arXiv:2304.01688v1 [math.OC] 4 Apr 2023

Γ–鲁棒非线性组合与离散优化的对应形式

Dennis Adelhütte[1] 和 Frauke Liers[1]

[1]埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学，数据科学系，考尔街11号，91058埃尔朗根

2023年4月5日

摘要

Γ–不确定集已被引入，用于调整（离散）线性规划的鲁棒对应形式的保守程度。本文将这一方法推广至（混合整数）非线性优化规划。我们重点研究不确定性为线性或凹的情形，同时也推导了一般情形下的表述。通过应用针对不确定条件下非线性不等式建立的重构技术，我们推导出不受不确定性影响的鲁棒对应问题等价形式。计算可处理性取决于不确定函数的结构及其不确定集的几何性质。我们展示了若干情形，在这些情形中，非线性组合规划的鲁棒对应问题可通过对相应名义规划进行多项式数量的预言机调用求解。此外，我们还给出了实际示例的鲁棒对应形式，具体包括（离散）线性、二次和分段线性情形。

关键词： 预算不确定性、离散优化、组合优化、混合整数非线性优化、鲁棒优化、 Γ–不确定性

1 引言

近年来，不确定性下的优化日益重要且广受关注。当优化规划面临不确定性时，可以在所有数据尚未确定之前尝试求解——有时甚至必须如此。处理上述不确定性的两个研究领域是随机优化和鲁棒优化。在随机优化中，通常需要足够数量的数据来估计或确定其背后的概率分布。关于此方面的更多信息，请参阅专著[38]。鲁棒优化则不需要概率分布。相反，为了对现实情境进行建模，会预先确定一个不确定集，并在同时考虑该不确定集的情况下，对变量进行优化。过去几十年来，鲁棒优化领域已经提出了多种方法，尤其是在（混合整数）线性规划领域。然而，这些方法通常不适用于组合优化，因为它们会改变底层规划的结构，从而使得用于求解名义问题的算法不再适用。为解决这一问题，Bertsimas 和 Sim 在 Γ中为线性目标函数存在区间不确定性的组合优化引入了 [11] –不确定集，并在 [12] 中进一步探讨了该方法。鉴于近期研究聚焦于非线性鲁棒优化规划，我们将他们的方法扩展到具有非线性的组合规划和离散规划。

贡献： 我们提出并研究一种适用于不确定性下混合整数非线性规划（MINLPs）的通用框架，将 Γ–不确定性推广到 [11] 和 [12]中的混合整数线性规划（MIPs）。我们重点研究目标函数不确定性：一方面，我们给出重新表述，尤其针对非线性、凹性和线性不确定性的情形。另

一方面，我们证明这些规划

$$\min_{x\in\mathcal{X}} u^T Bg(x) \tag{1}$$

构成“指派结构”基础的以及

$$\min_{x\in\mathcal{X}} u^T l(x) \tag{2}$$

其中， l 是一个 $0/1$–函数[1]，且在这两种情况下， u 都是 $[\overline{u}$中的不确定参数向量， $\overline{u}+\Delta u]$都可以通过多项式数量的预言机调用求解（下文所说的预言机，是指能够求解原始无不确定性的规划的黑箱）。更确切地说，我们进行如下操作：

1. 具有凹不确定性的规划可以重构为包含支撑函数和凹共轭的规划。如果不确定性是线性的，那么支撑函数就足够了。2. 一个用于求解无不确定性规划的黑箱，足以求解在 Γ–不确定性且具有区间的条件下的规划 (1) 或 (2)。3. 我们提出一种新模型，用于处理具有 Γ–不确定集的截止时间不确定性，并证明其计算可处理性。4. 我们的模型统一了文献中 Γ–不确定集的若干应用。

在附录中，我们通过一项原型数值研究，展示所提出的二次指派问题（QAP， [30]）和带一般时间窗的车辆路径问题（VRPGTW， [28]）特殊情形的重构在 Γ–不确定性下的实际适用性。约束中的不确定性也可以用类似方式处理，并且电子补充材料中也对此作了简要讨论。总之，我们的目标是提出一个统一的框架，用于研究不确定性下的非线性优化，这一方向值得未来进一步研究，尤其是组合优化与不确定性下的非线性规划相结合。

概要： 本文结构如下。在第 2 节中，我们简要回顾来自 Γ–对应形式的预言机多项式重新表述， [11] 然后介绍 Γ–对应形式及其在混合整数非线性规划中的应用。我们通过若干应用说明这一推广的动机。在第 3 节中，我们推导鲁棒对应形式的重新表述，并通过证明特殊情况下具有预言机多项式性来展示主要结果。在第 4 节中，我们介绍本文结果的各种示例和应用，重点讨论不确定性下的二次问题。最后，在第 5 节中，我们总结全文，并提出一些值得研究的方向。在电子附录中，我们展示不确定约束的情形，并对 Γ–不确定性下的 QAP 和 VRPGTW 给出一个典型的数值研究。

文献综述： Soyster [40] 首次讨论了受不确定性影响的规划，研究的是约束矩阵按列变化且不确定集为凸集的情形。为解决由此产生的过度保守问题，文献中提出了多种方法。在 [7] 和 [8], 中，作者分别从理论和实践角度介绍并讨论了不确定性下的线性规划，重点关注凸不确定性和区间不确定性。在 [6]中，研究了不确定性下对凸/凹函数而非线性函数进行重构的情形。 [5]提出了一个利用重构方法处理鲁棒规划的框架。[14] 提出了另一种处理不确定性的方法，即对抗式方法。该方法不进行重构，而是尝试迭代地将不确定性的情景加入名义规划，求出最优解，并检查所得解是否已具备鲁棒性。 [10]对这些方法进行了比较。关于鲁棒优化理论与应用方面的全面综述，可参阅 [9], [24] 和 [42]。在

[1]当 $l(x)\in\{0,1\}$ 对所有 $x\in M$ 都成立时，我们称函数 $l\colon M\to N$ 为 $0/1$–函数。

不确定性下组合/离散规划的背景下，我们将 [31] 视为首个框架，并参考综述 [16] 和 [29] ，这些综述探讨了目标函数中区间、离散和凸不确定性。 Γ–不确定性由 [12] 提出，并在 [11]中应用于组合优化程序。在过去二十年间，这些方法不断得到推广和扩展。在 [19] 和 [23], 中，基于Γ–不确定性，提出了多带不确定性和轻度鲁棒性这两种新型不确定性概念。在 [35], [36] 和 [37], 中，提出了对Γ–不确定集进行推广的不确定集。此外， [18] 在全局鲁棒优化背景下讨论了 Γ–不确定集，而 [25] 则提出了局部预算不确定集。最后，Γ–不确定集也已应用于动态鲁棒情形，例如[13]。包含非线性的优化问题在不确定性下进行研究，在文献中仍属较新领域。关于理论、求解方法和应用的综述，可参阅 [33]。本框架所依据的重构技术源自 [4]。

最后，对于我们的应用，我们参考以下文献。不确定条件下的 QAP 已在 [21], [22] 和 [20]中进行了讨论。不确定条件下的 VRPTGW 受到 [1] 中所描述的患者运输问题的启发，并基于 [28]中所描述的 VRPGTW。据我们所知，前述用于分段线性目标函数的 Γ–不确定集在现有文献中尚属首次，尽管不确定条件下的分段线性函数已在例如 [2] 和 [26]中有所讨论。

2 我们的建模框架

2.1 重新审视二元规划中的 Γ–不确定性

由于我们的重点是鲁棒对应问题的重构，因此我们重新审视[11]的一项重新表述结果。我们考虑一个成本向量为 $\overline{c} \in \mathbb{R}^n$ 、可行集为 $\mathcal{X} \subseteq \{0$的组合规划， $1\}^n$:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \overline{c}^T x. \tag{3}$$

我们假设成本系数具有区间不确定性，即对于给定的 $\Delta c_i \geqslant 0$，所有 $i \in [n] := \{1, \ldots, n\}$ 的 $c_i \in [\overline{c}_i$, $\overline{c}_i + \Delta c_i]$ 。我们的目标是找到这样的解：至多有 $\Gamma \in [n]$ 个系数偏离其名义情景 $\overline{c}_i$ 时，这些解仍具有鲁棒性:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \overline{c}^T x + \max_{\mathcal{S} \subseteq [n]: |\mathcal{S}| \leqslant \Gamma} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{S}} \Delta c_i x_i \right\} \right\}. \tag{4}$$

在 [11], Bertsimas 和 Sim 已证明，规划(4) 的最优解可以通过应用规划 (3) 的优化预言机找到:

命题 2.1。*([11],* 定理 *3*）假设 $\mathcal{X} \subseteq \{0, 1\}^n$ 并设 $\Delta c_0 := 0$。则规划 (4) 相等于

$$\min_{k \in [n]_0} \left\{ \Gamma \Delta c_k + \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \overline{c}^T x + \sum_{j \in [n]} \max\{0, \Delta c_j - \Delta c_k\} x_j \right\} \right\} \tag{5}$$

其中 $[n]_0 := \{0, 1, \ldots, n\}$。

命题 2.1 表明，规划 (4) 可以在预言机多项式时间内求得最优解，前提是已有一个用于规划 (3) 的预言机。值得注意的是， $\mathcal{X} \subseteq \{0, 1\}^n$。如果$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^{n-p} : Ax \leqslant b, x \in [r, s]\}$ 对于 r, $s \in \mathbb{R}^n$ 以及 $p \in [n]$, 那么可以将鲁棒对应问题重新表述为一个计算上可处理的混合整数规划，但这需要引入额外变量，同时会失去原规划的结构。因此，求解规划 (4) 的预言机通常并不适用。详情请参阅 [11]中的证明。

2.2 我们的模型介绍与应用

在本小节中，我们将规划 (4) 扩展到目标函数存在不确定性的混合整数非线性规划。我们考虑如下规划:

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sum_{i\in[m]} \overline{f}_i(x), \tag{6}$$

其中，$\overline{f}_i$：对于每个 $i\in[m]$ 和 $\mathcal{X}\subseteq\mathbb{Z}^p\times\mathbb{R}^{n-p}$，$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 都是任意但固定的函数，其中 $p\in[n]_0$。我们假设每个函数 $\overline{f}_i$ 都受到不确定集 $\mathcal{U}_i\subseteq\mathbb{R}^{L_i}$ 的“污染”，即定义 f_i：$\mathbb{R}^n\times\mathcal{U}_i\to\mathbb{R}$，其中 $f_i(x、\overline{u}^i)$：对于名义情景 $\overline{u}^i\in\mathcal{U}_i$，$=\overline{f}_i(x)$，且 L_i 是不确定参数 $u^i\in\mathcal{U}_i$ 的维度。我们关注不相关的情形，即假设不同函数 f_i 的不确定性彼此不相关，也就是说，$\sum_{i\in[m]} f_i(x、u^i)$ 的不确定集为 $\mathcal{U}:=\times_{i\in[m]}\mathcal{U}_i$。这确保不同的不确定集 $\mathcal{U}_i$ 互不影响。因此，在不进一步“限制” $\mathcal{U}$的情况下，规划 (6) 的鲁棒对应问题为

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sum_{i\in[m]} \sup_{u^i\in\mathcal{U}_i} f_i(x,u^i). \tag{7}$$

我们称：若对于每个 $x\in\mathcal{X}$，$\mathcal{U}^i$ 是凸的，且 $f_i(x,\cdot):\mathcal{U}^i\to\mathbb{R}$ 是凹的，则该不确定性是凹的。此外，若存在函数 $l_i:\mathcal{X}\to\mathbb{R}^{L_i}$，满足对于每个 $x\in\mathcal{X}$，$f_i(x,u^i)=(u^i)^T l_i(x)$，则称该不确定性是线性的。

为减少过度保守性，我们旨在对最多有 Γ 个函数偏离其名义情景的情况保持稳健，并得到以下结果:

$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{\sup_{\mathcal{S}\subseteq[m]:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma}\left\{\sum_{i\in\mathcal{S}}\sup_{u^i\in\mathcal{U}_i} f_i(x,u^i)+\sum_{i\in[m]\setminus\mathcal{S}} f_i(x,\overline{u}^i)\right\}\right\}. \tag{8}$$

规划 (8) 以下称为规划 (Γ-规划的对应形式 (6)。自然地，它比 (4) 更一般。为说明这种推广是自然的，我们考虑线性不确定性：假设 f_i 对每个 $i\in[m]$ 都具有线性不确定性，且 $\mathcal{U}^i$ 是凸紧集。那么存在 $w^i\in\mathcal{U}^i$，使得 $\sup_{u^i\in\mathcal{U}^i} f_i(x,u^i)=f_i(x,w^i)\in\mathbb{R}$。于是我们得到

$$\begin{aligned}
(8) &= \inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{\sup_{\mathcal{S}\subseteq[m]:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma}\left\{\sum_{i\in\mathcal{S}} f_i(x,w^i)+\sum_{i\in[m]\setminus\mathcal{S}} f_i(x,\overline{u}^i)\right\}\right\}\\
&= \inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{\sup_{\mathcal{S}\subseteq[m]:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma}\left\{\sum_{i\in\mathcal{S}} f_i(x,w^i)-f_i(x,\overline{u}^i)+\sum_{i\in[m]} f_i(x,\overline{u}^i)\right\}\right\}\\
&= \inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{\sum_{i\in[m]} f_i(x,\overline{u}^i)+\sup_{\mathcal{S}\subseteq[m]:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma}\left\{\sum_{i\in\mathcal{S}} f_i(x,w^i-\overline{u}^i)\right\}\right\}\\
&= \inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{\sum_{i\in[m]} f_i(x,\overline{u}^i)+\sup_{\mathcal{S}\subseteq[m]:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma}\left\{\sum_{i\in\mathcal{S}}\sup_{z^i\in\mathcal{U}_i-\overline{u}^i} f_i(x,z^i)\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

特别是，如果对于所有 $u_i\in\mathcal{U}_i$，$\mathcal{U}_i=[\overline{u}_i、\ \overline{u}_i+\Delta u_i]\subseteq\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 和 $f_i(x、\ u_i)=u_i x_i\geqslant 0$，那么

$$\sup_{z_i\in\mathcal{U}_i-\overline{u}_i} f_i(x,z_i)=\Delta u_i x_i$$

并得到规划（4）。
在继续讨论如何处理第 Γ节中的–对应形式之前，3我们先给出一些应用示例。

不确定性下的单机调度该应用最早在不确定性下由 [15] 和 [41]讨论。一组 m 作业 $\mathcal{J}$ 必须安排在单台机器上。若不采用抢占，机器需要 $\overline{p}_j \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的处理时间才能完成作业 $j \in \mathcal{J}$ 。取决于调度 x 和处理时间 $\overline{p}$:= $(\overline{p}_j)_{j\in\mathcal{J}}$的作业 j 的完成时间记为 $C_j(x,\overline{p})$。用 $\mathcal{X}$表示可行调度的集合（二元变量$x_{i,j}$表示作业 j 是否安排在位置 i）：

$$\mathcal{X} := \left\{ x \in \{0,1\}^{[m]\times|\mathcal{J}|} : \sum_{i\in[m]} x_{i,j} = 1 \ \forall j \in \mathcal{J},\ \sum_{j\in\mathcal{J}} x_{i,j} = 1 \ \forall i \in [m] \right\}.$$

假设每个作业 j 对目标函数的贡献权重为 $w_j \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ，我们的目标是最小化总完成时间:

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \sum_{j\in\mathcal{J}} C_j(x,\overline{p}). \tag{9}$$

规划 (9) 等价于

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \overline{p}_j \sum_{i\in[m]} (m+1-i)x_{i,j}. \tag{10}$$

如果处理时间 p_j存在不确定性 $\mathcal{U}_j = [\overline{p}_j,\ \overline{p}_j + \Delta p_j]$ 对于每项作业 $j \in \mathcal{J}$，那么Γ规划的 –对应形式 (8)，即规划 (10)，为

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \sum_{j\in\mathcal{J}} \overline{p}_j \sum_{i\in[m]} (m+1-i)x_{i,j} + \max_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{J}:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma} \left\{ \sum_{j\in\mathcal{S}} \Delta p_j \sum_{i\in[m]} (m+1-i)x_{i,j} \right\} \right\} \tag{11}$$

因为这种不确定性是线性的。
虽然规划（11）看起来与（4）非常相似，但存在一个重要区别：变量 $x_{i,\ j}$并非各自只与一个系数相乘，而是每个不确定参数 p_j 都与变量的线性组合 $x_{i,\ j}$ 相乘，对于固定的 $j \in \mathcal{J}$。因此，名义规划（10）的目标函数关于 p 和 x 是线性的，但其形式为 $\min_{x\in\mathcal{X}} u^T Bx$ ，其中 B 是一个实矩阵，而不是$\min_{x\in\mathcal{X}} u^T x$。因此，命题 2.1 和 [11] 的原始结果无法应用。

不确定性下的二次指派问题 二次指派问题对将 $n \in \mathbb{N}$ 设施指派到 n 地点的过程进行建模，使货物运输成本最小化。利用二元变量$x_{i,\ r}, i, r \in [n]$，表示设施 i 是否指派到地点 r，可将可行集建模为

$$\mathcal{X} = \left\{ x \in \{0,1\}^{[n]^2} : \sum_{i\in[n]} x_{i,r} = 1 \ \forall r \in [n],\ \sum_{r\in[n]} x_{i,r} = 1 \ \forall i \in [n] \right\}.$$

对于每一对设施 $(i、\ j) \in [n]^2$、 $c_{i,\ j} \geqslant 0$ 表示 i 与 j 之间的流量；对于每一对地点 $(r、\ s) \in [n]^2$、 $d_{r,\ s} \geqslant 0$ 表示 r 与 s之间的距离。因此，二次指派问题可以建模为

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \sum_{(i,j,r,s)\in[n]^4} c_{i,j} d_{r,s} x_{i,r} x_{j,s}.$$

在 [21], 作者假设流量具有区间不确定性。他们的目标是获得能够应对至多 Γ 个相对于名义情景的偏差的解：我们寻求对$c_{i、\ j}$ 中的不确定性提供保护，这些不确定性通过至多$\Delta c_{i的扰动建模,\ j} \geqslant 0$ 对所有 $(i、\ j) \in [n]^2$，即$c_{i、\ j} \in \mathcal{U}_{i、\ j} = [\overline{c}_{i、\ j}、\ \overline{c}_{i、\ j} + \Delta c_{i、\ j}]$。由于不确定性是线性的， Γ-对应形式（8）可表示为:

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \sum_{(i,j,r,s)\in[n]^4} \overline{c}_{i,j} d_{r,s} x_{i,r} x_{j,s} + \max_{\mathcal{S}\subseteq[n]^2:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma} \left\{ \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} \sum_{r,s\in[n]} \Delta\overline{c}_{i,j} d_{r,s} x_{i,r} x_{j,s} \right\} \right\}. \tag{12}$$

具有截止期限不确定性的物流在物流应用中，涉及在给定到期时间内完成配送的问题，通常可以建模为目标函数为（非）线性的组合优化程序，例如出租车路径规划、货物配送或患者转运。对于这三种情况，准时送达都对客户满意度至关重要。同时，车辆接载过早通常并不会造成问题。

对于任务 $i \in [m]$，我们用 $b_i \in \mathbb{R}$ 表示到期时间。如果某项工作在 b_i 之后完成，就会产生罚成本。无权罚成本的规划为

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sum_{i \in [m]} \max\{0, x_i - b_i\}. \tag{13}$$

规划（13）可能出现在运输物流中，例如作为具有一般时间窗的车辆路径问题的特例，参见 [28]。在实践中，到期时间可能是不确定的：我们假设 $b_i \in \mathcal{U}_i := [\overline{b}_i - \Delta b_i, \ \overline{b}_i]$ 对于某个名义情景 $\overline{b}_i$ 和一个扰动 Δb_i。为降低保守性，目标函数是确保对 Γ 到期时间偏差的稳健性，从而得到以下规划：

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \sup_{\mathcal{S} \subseteq [m] : |\mathcal{S}| \leqslant \Gamma} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{S}} \max\{0, x_i - \overline{b}_i + \Delta b_i\} + \sum_{i \in [m] \setminus \mathcal{S}} \max\{0, x_i - \overline{b}_i\} \right\} \right\}. \tag{14}$$

问题（14）通过将 Γ–对应形式（8）中的 $f_i(x, \ b) :=$ 最大化$\{0, \ x_i - b_i\}$。

3 不确定目标函数规划的重构 s

本节将介绍第 Γ2.2节中引入的 [11]–对应形式的等价重构 Γ。其中一些证明受到 f_i 中的证明启发。事实证明，无需对函数 $\mathcal{U}^i$或不确定集 f_i 作任何假设，就可以得到 Γ–对应形式（8）的初步重构。

引理 3.1. 令 $\Gamma \in [m]$。则 Γ–对应形式 (8) 等价于

$$\begin{aligned} &\inf_{x,p,\theta} \Gamma\theta + \sum_{i \in [m]} f_i(x, \overline{u}^i) + p_i, \\ &\text{s.t. } x \in \mathcal{X}, \\ &\quad p_i + \theta \geqslant \sup_{u^i \in \mathcal{U}_i} f_i(x, u^i) - f_i(x, \overline{u}^i) \ \forall i \in [m], \\ &\quad p \in \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}, \theta \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}. \end{aligned} \tag{15}$$

证明。 证明的结构与 [11] 中定理 3 的证明相似。对于二元变量

$$s_i := \begin{cases} 1, \ \text{if } i \in \mathcal{S}, \\ 0, \ \text{otherwise}, \end{cases}$$

$i \in [m]$， 的内层最大化规划 –对应形式 (8) 等价于

$$\begin{aligned} &\sup_{s} \sum_{i \in [m]} f_i(x, \overline{u}^i) + s_i(\sup_{u^i \in \mathcal{U}_i} f_i(x, u^i) - f_i(x, \overline{u}^i)), \\ &\text{s.t.} \sum_{i \in [m]} s_i \leqslant \Gamma, \\ &\quad s \in \{0, 1\}^m. \end{aligned} \tag{16}$$

显然，规划（16）等价于其线性规划松弛。将其对偶问题代入 Γ–对应形式（8），即可证明该结论。 □

在引理 3.1中，为了得到一个易于处理的表述，有必要对该不等式进行重新表述

$$p_i + \theta \geqslant \sup_{u^i \in \mathcal{U}_i} f(x, u^i) - f(x, \overline{u}^i) \tag{17}$$

对所有 $i \in [m]$。在 [4], 中，作者提出了各种方法，尤其针对线性/凹不确定性，这将在后续小节中讨论。我们在第 4节中，针对非凹情形展示一种方法，该方法利用逐项平行向量的概念来处理非凸二次规划。关于其他方法，请参阅 [4] 和 [33]。

此外，可以对规划（15）进行重新表述，从而得到一个具有可行集 $\mathcal{X}$ 且不含变量 p 和 θ的规划:

引理 3.2。 如果 $\Gamma \in [m]$, 那么 Γ–对应形式 (8) 等价于

$$\inf_{k \in [m]_0} \left\{ \inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \Gamma \theta^k(x) + \sum_{i \in [m]} f_i(x, \overline{u}^i) + \sup\{0, \theta^i(x) - \theta^k(x)\} \right\} \right\}, \tag{18}$$

其中 $\theta^k(x) :=$ 上确界$_{u^k \in \mathcal{U}_k} f_k(x, u^k) - f_k(x, \overline{u}^k)$ 以及 $\theta^0(x) := 0$。

证明。 由于 $\Gamma \in [m]$, Γ–对应形式（8）等价于（15）。由于对于所有 $i \in [m]$, p_i 仅在一个不等式中恰好出现一次，我们得到

$$p_i^* = \sup\{0, \sup_{u^i \in \mathcal{U}_i} f_i(x^*, u^i) - f_i(x^*, \overline{u}^i)) - \theta^*\} \ \forall i \in [m] \tag{19}$$

对于（ (x^*, p^*, θ^*) ）的最优解，其中（15）。将方程（19）代入（15）的目标函数中，得到

$$\Gamma\theta + \sum_{i \in [m]} f_i(x, \overline{u}^i) + \sup\{0, \sup_{u^i \in \mathcal{U}_i} f_i(x, u^i) - f_i(x, \overline{u}^i)) - \theta\}. \tag{20}$$

由于 (20) 关于 θ 是凸的分段线性函数，因此对于某个 $k \in [m]$, $\theta^* = 0$ 或 $\theta^* = \theta^k(x)$ 。 □

3.1 凹不确定性

在本小节中，我们将重点讨论满足以下假设的规划:

假设 3.3。 对于 Γ–对应形式 (8) 以及所有 $i \in [m]$ ，我们假设:

(i) 存在一个名义情景 $\overline{u}^i \in \mathbb{R}^{L_i}$、一个矩阵 $A^i \in \mathbb{R}^{L_i \times m_i}$ 和一个凸集 $\mathcal{Z}_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$, 使得 $\mathcal{U}_i = \{\overline{u}^i + A^i \zeta^i \mid \zeta^i \in \mathcal{Z}_i\}$, 即 $\mathcal{U}_i$ 是凸集的仿射变换（因此也是凸的）。

(ii) f_i 的不确定性是凹的（回顾一下，这一定义意味着，对于每个 $x \in \mathcal{X}$, $f_i(x, \cdot) : \mathcal{U}^i \to \mathbb{R}$是凹的）。

（*iii*）名义情景 $\overline{u}^i$ 包含于 $\mathcal{U}_i$的相对内部。

假设不确定集具有凸性（i）是鲁棒优化中的典型假设，参见 [5]。要应用 [4]中的技术，需要满足假设（ii）和（iii）。为此，我们需要一些凸分析工具:

定义 3.4。 设 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$和 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个凸集。设 $f : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $(x, a) \mapsto f(x, a)$是一个函数，对于每个 $x \in \mathcal{X}$，它关于 a 是凹的。对于任意但固定的 $x \in \mathcal{X}$，函数

$$\begin{aligned} f_*(x, \cdot) : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ a &\mapsto \inf_{y \in \mathcal{A}} \{a^T y - f(x, y)\} \end{aligned}$$

称为关于 a的（部分）凹共轭。对于非空集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$，函数

$$\begin{aligned}\delta^*(\cdot \mid \mathcal{S}) \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \cup \{\infty\},\\ x &\mapsto \sup_{y \in \mathcal{S}} y^T x\end{aligned}$$

称为 $\mathcal{S}$的支撑函数。

主要结果 [4] 是以下重新表述：

命题 3.5。*([4], 定理 2)* 在假设 *3.3*下，不等式

$$\sup_{u^i \in \mathcal{U}_i} f_i(x, u^i) \leqslant 0$$

当且仅当存在一个向量 $v^i \in \mathbb{R}^{L_i}$使得该条件成立

$$\left(\overline{u}^i\right)^T v^i + \delta^*((A^i)^T v^i \mid \mathcal{Z}_i) - f_{i,*}(x, v^i) \leqslant 0. \tag{21}$$

我们注意到， f_i 在 x 中的凸性意味着不等式（21）左侧也是凸的，因为 δ^* 在 v^i 中是凸的，而$f_{i,*}$ 在 (x, v^i)中是凹的，见 [4]。

将命题 3.5 应用于规划（15），我们得到 Γ– 对应形式（8）的等价重新表述：

推论 3.6。 设 $\Gamma \in [m]$。在假设 *3.3* 下， Γ–对应形式 (8) 等价于

$$\begin{aligned}\inf_{x,p,\theta,v^1,\ldots,v^m} \ & \Gamma\theta + \sum_{i \in [m]} f_i(x, \overline{u}^i) + p_i \\ \text{s.t. } & x \in \mathcal{X} \\ & p_i + \theta \geqslant (\overline{u}^i)^T v^i + \delta^*((A^i)^T v^i \mid \mathcal{Z}_i) - f_{i,*}(x, v^i) - f_i(x, \overline{u}^i) \ \forall i \in [m] \\ & p, \theta \geqslant 0.\end{aligned} \tag{22}$$

证明。由于 Γ 是整数，引理3.1 成立。命题3.5 意味着对于每个 $i \in [m]$,

$$p_i + \theta \geqslant (\overline{u}^i)^T v^i + \delta^*((A^i)^T v^i \mid \mathcal{Z}_i) - f_{i,*}(x, v^i) - f_i(x, \overline{u}^i)$$

对于 $v \in \mathbb{R}^{L_i}$，当且仅当 $p_i + \theta \geqslant \sup_{u^i \in \mathcal{U}_i} f_i(x, u^i) - f_i(x, \overline{u}^i)$. 时成立 □

一般而言，规划 (22) 在计算上不可行。关于 v^i 的支撑函数和凹共轭本身就是优化规划，并且依赖于一个新的决策变量 v^i。在 [4], 中，作者为各种不确定集 $\mathcal{U}_i$推导出了有限重构，其中包括椭球、多面体、锥、盒、闵可夫斯基和或其交集等几何形式，以及由各种函数（例如凸函数或可分函数）描述的不确定集。他们的研究结果也适用于此处。详情请参阅 [4]中的表 1、表 2 和表 3。

3.2 线性不确定性

过去几十年来，研究一直聚焦于线性不确定性，且对此已有充分研究。因此，在本小节中，我们将说明如何处理不确定条件下混合整数非线性规划中的线性不确定性，并指出许多组合优化程序都涉及线性不确定性（我们也将在第 4 节中对此进行说明）：

假设 3.7。 对于 Γ对应形式 (8)以及所有 $i \in [m]$，假设 *3.3* 经如下修改后成立：

*(ii)** 不确定性是线性的，即存在一个函数 l_i: $\mathcal{X} \to \mathbb{R}^{L_i}$，使得

$$f_i(x, u^i) = (u^i)^T l_i(x) \ \forall u^i \in \mathcal{U}_i, \ x \in \mathcal{X}.$$

我们首先在假设 3.7 下表述推论 3.6：

推论 3.8。 设 $\Gamma \in [m]$。在假设 *3.7*下， Γ–对应形式 (8) 等价于

$$\begin{aligned} &\inf_{x,p,\theta} \Gamma\theta + \sum_{i\in[m]} (\overline{u}^i)^T l_i(x) + p_i, \\ &\text{s.t. } x \in \mathcal{X}, \\ &\quad p_i + \theta \geqslant \delta^*((A^i)^T l_i(x) \mid \mathcal{Z}_i) \ \forall i \in [m], \\ &\quad p, \theta \geqslant 0. \end{aligned} \tag{23}$$

证明。 由于 Γ 是整数，推论3.6 成立。由于不确定性是线性的，我们有

$$f_{i,*}(x, v^i) \neq -\infty \Leftrightarrow v^i = l_i(x),$$

参见 [4]。由于不等式（21）自然不适用于 $f_{i,\ *}(x,\ v^i) = -\infty,\ \ v^i = l_i(x)$ 成立。将其代入规划（22）即可证明该结论，因为 $f_i(x,\ \overline{u}^i) = (\overline{u}^i)^T l_i(x)$。 □

注释 3.9。 我们注意到，自然地，类似于 Γ–对应形式 (8) 是规划 (4)的推广，推论 *3.8* 是定理 *1*在 *[11]*中的推广。

对于区间不确定性下的组合优化，通常必须获得一种不会改变可行集的易处理重新表述，这样便可使用规划（6）的预言机来求解相应的 Γ–对应形式。在线性不确定性的情形下，可以通过添加 $l_i,\ \ i \in [m]$在 $\mathcal{X}$ 上非负这一附加假设，并修改 $\mathcal{X}$:

定理 3.10。 设 $\Gamma \in [m]$ 并考虑 Γ–对应形式 (8) 在区间不确定性$\mathcal{U}_k = [\overline{u}_k$下， $\overline{u}_k + \Delta u_k]$ 对于某个 $\overline{u}_k,\ \ \Delta u_k \in \mathbb{R}^{L_k}_{\geqslant 0}$ 对于所有 $k \in [m]$。若不确定性是线性的，且$f(x,\ u_k) = u_k^T l_k(x)$ 并且 $l_k(x) \geqslant 0$ 对所有 $x \in \mathcal{X}$及所有 $k \in [m]$均成立，则规划(8) 等价于

$$\inf_{k\in[m]_0} \left\{ \inf_{\mathcal{Q}\subseteq[m]} \left\{ \inf_{x\in\mathcal{X}_\mathcal{Q}} \left\{ \Gamma\Delta u_k^T l_k(x) + \sum_{i\in[m]} \overline{u}_i^T l_i(x) + \sum_{q\in\mathcal{Q}} \Delta u_q^T l_q(x) - \Delta u_k^T l_k(x) \right\} \right\} \right\}, \tag{24}$$

其中 $\Delta u_0 :\ = l_0(x) :\ = 0$ 和

$$\mathcal{X}_\mathcal{Q} := \{x \in \mathcal{X} : \Delta u_q^T l_q(x) - \Delta u_k^T l_k(x) \geqslant 0 \ \forall q \in \mathcal{Q},\ \Delta u_q^T l_q(x) - \Delta u_k^T l_k(x) \leqslant 0 \ \forall q \in [m]\backslash\mathcal{Q}\}.$$

证明。 设 e^j 为 $\mathbb{R}^j$中全为 1 的向量。由于 l_k 非负， Γ–对应形式（8）在将 $\mathcal{U}_k$ 替换为 $\mathcal{U}_k^\varepsilon$时不会改变：$= [\overline{u}_k - \varepsilon e^{L_k},\ \ \overline{u}_k + \Delta u_k]$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 且假设 3.7成立。因此， Γ–对应形式（8）等价于（22）。类似于引理 3.2 的证明，可以证明

$$p_i^* = \max\{0, \delta^*((A^i)^T l_i(x) \mid \mathcal{Z}_i) - \theta^*\} \tag{25}$$

并且 θ^* 等于 0，或者存在 $k \in [m]$ 使得

$$\theta^* = \delta^*((A^k)^T l_k(x) \mid \mathcal{Z}_k) = \Delta u_k^T l_k(x) \tag{26}$$

最优的 p^* 和 θ^*。注意，(26) 中的最后一个方程成立，因为 l_k 非负。因此，Γ–对应形式 (8) 等价于

$$\inf_{k\in[m]_0} \left\{ \inf_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \Gamma u_k^T l_k(x) + \sum_{i\in[m]} (\overline{u}^i)^T l_i(x) + \max\{0, \Delta u_i^T l_i(x) - \Delta u_k^T l_k(x)\} \right\} \right\}.$$

这就证明了该结论，因为 $\mathcal{Q}$ 编码了哪些最大化项为非负。

□

定理 3.10 指出，在该定理的假设下， Γ–对应形式可以借助用于求解（6）的优化预言机“近似”求解，前提是能够将该预言机从 $\mathcal{X}$扩展到 $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$。然而，调用次数为 $O(m2^m)$，即关于不确定函数的数量呈指数级增长（即使 m 是输入的一部分）。据我们所知，在非线性组合优化背景下，目前还没有能够从 $\mathcal{X}$ 得到 $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$ 的“黑箱”，而这无疑是一个有趣的研究方向。因此，若要借助优化预言机求解 Γ–对应形式，目前还需要额外的假设。不过，在第 4节中，我们将证明，对于“具有指派结构的”规划，这是可行的。作为工具，我们需要以下关于具有该结构的模型 $\min_{x\in\mathcal{X}} u^T Bg(x)$ 的结果。

定理 3.11。 设 $B\in\mathbb{R}^{m\times(mn)}_{\geqslant 0}$ 为一个分块对角矩阵，其中每个块仅包含一行，并设 $g\colon \mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^{mn}_{\geqslant 0}$ 为任意非负函数。考虑以下规划

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} u^T Bg(x), \tag{27}$$

在区间不确定性下，即 $u_i\in\mathcal{U}^i:=[\overline{u}_i,\ \overline{u}_i+\Delta u_i]\subseteq\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 对所有 $i\in[m]$均成立。此外，我们假设

$$\mathcal{X}\subseteq\{x\in\mathbb{R}^r\colon\ \forall i\in[m]\exists!\, j\in[n]\colon\ g_{i,j}(x)\ \textit{is not constant } 0\}. \tag{28}$$

设 $\Gamma\in[m]$。那么，规划 Γ 的 Γ–对应形式 (27) 以及规划

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} y^T g(x), \tag{29}$$

在区间不确定性 $y_{(i,\ j)}\in\mathcal{Y}^{(i,\ j)}:=[\overline{u}_i B_{i,\ (i,\ j)},\ (\overline{u}_i+\Delta u_i)B_{i,\ (i,\ j)}]$ 下，对所有 $(i,\ j)\in[m]\times[n]$ 均等价。

证明。我们先引入一些记号：令 $B_{\cdot,(0,0)}:=\Delta y_{0,0}:=\overline{y}_{0,0}:=0$ （注意，这里的记号略有滥用，根据维数不同，我们指的是零向量或数字 0），$\Delta y:=(\Delta y_{a,b})_{(a,b)\in[m]\times[n]}$，$\overline{y}:=(\Delta u_a B_{a,(a,b)})_{(a,b)\in[m]\times[n]}$，$B_k:=(\overline{u}_q B_{a\ (a,b)})_{(a,b)\in[m]\times[n]}$，$B:=(\overline{y}_{(a,b)})_{(a,b)\in[m]\times[n]}$，并用 $\cdot,\cdot$ 表示 的第 – 行。应用定理 3.10，可得，规划 (27) 的 Γ– 对应形式等价于

$$\inf_{k\in[m]_0}\left\{\inf_{\mathcal{Q}\subseteq[m]}\left\{\inf_{x\in\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}}\left\{\Gamma\Delta u_k B_{k,\cdot}g(x)+\sum_{i\in[m]}\overline{u}_i B_{i,\cdot}g(x)+\sum_{q\in\mathcal{Q}}\Delta u_q B_{q,\cdot}g(x)-\Delta u_k B_{k,\cdot}g(x)\right\}\right\}\right\}. \tag{30}$$

由于 B 是一个分块对角矩阵，且每个块恰好包含一行，因此可得$B_{i,\ (r,\ s)}=0$，其中 $i\neq r$。此外，由于对于所有 $i\in[m]$，$g_{i,\ j}(x)\neq 0$ 恰好对应一个 $j\in[n]$（我们将其记为 $j(i)$），因此可得

$$B_{q,\cdot}g(x)=\sum_{i\in[m],j\in[n]} B_{q,(i,j)}g_{i,j}(x)=\sum_{i\in[m]} B_{q,(i,j(i))}g_{i,j(i)}(x)=B_{q,(q,j(q))}g_{q,j(q)}(x).$$

该 Γ–规划（29）的对应形式等价于（再次应用定理 3.10 ——请注意$l(x)=g(x)$ 此处，并将 $\mathcal{Q}$ 替换为 $\mathcal{Y}$，以简化记号）：

$$\inf_{(a,b)\in[m]\times[n]\cup\{(0,0)\}}\left\{\inf_{\mathcal{Y}\subseteq[m]\times[n]}\left\{\inf_{x\in\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}}\left\{\Gamma\Delta y_{(a,b)}g_{(a,b)}(x)+F_{\mathcal{Y},a,b}(x)\right\}\right\}\right\} \tag{31}$$

with

$$F_{\mathcal{Y},a,b}(x):=\sum_{(i,j)\in[m]\times[n]}\overline{y}_{(i,j)}g_{(i,j)}x+\sum_{(q,p)\in\mathcal{Y}}\Delta y_{(q,p)}g_{(q,p)}(x)-\Delta y_{(a,b)}g_{(a,b)}(x). \tag{32}$$

下面我们证明，可以将规划（30）中的子问题数量从$(m\cdot n+1)\cdot 2^{mn}$ 减少至 $(m+1)\cdot 2^m$，且所得规划恰为（31）。一方面，若 $b\neq b(a)$，则$g_{(a,\ b)}(x)=0$ 对所有 $x\in\mathcal{X}$ 均成立；根据假设和方程（32），可得

$$F_{\mathcal{Y},a,b}(x)=\sum_{(i,j)\in[m]\times[n]}\overline{y}_{(i,j)}g_{(i,j)}(x)+\sum_{(q,p)\in\mathcal{Y}}\Delta y_{(q,p)}g_{(q,p)}(x)=F_{\mathcal{Y},0,0}(x). \tag{33}$$

因此，我们可以在规划（31）中固定 $b = b(a)$，而不再采用 $b \in [n]$ $m+1$ 个“外层问题”。另一方面，对于每个 $\mathcal{Y} \subseteq [m] \times [n]$，$x \in \mathcal{X}_{\mathcal{Y}}$ 仅当以下条件成立时才成立：

$$\Delta y_{q,p} g_{q,p}(x) \geqslant \Delta y_{a,b(a)} g_{a,b(a)}(x) > 0 \ \forall (q,p) \in \mathcal{Y}.$$

然而，$g_{q,\,p}(x)$ 不等于0 当某个 x 仅当 $p = p(q)$。因此，$\mathcal{X}_{\mathcal{Y}} = \varnothing$ 若 $(q,\ p) \in \mathcal{Y}$ 当某个 $p \neq p(q)$。因此，规划（31）等价于

$$\inf_{a \in [m]_0} \left\{ \inf_{\overline{\mathcal{Y}} \subseteq [m]} \left\{ \inf_{x \in \mathcal{X}_{\overline{\mathcal{Y}}}} \left\{ \Gamma \Delta y_{(a,b(a))} g_{(a,b(a))}(x) + F_{\overline{\mathcal{Y}},a}(x) \right\} \right\} \right\} \tag{34}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\overline{\mathcal{Y}}} := \{ x \in \mathcal{X} \colon & \Delta y_{q,p(q)} g_{q,p(q)}(x) \geqslant \Delta y_{a,b(a)} g_{a,b(a)}(x) \ \forall q \in \overline{\mathcal{Y}}, \\ & \Delta y_{q,p(q)} g_{q,p(q)}(x) \leqslant \Delta y_{a,b(a)} g_{a,b(a)}(x) \ \forall q \in [m] \backslash \overline{\mathcal{Y}} \}, \end{aligned}$$

$b(0) := 0$ 和

$$F_{\overline{\mathcal{Y}},a}(x) := \sum_{(i,j) \in [m] \times [n]} \overline{y}_{(i,j)} g_{(i,j)}(x) + \sum_{(q,p) \in \overline{\mathcal{Y}}} \Delta y_{(q,p(q))} g_{(q,p(q))}(x) - \Delta y_{(a,b(a))} g_{(a,b(a))}(x).$$

将$\overline{y}$ 和 Δy 的定义代入规划（34）并替换所有指标后，可得到规划（30）。

□

因此，若 $g(x)$ 是一个 0/1–函数，则可以应用定理3.11得到一个等价的 Γ–对应形式，其中不确定性是线性的，且不涉及矩阵 B。下面的推论针对 $g(x) = x$展示了这一点：

推论 3.12。考虑规划

$$\min_{x \in \mathcal{X}} u^T B x \tag{35}$$

如定理 *3.11* 的设定，并假设 $\mathcal{X} \subseteq \{x \in \{0,\ 1\}^{[m] \times [n]} \colon \sum_{j \in [n]} x_{i,\ j} = 1 \ \forall i \in [m]\}$。设 $\Gamma \in [m]$。则 Γ–对应形式 (35) 等价于

$$\min_{(k,l) \in [m] \times [n] \cup \{(0,0)\}} \left\{ \Gamma \Delta u_k B_{k,(k,l)} + \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \overline{u}^T B x + \sum_{(i,j) \in [m] \times [n]} F_{i,j,k,l}(x) \right\} \right\}$$

其中 $B_{0,\ 。} :=\ = \Delta u_0 :=\ = 0$ （第一个是由零组成的行向量，后者是数字0），并且

$$F_{i,j,k,l}(x) := \max\{0, \Delta u_i B_{i,(i,j)} - \Delta u_k B_{k,(k,l)}\} x_{i,j}.$$

证明。 由定理 3.11 和命题 2.1 令 $g(x) = x$，即可得出。 □

关于 0/1–函数的特殊情形 在第 4 节应用我们的理论之前，我们再讨论一种情形，即在线性一维区间不确定性下，具有 Γ–函数的对应形式 (8)：0/1–函数：

假设 3.13。 对于 Γ–对应形式 (8) 以及所有 $i \in [m]$，我们假设：

(i) 不确定集 $\mathcal{U}_i$ 是一个一维区间，即 $\mathcal{U}_i = [\overline{u}_i,\ \overline{u}_i + \Delta u_i] \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ 且$\Delta u_i > 0$。

(ii) 存在一个 0/1–函数 $l_i \colon \mathcal{X} \to \{0,\ 1\}$ 使得 $f_i(x,\ u_i) = u_i l_i(x)$ 对所有 $u_i \in \mathcal{U}_i$均成立。

尽管假设 3.13 看起来限制较多，但它涵盖了许多不确定条件下的组合优化程序，例如二次背包问题或二次匹配问题。应用命题2.1，可得：

定理 3.14. 设 $\Gamma \in [m]$ 并假设假设 *3.13* 成立。则 Γ–对应形式 (8) 等价于

$$\inf_{k\in[m]_0}\left\{\Gamma\Delta u_k + \inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{\overline{u}^T l(x) + \sum_{j\in[m]}\max\{0,\Delta u_j - \Delta u_k\}l_j(x)\right\}\right\}. \tag{36}$$

证明。 在假设 3.13下，规划 (6) 等价于 $\inf_{(x,y)\in\mathcal{X}_y} u^T y$ 其中 $\mathcal{X}_y := \mathcal{X}\times l(\mathcal{X}) \subseteq \mathbb{R}^n\times\{0,1\}^m$。然后，命题 2.1 意味着，修改后的规划的 Γ–对应形式等价于

$$\inf_{k\in[m]_0}\left\{\Gamma\Delta u_k + \inf_{x\in\mathcal{X}_y}\left\{\overline{u}^T y + \sum_{j\in[m]}\max\{0,\Delta u_j - \Delta u_k\}y_j\right\}\right\}$$

其中 $\Delta u_0 := 0$。由于 $y_j = l_j(x)$，结论得证。 □

定理 3.14 表明，可以借助规划 (6) 的优化预言机求解 Γ–对应形式。这一结果还意味着，若规划 (6) α– 可近似[2]，则还可以减少求解所需的预言机调用次数，并确定 α-近似解（对于 $\alpha \geqslant 1$）。这两个证明都主要受到相应证明的启发，见 [11] 和 [32]:

定理 3.15。 设 $\Gamma \in [m]$。若假设 *3.13* 成立，且规划 (6) 是 α-可近似的，则(8)是 α–可近似的。

证明。 对于 $k \in [m]_0$，我们将 k个内层问题的目标函数（属于规划 36）记为$G^k(x)$，即:

$$G^k(x) := \sum_{j\in[m]}(\overline{u}_j + \max\{0,\Delta u_j - \Delta u_k\})l_j(x).$$

显然，根据假设，对于每个 α，都可以对规划 $\inf_{x\in\mathcal{X}} G^k(x)$ 进行 $k \in [m]_0$ 近似。设x^k 为给定近似算法的输出，其目标值为 z^k ，并设 Z^* 为规划（36）的最优值；由于假设 Γ成立，该规划等价于对应形式（3.138）。于是得到

$$\begin{aligned}
Z^* &\leqslant \left(\sum_{i\in[m]} l_i(x^k)\overline{u}_i\right) + \sup_{\mathcal{S}\subseteq[m]:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma}\sum_{i\in\mathcal{S}}\Delta u_i l_i(x^k)\\
&= \left(\sum_{i\in[m]} l_i(x^k)\overline{u}_i\right) + \inf_{\theta\geqslant 0}\sum_{j\in[m]}\max\{0,\Delta u_i l_i(x^k) - \theta\} + \Gamma\theta\\
&\overset{l_i(x^k)\in\{0,1\}}{=} \left(\sum_{i\in[m]} l_i(x^k)\overline{u}_i\right) + \inf_{\theta\geqslant 0}\sum_{j\in[m]}\max\{0,\Delta u_i - \theta\}l_i(x^k) + \Gamma\theta\\
&\leqslant \Gamma\Delta u_k + \sum_{i\in[m]}(\overline{u}_i + \max\{0,\Delta u_i - \Delta u_k\})l_i(x^k)\\
&= \Gamma\Delta u_k + G^k(x^k)\\
&\leqslant \alpha(z_k^* - \Gamma\Delta u_k) + \Gamma\Delta u_k\\
&\overset{\alpha\geqslant 1}{\leqslant} \alpha z_k^*\\
&= \alpha Z^*
\end{aligned}$$

这就证明了该结论，因为只需对每个 $k \in [m]_0$ 将给定的 α–近似算法应用于$\inf_{x\in\mathcal{X}} G^k(x)$，并求解$\min^{k\in[m]_0} z_k$即可。 □

[2]以下定义并非正式定义，通常用于组合优化程序：设$f^* \in (-\infty, \infty)$ 为规划（6）的最优值。那么，当存在一个实数 α以及一个算法 $\alpha \geqslant 1$，该算法以ALG 为输入 $(f, \mathcal{X})$并输出 $\tilde{x}$，且对每个实例 $\alpha f^* \geqslant f(\tilde{x})$ 均满足不等式 $(f, \mathcal{X})$ 并且算法ALG 的运行时间关于 (f的编码长度 $\mathcal{X}$)为多项式时，规划（6）称为 α–可近似。

定理 3.16。 设 $\Gamma \in [m]$ 并假设 $\Delta u_1 \geqslant \Delta u_2 \geqslant \cdots \geqslant \Delta u_m \geqslant 0$。若假设*3.13*成立，则 Γ–对应形式(8) 等价于

$$\inf_{k\in\mathcal{L}} \left\{ \Gamma \Delta u_k + \inf_{x\in\mathcal{X}} \left\{ f(x,\overline{u}) + \sum_{i\in[k]} (\Delta u_i - \Delta u_k)\, l_i(x) \right\} \right\}$$

对于 $\mathcal{L} := \{\Gamma+1,\ldots,\Gamma+\gamma, m+1\}$，其中 γ 是小于 $(m+1)-\Gamma$ 的最大奇数，且$\Delta_{m+1} := 0$。此外，若第 k 个内层规划的最优值小于 $\Gamma\Delta u_l$，对于$l \in \mathcal{L}$，则可以用 $\mathcal{L}^* := \{k \in \mathcal{L} : \ k > l\}$ 替换 $\mathcal{L}$。

证明。 由于假设 3.13成立，该结论可通过引入二元变量 [32] 来得出，参见 $y_i,\, i \in [m]$，其中 $y_i = l_i(x)$ （如定理 3.14的证明中所示）。 □

特别地，定理 3.16 意味着，无需求解 $m+1$ 个名义规划，只需求解 $[\frac{m-\Gamma}{2}]+1$ 个子问题，而不是 $m+1$个，如定理 3.14 中的情形。 [32]表明，对于线性情形，这显著减少了需要求解的子问题数量。

在结束本节之前，为求完整起见，我们指出以下内容：

注释 3.17. 对于假设*3.3*下的凹不确定性，可以证明Γ–对应形式 (8)等价于

$$\min_{k\in[m]_0} \left\{ \min_{\substack{x\in\mathcal{X}, v^1\in\mathbb{R}^{L_1},\\ \ldots, v^m\in\mathbb{R}^{L_m}}} \left\{ \Gamma\theta^k(x,v^k) + \sum_{i\in[m]} f_i(x,\overline{u}^i) + \max\{0, \theta^i(x,v^i) - \theta^k(x,v^k)\} \right\} \right\} \tag{37}$$

其中

$$\theta^k(x,v^k) := (\overline{u}^k)^T v^k + \delta^*((A^k)^T v^k \mid \mathcal{Z}_k) - f_k(x,\overline{u}^k) - f_{k,*}(x,v^k)\ \forall k \in [m].$$

然而在此背景下，似乎不太可能会采用这种表述，而不是推论 *3.6* 中给出的表述，因为其目标函数与规划 (6)的目标函数截然不同，而且可行集也发生了改变，导致预言机不再适用。

4 实际示例

本节中，我们展示第 2 节中重构的一些示例。我们注意到，其中一些是最大化规划，我们的理论也自然适用于这些规划。

不确定性下的线性规划 这里，我们讨论 $\min_{x\in\mathcal{X}} u^T Bx$ 的情形。如果 B 是单位矩阵，且 u 具有区间不确定性，我们便得到 Bertsimas 和 Sim 的原始设定。我们已经通过推论3.12 证明，在某种情况下，可以将 B “移入”不确定集，并且可以通过多项式数量的预言机调用求解 Γ 对应形式。这是对 [15] 中一个结果的推广，该结果已应用于不确定性下的单机调度问题：

例 4.1。 回顾一下，在第 *2* 节中，我们考虑了规划的一个实例

$$\begin{aligned} &\min_{x} \sum_{i,j\in\mathcal{I},\mathcal{J}} u_i q_j x_{i,j}, \\ &\text{s.t. } x \in \mathcal{X} \subseteq \left\{ x \in \{0,1\}^{|\mathcal{I}|\cdot|\mathcal{J}|} : \sum_{j\in\mathcal{J}} x_{i,j} = 1 \ \forall i \in \mathcal{I} \right\} \end{aligned} \tag{38}$$

其中 u_i 受不确定性 $[\overline{u}_i,\ \overline{u}_i + \Delta u_i]$ 在单机调度的背景下。通过应用推论 *3.12*，可以证明，规划 Γ 的 *Γ*– 对应形式 (38) 等价于取以下各项的最小值

$$\min_{(k,l)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}} \left\{ \Gamma q_k \Delta u_l + \min_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \sum_{i,j\in\mathcal{I},\mathcal{J}} (\overline{u}_i + \max\{0, \Delta u_i - \frac{\Delta u_k q_l}{q_j}\}) q_j x_{i,j} \right\} \right\}$$

and

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \sum_{i,j\in\mathcal{I},\mathcal{J}} (\overline{u}_i + \Delta u_i) q_j x_{i,j}.$$

在 *[15]*, 这一点已通过代数方法得到证明。

不确定性下的二次规划 作为推论3.10的一个应用，我们重新表述第 2 节中给出的不确定性下的二次指派问题。

例 4.2. 我们考虑区间不确定性下的二次指派问题。

$$\begin{aligned} &\min_{x} \sum_{(i,j,r,s)\in[n]^4} c_{i,j} d_{r,s} x_{i,r} x_{j,s} \\ &\text{s.t. } x \in \mathcal{X} = \{x \in \{0,1\}^{[n]^2} : \sum_{i\in[n]} x_{i,r} = 1 \ \forall r \in [n], \ \sum_{r\in[n]} x_{i,r} = 1 \ \forall i \in [n]\} \end{aligned} \tag{39}$$

具有不确定系数 $c_{i,j} \in \mathcal{U}_{i,j} := [\overline{c}_{i,j}, \overline{c}_{i,j} + \Delta c_{i,j}] \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，对所有 $i, j \in [n]$ 以及 $d_{r,s} \geqslant 0$，对所有 $r, s \in [n]$。令 $\Gamma \in [n^2]$。*(39)* 的目标函数等于 $u^T B g(x)$，其中 $B \in \mathbb{R}^{n^2\times n^4}$ 是一个包含 n^2 个 $d^T, u = c$ 的分块对角矩阵，而 $g_{(i,j),(r,s)}(x) := x_{i,r} x_{j,s}$ 对于 $(i, j, r, s) \in [n]^4$ 成立。于是定理 *3.11* 表明，规划 *(39)* 的 Γ–对应形式等价于规划的 Γ–对应形式。

$$\min_{x\in\mathcal{X}} y^T g(x)$$

其中 $y \in \mathbb{R}^{n^4}$ 受到区间不确定性影响，特别是 $y_{i,\ j,\ r,\ s} \in [\overline{c}_{i,\ j} d_{r,\ s}, \ (\overline{c}_{i,\ j} + \Delta c_{i,\ j}) d_{r,\ s}]$对于 i, j, r, $s \in [n]$。现在，我们可以应用定理 *3.14* 并得到重新表述

$$\min_{\substack{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in[n]^4 \\ \cup\{(0,0,0,0)\}}} \left\{ \Gamma(\Delta c_{k_1,k_2}) d_{k_3,k_4} + \min_{x\in\mathcal{X}} \{F_{k_1,k_2,k_3,k_4}(x)\} \right\} \tag{40}$$

其中

$$F_{k_1,k_2,k_3,k_4}(x) = \sum_{(i,j,r,s)\in[n]^4} (\overline{c}_{i,j} d_{r,s} + \max\{0, \Delta c_{i,j} d_{r,s} - \Delta c_{k_1,k_2} d_{k_3,k_4}\}) x_{i,r} x_{j,s}$$

对于 $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in [n]^4$, $F_{0,\ \ 0\,0\ \ \ j\,r\ \ \ r\,x_{j\,s}\ \ \ 0} =,,$ $_0(x) := \sum_{(i,,,s)\in[n]^4} (\overline{c}_{i,j} d_{r,s} + \Delta c_{i,j} d_{r,s}) x_{i,,,}$ 和 $\Delta c_{0,} :,:$。如果我们假设流量和距离系数是对称的，即，$_j = \Delta c_{j,i}$ 和 $d_{r,s} = d_{s,r}$ 对所有 $i, j, r, s \in [n]$都成立，那么我们只需对该集合求解内层问题。

$$\mathcal{M} := \{(k_1, k_2, k_3, k_4) \in [n]^4 : \ k_1 < k_2, k_3 < k_4\} \cup \{(0,0,0,0)\}.$$

因此，需要求解 $1 + (\frac{n(n-1)}{2})^2 = \frac{n^4-n^3}{2} + 1$ 个二次指派问题来求解规划 (40)。应用定理 *3.16*，我们可以将子问题的数量减少到 $\lceil \frac{n^4-n^3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\Gamma}{2} \rceil + 1$。在我们的电子补充材料中，我们展示了应用定理 *3.16* 如何显著加快优化过程。

例 4.3. 我们考虑以下具有区间不确定性的二次组合规划:

$$\min_{x\in\mathcal{X}\subseteq\{0,1\}^n} \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[i]} p_{i,j} x_i x_j \tag{41}$$

具有不确定系数 $p_{i,\ j} \in [\bar{p}_{i,\ j}, \ \bar{p}_{i,\ j} + \Delta p_{i,\ j}]$。令 $m : = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ 表示不确定系数的数量，并令 $\mathcal{M} : = \{(k, \ l) \in [n]^2 : \ \ l \leqslant k\}$。对于 $\Gamma \in [m]$，其 Γ–对应形式为

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \sum_{(i,j)\in\mathcal{M}} \bar{p}_{i,j} x_i x_j + \max_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{M}:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma} \left\{ \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} \Delta p_{i,j} x_i x_j \right\} \right\} \tag{42}$$

应用定理 *3.14* 后，可得规划 (42) 等价于

$$\min_{(k,l)\in\mathcal{M}\cup\{(0,0)\}}\left\{\Gamma\Delta p_{k,l}+\min_{x\in\mathcal{X}}\left\{\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in[i]}(\bar{p}_{ij}+\max\{0,\Delta p_{i,j}-\Delta p_{k,l}\})x_ix_j\right\}\right\}$$

其中 $\Delta p_{0,\,0}:=0$ 并且我们可以通过调用规划的优化预言机 $m+1$ 次来求解鲁棒对应问题 (41)。

最后，为总结不确定性下的二次规划讨论，我们展示了将项级平行向量和隐藏凹性 [3] 的概念应用于区间不确定性的方法。

例 4.4. 令 $\mathcal{X}$ 为一个凸集。我们考虑以下规划：

$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\sum_{i\in[m]}(x_i-u_i)^2. \tag{43}$$

对于每一个 $i\in[m]$，u_i 都受到不确定性 $\mathcal{U}_i$ 的约束：$=[\overline{u}_i,\ \overline{u}_i+\Delta u_i]$。对于 $\Gamma\in[m]$，规划 Γ–对应形式（(43) 在应用引理*3.1* 后表示为

$$\begin{aligned}&\inf_{x,p,\theta}\ \Gamma\theta+\sum_{i\in[m]}(x_i-\overline{u}_i)^2+p_i,\\&\text{s.t. } x\in\mathcal{X},\\&\qquad\max_{u_i\in\mathcal{U}_i}(x_i-u_i)^2-(x_i-\overline{u}_i)^2\leqslant p_i+\theta\ \forall i\in[m].\end{aligned} \tag{44}$$

规划的不等式 (44) 等价于

$$-2x_iu_i+u_i^2\leqslant p_i+\theta-2x_i\overline{u}_i+\overline{u}_i^2\ \forall u_i\in\mathcal{U}_i \tag{45}$$

对于每个 $i\in[m]$。((45) 的左侧关于 u_i 不是凹函数，因此，我们无法应用第 *3.1* 小节中的重新表述。我们设 $h(y):=y^2$ 对所有 $y\in\mathbb{R}$，并考虑以下不确定集的表述：

$$[\overline{u}_i,\overline{u}_i+\Delta u_i]=\{u_i\in\mathbb{R}\colon(-2\overline{u}_i-\Delta u_i)u_i+u_i^2\leqslant-\overline{u}_i^2-\overline{u}_i\cdot\Delta u_i\}.$$

最后，定义

$$\alpha:=-2\overline{u}_i-\Delta u_i,\ \beta:=1,\ \gamma=-\overline{u}_i^2-\overline{u}_i\Delta u_i.$$

由于 α 和 β 都是标量，因此显然逐项平行于 *[3]*。因此，我们得到 (45) 成立，当且仅当对于 $(x、\ p、\ \theta)$ 存在 $v_1、\ \ldots\ldots、\ v_m\in\mathbb{R}$，使得

$$\begin{aligned}&(1+v)h_i^*\left(\frac{2x+2\overline{u}_iv_i+\Delta u_iv_i}{1+v_i}\right)-\overline{u}_i^2v_i-\overline{u}_iv_i\Delta u_iv_i+2x_i\overline{u}_i\leqslant p_i+\theta+\overline{u}_i^2,\\&1+v_i\geqslant0,\\&v_i\geqslant0,\end{aligned}$$

参见 *[4]*, 第 *4.3* 小节，了解详情。显然，第二个不等式是冗余的。此外，由于$h_i^*(z)=\frac{z^2}{4}$，若假设 $(x,\ v_i)$ 则第一个不等式关于 $x\geqslant0$是凸的。如果 $\mathcal{X}\subseteq\mathbb{R}^n_{\geqslant\overline{u}}$，那么规划 Γ 的对应形式(43) 是一个凸优化问题，尽管不确定性不是凹的。

分段线性情形下的截止期限不确定性 最后，我们讨论应用案例，回到第 2 节引入的截止期限不确定性情形。

例 4.5。 考虑 Γ–对应形式规划 (13)，其引入见第 2:

$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{\sup_{\mathcal{S}\subseteq[m]:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma}\left\{\sum_{i\in\mathcal{S}}\max\{0,x_i-\overline{b}_i+\Delta b_i\}+\sum_{i\in[m]\setminus\mathcal{S}}\max\{0,x_i-\overline{b}_i\}\right\}\right\}.$$

等价的重新表述见备注3.2 中的规划(18):

$$\inf_{k\in[m]_0}\left\{\inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{\Gamma\theta^k(x)+\sum_{i\in[m]}\max\{0,x_i-\overline{b}_i,\max\{0,x_i-\overline{b}_i+\Delta b_i\}-\theta^k(x)\}\right\}\right\} \tag{46}$$

其中 $\theta^k(x)$：=最大值{0, $x_k-\overline{b}_k+\Delta b_k$}−最大值{0, $x_k-\overline{b}_k$}且 $\theta^0(x):=0$。因此，对于 $k=0$，有必要求解 最小值$_{x\in\mathcal{X}}\sum_{i\in[m]}$最大值{0, $x_i-\overline{b}_i+\Delta b_i$}。对于 $k>0$，我们区分以下三种情况:

i) $x_k\geqslant\overline{b}_k$，即 $\theta^k(x)=\Delta b_k$ 且

$$\max\{0,x_i-\overline{b}_i,\max\{0,x_i-\overline{b}_i+\Delta b_i\}-\theta^k(x)\}=\max\{0,x_i-\overline{b}_i,x_i-\overline{b}_i+\Delta b_i-\Delta b_k\}. \tag{47}$$

ii) $x_k\in[\overline{b}_k-\Delta b_k,\ \overline{b}_k]$，即 $\theta^k(x)=x_k-\overline{b}_k+\Delta b_k$ 且

$$\begin{aligned}&\max\{0,x_i-\overline{b}_i,\max\{0,x_i-\overline{b}_i+\Delta b_i\}-\theta^k(x)\}=\\&\max\{0,x_i-\overline{b}_i,x_i-\overline{b}_i+\Delta b_i-x_k+\overline{b}_k-\Delta b_k\}.\end{aligned} \tag{48}$$

iii) $x_k\leqslant\overline{b}_k-\Delta b_k$，即 最大值{0, $x_k-\overline{b}_k$} =最大值{0, $x_k-\overline{b}_k+\Delta b_k$} = 0。因此，$\theta^k(x)=0$，我们将此称为 $k=0$ 的情况。

对于每个 $k\in[m]$，应用方程 (47) 和 (48)，我们求解

$$\begin{aligned}&\inf_{x\in\mathcal{X}}\sum_{i\in[m]}\max\{0,x_i-\overline{b}_i,x_i-\overline{b}_i+\Delta b_i-\Delta b_k\}+\Gamma\Delta b_k\\&\text{s.t. }x_k\in[\overline{b}_k-\Delta b_k,\overline{b}_k]\end{aligned} \tag{49}$$

and

$$\begin{aligned}&\inf_{x\in\mathcal{X}}\sum_{i\in[m]}\max\{0,x_i-\overline{b}_i,x_i-\overline{b}_i+\Delta b_i-x_k+\overline{b}_k-\Delta b_k\}+\Gamma(x_k-\overline{b}_k+\Delta b_k)\\&\text{s.t. }x_k\geqslant b_k.\end{aligned} \tag{50}$$

因此，总共需要求解 $2m+1$ 个带分段线性目标函数的优化规划，并为 $k\in[m]$中的恰好一个变量额外添加一个硬约束。在电子补充材料中，我们将这种重新表述应用于带一般时间窗的车辆路径问题的一个特殊情形。

5 结论

本文研究了目标函数存在不确定性时离散非线性优化问题的 Γ–对应形式。我们采用 [4] 中提出的重构技术，建立了 Γ–对应形式的重构。与 [11] and [12], 中的 Γ–不确定性类似，我们的重构适用于一般的混合整数非线性规划，以及在原始可行集 $\mathcal{X}$ 上进行优化时具有线性不确定性的组合优化问题。虽然这些重构不一定在计算上可处理，但我们给出了确实可处理的实例，即涉及 0/1–函数的线性不确定性，以及涉及某种指派结构的规划。此外，我们还讨论了一般情形及其在物流中的应用。

该主题未来可能的研究方向包括对所得重构开展广泛的数值研究，这些研究可基于我们在电子补充材料中的原型研究。此外，还可以探讨将 [35], [36] 和 [37] 推广至非线性 Γ– 对应形式是否可行且可处理。最后，还可以探讨在何种情形下能够将 $\mathcal{X}$ 中的优化预言机扩展至 $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$，如定理 3.10所述；或者在进一步假设下，进行更多重构，将问题数量从指数级缩减为多项式级，如定理 m中类似于定理 3.11的情形。

资助与致谢

作者谨向 Jana Dienstbier 致谢，感谢她开展了许多富有成效的讨论，尤其是关于不确定性下的二次指派问题的讨论。本文所述研究部分得到了 BMBF 资助项目 HealthFaCT（资助编号 05M16WEC）的支持。此外，本研究还获得了德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）项目（项目编号 416229255，SFB 1411）的资助。本文还获得欧盟地平线 2020 研究与创新规划的资助，资助依据为玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号 764759）。

参考文献

[1] D. Adelhütte、K. Braun、F. Liers 和 S. Tschuppik，《信息不完整情况下最大限度减少患者转运延误》，技术报告，Optimization Online，2021年，参见 http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2021/02/8242.html。[2] A. Ardestani-Jaafari 和 E. Delage，《分段线性函数之和的鲁棒优化及其在库存问题中的应用》，《运筹学》64 (2016)，第 474–494 页，参见 https://doi.org/10.1287/opre.2016.1483。[3]A. Ben-Tal、D. den Hertog 和 M. Laurent，《部分可分优化中的隐藏凸性》，CentER 工作论文系列第 2011-070 号 (2011)，参见 https://ssrn.com/abstract=1865208。[4]A. Ben-Tal、D. den Hertog 和 J.P. Vial，《推导非线性不确定不等式的鲁棒对应形式》，《数学规划》149 (2015)，第 265–299 页，参见 https://link.springer.com/article/10.1007/s10107-014-0750-8。[5]A. Ben-Tal、L. El Ghaoui 和 A. Nemirovski，《鲁棒优化》，普林斯顿应用数学丛书，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009，参见 https://doi.org/10.1515/9781400831050。[6] A. Ben-Tal 和 A. Nemirovski，《鲁棒凸优化》，《数学运筹学》23 (1998)，第 769–805 页，参见 https://doi.org/10.1287/moor.23.4.769。[7] A. Ben-Tal 和 A. Nemirovski，《不确定线性规划的鲁棒解》，《运筹学通讯》25 (1999)，第 1–13 页，参见 https://doi.org/10.1016/S0167-6377(99)00016-4。[8]A. Ben-Tal 和 A. Nemirovski，《受不确定数据污染的线性规划问题的鲁棒解》，《数学规划》88 (2000)，第 411–424 页，参见 https://doi.org/10.1007/PL00011380。[9] D. Bertsimas、D.B. Brown 和 C. Caramanis，《鲁棒优化理论与应用》，《SIAM评论》53 (2011)，第 464–501 页，参见 https://doi.org/10.1137/080734510。[10]D. Bertsimas、I. Dunning 和 M. Lubin，《鲁棒优化中的重新表述与割平面：一项计算研究》，《计算管理科学》13 (2016)，第 195–217 页，参见 https://doi.org/10.1007/s10287-015-0236-z。

[11] D. Bertsimas 和 M. Sim，鲁棒离散优化与网络流，《数学规划》98 (2003)，第 49–71 页，参见 https://doi.org/10.1007/s10107-003-0396-4，整数规划（宾夕法尼亚州匹兹堡，2002年）。[12] D. Bertsimas 和 M. Sim，鲁棒性价格，《运筹学》52 (2004)，第 35–53 页，参见 https://doi.org/10.1287/opre.1030.0065。[13]D. Bertsimas、E. Litvinov、X. Sun、J. Zhao 和 T. Zheng，面向安全约束机组组合问题的自适应鲁棒优化，《IEEE电力系统汇刊》28 (2013)，第 52–63 页，参见https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6248193。[14] D. Bienstock 和 N. Özbay，计算鲁棒基库存水平，Discrete Optim. 5 (2008)，第 389–414 页，参见 https://doi.org/10.1016/j.disopt.2006.12.002。[15]M. Bougeret、A.A. Pessoa 和 M. Poss，预算不确定性下的鲁棒调度，离散应用数学 261 (2019)，第 93–107 页，参见https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.07.001。[16]C. Buchheim 和 J. Kurtz，凸成本和离散成本不确定性下的鲁棒组合优化，EURO计算优化杂志 6 (2018)，第 211–238 页，参见 https://doi.org/10.1007/s13675-018-0103-0。

[17]R.E. Burkard、S.E. Karisch 和 F. Rendl，*QAPLIB*——二次指派问题库，全球优化杂志 10 (1997)，第 391–403 页，网址：https://doi.org/10.1023/A:1008293323270。

[18]C. Büsing、A. Bärmann 和 F. Liers，具有γ-不确定性的全局化鲁棒优化，技术报告，Optimization Online，2019年，网址：http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2019/06/7253.html。

[19]C. Büsing 和 F. D'Andreagiovanni，鲁棒优化中关于多带不确定性的新结果，载于实验算法，可访问：https://doi.org/10.1007/978-3-642-30850-5_7，施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，2012 年，第 63–74 页。

[20]M.J. Feizollahi 和 I. Averbakh，具有区间流的鲁棒（极小极大后悔）二次指派问题，INFORMS J. Comput. 26 (2014)，第 321–335 页，网址：https://doi.org/10.1287/ijoc.2013.0568。

[21]M.J. Feizollahi 和 H. Feyzollahi，具有预算不确定流量的鲁棒二次指派问题，《运筹学》视角 2（2015年），第 114–123 页，参见 https://doi.org/10.1016/j.orp.2015.06.001。[22]M.J. Feizollahi 和 M. Modarres，具有不确定位置的鲁棒二次指派问题，伊朗运筹学杂志 3（2012），第 46–65 页，参见 http://iors.ir/journal/browse.php?a_id=323&sid=1&slc_lang=en。[23]M. Fischetti 和 M. Monaci，轻度鲁棒性，载于《鲁棒与在线大规模优化：交通系统的模型与技术》，R.K. Ahuja、R.H. Möhring 和 C.D. Zaroliagis 编，Springer，柏林，海德堡，2009年，第 61–84 页，参见 https://doi.org/10.1007/978-3-642-05465-5_3。[24]V. Gabrel、C. Murat 和 A. Thiele，鲁棒优化的最新进展：综述，European J. Oper. Res. 235（2014），第 471–483 页，参见 https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.09.036。[25]M. Goerigk 和 S. Lendl，具有局部预算化不确定性的鲁棒组合优化，开放数学优化期刊 2（2021），第 3 号，参见 https://ojmo.centre-mersenne.org/articles/10.5802/ojmo.5/。

[26] B.L. Gorissen 和 D. den Hertog，包含线性函数最大值之和的不等式的鲁棒对应形式，European J. Oper. Res. 227 (2013)，第 30–43 页，网址：https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.10.007。[27]Gurobi Optimization, LLC，*Gurobi* 优化器参考手册 (2020)，网址：http://www.gurobi.com。[28] H. Hashimoto、M. Yagiura 和 T. Ibaraki，带时间窗的时变车辆路径问题的迭代局部搜索算法，Discrete Optim. 5 (2008)，第 434–456 页，网址：https://doi.org/10.1016/j.disopt.2007.05.004。[29]A. Kasperski 和 P. Zieliński，离散和区间不确定性下的鲁棒离散优化：综述，载于 决策辅助、优化与分析中的鲁棒性分析，M. Doumpos、C. Zopounidis 和 E. Grigoroudis 编，Internat. Ser. Oper. Res. Management Sci.，第 241 卷，Springer，Cham，2016，第 113–143 页，网址：https://doi.org/10.1007/978-3-319-33121-8_6。[30] T.C. Koopmans 和 M. Beckmann，指派问题与经济活动的区位，Econometrica 25 (1957)，第 53–76 页，网址：https://doi.org/10.2307/1907742。

[31] P. Kouvelis 和 G. Yu，鲁棒离散优化及其应用，《非凸优化及其应用》，第 14 卷，Kluwer Academic Publishers，Dordrecht，1997 年，网址：https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2620-6。

[32]T. Lee 和 C. Kwon，关于基数约束不确定性下鲁棒组合优化问题的简短注记，4OR 12（2014），第 373–378 页，网址：https://doi.org/10.1007/s10288-014-0270-7。

[33]S. Leyffer、M. Menickelly、T. Munson、C. Vanaret 和 S.M. Wild，非线性鲁棒优化综述，INFOR Inf. Syst. Oper. Res. 58（2020），第 342–373 页，网址：https://doi.org/10.1080/03155986.2020.1730676。

[34] A. Mor 和 M.G. Speranza，时变车辆路径问题：综述，4OR 18 (2020)，第 129–149 页，可访问：https://doi.org/10.1007/s10288-020-00433-2。

[35]M. Poss，具有可变预算不确定性的鲁棒组合优化，4OR 11 (2013)，第 75–92 页，可访问：https://doi.org/10.1007/s10288-012-0217-9。

[36] M. Poss，具有可变成本不确定性的鲁棒组合优化，European J. Oper. Res. 237 (2014)，第 836–845 页，可访问：https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.02.060。

[37] M. Poss，具有背包不确定性的鲁棒组合优化，Discrete Optim. 27 (2018)，第 88–102 页，可访问：https://doi.org/10.1016/j.disopt.2017.09.004。[38]A. Prékopa，随机规划，数学及其应用，第 324 卷，Kluwer Academic Publishers Group，Dordrecht，1995年，可访问：https://doi.org/10.1007/978-94-017-3087-7。

[39]M.M. Solomon，带时间窗约束的车辆路径规划与调度问题算法，《运筹学》35（1987年），第254–265页，参见https://doi.org/10.1287/opre.35.2.254。

[40] A.L. Soyster，技术注释——具有集合包含约束的凸规划及其在不精确线性规划中的应用，《运筹学》21（1973年），第1154–1157页，参见https://doi.org/10.1287/opre.21.5.1154。[41]B. Tadayon 和 J.C. Smith，鲁棒单机调度问题的算法与复杂性分析，《调度杂志》18（2015年），第575–592页，参见https://doi.org/10.1007/s10951-015-0418-0。[42]I. Yanıkoğlu、B.L. Gorissen 和 D. den Hertog，可调鲁棒优化综述，European J. Oper. Res. 277（2019年），第799–813页，参见https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.08.031。

A 附录：数值研究

这些规划使用 Python 3.7 实现。为求解这些优化规划，我们使用了 Gurobi 9.0.1。[27] 运行于配备 Xeon E3-1240 v5 中央处理器（4 核，每核 3.5 GHz）的机器上。

A.1 不确定性下带软时间窗的车辆路径问题

我们基于4.5 和 [1] 以及 [28]详细阐述示例。我们考虑一个完全有向图 $D = (N,\ A)$其节点为 $N :\ = [n]$，一个起始仓库0 以及起始仓库的一个副本 $n + 1$，以及有向图_ $_D = (V,\ A)$ 其节点为 $V :\ = [n + 1]_0$ 且弧为

$$\bar{A} = A \cup \{(0, j) :\ j \in N\} \cup \{(i, n + 1) :\ i \in N \cup \{0\}\}.$$

¯给定以下数据：对于每条弧 $a \in A$，行驶时间为 t_a；对于每个节点 $i \in N$，给定服务时间 s_i 和软截止时间 b_i。给定一支由 K 辆车辆组成的同质车队，所有节点$i \in N$ 都必须恰好由一辆车辆「访问」一次，并尽可能减少延误。车辆从仓库出发并返回仓库。下文中，二元变量 $x^k_{i,}$ $_j \in \{0, 1\}$ for $_(i, j) \in A$ and $k \in [K]$ 表示车辆 k 是否「使用」弧 (i, j)，实变量 $T_i \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ for $i \in V$ 表示车辆到达节点 i的到达时间。采用这些记号，我们得到以下优化规划（用 $\delta^{\text{out}}(v)$ 和 $\delta^{\text{in}}(v)$表示图 D中$_v \in V$ 的出弧和入弧）：

$$\min_{x,T} \sum_{i \in N} \max\{0, T_i - b_i\}, \tag{51a}$$

$$\text{s.t.} \sum_{k \in [K]} \sum_{(i,j) \in \delta^{\text{out}}(i)} x^k_{i,j} = 1 \ \forall i \in N, \tag{51b}$$

$$\sum_{(0,j) \in \delta^{\text{out}}(0)} x^k_{0,j} = 1 \ \forall k \in [K], \tag{51c}$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^{\text{in}}(j)} x^k_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \delta^{\text{out}}(j)} x^k_{j,i} = 0 \ \forall k \in [K], j \in N, \tag{51d}$$

$$\sum_{(i,n+1) \in \delta^{\text{in}}(0)} x^k_{i,0} = 1 \ \forall k \in [K], \tag{51e}$$

$$x^k_{i,j}(T_i + s_i + t_{i,j} - T_j) \leqslant 0 \ \forall k \in [K],\ (i, j) \in A, \tag{51f}$$

$$x^k_{i,j} \in \{0, 1\} \ \forall k \in [K],\ (i, j) \in A, \tag{51g}$$

$$T_i \geqslant 0 \ \forall i \in V. \tag{51h}$$

约束 (51b) 确保每个 $i \in N$ 恰好由一辆车服务一次。约束 (51c) 和 (51e) 确保每辆车离开并进入车场，或留在车场。结合约束 (51b)、(51c) 和 (51e)，约束 (51d) 确保每个节点恰好由一辆车服务一次。约束 (51f) 确保，如果车辆 k 在节点 i之后服务节点 j，那么到达时间 T_j 至少等于到达时间 T_i 加上服务 i 并从 i 前往 j所需的时间。最后，(51g) 和 (51h) 确保 x 为二元变量，且 T 为非负数。请注意，这只是车辆路径问题的众多建模方式之一；有关概述，请参阅 [34]。我们试图针对集合 $\times_{i \in N}[\overline{b}_i - \Delta b_i, \overline{b}_i]$中的情景保持稳健。对所有 $\Gamma \in [m]$ 求解 Γ–对应形式，可以显示到期时间最多可以调整多少个班次而不会造成延误（或仅造成少量延误）。

在我们的实验中，我们使用 Solomon 算例 r101、r102、c101、c102、rc101 和 rc102。如果这些名称以 r 开头，则节点是随机生成的；如果以 c 开头，则节点是聚类的；否则，部分节点随机生成，部分节点聚类——有关构造的详细说明，请参阅 [39]。我们将客户的到期时间 b_i 设为原始实例中指定的开始时间，即节点 i。不确定集是随机构造的，即 Δb_i 是一个在 $[0, \overline{b}_i]$ 中均匀分布的随机变量。由于我们的最终目标是求解 Γ–对应形式的最优解，因此我们测试了 $N = [8]$ 和 $N = [10]$, $K \in [3]$ 以及所有 $\Gamma \in N$，并计算了相应名义规划的最优解。我们选取了相应实例所列客户中的前 $|N|$ 个客户。

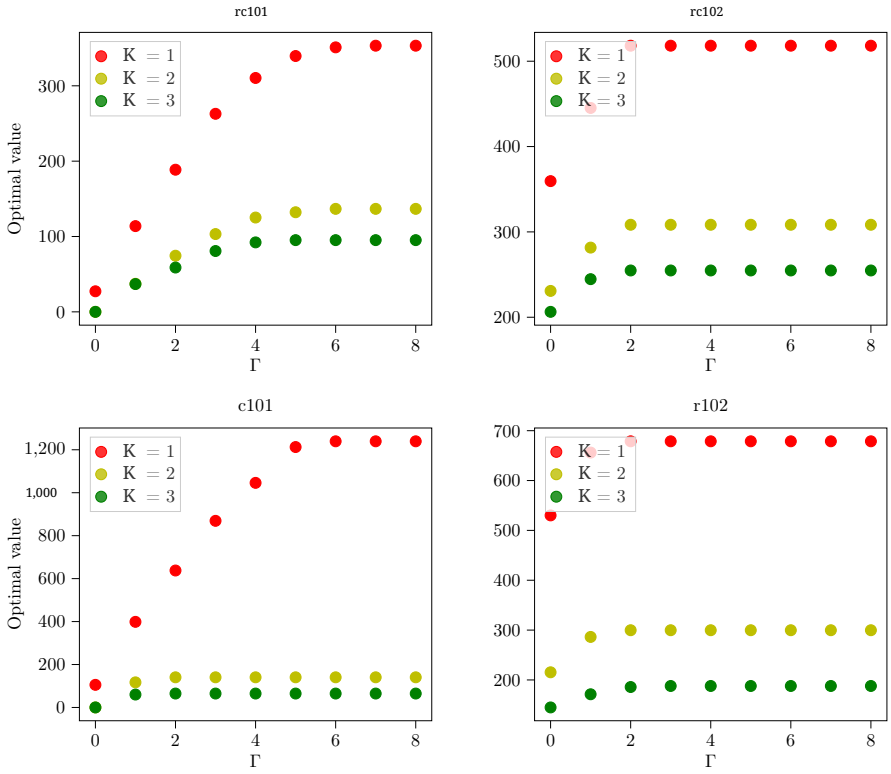


图1：实例 rc101（左上）、rc102（右上）、c101（左下）和 r102（右下）对应的 Γ–对应形式的最优值，其中 $N = [8]$ 和 $K \in [3]$。若值为 Γ 的黄色点“缺失”，则其值与相同 Γ的绿色点重合。

图 1 展示了 $N = [8], K \in [3]$ 以及实例 rc101、rc102、c101 和 r102 的鲁棒最优值（由于图形相似，我们省略了另外两种情况以及 $N = [10]$ 的结果）。正如预期，最优值（即等待时间）会随着车辆数量 K的增加而上升。此外，在 $K = 1$ 处，随着 Γ 增加，最优值大幅上升；而在 $K = 2, 3$ 处，最优值的变化则不太明显。这也在意料之中：如果恰好只有一辆车，就只能由这辆车来应对到期时间的变化，这显然并非总能做到，尤其是在聚类场景中。不过，对于 $K = 2, 3$，总延误的鲁棒性更高——虽然鲁棒值在 $K = 1, 2, 3$ 之间有所不同，但 $K = 1$ 与 $K = 2$ 之间的差异远大于 $K = 2$ 与 $K = 3$之间的差异。因此，如果可用车辆更多，就可能得到更鲁棒的解。鲁棒性代价的差异十分明显，例如在 c101 中：对于 $K = 1$，名义最优值小于 200；对于 $K = 2, 3$，则为 0。对于 $\Gamma = 1$ 和 $K = 1$，我们得到的延误至少为 400；而对于 $K = 2, 3$，$K = 1$的结果仍接近名义最优值。对于 $\Gamma = 2$，延误仅略有增加，此后不再变化。然而，对于 $K = 1$，最优值最高升至 $\Gamma = 6$，且超过 1200；而对于 $K = 2, 3$，最优值则低于 200。我们注意到，在其他情况下，名义最优值与 $\Gamma \geqslant 1$ 的最优值之间的差异并不像 r102 中那么大。在这个特定案例中，对于所有 $K = 1, 2, 3$，Γ 的名义最优值增幅在 $\Gamma = 2$ 处停止。

表1 和表2 展示了求解 Γ–对应形式的运行时间，其中 $\Gamma \in [2]$是所有满足 $N = [8]$、$[10]$ 和 $K \in [3]$的实例的名义规划。随着客户和车辆数量增加，约束数量也随之增加，即 $|N|$ 和 K增大时，大多数情况下运行时间也会增加。请注意，对 Γ–对应形式进行重构时，只有子问题的目标函数（50）会受到影响，而其他子问题的最优解可以重复使用。因此，在 $2|N| + 1$ 个规划中，只需求解 $|N|$ 个规划，即可在考虑Γ 的不同取值时，得到该 Γ 对应形式的最优解。这解释了为什么 $\Gamma = 2$ 的运行时间通常至多为 $\Gamma = 1$的一半。我们注意到，Γ

对运行时间没有其他显著影响，而且运行时间相对较长，尤其是对于 $|N| = 10$。

表 $\Gamma = 1$、2、名义情形下各实例的运行时间（秒），$N = [8]$ 以及 $K = 1$、2、3。

实例：$N = [8]$	名义情形			$\Gamma = 1$			$\Gamma = 2$		
	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$
r101	17	1	2	79	43	26	40	15	14
r102	11	22	15	105	356	246	49	136	123
c101	1	1	1	28	7	8	19	4	5
c102	10	21	24	124	394	434	62	183	298
rc101	5	1	2	107	156	224	30	19	22
rc102	7	69	291	101	823	2965	49	284	1282

表 2： $\Gamma = 1$、2、名义情形、 $N = [10]$ 和$K = 1$、2、3 的各实例运行时间（秒）。如果 24小时后仍未获得最优解，相应字段将标记为 –。

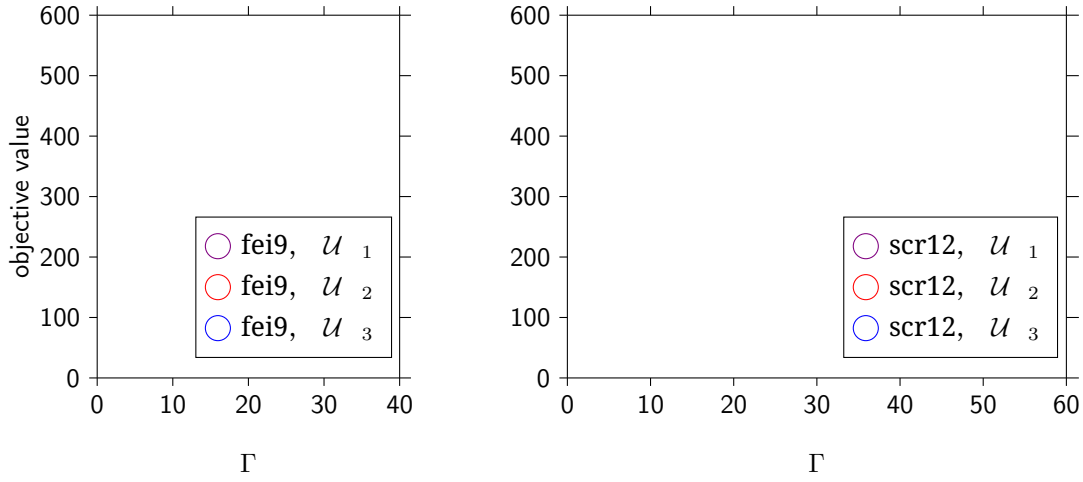
实例：$N = [10]$	名义情形			$\Gamma = 1$			$\Gamma = 2$		
	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$
r101	551	6	3	9080	5178	2316	5612	1525	376
r102	1175	1066	119	15358	54885	15637	9433	18285	5875
c101	15	2	5	8026	2444	168	4161	65	28
c102	1566	431	111	22081	32098	21335	15285	12692	12703
rc101	681	14	7	8279	11024	9364	2949	1253	350
rc102	902	2505	8425	13327	70041	–	6804	37788	–

至此，我们完成了对不确定性下 VRPGTW 的数值研究。正如前文所述，我们使用优化预言机求解了示例 4.5 中的规划，并将其作为混合整数非线性规划求解，而没有使用任何 VRPTGW 求解器，以此证明我们的重新表述可以求得最优解。未来，开展包含更多客户的实例的实验或许很有意义；不过，与其求得全局最优解，不如将这些实例求解到某个特定间隙，即寻找“足够稳健”的解，或者使用 VRPTGW 预言机。

A.2 不确定性下的二次指派问题

在此，我们求解并比较 QAP 的 Γ–对应形式的不同重新表述。我们从 [21] 以及 QAPLIB [17]中选取了实例。本节旨在初步评估这些新重新表述能否在与名义版本相近的数量级时间内求解。由于我们手头没有高效的、针对 QAP 的专用预言机，因此选取了规模较小的实例，使其 Γ–对应形式能够在 24小时内由 Gurobi 求解。正如预期，不确定系数较少的实例在计算上更容易处理。因此，通过选择 scr12，我们纳入了一个包含 $c_{i,\ j} = 0$ 的实例，其中某些 $(i, j) \in [12]^2$。我们还选择了 fei9，这是一个在 [21]中考察过的实例。fei9 的设施数量为 $n = 9$，而 scr12 的设施数量为 $n = 12$ （两者均取自 [21]）。最后，我们还选择了 nug12（来自[17]）。对于每个实例，我们生成了三个不同的不确定集。fei9 的不确定集$\mathcal{U}_1$ 取自 [21]。其他标记为 $\mathcal{U}_2$ 和 $\mathcal{U}_3$的不确定集则随机生成：对于所有 $(i,\ j) \in [n]^2$，$\Delta c_{ij} \in [0,$ 随机选择 $\bar{c}_{ij}]$。对于 scr12 和 nug6，通过设置 $\Delta c_{ij} = 0.1\bar{c}_{ij}$ （对所有 $(i, j) \in [n]^2$）生成 $\mathcal{U}_1$。此外，$\mathcal{U}_2$ 和 $\mathcal{U}_3$ 也按照与 fei9 类似的方式随机生成。

图 2 展示了我们两个实例在不同 Γ 下目标值的变化。如预期，最优目标值随 Γ增加。对于 scr12，可以看出，随着 Γ增大，鲁棒保护的成本仅略有增加。



（a）不同 Γ 取值下 fei9 的最优目标值为 $\times 10^{-4}$ (b) 不同 Γ 取值下 scr12 的最优目标值 $\times 10^{-2}$ 。

图2：不同实例的最优解。

现在我们比较 Γ–对应形式的不同等价形式的运行时间。具体来说，我们测试以下几种形式：

- 二次指派问题：公式（40）。
- 二次指派问题$_{\text{缩减}}$：公式（40）应用定理 3.16后减少子问题数量。
- 混合整数规划：应用 [11] 的定理 1 后，具有不确定性的线性化二次指派问题。
- 分支定价：应用命题2.1后考虑不确定性的线性化二次指派问题。
- 分支定价$_{\text{缩减}}$： 应用命题 2.1 和 [32] 后考虑不确定性的线性化二次指派问题及定理 1。

特别地，我们采用标准线性化：两个二元变量 x 与 y 的乘积可以用一个二元变量 z 以及以下不等式替代

$$z \leqslant x,\ z \leqslant y,\ z \geqslant x + y - 1.$$

名义规划可以在几秒钟内求解。fei9、scr12 和 nug12 的运行时间与 $\Gamma = 1$ 的比较见表 3、4 和 5。如果 24小时后仍无法计算出最优解，我们就停止求解。运行时间以秒为单位。

表3： $\Gamma = 1$ 与确定性构造的不确定集 $\mathcal{U}_1$在不同实例上的运行时间比较。– 若在24小时内无法求解。

中央处理器（秒）	nug12	fei9	scr12
QAP	–	3420	36579
二次指派问题$_{\text{red}}$	1054	174	221
MIP	31417	25	1718
BP	–	86243	–
BP_{red}	34318	4096	49126

表4：$\Gamma = 1$ 与确定性构造的不确定集 $\mathcal{U}_2$在不同实例上的运行时间比较。– 若在24小时内无法求解。

中央处理器（秒）	nug12	fei9	scr12
QAP	–	3542	74641
QAP_{red}	591	178	298
MIP	24655	25	819
BP	–	–	–
BP_{red}	–	4538	73847

表5：$\Gamma = 1$ 与随机构造的不确定集在不同实例上的运行时间比较 $\mathcal{U}_3$。- 若未能在24小时内求解。

中央处理器（秒）	nug12	fei9	scr12
QAP	–	3503	45851
QAP_{red}	9507	178	275
MIP	19550	30	1860
BP	–	–	–
BP_{red}	–	4384	56979

显然，在 $n = 12$ 的情况下，通过排除所有冗余情景（应用定理3.16、忽略相同的子问题并考虑系数的对称性）来减少子问题的数量后，其实例求解效率高于线性化方法，且这一结论适用于所有考察的不确定集。只有对于较小的实例，混合整数规划的求解速度更快。这证明了本文所提出的重新表述方法的优势。如果不采用这些方法，相应的鲁棒对应问题在算法求解方面将面临极大的挑战。所有实例都有一个共同点：如果不缩减规划数量，即不避免情景重复或不应用定理3.16，那么即使对于较小的实例，也无法在时间限制内完成求解。

最后，我们想指出两点：首先，如果想针对 Γ 的不同取值求解 Γ–对应形式，最好采用 QAP_{red}，因为只需计算 $\Gamma = 1$、2 所对应子问题的最优解，因为 Γ 的值不会影响子问题。其次，这项计算研究表明，我们的建模形式在实践中适用。当然，除了使用 Gurobi，也可以使用能更高效求解二次指派问题的算法。不过，就我们的目的而言，与标准线性化方法相比，我们的方法证明具有显著优势。

B 附录：约束中的不确定性

这里，我们考虑约束受到不确定性影响的情况，即规划

$$\begin{aligned} &\inf_{x\in\mathcal{X}} f(x), \\ &\text{s.t.} \sum_{i\in[m]} \overline{g}_i(x) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{52}$$

与第 3 节类似，我们假设函数 $\overline{g}_i$ 受到不确定性影响，即设定

$$g_i \colon \mathcal{X} \times \mathcal{U}_i \to \mathbb{R},$$

其中 $g_i(x,\ \overline{u}^i) :\ = \overline{g}_i(x)$ 对于名义情景 $\overline{u}^i \in \mathcal{U}_i$。因此，不确定性下的规划（52）可表述为

$$\begin{aligned} &\inf_{x\in\mathcal{X}} f(x), \\ &\text{s.t.} \sum_{i\in[m]} \sup_{u^i\in\mathcal{U}^i} g_i(x,u^i) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{53}$$

规划（–对应形式（53）定义如下

$$\begin{aligned}&\inf_{x\in\mathcal{X}} f(x),\\ &\text{s.t.} \sup_{\mathcal{S}\subseteq[m]:|\mathcal{S}|\leqslant\Gamma}\left\{\sum_{i\in\mathcal{S}}\sup_{u^i\in\mathcal{U}_i} g_i(x,u^i)+\sum_{i\in[m]\setminus\mathcal{S}} g_i(x,\overline{u}^i)\right\}\leqslant 0.\end{aligned}\tag{54}$$

等价于引理 3.1，我们可以获得一个不含外部上确界算子的重新表述：

引理 B.1。 如果 $\Gamma\in[m]$，则规划 (54) 等价于

$$\begin{aligned}&\inf_{x,p,\theta} f(x),\\ &\text{s.t.} \sum_{i\in[m]} g_i(x,\bar{u}^i)+p_i+\theta\Gamma\leqslant 0,\\ &\quad p_i+\theta\geqslant\sup_{u^i\in\mathcal{U}_i} g_i(x,u^i)-g_i(x,\bar{u}^i)\ \forall i\in[m],\\ &\quad p,\theta\geqslant 0,\\ &\quad x\in\mathcal{X}.\end{aligned}\tag{55}$$

证明。 证明与引理 3.1 的证明几乎完全相同，因为 Γ–对应形式（54）中受不确定性影响的约束，是 Γ–对应形式的目标函数，即带有目标函数不确定性的 Γ–对应形式（8）。在这种情况下，我们得到

$$\begin{aligned}0\geqslant\inf_{\theta,p} &\sum_{i\in[m]} g_i(x,\bar{u}^i)+p_i+\theta\Gamma,\\ \text{s.t. } &p_i+\theta\geqslant\sup_{u^i\in\mathcal{U}_i} g_i(x,u^i)-g_i(x,\bar{u}^i),\ \forall i\in[m],\\ &p,\theta\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此，可以省略下确界算子，该结论得证。 □

比较 Γ–对应形式的引理 3.1 和 B.1的重新表述，唯一的区别是不等式

$$\sum_{i\in[m]} g_i(x,\overline{u}^i)+p_i+\Gamma\theta\leqslant 0.\tag{56}$$

然而，不等式（56）的左侧是规划（15）的目标函数。更重要的是，两个 Γ–对应形式的瓶颈是不等式

$$p_i+\theta\geqslant\sup_{u^i\in\mathcal{U}_i} g_i(x,u^i)-g_i(x,\bar{u}^i),$$

我们已经在第3节讨论了几种重构。因此，对于这里以及混合整数非线性规划，这些重新表述技术仍然适用；在与假设3.3类似的假设下，我们得到相同的重构：

定理 B.2。 假设假设 *3.3* 对所有 $g_i(x,\ u^i)$ 和 $\mathcal{U}_i$ 以及 $\Gamma\in[m]$均成立。那么规划 (54)等价于

$$\begin{aligned}&\inf_{x,p,\theta} f(x),\\ &s.t. \sum_{i\in[m]} g_i(x,\bar{u}^i)+p_i+\theta\Gamma\leqslant 0,\\ &\quad p_i+\theta\geqslant(\overline{u}^i)^T v^i+\delta^*((A^i)^T v^i\mid\mathcal{Z}_i)-g_{i,*}(x,v^i)-g_i(x,\overline{u}^i)\ \forall i\in[m],\\ &\quad p,\theta\geqslant 0,\\ &\quad x\in\mathcal{X}.\end{aligned}\tag{57}$$

此外，若假设 *3.7* 成立，则规划 (54) 等价于

$$\begin{aligned}
&\inf_{x,p,\theta} f(x)\\
&\text{s.t.} \sum_{i\in[m]} g_i(x,\bar{u}^i) + p_i + \theta\Gamma \leqslant 0,\\
&\quad p_i + \theta \geqslant \delta^*((A^i)^T l_i(x) \mid \mathcal{Z}_i)\ \forall i \in [m],\\
&\quad p, \theta \geqslant 0,\\
&\quad x \in \mathcal{X}.
\end{aligned} \tag{58}$$

证明略（参见推论3.6 和 3.8）。不过，我们想指出，与第 3节不同，无法消去对偶变量 p 和 θ，因为存在额外的不等式（56）。这是因为 θ 还要乘以 Γ。然而，由于规划（54）中的可行集$\mathcal{X}$受到了不确定性的影响，因此无需仅对 $\mathcal{X}$ 进行优化。