方法中，允许的扰动大小受到标称对象开环极点位置的限制。为了说明这一点，考虑以下论断。

论断 *9.* 使用定理 6 所能达到的增广系统 (31) 的稳定度等于开环对象的稳定度，即 $\epsilon = \zeta_1\omega_1$。定理 8 指出了通过对负虚系统进行状态反馈扰动所能达到的最大稳定度。具体而言，对于范围 $0 < \epsilon < \gamma$ 内的任意 ϵ ，使用定理 (6) 构成的闭环系统将是稳定度为 ϵ 的严格负虚系统，其中 $\gamma = -Re[\lambda_{n-1}]$ 和 λ_{n-1} 是矩阵 $A_q = (I - B_2(C_1B_2)^{-1}C_1)A$ 的特征值。我们假设有序特征值 λ_i 单调递增。对于增广系统 (31),

$$A_q = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

A_q 是上三角矩阵，因此 A_q~的特征值就是 A 的特征值，另有一个位于~处的零点。当 A 按式（28）定义时， A的特征值为$-\zeta_1\omega_1 \pm \omega_1\sqrt{\zeta_1^2 - 1}$。由于 A_q 是上三角矩阵，我们可以直接看出

$$\sigma(A_q) = \{0, -\zeta_1\omega_1 + \omega_1\sqrt{\zeta_1^2 - 1}, -\zeta_1\omega_1 - \omega_1\sqrt{\zeta_1^2 - 1}\}. \tag{35}$$

由于我们的系统是轻阻尼的，我们可以假设$0 \le \zeta_1 < 1$。因此，

$$\sigma(A_q) = \{0, -\alpha \pm \beta j\}, \tag{36}$$

其中 $\alpha = \zeta_1\omega_1 \ge 0$ 和 $\beta = \omega_1\sqrt{1 - \zeta_1^2} > 0$。根据定理8，采用定理（6）构成的闭环系统将是严格负虚的，其稳定度为 ϵ，对于范围 $0 < \epsilon < \zeta_1\omega_1$内的任意 ϵ 均成立。

已有研究表明，通过在系统模型中增设一个积分器，便足以使 SNI 状态反馈能够应用于该系统。然而，使用定理 6所能达到的闭环稳定度受到标称对象开环极点位置的限制。为克服这一局限，我们现在引入一种改进的控制方案：在标称系统模型中增设 PID 控制器，从而能够应用 SNI 状态反馈。此外，通过选择 PID 参数，我们还可以调整 SNI 闭环系统可达到的稳定度。由于我们的方法适用于上一节介绍的任一种建模方法，因此我们将使用具有乘性不确定性结构（23）的模型来演示该方案。仅考虑

第一个模态时，我们采用图4所示的控制方案对标称对象进行增广。

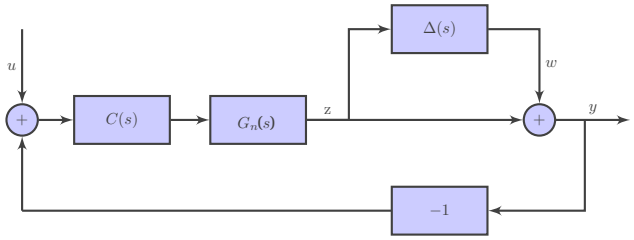

图4. 采用 PID 控制器 $C(s)$ 增广的含无损 NI 不确定性 $\Delta(s)$ 的柔性悬臂模型。

对于图4所示的反馈架构，假设 $C(s)$ 是一个 PID 控制器，其形式为

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}, \tag{37}$$

这意味着

$$L(s) = C(s)G_n(s) = \frac{\Gamma(k_d s^2 + k_p s + k_i)}{s(s^2 + \omega_p^2)} = \frac{n_L(s)}{d_L(s)}. \tag{38}$$

注*10.* 为了了解控制器 $C(s)$ 的选择如何影响利用定理6所能达到的稳定度，我们将 $T_{uz}(s)$ 定义为从输入 u 到输出 z 的闭环传递函数，并注意到

$$T_{uz}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{n_L(s)}{n_L(s) + d_L(s)}. \tag{39}$$

注5中已说明， $T_{uz}(s)$ 的开环零点对应于式（6）的特征值。对于该系统， $T_{uz}(s)$ 的开环零点是 $n_L(s)$ 的根。此外，定理8指出，在状态反馈下，利用式（11）构成的闭环系统（3）所能达到的稳定度由 A_q 的特征值实部决定。因此，利用定理6能够达到的指定稳定度由 $n_L(s)$ 的根决定。

在继续讨论控制问题之前，我们必须检查增广系统是否满足假设 A1–A2。式（38）中定义的增广对象$L(s) = C(s)G_n(s)$的一种可控标准型状态空间实现为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_p^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e, \tag{40}$$

$$z = \begin{bmatrix} \Gamma k_i & \Gamma k_p & \Gamma k_d \end{bmatrix} x. \tag{41}$$

从图4可以看出，增广对象的输入 e等于 $e = u - (w + z)$。因此，图4所示闭环系统的一种状态空间实现为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z &= C_1 x, \end{aligned} \tag{42}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\Gamma k_i & -(\Gamma k_p + \omega_p^2) & -\Gamma k_d \end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{44}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \Gamma k_i & \Gamma k_p & \Gamma k_d \end{bmatrix}. \tag{45}$$

由于根据假设 $\Gamma > 0$，通过选择 $k_d < 0$，我们可以很容易地验证 SNI 状态反馈假设 A1–A2 得到满足。此外，通过选择项 k_d、 k_i 和 k_p，闭环系统可达到的稳定度可以任意设定。虽然这似乎没有限制，但带宽要求和可用硬件会限制可实现的 PID 参数。

5. 说明性示例

本节给出一个说明性示例，展示如何将我们的主要结果应用于一个相对阶为二的系统。该系统相应的状态空间实现不满足假设 1–2。在此示例中，我们将对一个经仿真的柔性悬臂梁应用 SNI 状态反馈，其频率响应如图 5 所示。

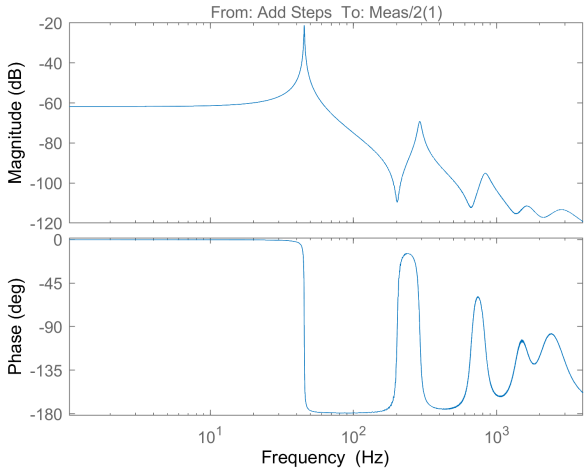

图 5. 柔性悬臂梁的频率响应，测量方式为从梁尖端的力输入到梁尖端的垂直位移。

图 5 所示的频率响应可以拟合为以下形式的传递函数模型

$$G(s) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\Gamma_i}{s^2 + \gamma_i s + \delta_i}, \tag{46}$$

其中 $\delta_i = \omega_i^2$。每个 $\omega_i > 0$ 表示一个模态频率，$\gamma_i = 2\zeta_i\omega_i$， ζ_i 大致表示阻尼项，而 Γ_i >0。为此，我们使用 Matlab 中的线性化工具箱。在此示例中，仅考虑前 5 个模态（$M = 5$），它们对应于表 1 中所示的值。

i	Γ_i	γ_i	δ_i
1	64.06	2.089	8.096×10^4
2	65.14	85.83	3.327×10^6
3	63.57	695.7	2.697×10^7
4	51.76	2624	1.017×10^8
5	274	8014	3.106×10^8

表 1. M=5 的（46）式参数，对应于图 5 中的频率响应。

参见表1，我们可以看出，该柔性悬臂梁阻尼较小，且第一个共振模态约出现在 45 Hz。我们没有为整根梁设计控制

方案，而是进行了模型降阶，只考虑第一个模态。现在，我们将该系统视为保守系统（无阻尼）。因此，我们可以将系统模型近似为

$$G_n(s) = \frac{64.06}{s^2 + 8.096 \times 10^4}. \tag{47}$$

其余系统动力学被视为乘性不确定性，并已在式（25）中证明为无损负虚。现在，我们使用二阶近似（47），并采用图4所示的 PID 控制方案对该标称对象进行增广。

选择 PID 控制器的参数时，我们回顾式（37），并注意到增广系统的开环零点由以下各根给出：

$$n_L(s) = \Gamma(k_d s^2 + k_p s + k_i). \tag{48}$$

注5和定理8告诉我们，增广系统的开环零点决定了使用 SNI 状态反馈所能获得的指定稳定度。具体而言，定理8指出，若选择 PID 参数，使所有开环零点均稳定，则对于范围 $0 < \epsilon < \gamma$ 内的任意 ϵ，采用 SNI 状态反馈构成的闭环系统都将是 SNI，且稳定度为 ϵ。根据这一信息，我们将选择 PID 参数，使稳定度达到 $\epsilon = 10$。这对应于由下式给出的 PID 控制器 $C(s)$：

$$C(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} = \frac{-0.2s^2 - 7s - 50}{s}, \tag{49}$$

其中

$$k_d = -0.2, \qquad k_p = -7, \qquad k_i = -50. \tag{50}$$

这些 PID 参数是任意选取的，目的是获得指定的稳定度 $\epsilon = 10$。根据开环系统极点的位置，这应该使闭环系统的阻尼提高一个数量级。

对于式（49）中 $C(s)$ 的取值，我们增广系统的状态空间实现为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z &= C_1 x, \end{aligned} \tag{51}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3203 & -80511.58 & -12.812 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -3203 & -448.42 & -12.812 \end{bmatrix}.$$

为了对增广系统 (51) 应用 SNI 状态反馈，我们分别由 (5) 和 (6) 构造矩阵 Q、A_q。

$$Q = I - B_2(C_1 B_2)^{-1} C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -250 & -35 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_q = QA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -250 & -35 \end{bmatrix}. \tag{52}$$

A_q 的特征值为 $\sigma(A_q) = \{0, -10, -25\}$。现在，我们可以使用定理6来综合一个控制器，使闭环 NI 系统具有指定的稳定度。根据定理8，在考虑控制器综合所用 ARE 的解发生维数变化之前，我们可以在范围 $0 < \epsilon < 10$ 内选择 ϵ 的值。本例选取的指定稳定度为 $\epsilon = 9.5$。

定理6指出，能够使闭环系统成为具有指定稳定度 ϵ 的严格负虚系统的状态反馈控制器为

$$\begin{aligned} K &= -(C_1 B_2)^{-1}(C_1 A + \epsilon C_1) \\ &= \begin{bmatrix} -5578 & 79929.08 & -57.312 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{53}$$

将式（53）应用于系统（51），并采用状态反馈控制律 $u = Kx$，相应的闭环不确定系统的状态空间表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 K)x + B_1 w, \\ z &= C_1 x, \end{aligned} \tag{54}$$

其中

$$A_{cl} = A + B_2 K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2375 & -582.5 & -44.5 \end{bmatrix}, \tag{55}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{56}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -3203 & -448.42 & -12.812 \end{bmatrix}. \tag{57}$$

闭环极点位于 $\sigma(A_{cl}) = \{-25, -10, -9.5\}$，且闭环系统稳定。

相应的闭环传递函数 n is

$$\begin{aligned} G_{cl}(s) &= C_1(sI - A - B_2 K)^{-1} B_1 \\ &= \frac{12.81s^2 + 448.4s + 3203}{s^3 + 44.5s^2 + 582.5s + 2375}, \end{aligned} \tag{58}$$

且其频率响应如图 6 所示。图 6 展示了近似模型 (47) 的闭环系统频率响应，以及仿真梁实际系统的响应。可以看出，两种响应均为严格负虚。该不确定性为无损 NI，并且很容易验证引理 4 的增益条件均得到满足。因此，整个系统在内部是稳定的。

6. 结论

本文提出了一种方法，通过增设一个控制器来扩展 NI 系统，使开环系统满足应用 SNI 状态反馈所需的必要假设。我们借助鲁棒控制框架，采用加性和乘性不确定性，以及与系统共振模态相对应的二阶传递函数之和，展示了两种 NI 系统建模方法。研究表明，在考察相应状态空间实现时，两种建模方法的输入矩阵和输出矩阵均为正交矩阵。因此，这两种方法都不满足应用文献中诸多 NI 反馈方法所需的假设。通过为这些模型增设一个积分控制器或 PID 控制器，开环动态得到了充分改变，从而克服了

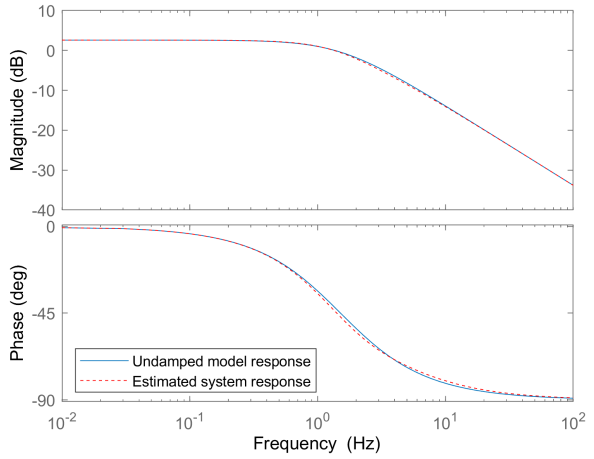

图 6. 严格负虚闭环传递函数 (58) 与近似模型 (47) 的频率响应。

这一局限。此外，我们量化了这两个控制器对 SNI 状态反馈下闭环系统可达到的稳定度的影响。最后，一个说明性示例展示了如何将我们的方法应用于柔性悬臂梁的仿真。在未来的工作中，可将本文结果扩展至输出反馈情形，并推广到时变系统。

参考文献

Bernstein, D.S. (2009). 矩阵数学：理论、事实与公式. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，美国。
Bhowmick, P. and Patra, S. (2020). 不确定线性时不变系统多目标性能的负虚控制问题解法。*Automatica*, 112(C). doi: 10.1016/j.automatica.2019.108735. Dannatt, J., Petersen, I.R., and Lanzon, A. (2020). 具有预设稳定度的严格负虚状态反馈控制。*Automatica*, 119, 109079. Hu, J., Lennox, B., and Arvin, F. (2022). 利用负虚动力学对网络化机器人系统进行鲁棒编队控制。*Automatica*, 140(C). doi:10.1016/j.automatica.2022.110235. URL https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110235
Lanzon, A. 和 Chen, H.J.（2017）。负虚系统的反馈稳定性。*IEEE Transactions onAutomatic Control*，62(11)，5620–5633。Lanzon, A. 和 Petersen, I.R.（2008）。具有负虚频率响应的系统反馈互联系统的稳定鲁棒性。*IEEE Transac-tions on Automatic Control*，53(4)，1042–1046。doi: 10.1109/TAC.2008.919567。Liu, M. 和 Xiong, J.（2016）。关于非真负虚系统。*Systems and Control Letters*，88，47–53。doi:https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2015.10.008。
Mabrok, M.、Kallapur, A.G.、Petersen, I.R. 和 Lanzon, A.（2015）。广义负虚引理及基于黎卡提方程的静态状态反馈负虚综合。*Systems & Control Letters*，77，63–68。doi: 10.1016/j.sysconle.2015.01.008。Mabrok, M.A.、Kallapur, A.G.、Petersen, I.R. 和 Lanzon, A.（2012）。采用黎卡提方程方法的不确定负虚系统镇定。载于*2012*年第一届创新工程系统国际会议论文集，255–259。IEEE，埃及亚历山大。doi:10.1109/ICIES.2012.6530879。Petersen, I.R.（2015）。负虚系统理论的物理解释。载于*2015*年亚洲控制会议（*ASCC*），1–6。IEEE，马来西亚哥打基纳巴卢。doi:10.1109/ASCC.2015.7244460。Petersen, I.R.（2016）。负虚系统理论及其应用。《*Annual Reviews in Control*》，42，309–318。Petersen, I.R. 和 Lanzon, A.（2010）。负虚系统的反馈控制。《*IEEE Control Systems Magazine*》，30(5)，54–72。doi:10.1109/MCS.2010.937676。
Preumont, A.（1997年）。主动结构的振动控制，第2卷。Springer。Ren, D.、Xiong, J. 和 Ho, D.W.（2021年）。具有 H_∞ 范数界的静态输出反馈负虚控制器综合。*Automatica*，126，109157。doi: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109157。
Reyes, G.P.S.（2019年）。通过黎卡提方程和线性矩阵不等式综合严格负虚系统控制器。曼彻斯特大学（英国）。
Song, Z.、Lanzon, A.、Patra, S. 和 Petersen, I.R.（2012年）。无需最小性假设的负虚引理及针对不确定负虚系统的鲁棒状态反馈综合。*Systems & Control Letters*，61(12)，1269–1276。doi: 10.1016/j.sysconle.2012.08.002。