逆无迹卡尔曼滤波器

Himali Singh、Kumar Vijay Mishra* 和 Arpan Chattopadhyay*

arXiv:2304.01698v2 [math.OC] 1 May 2024

摘要——**认知系统和反对抗系统设计的快速发展，推动了逆贝叶斯滤波器的开发。在这一框架下，认知型“对手”通过卡尔曼滤波器（KF）等随机框架跟踪其感兴趣的目标。随后，目标或“防御者”会采用另一种逆随机滤波器，推断对手计算出的防御者正向滤波估计。对于线性系统，近期研究表明，**逆卡尔曼滤波器**（I-KF）在此类反对抗应用中效果显著。与以往研究不同，本文聚焦于非线性系统动力学，并基于无迹变换（亦即统计线性化技术）构建逆无迹卡尔曼滤波器（I-UKF），以估计防御者的状态。随后，我们提出基于再生核希尔伯特空间的 UKF（RKHS-UKF），将这一框架推广至未知系统，以学习系统动力学并根据观测值估计状态。为保证 I-UKF 和 RKHS-UKF 在均方意义下的随机稳定性，我们进行了理论分析。结果表明，只要前向滤波器稳定，在温和的系统级条件下，逆滤波器也稳定。我们还表明，尽管所提出的 I-UKF 是次优滤波器，但它属于保守估计器，即 I-UKF 估计的误差协方差始终为真实值的上界。针对多种不同应用的数值实验表明，所提出滤波器的估计性能可通过递归**Cram´er-Rao 下界和非可信度指数（NCI）进行评估。**

索引词—**贝叶斯滤波，认知系统，反对抗系统，逆滤波，非线性过程，无迹卡尔曼滤波器。**

I. 引言

推断与控制是许多工程应用中各类动态系统不可或缺的组成部分，包括导航 [1], 制导 [2], 和雷达目标跟踪 [3]。这些应用通常涉及认知智能体，它们感知环境，并根据收集到的信息调整行动，以实现最佳性能。例如，在军事监视中，认知雷达 [4]会调整其发射波形和接收处理，以改进目标检测 [5] 与跟踪 [3, 6]。在此背景下，近期提出了逆向认知，使防御者智能体能够检测其认知对手攻击者智能体，并推断对手已获知的有关防御者的信息 [7, 8]。这有助于设计反对抗系统，以提供协助或阻止对手 [7, 9]。例如，智能目标会感知对抗性雷达的波形调整，并设计智能干扰，迫使后者改变其行动[10, 11]。在 [7], 中，设计最优探测信号以估计对手的传感器特性。在 [12], 中，估计自动睡眠追踪系统的观测值，以进行实时故障诊断。交互式学习和信息物理安全领域也有许多类似的例子 [7, 9]。

为了预测攻击者未来的行动，防御者需要估计攻击者的推断。在此背景下，逆贝叶斯滤波 [7] 被提出，用于在防御者端推断攻击者的推断。攻击者使用（正向）贝叶斯滤波器，根据含噪观测计算防御者状态的后验分布。一个常见的例子是卡尔曼滤波器（KF），它在递归估计线性高斯状态空间模型中的状态时，能够实现最小均方误差意义下的最优估计。攻击者还会根据这一推断，在认知层面调整其行动。随后，逆贝叶斯滤波器根据对攻击者行动的含噪测量值，为正向贝叶斯滤波器的估计提供后验分布。

在这一逆滤波背景下， [9] 提出了逆隐马尔可夫模型，用于估计对手的观测值和观测似然。在 [7], 中，逆滤波被扩展到一般线性高斯状态空间模型。在此情形下，攻击者使用卡尔曼滤波器估计防御者的状态。随后，研究者开发了逆卡尔曼滤波器（I-KF），用于估计攻击者对防御者状态的估计。在实践中，反对抗系统是非线性的。在此情形下，对手也可能使用扩展卡尔曼滤波器（EKF），它通过泰勒级数展开将标准卡尔曼滤波器扩展到非线性动力学情形。针对这一设定，我们此前的工作 [13, 14]为防御者提出了一种逆扩展卡尔曼滤波器（I-EKF）。尽管扩展卡尔曼滤波器是一种广泛使用的非线性滤波器，但它对初始化和建模误差很敏感；当系统具有显著非线性时，其表现也较差 [15]。在许多实际应用中，计算扩展卡尔曼滤波器所需的雅可比矩阵也并非易事。在逆向认知中，可通过更高级的I-EKF变体 [16]克服其中一些缺点。

尽管扩展卡尔曼滤波器易于实现，但在高度非线性的应用中仍会受到线性化误差的影响 [17],，而无导数的采样点卡尔曼滤波器（SPKFs）可以有效应对这一问题 [18], 。这类滤波器基于在有限个确定性西格玛点处进行函数求值并求加权和。这些点旨在近似随机变量经过非线性变换后的后验概率密度。例如，无迹卡尔曼滤波器（UKF） [19]使用无迹变换生成点，其对最高三次的单项式能给出均值精确的估计；协方差计算仅在线性函数情况下是精确的。无迹变换还等价于使用特定回归点对非线性函数进行统计线性化，因此无迹卡尔曼滤波器是线性回归的一种特殊情况

*K. V. M. 和 A. C. 贡献相同。H. S. 和 A. C. 任职于印度德里印度理工学院（IIT Delhi）电气工程系。A. C. 还隶属于德里印度理工学院 Bharti电信技术与管理学院。电子邮箱： {eez208426, arpanc}@ee.iitd.ac.in。K. V. M. 任职于美国DEVCOM陆军研究实验室（美国马里兰州阿德尔菲，邮编 20783）。电子邮箱：kvm@ieee.org。A. C. 感谢德里印度理工学院提供的专业发展基金和专业发展津贴、I-Hub协作机器人基金会的资助（编号 GP/2021/ISSC/022），以及印度科学与工程研究委员会（SERB）的资助（编号 CRG/2022/003707）。H. S. 感谢总理研究奖学金的支持。K. V. M. 感谢美国国家科学院、工程院和医学院通过陆军研究实验室哈里·戴蒙德杰出研究员奖学金提供的支持。本文的会议前期版本已被接收，将发表于

2023年IEEE决策与控制会议（CDC）。

卡尔曼滤波器 [20]。为此，与扩展卡尔曼滤波器不同，无迹卡尔曼滤波器会考虑线性化误差导致的不确定性增加，从而在许多应用中提升性能。此外，平方根无迹卡尔曼滤波器 [21] 和高斯和无迹卡尔曼滤波器 [22] 也分别被提出，以提高数值稳定性并处理非高斯模型。本文重点研究基于无迹变换技术的逆滤波。

A. 已有研究

传统上，逆滤波仅限于非动态系统，应用于系统辨识、故障检测、图像去模糊和信号反卷积等领域 [23, 24]。然而，近期认知系统和反对抗系统的应用推动了逆随机滤波器的设计。这类逆问题可追溯至[25] ，其目标是为给定的控制策略寻找代价准则。类似的表述也出现在逆强化学习（IRL）中，其中相关的奖励函数是通过被动方式学习得到的 [26]。另一方面，逆认知智能体会主动探测其对抗智能体，因此可视为 IRL 的一种泛化。

无迹卡尔曼滤波器也与机器学习文献中常见的通用近似贝叶斯推断方法有关 [27, 28]。在此背景下，无迹卡尔曼滤波器属于通用高斯滤波器这一类；这类滤波器假设底层状态服从高斯后验分布。随后利用观测值递归更新所假设后验分布的均值和协方差。这些高斯滤波技术是假设密度滤波（ADF） [29] 或在线贝叶斯学习 [27], 的子集，通过逐步近似后验分布来进行推断。期望传播是假设密度滤波的一种扩展，它利用新观测值迭代修正先前的估计 [28]。相反，基于序贯蒙特卡洛（MC）的方法（例如粒子滤波器（PF） [15]）不假设任何后验分布形式，也适用于非高斯系统。粒子滤波器框架还被用于实现伯努利滤波器 [30] （用于随机切换系统）、可能性粒子滤波器 [31] （用于失配模型）以及概率假设密度（PHD） [32]滤波器（用于高维多目标贝叶斯推断）。然而，通常而言，MC 方法的计算开销很大 [33]。

[7, 14] 中提出的逆随机滤波器假设攻击者和防御者双方都拥有完备的系统模型信息。然而，在许多应用中，无法获得先验系统模型信息。在逆向认知场景中，攻击者可能缺乏防御者的状态演化信息，而防御者可能不了解攻击者的前向滤波器和自适应策略。系统参数的不确定性限制了迄今提出的逆滤波器的适用性。一些关于（前向）非线性滤波的先前研究采用基于核的技术处理系统未知的情况。 [34] 提出将核递归最小二乘（KRLS） [35] 与扩展卡尔曼滤波器（EKF）结合，以学习未知的非线性测量模型，但假设状态转移已知且为线性。 [36] 采用条件嵌入算子，在再生核希尔伯特空间（RKHS）中重新构建卡尔曼滤波器（KF）算法，以处理非线性状态转移函数，但观测值仍为线性。

[16], 在我们先前的工作中，我们采用迭代式期望最大化（EM）进行非线性参数学习，并提出了 RKHS-EKF。然而，与扩展卡尔曼滤波器类似，RKHS-EKF 的性能也会因非线性函数的线性化而下降。本文进一步提出基于再生核希尔伯特空间的无迹卡尔曼滤波器，以提升性能。

B. 我们的贡献

本工作的初步结果发表于我们的会议论文 [37], ，其中仅对逆无迹卡尔曼滤波器（I-UKF）进行了形式化，且未包含稳定性保证的证明。本文的主要贡献如下:

1) 逆无迹卡尔曼滤波器。为解决 I-EKF 线性化的局限性，我们考虑无迹变换并提出 I-UKF。我们的 I-UKF 用于估计对手的推断，而对手同样部署了正向无迹卡尔曼滤波器。与 [7, 9, 14],中研究的逆向认知框架类似，我们假设拥有完备的系统模型信息，即防御者已知攻击者的前向滤波器。该逆滤波器采用增广状态进行形式化，以将前向滤波器状态估计演化中的非加性过程噪声项纳入考虑。我们的数值实验表明，即使防御者关于前向无迹卡尔曼滤波器的假设不正确，I-UKF 仍能提供相当准确的估计。需要指出的是，I-UKF 不同于无迹卡尔曼滤波器的求逆 [38], ，后者根据输出估计输入。显然，这种无迹卡尔曼滤波器的求逆可能不会采用相同的数学形式，因为无迹卡尔曼滤波器是在对手一侧使用的。因此，这种形式化与我们的逆向认知问题无关。请注意，我们提出的 I-UKF 并非简单地由 I-KF [7] 或 I-EKF [14]推导而来；另请参见备注 2。

2）I-UKF 的推广。在实际应用中，系统通常涉及连续时间状态演化，或具有复值特性，因此需要采用合适的连续-离散滤波器或复数滤波器。为此，我们将 I-UKF 理论推广，得到用于逆滤波应用的连续-离散 I-UKF 和复数 I-UKF。我们还考虑基于最大相关熵准则（MCC）的 I-UKF，以应对非高斯噪声。

3）RKHS-UKF。当防御者缺乏关于状态转移模型和观测模型的先验知识时，我们为防御者提出 RKHS-UKF。此外，攻击者和防御者也可以共同使用该方法，分别推断防御者的状态和攻击者的状态估计。RKHS-UKF 采用 RKHS-EKF [16] 的在线近似期望最大化方法来学习系统参数；对于非线性变换下的期望，则使用无迹变换进行计算，从而避免雅可比计算。数值实验表明，在估计精度方面，RKHS-UKF 优于 RKHS-EKF。

4）I-UKF 和 RKHS-UKF 的稳定性。通常，非线性卡尔曼滤波器的稳定性和收敛性结果难以获得。文献[39] 采用有界非线性方法，在初始估计误差有界的条件下，证明了扩展卡尔曼滤波器具有指数均方有界意义下的稳定性。文献 [40] 针对无迹卡尔曼滤波器的稳定性提出了未知矩阵方法，通过引入未知工具矩阵来建模线性化误差，从而放宽了对初始误差的限制，但测量值仍为线性。此外，该方法还提供了

误差有界的充分条件，并严格论证了增大噪声协方差矩阵可以稳定滤波器。本文基于未知矩阵方法，给出了 I-UKF 和 RKHS-UKF 的稳定性条件。在此过程中，我们还获得了此前未报告的一般性正向无迹卡尔曼滤波器稳定性结果。随后，我们证明 I-UKF 的递归估计具有保守性，即真实误差协方差不超过 I-UKF 对相应误差协方差的估计值。我们通过大量数值实验验证了所有逆滤波器的估计性能，并采用递归克拉美-罗下界（RCRLB） [41] 和非可信度指数（NCI）作为性能指标。

本文其余部分安排如下。下一节介绍逆向认知问题的系统模型，第三节则介绍适用于具有先验模型信息系统的 I-UKF。第四节通过 RKHS-UKF 处理未知系统模型的情形。第五节给出性能保证，并在第六节通过数值实验展示所提出滤波器的性能。最后，第七节总结全文。

全文中，粗体小写字母和大写字母分别表示向量（列向量）和矩阵，$\{a_i\}_{i_1\le i\le i_2}$ 表示由整数 i 编号的一组元素。记号 $[\mathrm{a}]_i$ 表示向量 a 的第 i 个分量，而 $[\mathrm{A}]_{i,j}$ 表示矩阵 A 的第 (i,j) 个分量；$[\mathrm{A}]_{(i,:)}$ 和 $[\mathrm{A}]_{(:,j)}$ 分别表示矩阵的第 i 行和第 j 列。此外，$[\mathrm{A}]_{(i_1:i_2,j_1:j_2)}$表示矩阵 A 的子矩阵，其行号从 i_1 到 i_2 、列号从 j_1 到 j_2 ； $[\mathrm{a}]_{i_1:i_2}$ 表示相应的子向量。转置/厄米共轭运算记为 $(\cdot)^{T/H}$；向量的 l_2 范数和相对于矩阵 A 的范数分别记为 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$；记号 det(A) 、 Tr(A) 和 ||A|| 分别表示 A 的行列式、迹和谱范数。对于矩阵 A 和 B，不等式 $\mathrm{A}\preceq\mathrm{B}$ 表示 $\mathrm{B}-\mathrm{A}$ 是一个半正定（p.s.d.）矩阵。对于函数 $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}$ 表示其雅可比矩阵，其中 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示所有实值 $m\times n$ 矩阵的集合；对于函数 $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，它表示关于向量x的梯度向量。此外，$\mathrm{I}_n$ 和 $\mathbf{0}_{n\times m}$ 分别表示一个“$n\times n$”单位矩阵和一个“$n\times m$”全零矩阵。高斯随机变量表示为 $\mathrm{x}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}$, Q)，其均值为 $\boldsymbol{\mu}$ ，协方差矩阵为 Q；随机变量 x 的协方差记为 Cov(x)。矩阵 A 的 Cholesky分解记为 $\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{A}}\sqrt{\mathrm{A}}^{T}$。

— —

II. 系统模型

考虑一个离散时间随机动力系统，作为防御者的状态演化过程 $\{\mathbf{x}_k\}_{k\ge0}$，其中 $\mathbf{x}_k\in\mathbb{R}^{n_x\times1}$ 是防御者在第 k个时刻的状态。防御者的状态对防御者而言是完全已知的，其演化如下：

$$\mathbf{x}_{k+1}=f(\mathbf{x}_k)+\mathbf{w}_k, \tag{1}$$

其中，过程噪声 $\mathbf{w}_k\sim\mathcal{N}(\mathbf{0}_{n_x\times1},\ \mathbf{Q})$ 的协方差矩阵为 $\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$。在第 k 个时刻，攻击者观测到防御者的状态为 $\mathbf{y}_k\in\mathbb{R}^{n_y\times1}$ ，其定义如下：

$$\mathbf{y}_k=h(\mathbf{x}_k)+\mathbf{v}_k, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{v}_k\sim\mathcal{N}(\mathbf{0}_{n_y\times1},\ \mathbf{R})$ 是攻击者的测量噪声，其协方差矩阵为 $\mathbf{R}\in\mathbb{R}^{n_y\times n_y}$。攻击者使用（前向）随机滤波器，根据其观测值$\{\mathbf{y}_j\}_{1\le j\le k}$ 计算对防御者状态 $\mathbf{x}_k$ 的估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$。随后，攻击者采取行动，而防御者对该行动的含噪观测为 $\mathbf{a}_k\in\mathbb{R}^{n_a\times1}$ ，其定义如下：

$$\mathbf{a}_k=g(\hat{\mathbf{x}}_k)+\boldsymbol{\epsilon}_k, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\epsilon}_k\sim\mathcal{N}(\mathbf{0}_{n_a\times1},\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon)$ 是防御者的测量噪声，其协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon\in\mathbb{R}^{n_a\times n_a}$。在此情境下，函数 $g(\cdot)$ 表示攻击者的行动策略与防御者的观测的综合作用。例如，受线性二次高斯（LQG）控制问题的启发，I-KF [7] 根据与 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的线性关系选择$\mathbf{a}_k$ ，并根据其估计误差协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_k$ 进行调整。不过，我们考虑的是式（3）中定义的一般非线性观测。最后，防御者使用 $\{\mathbf{a}j,\mathbf{x}_j\}_{1\le j\le k}$ ，通过逆随机滤波器计算攻击者估计值 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 的估计值 $\hat{}\hat{}\mathbf{x}_k$ 。噪声过程 $\{\mathbf{w}_k\}_{k\ge0}$、$\{\mathbf{v}_k\}_{k\ge1}$ 和 $\{\boldsymbol{\epsilon}_k\}_{k\ge1}$ 在各个时刻相互独立且同分布。为保持简洁，我们不假设噪声协方差随时间变化，而将 $f(\cdot)$、 $h(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 选作适当的非线性函数。下文假设攻击者和防御者都完全了解这些函数及噪声分布。我们将在第 IV 节研究不具备这一系统知识假设时的问题。此外，攻击者并不知道防御者正在观察自己。如果攻击者故意改变行动以防范防御者，则需要采用基于逆向逆强化学习的问题表示；这一情况近期已在 [42, 43] 中得到研究。

III. 逆向无迹卡尔曼滤波器

UKF 根据前一状态估计值确定性地生成一组‘$2n_x+1$’西格玛点，其中包括前一估计值本身。随后，这些西格玛点通过非线性系统模型传播，并对传播点进行加权求和以获得状态估计。在 I-UKF 中，我们假设攻击者使用正向无迹卡尔曼滤波器，基于已知的状态转移 (1) 和观测 (2) 计算其估计值 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 。然后，I-UKF 使用观测 (3) 推断 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 的估计值 $\hat{}\hat{}\mathbf{x}_k$ 。

A. 正向无迹卡尔曼滤波器

考虑缩放参数 $\kappa\in\mathbb{R}$ ，它控制正向无迹卡尔曼滤波器的西格玛点围绕前一估计值的分布。西格玛点 $\{\tilde{}\mathbf{x}_i\}_{0\le i\le2n_x}$ 由状态估计 $\hat{}\mathbf{x}$ 及其误差协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 生成，如下所示

$$\{\widetilde{\mathbf{x}}_i\}_{0\le i\le2n_x}=S_{gen}(\hat{\mathbf{x}},\boldsymbol{\Sigma})$$
$$=\begin{cases}\hat{\mathbf{x}}, & i=0,\\ \hat{\mathbf{x}}+\left[\sqrt{(n_x+\kappa)\boldsymbol{\Sigma}}\right]_{(:,i)}, & i=1,2,\dots,n_x\\ \hat{\mathbf{x}}-\left[\sqrt{(n_x+\kappa)\boldsymbol{\Sigma}}\right]_{(:,i-n_x)}, & i=n_x+1,n_x+2,\dots,2n_x\end{cases}, \tag{4}$$

其权重为 $\omega_i = \begin{cases} \frac{\kappa}{n_x+\kappa} & i=0 \\ \frac{1}{2(n_x+\kappa)} & i=1,2,\ldots,2n_x \end{cases}$。

将 k 时刻为时间更新生成并传播的西格玛点分别记为 $\{\mathbf{s}_{i,k}\}$ 和 $\{\mathbf{s}^*_{i,k+1|k}\}$。类似地，$\{\mathbf{q}_{i,k+1|k}\}$ 和 $\{\mathbf{q}^*_{i,k+1|k}\}$ 分别表示为预测观测值 $\mathbf{y}_{k+1}$ 而生成并传播的西格玛点，预测结果为 $\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}$。攻击者计算状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ 及其对应的误差协方差矩阵估计值 $\mathbf{\Sigma}_{k+1}$ 的正向无迹卡尔曼滤波递推为 [1]

$$\text{Time update: } \{\mathbf{s}_{i,k}\}_{0\le i\le 2n_x} = S_{gen}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{\Sigma}_k), \tag{5}$$
$$\mathbf{s}^*_{i,k+1|k} = f(\mathbf{s}_{i,k}) \quad \forall i = 0,1,\ldots,2n_x,$$
$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i \mathbf{s}^*_{i,k+1|k}, \tag{6}$$
$$\mathbf{\Sigma}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i \mathbf{s}^*_{i,k+1|k}(\mathbf{s}^*_{i,k+1|k})^T - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\hat{\mathbf{x}}^T_{k+1|k} + \mathbf{Q},$$
$$\text{Measurement update: } \{\mathbf{q}_{i,k+1|k}\}_{0\le i\le 2n_x} = S_{gen}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{\Sigma}_{k+1|k}), \tag{7}$$
$$\mathbf{q}^*_{i,k+1|k} = h(\mathbf{q}_{i,k+1|k}) \quad \forall i = 0,1,\ldots,2n_x,$$
$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i \mathbf{q}^*_{i,k+1|k}, \tag{8}$$
$$\mathbf{\Sigma}^y_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i \mathbf{q}^*_{i,k+1|k}(\mathbf{q}^*_{i,k+1|k})^T - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}\hat{\mathbf{y}}^T_{k+1|k} + \mathbf{R},$$
$$\mathbf{\Sigma}^{xy}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i \mathbf{q}_{i,k+1|k}(\mathbf{q}^*_{i,k+1|k})^T - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\hat{\mathbf{y}}^T_{k+1|k},$$
$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}), \tag{9}$$
$$\mathbf{\Sigma}_{k+1} = \mathbf{\Sigma}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{\Sigma}^y_{k+1}\mathbf{K}^T_{k+1}, \tag{10}$$

其中增益矩阵 $\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{\Sigma}^{xy}_{k+1}\left(\mathbf{\Sigma}^y_{k+1}\right)^{-1}$。为减少计算开销，可以省略生成第二组西格玛点的步骤，并通过观测函数 $h(\cdot)$ 传播 $\{\mathbf{s}^*_{i,k+1|k}\}$ 来获得$\{\mathbf{q}^*_{i,k+1|k}\}$。然而，由于此处未考虑过程噪声的影响，这可能会降低经典无迹卡尔曼滤波的性能。另一方面，纯传播无迹卡尔曼滤波器 [44] 只需生成一次协方差增大的修正西格玛点集，同时不损害性能。

B. I-UKF

在已知正向无迹卡尔曼滤波器假设下，将 (2)、(6) 和 (8) 代入 (9)，可得逆滤波器的状态转移为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i \left(\mathbf{s}^*_{i,k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{q}^*_{i,k+1|k}\right) + \mathbf{K}_{k+1}h(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}. \tag{11}$$

在此状态转移中，$\mathbf{x}_{k+1}$ 是已知的外生输入，而$\mathbf{v}_{k+1}$ 表示其中涉及的过程噪声。由于函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 已知，传播后的西格玛点$\{\mathbf{s}^*_{i,k+1|k}\}$ 和 $\{\mathbf{q}^*_{i,k+1|k}\}$以及增益矩阵 $\mathbf{K}_{k+1}$ 都是第一组西格玛点 $\{\mathbf{s}_{i,k}\}$的函数。这些西格玛点又根据前一状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}_k$ 通过式（5）确定性地获得。因此，I-UKF 的状态转移，在假设参数κ为防御者所知的情况下，为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \widetilde{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{\Sigma}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}). \tag{12}$$

请注意，过程噪声 $\mathbf{v}_{k+1}$ 是非加性的，因为$\mathbf{K}_{k+1}$ 取决于前一估计值。此外，$\mathbf{\Sigma}_k$不依赖于当前前向滤波器的观测值 $\mathbf{y}_k$，而是使用前一估计值递归计算得到。我们通过使用其自身的前一估计值（即 $\hat{\hat{\mathbf{x}}}_k$）计算协方差矩阵，以此将 $\mathbf{\Sigma}_k$ 近似为 $\mathbf{\Sigma}^*_k$，并采用与前向滤波器在其估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 处的正向滤波估计相同的递归方式（使用式（10），在根据生成的西格玛点计算增益矩阵 $\mathbf{K}_{k+1}$ 之后）。因此，逆滤波器在状态转移（12）中将 $\mathbf{\Sigma}_k$ 视为已知的外生输入。

由于状态转移 (12) 涉及非加性噪声项，我们在 I-UKF 的公式构建中考虑一个维度为 $n_z = n_x + n_y$ 的增广状态向量 $\mathbf{z}_k = [\hat{\mathbf{x}}^T_k, \mathbf{v}^T_{k+1}]^T$，使得状态转移 (12) 变为 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = f(\mathbf{z}_k, \mathbf{\Sigma}_k, \mathbf{x}_{k+1})$。记

$$\hat{\mathbf{z}}_k = [\hat{\mathbf{x}}^T_k, \mathbf{0}_{1\times n_y}]^T, \quad \overline{\mathbf{\Sigma}}^z_k = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{\Sigma}}_k & \mathbf{0}_{n_x\times n_y} \\ \mathbf{0}_{n_y\times n_x} & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

将 I-UKF 的缩放参数设为 $\kappa \in \mathbb{R}$，则根据 $\hat{\mathbf{z}}_k$ 和 $\mathbf{\Sigma}^z_k$ 生成西格玛点 $\{\mathbf{s}_{j,k}\}_{0\le j\le 2n_z}$，方法与 (4) 类似，权重为 ω_j。随后，I-UKF 递归计算 $\hat{\hat{\mathbf{x}}}_k$ 及其对应的误差协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}_k$，如下所示

Time update:

$$\overline{s}^*_{j,k+1|k} = \widetilde{f}(\overline{\mathbf{s}}_{j,k}, \mathbf{\Sigma}^*_k, \mathbf{x}_{k+1}) \quad \forall j = 0,1,\ldots,2n_z, \tag{14}$$
$$\hat{\overline{\mathbf{x}}}_{k+1|k} = \sum_{j=0}^{2n_z} \overline{\omega}_j \overline{\mathbf{s}}^*_{j,k+1|k}, \tag{15}$$
$$\overline{\mathbf{\Sigma}}_{k+1|k} = \sum_{j=0}^{2n_z} \overline{\omega}_j \overline{\mathbf{s}}^*_{j,k+1|k}(\overline{\mathbf{s}}^*_{j,k+1|k})^T - \hat{\overline{\mathbf{x}}}_{k+1|k}\hat{\overline{\mathbf{x}}}^T_{k+1|k}, \tag{16}$$

测量更新:

$$\mathbf{a}^*_{j,k+1|k} = g(\overline{\mathbf{s}}^*_{j,k+1|k}) \quad \forall j = 0,1,\ldots,2n_z, \tag{17}$$
$$\hat{\mathbf{a}}_{k+1|k} = \sum_{j=0}^{2n_z} \overline{\omega}_j \mathbf{a}^*_{j,k+1|k}, \tag{18}$$
$$\overline{\mathbf{\Sigma}}^a_{k+1} = \sum_{j=0}^{2n_z} \overline{\omega}_j \mathbf{a}^*_{j,k+1|k}(\mathbf{a}^*_{j,k+1|k})^T - \hat{\mathbf{a}}_{k+1|k}\hat{\mathbf{a}}^T_{k+1|k} + \mathbf{\Sigma}_\epsilon, \tag{19}$$
$$\overline{\mathbf{\Sigma}}^{xa}_{k+1} = \sum_{j=0}^{2n_z} \overline{\omega}_j \overline{\mathbf{s}}^*_{j,k+1|k}(\mathbf{a}^*_{j,k+1|k})^T - \hat{\overline{\mathbf{x}}}_{k+1|k}\hat{\mathbf{a}}^T_{k+1|k}, \tag{20}$$
$$\overline{\mathbf{K}}_{k+1} = \overline{\mathbf{\Sigma}}^{xa}_{k+1}\left(\overline{\mathbf{\Sigma}}^a_{k+1}\right)^{-1}, \tag{21}$$
$$\hat{\hat{x}}_{k+1} = \hat{\hat{x}}_{k+1|k} + \overline{\mathbf{K}}_{k+1}(\mathbf{a}_{k+1} - \hat{\mathbf{a}}_{k+1|k}), \tag{22}$$
$$\overline{\mathbf{\Sigma}}_{k+1} = \overline{\mathbf{\Sigma}}_{k+1|k} - \overline{\mathbf{K}}_{k+1}\overline{\mathbf{\Sigma}}^a_{k+1}\overline{\mathbf{K}}^T_{k+1}. \tag{23}$$

图1展示了第 k个时间步的 I-UKF 递归。这些递归源于无迹卡尔曼滤波器的非加性噪声表述 [45]，其西格玛点是在比正向无迹卡尔曼滤波器的 n_x 维状态空间更高维（$n_z = n_x+n_y$）的状态空间中生成的。不过，后者在测量更新时需要一组新的西格玛点，而 I-UKF 只生成一次这些点。防御者假定的观测（3）仅取决于状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$。然而，在许多应用中，攻击者也可能在决定其行动时考虑 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的估计协方差 $\mathbf{\Sigma}_k$。在这种情况下，我们提出的 I-UKF 可以轻易修改，以在观测（3）中纳入 $\mathbf{\Sigma}_k$。具体而言，I-UKF 的状态转移（12）取决于正向无迹卡尔曼滤波器的 $\mathbf{\Sigma}_k$，因此我们计算其近似值 $\mathbf{\Sigma}^*_k$。

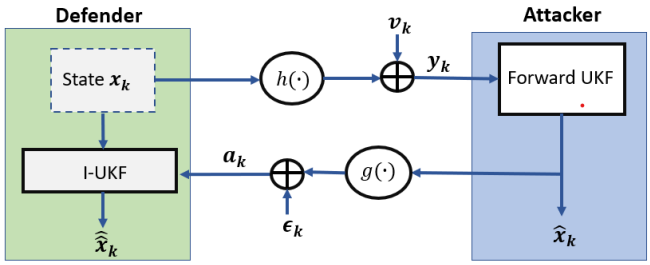

图1. I-UKF 在第 k 个时间步的递归示意图。防御者在第 k 个时刻的真实状态为 $\mathbf{x}_k$，攻击者通过观测函数 $h(\cdot)$ 并加入测量噪声 $\mathbf{v}_k$ 后观测到该状态为 $\mathbf{y}_k$。正向无迹卡尔曼滤波器使用 $\mathbf{y}_k$ 估计 $\mathbf{x}_k$，得到估计值 $\hat{}\mathbf{x}_k$。防御者通过观测函数 $g(\cdot)$ 并加入测量噪声 $\boldsymbol{\epsilon}_k$ 后，将 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 观测为 $\mathbf{a}_k$。最后，以 $\mathbf{a}_k$ 和 $\mathbf{x}_k$ 为输入，I-UKF 计算出 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 的估计值 $\hat{}\hat{}\mathbf{x}_k$。

如果观测（3）取决于 $\boldsymbol{\Sigma}_k$，I-UKF 的更新步骤（17）也会使用 $\boldsymbol{\Sigma}_k^*$。如前文第 III-B 节所述，I-UKF 以其估计值 $\hat{}\hat{}\mathbf{x}_k$ 计算 $\boldsymbol{\Sigma}_k^*$，其方式与正向无迹卡尔曼滤波器根据其估计值 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 计算 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 相同。具体而言，在通过状态转移（12）（等价地，（11））传播西格玛点 $\mathbf{s}_{j,k}$ 时，我们得到 $\mathbf{K}_{k+1}$（以及中间得到 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^y$）。因此，对于每个 $\mathbf{s}_{j,k}$，我们使用（10）得到正向无迹卡尔曼滤波器的协方差更新 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}$ 的一个估计值 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{j,k+1}$。我们选择这些 $\{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{j,k+1}\}_{0\le j\le 2n_z}$ 的平均值，作为下一次 I-UKF 递归的协方差近似 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^*$。

备注 1 (未知 κ)。 在 *I-UKF* 的公式中，我们假设正向无迹卡尔曼滤波器的参数 κ 已知。一般而言，若假设的 κ 与攻击者实际使用的 κ 不同，可能会增大 *I-UKF* 的估计误差。然而，第六节中的数值实验表明，即使假设的 κ 与其真实值不同，*I-UKF* 仍能给出合理的估计。此外，*I-UKF* 的稳定性（定理 *2*）要求正向无迹卡尔曼滤波器稳定，且与假设的 κ 无关。请注意，逆滤波器对正向无迹卡尔曼滤波器 κ 的选择独立于其自身的控制参数 κ。除无迹卡尔曼滤波器外，文献中还提出了多种基于数值积分技术的采样点卡尔曼滤波器。例如，容积卡尔曼滤波器（*CKF*） *[46]* 和求积卡尔曼滤波器（*QKF*） *[47, 48]* 分别采用容积求积规则和 *Gauss-Hermite* 求积规则。我们近期的工作 *[49]* 提出了逆容积卡尔曼滤波器和逆求积卡尔曼滤波器的这些形式，并对其进行了分析。

注 2 （与 I-KF 和 I-EKF 的区别）。 与 *I-KF[7]* 和 *I-EKF [14]*，不同，正向增益矩阵 $\mathbf{K}_{k+1}$ 不被视为 *I-UKF* 状态转移(11)中的时变参数。在 *KF* 中，给定模型参数和初始协方差估计 $\boldsymbol{\Sigma}_0$后，增益矩阵完全确定。在 *EKF* 中，它取决于状态估计处的线性化模型函数。然而，*UKF* 增益矩阵是根据由生成的西格玛点加权平均得到的协方差矩阵估计计算的，而这些西格玛点是状态估计的显式函数。因此，*I-UKF* 不会将 $\mathbf{K}_{k+1}$ 作为(11)的参数。

注释 3 （非高斯噪声）。 无迹卡尔曼滤波器及其逆滤波器 *I-UKF* 均假设过程噪声和测量噪声服从高斯分布。近期，研究人员开发了 *MCC* 修正卡尔曼滤波器，以处理非高斯噪声 *[50–52]*。我们可以直接基于 *MCC* 对 *I-UKF* 进行修改，以适用于非高斯系统模型。例如， *[52]*提出的前向*MCC*无迹卡尔曼滤波器引入了一个标量 $l_{k+1} = G_\sigma(\|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1|k}\|_{\tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1}})$，其中 $G_\sigma(\cdot)$ 为高斯核，并将增益矩阵计算为 $K_{k+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} l_{k+1} \tilde{H}_{k+1}^T (\tilde{R}_{k+1} + H_{k+1}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} l_{k+1} H_{k+1}^T)^{-1}$。其中，$H_{k+1}$ 和 R_{k+1}分别为伪测量矩阵和修正协方差矩阵。随后，估计误差协方差变为 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1} = (I - K_{k+1}\tilde{H}_{k+1})\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}(I - K_{k+1}\tilde{H}_{k+1})^T + K_{k+1}\tilde{R}_{k+1}K_{k+1}^T$，而其他所有状态预测和更新步骤均与正向无迹卡尔曼滤波器相同。构造逆滤波器时，必须在其状态转移方程中考虑这些修改。*I-UKF* 的增益矩阵 K_{k+1} 和协方差估计 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}$也采用类似方式进行修改，使用的标量 l_{k+1} 是逆滤波器动态中 l_{k+1} 的对应项。

C. 连续时间状态演化

状态演化 (1) 和观测值 (2) 表示离散时间过程。在许多实际应用中，防御者的状态随时间连续演化，而攻击者在离散时刻观测状态。在这种情况下，通常采用（正向）连续-离散卡尔曼-布西滤波器 [53]及其非线性扩展 [54–56] 来高效地进行状态估计。相反，只要防御者仅在相同的离散时刻观测攻击者的行动（如$\mathbf{a}_k$）并估计 $\hat{}\mathbf{x}_k$，逆滤波问题仍然是一个离散时间问题。只需进行一些简单修改，我们的 I-UKF 就能处理连续时间状态演化的情况。具体而言，正向连续-离散 UKF 的时间更新通过数值积分一对微分方程 [56, eq. (34)]，利用估计值 $\hat{}\mathbf{x}^{k+1|k}$ 和$\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$ 作为初始条件，计算 $\hat{}\mathbf{x}_k$。测量更新步骤与正向 UKF 相同。I-UKF 的状态转移会作相应修改，以考虑这些差异。

将前向连续-离散无迹卡尔曼滤波器的时间更新（微分方程的解）记为 $\hat{}\mathbf{x}^{k+1|k} = \chi_1(\hat{}\mathbf{x}_k)$ 和$\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} = \chi_2(\hat{}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$。I-UKF 的状态转移（11）变为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \chi_1(\hat{\mathbf{x}}_1) - \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{q}_{i,k+1|k}^* + \mathbf{K}_{k+1}h(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}. \tag{24}$$

这里，传播点 $\{\mathbf{q}_{i,k+1|k}^*\}$ 仍由预测状态 $\hat{}\mathbf{x}^{k+1|k}$ 和协方差估计 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$确定性地得到，而它们又是通过解 $\chi_1(\cdot)$ 和 $\chi_2(\cdot)$，由 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_k$确定的。因此，（24）可简化为 $\tilde{\hat{}}\mathbf{x}_{k+1} = f(\hat{}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k, \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1})$，其中 $f(\cdot)$ 现在表示修改后的状态转移函数。

D. 复值系统

在频率估计和神经网络训练等许多应用中，状态 $\mathbf{x}_k$ 及其观测值并非实数，而是复值，因此会采用复数卡尔曼滤波器。

[57, 58]。最简单的复数卡尔曼滤波器假设二阶圆对称性，并且仅使用协方差矩阵信息；而近期的广义线性滤波器 [57–59]则考虑一般的非圆对称情形，并利用伪协方差矩阵提高精度。我们可以对 I-UKF 进行适当修改，得到用于复值逆滤波问题的广义线性复数 I-UKF。

考虑防御者的状态 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{C}^{n_x\times 1}$，其中 $\mathbf{\Sigma}_k$ 和 $\mathbf{\Sigma}_k^p$ 分别表示其协方差矩阵和伪协方差矩阵。在 [57], 前向广义线性复数无迹卡尔曼滤波器中，定义增广状态 $\boldsymbol{\xi}_k \doteq [\mathbf{x}_k^T, \mathbf{x}_k^H]^T$ 及其协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}_k^{\xi} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_k & \mathbf{\Sigma}_k^p \\ \mathbf{\Sigma}_k^p{}^H & \mathbf{\Sigma}_k^H \end{bmatrix}$。用于估计 $\boldsymbol{\xi}_k$ 的前向滤波递推可由标准无迹卡尔曼滤波器得到，只需将 $(\cdot)^T$ 替换为 $(\cdot)^H$。注意，此时西格玛点是利用估计值 $\hat{}\,\boldsymbol{\xi}_k$（关于 $\boldsymbol{\xi}_k$）和 $\mathbf{\Sigma}_k^{\xi}$ 生成的，后者包含伪协方差 $\mathbf{\Sigma}_k^p$。构造逆滤波器时，需要考虑前向滤波器的增广状态 $\boldsymbol{\xi}_k$，并修改状态转移（11）。最后，*mutatis mutandis*，一般复数逆无迹卡尔曼滤波器的递推可由 [57] 的增广复数无迹卡尔曼滤波器推得：将 I-UKF 修改后的状态转移视为状态演化过程，并将 $\mathbf{a}_k$ 视为观测。另一方面，[59] 中提出的（前向）复数无迹卡尔曼滤波器引入了修改后的西格玛点，并利用新息及其共轭进行状态更新。在逆滤波器的构造中也可采用类似方式纳入这些修改，从而得到另一种复数逆无迹卡尔曼滤波器。

IV. 再生核希尔伯特空间-UKF

在上一节中，我们假设攻击者和防御者双方都拥有完美的系统信息，以此构建逆滤波器。然而，在许多应用中，采用随机滤波器的智能体（攻击者和/或防御者）可能缺乏有关状态演化、观测或两者的信息。在此，我们开发了 RKHS-UKF，以联合估计所需状态并学习未知系统模型。为此，我们考虑使用基于再生核希尔伯特空间的函数逼近来表示未知的非线性函数 [60]。根据表示定理， [61], 再生核希尔伯特空间中由核 $K(\cdot,\cdot): \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 诱导的函数 $s(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的最优逼近具有如下形式： $s(\cdot) \approx \sum_{i=1}^{M} a_i K(\tilde{\mathbf{x}}_i, \cdot)$，其中 $\{\tilde{\mathbf{x}}_i\}_{1\le i\le M}$ 是输入训练样本或字典， $\{a_i\}_{1\le i\le M}$ 则是待学习的未知系数。这种核函数近似已广泛用于非线性状态空间建模 [62, 63] 以及含未知非线性函数的递归最小二乘算法 [35, 64,65]。由于高斯核是万能核， [66], 对于核宽度为 $\sigma > 0$ 的高斯核， $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2^2}{\sigma^2}\right)$ 是函数逼近中最常用的核。

考虑一个一般的非线性系统模型，其中智能体未知状态转移模型和观测模型。如果智能体对状态演化、观测函数和/或噪声协方差矩阵拥有完备的先验信息，我们的 RKHS-UKF 可以直接简化。具体而言，我们的 RKHS-UKF 将 UKF 与近似在线期望最大化算法相结合，以获得状态估计；后者是一种在存在缺失数据时计算最大似然估计的常用方法 [67], 用于学习未知的系统参数。

此外，攻击者和防御者都可以使用 RKHS-UKF，分别推断防御者的状态（作为前向滤波器）和攻击者的状态估计（作为逆滤波器）。迄今为止开发的逆滤波器假设攻击者采用特定的前向滤波器来获得其状态转移方程。由于 RKHS-UKF 根据可用观测值自行学习状态转移，因此，将 RKHS-UKF 用作防御者的逆滤波器时，无需任何前向滤波器的先验信息。

未知动力学的系统模型：我们考察状态转移 (1) 和观测 (2)，其中函数 $f(\cdot)$ 和$h(\cdot)$（包括噪声协方差 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$）均未知。考虑一个核函数 $K(\cdot,\cdot)$ 和一个大小为 L 的字典 $\{\tilde{\mathbf{x}}_l\}_{1\le l\le L}$。定义 $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \doteq [K(\tilde{\mathbf{x}}_1,\mathbf{x})\ldots, K(\tilde{\mathbf{x}}_L,\mathbf{x})]^T$。利用核函数近似，未知的状态转移和观测分别表示为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \tag{25}$$
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{B}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \tag{26}$$

其中，$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x\times L}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_y\times L}$ 是待学习的未知系数矩阵。字典 $\{\tilde{\mathbf{x}}_l\}_{1\le l\le L}$可通过滑动窗口 [65]或近似线性相关性（ALD） [35] 准则构建。在第 k个时刻，RKHS-UKF 根据观测值$\{\mathbf{y}_i\}_{1\le i\le k}$估计未知参数$\Theta = \{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Q},\mathbf{R}\}$ 以及当前状态 $\mathbf{x}_k$。注意，系统模型（1）-（2）及系统参数 Θ 均不随时间变化。

RKHS-UKF 的近似在线 EM 用于学习参数 Θ，其步骤与 [16,第 V-A 节] 中详细介绍的 RKHS-EKF 参数学习步骤基本一致，因此我们仅在此进行概述。两者的主要区别在于，RKHS-EKF 对非线性核函数进行线性化，以近似高斯随机变量经过非线性变换后的统计量；而 RKHS-UKF 则使用无迹变换进行相同的近似。随后，基于 UKF 的递推过程利用这些参数估计得出状态估计。

参数学习：将截至时间 k 的观测值 $\mathbf{Y}^k = \{\mathbf{y}_j\}_{1\le j\le k}$ 记为 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$，并将 $\Theta_{k-1} = \{\mathbf{A}_{k-1}、\mathbf{B}_{k-1}、\hat{}\,\hat{}\mathbf{Q}_{k-1}、\mathbf{R}_{k-1}\}$ 记为基于先前 $k-1$ 个观测值对 Θ 的当前估计。为简便起见，将条件期望算子 $\mathbb{E}[\cdot|\mathbf{Y}^k、\hat{\Theta}_{k-1}]$ 记为 $\mathbb{E}_k[\cdot]$。定义部分和 $\mathbf{S}_k^{x\phi} = \sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}_k[\mathbf{x}_j\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{j-1})^T]$ 和 $\mathbf{S}_k^{\phi 1} = \sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{j-1})\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{j-1})^T]$；并将其近似为 $\mathbf{S}_k^{x\phi} \approx \mathbf{S}_{k-1}^{x\phi} + \mathbb{E}_k[\mathbf{x}_k\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T]$ 和 $\mathbf{S}_k^{\phi 1} \approx \mathbf{S}_{k-1}^{\phi 1} + \mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T]$。在近似在线 EM 中，当前观测值 $\mathbf{y}_k$ 和参数估计 Θ_{k-1} 仅用于计算期望 $\mathbb{E}_k[\mathbf{x}_k\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T]$ 和 $\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T]$，而不用于更新 $\mathbf{S}_{k-1}^{x\phi}$ 和 $\mathbf{S}_{k-1}^{\phi 1}$。采用这一近似后，当前观测值仅用于更新参数估计一次。类似地，定义和 $\mathbf{S}_k^{y\phi} = \sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}_k[\mathbf{y}_j\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_j)^T]$ 和 $\mathbf{S}_k^{\phi} = \sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_j)\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_j)^T]$，其计算结果分别为 $\mathbf{S}_k^{y\phi} = \mathbf{S}_{k-1}^{y\phi} + \mathbb{E}_k[\mathbf{y}_k\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)^T]$ 和 $\mathbf{S}_k^{\phi} = \mathbf{S}_{k-1}^{\phi} + \mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)^T]$。此外，利用式 (26)，可得 $\mathbb{E}_k[\mathbf{y}_k\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)^T] = \hat{}\,\mathbf{B}_k\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)^T]$ 和 $\mathbb{E}_k[\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k^T] = \hat{}\,\mathbf{B}_k\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)^T]\hat{}\,\mathbf{B}_k^T + \hat{}\,\mathbf{R}_{k-1}$。最后，近似参数更新为

$$\hat{\mathbf{A}}_k = \Gamma_a(\mathbf{S}_k^{x\phi}(\mathbf{S}_k^{\phi 1})^{-1}), \tag{27}$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \left(1-\frac{1}{k}\right)\hat{\mathbf{Q}}_{k-1} + \frac{1}{k}(\mathbb{E}_k[\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^T] - \hat{\mathbf{A}}_k\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{x}_k^T] - \mathbb{E}_k[\mathbf{x}_k\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T]\hat{\mathbf{A}}_k^T + \hat{\mathbf{A}}_k\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T]\hat{\mathbf{A}}_k^T), \tag{28}$$

$$\hat{\mathbf{B}}_k = \Gamma_b(\mathbf{S}_k^{y\phi}(\mathbf{S}_k^{\phi})^{-1}), \tag{29}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \left(1-\frac{1}{k}\right)\hat{\mathbf{R}}_{k-1} + \frac{1}{k}(\mathbb{E}_k[\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k^T] - \hat{\mathbf{B}}_k\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)\mathbf{y}_k^T] - \mathbb{E}_k[\mathbf{y}_k\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)^T]\hat{\mathbf{B}}_k^T + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)^T]\hat{\mathbf{B}}_k^T), \tag{30}$$

其中，$\Gamma_a(\cdot)$ 和 $\Gamma_b(\cdot)$ 分别表示将系数矩阵估计值投影到满足已知界的范围内。请注意，该投影是可选的，仅用于分析所提出的 RKHS-UKF 算法在第五节中的稳定性。

为计算所需的条件期望，我们使用 UKF递推本身得到的状态估计；这些状态估计通过高斯密度近似给定观测值时所需状态的后验分布。然而，期望涉及非线性变换 $\mathbf{\Phi}(\cdot)$。基于无迹变换，我们生成确定性西格玛点，以近似高斯分布经过非线性变换后的统计量。此外，我们还需要给定 $\mathbf{Y}^k$ 时 $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})$的统计量。因此，在 RKHS-UKF 公式中考虑增广状态$\mathbf{z}_k = [\mathbf{x}_k^T\ \mathbf{x}_{k-1}^T]^T$。利用这些近似，可以按下文所述计算所需的期望。

递推： 关于增广状态 $\mathbf{z}_k$，核近似的系统模型为

$$\mathbf{z}_k = \widetilde{f}(\mathbf{z}_{k-1}) + \widetilde{\mathbf{w}}_{k-1}, \tag{31}$$

$$\mathbf{y}_k = \widetilde{h}(\mathbf{z}_k) + \mathbf{v}_k, \tag{32}$$

其中，$\widetilde{f}(\mathbf{z}_{k-1}) = [(\mathbf{A}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1}))^T\ \ \mathbf{x}_{k-1}^T]^T$，$\widetilde{h}(\mathbf{z}_k) = \mathbf{B}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)$，并带有过程噪声 $\widetilde{\ }\mathbf{w}_{k-1} = [\mathbf{w}_{k-1}^T\ \mathbf{0}_{1\times n_x}]^T$，其实际噪声协方差矩阵为 $\widetilde{\ }\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{Q} & \mathbf{0}_{n_x\times n_x}\\ \mathbf{0}_{n_x\times n_x} & \mathbf{0}_{n_x\times n_x}\end{bmatrix}$。将 κ 记为 RKHS-UKF 西格玛点的缩放参数。注意，这些西格玛点是在维度为 $n_z = 2n_x$ 的增广状态空间中生成的。在第 k 次递推时，我们拥有来自前一时间步的估计值 $\hat{}\mathbf{z}_{k-1} = [\hat{}\mathbf{x}_{k-1|k-1}^T\ \hat{}\mathbf{x}_{k-2|k-1}^T]^T$、其对应的误差协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}_{k-1}^z$ 以及参数 $\hat{}$估计值 Θ_{k-1}。随后利用新观测值 $\mathbf{y}_k$ 获得当前的状态估计和参数估计，具体总结如下。

1) 预测：生成西格玛点 $\{\mathbf{s}_{i,\ k-1}\}_{0\le i\le 2n_z} = S_{gen}(\hat{}\mathbf{z}_{k-1},\ \mathbf{\Sigma}_{k-1}^z)$及其对应的权重 $\hat{}\{\omega_i\}_{0\le i\le 2n_z}$，类似于（4）。在（31）中使用 $\{\ _{i\ k-1}\}$）中使用 $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}}_{k-1}$ 和 $\widetilde{\ }\mathbf{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix}\hat{}\mathbf{Q}_{\ k-1} & \mathbf{0}_{n_x\times n_x}\\ \mathbf{0}_{n_x\times n_x} & \mathbf{0}_{n_x\times n_x}\end{bmatrix}$，将$\mathbf{s}_{,}$ 通过 $f(\cdot)$传播，以获得预测状态及其对应的预测误差协方差矩阵，如下所示：

$$\mathbf{s}_{i,k|k-1}^* = \widetilde{f}(\mathbf{s}_{i,k-1})\ \ \forall\, i = 0,1,\ldots,2n_z, \tag{33}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\mathbf{s}_{i,k|k-1}^*, \tag{34}$$

$$\mathbf{\Sigma}_{k|k-1}^z = \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\mathbf{s}_{i,k|k-1}^*(\mathbf{s}_{i,k|k-1}^*)^T - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^T + \widetilde{\mathbf{Q}}_{k-1}. \tag{35}$$

2) 状态更新：生成西格玛点 $\{\mathbf{q}_{i,\ k|k-1}\}_{0\le i\le 2n_z} = S_{gen}(\hat{}\mathbf{z}^{k|k-1},\ \mathbf{\Sigma}_{k|k-1}^z)$，并使用（32）中的 $\hat{}\ \hat{}\mathbf{B} = \mathbf{B}_{k-1}$ 和 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k-1}$，通过 $h(\cdot)$传播，如下所示：

$$\mathbf{q}_{i,k|k-1}^* = \widetilde{h}(\mathbf{q}_{i,k|k-1})\ \ \forall\, i = 0,1,\ldots,2n_z, \tag{36}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\mathbf{q}_{i,k|k-1}^*, \tag{37}$$

$$\mathbf{\Sigma}_k^y = \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\mathbf{q}_{i,k|k-1}^*(\mathbf{q}_{i,k|k-1}^*)^T - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}, \tag{38}$$

$$\mathbf{\Sigma}_k^{zy} = \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\mathbf{q}_{i,k|k-1}(\mathbf{q}_{i,k|k-1}^*)^T - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T, \tag{39}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}), \tag{40}$$

$$\mathbf{\Sigma}_k^z = \mathbf{\Sigma}_{k|k-1}^z - \mathbf{K}_k\mathbf{\Sigma}_k^y\mathbf{K}_k^T, \tag{41}$$

其中增益矩阵 $\mathbf{K}_k = \mathbf{\Sigma}_k^{zy}(\mathbf{\Sigma}_k^y)^{-1}$。这里，$\hat{}\mathbf{z}_k = [\hat{}\mathbf{x}_{k|k}^T\ \hat{}\mathbf{x}_{k-1|k}^T]$，其中 $\hat{}\mathbf{x}^{k|k}$ 是 RKHS-UKF 对状态 $\mathbf{x}_k$ 的估计。这些预测和状态更新源自标准无迹卡尔曼滤波器递推，用于在给定参数 Θ_{k-1}的情况下，通过系统模型 $\hat{}$ (31) 和 (32) 估计 $\mathbf{z}_k$。

3）参数更新：生成西格玛点 $\{\mathbf{s}_{i,k}\}_{0\le i\le 2n_z} = S_{gen}(\hat{}\mathbf{z}_k, \mathbf{\Sigma}_k^z)$。将第 i 个西格玛点的两个 n_x 维子向量分别记为 $\mathbf{s}_i^{(1)}$，$_k = [\mathbf{s}_{i,k}]_{1:n_x}$ 和 $\mathbf{s}_i^{(2)}{}_{,k} = [\mathbf{s}_{i,k}]_{n_x+1:\ 2n_x}$ 分别对应增广状态 $\mathbf{z}_k$ 中的 $\mathbf{x}_k$ 和 $\mathbf{x}_{k-1}$ 部分。为了近似给定观测值 $\mathbf{Y}^k$ 时 $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})$ 的统计量，我们将西格玛点的 $\mathbf{x}_{k-1}$ 部分通过 $\mathbf{\Phi}(\cdot)$ 传播，即 $\widetilde{\ }\mathbf{s}_i^{(2)}{}_{,k} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{s}_{i\ k}^{(2)},)$。类似地，我们通过 $\mathbf{\Phi}(\cdot)$ 传播 $\mathbf{s}_{i\ k}^{(1)}$，以将 $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)$ 的统计量近似为 $\widetilde{\ }\mathbf{s}_i^{(1)}{}_{,k} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{s}_{i\ k}^{(1)},)$。此外，根据定义，$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_k - \hat{}\mathbf{x}^{k|k}) \approx [\mathbf{\Sigma}_k^z]_{(1:n_x,1:n_x)}$。利用这些近似，可以计算出各个期望，如下所示：

$$\mathbb{E}_k[\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^T] = [\mathbf{\Sigma}_k^z]_{(1:n_x,1:n_x)} + \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T, \tag{42}$$

$$\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T] = \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\widetilde{\mathbf{s}}_{i,k}^{(2)}(\widetilde{\mathbf{s}}_{i,k}^{(2)})^T, \tag{43}$$

$$\mathbb{E}_k[\mathbf{x}_k\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T] = \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\mathbf{s}_{i,k}^{(1)}(\widetilde{\mathbf{s}}_{i,k}^{(2)})^T, \tag{44}$$

$$\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)^T] = \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\widetilde{\mathbf{s}}_{i,k}^{(1)}(\widetilde{\mathbf{s}}_{i,k}^{(1)})^T. \tag{45}$$

$\hat{}$ 利用这些期望，通过（27）至（30）得到更新后的参数估计值 Θ_k。

最后，根据滑动窗口 [65]或ALD [35] 准则，使用当前状态估计$\hat{}\mathbf{x}^{k|k}$ 更新字典 $\{\widetilde{\ }\mathbf{x}_l\}_{1\le l\le L}$。需要注意的是，在我们的RKHS-UKF中，每次递推只需生成两组西格玛点，这与系统模型已知时的标准无迹卡尔曼滤波器类似。参数更新步骤中生成的西格玛点，与下一时刻预测步骤中生成的西格玛点相同。算法1描述了假设初始状态为$\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\hat{}\mathbf{x}_0, \mathbf{\Sigma}_0$时RKHS-UKF的初始化过程，算法2则概述了RKHS-UKF递推。在ALD准则下，如果将当前估计$\hat{}\mathbf{x}^{k|k}$ 加入字典，字典大小就会增加；而在滑动窗口准则下，只有在初始阶段当前大小 $\{\widetilde{\ }$小于所考虑的窗口长度时，字典大小才会发生变化。

算法1和算法2概述了上述所有步骤。

使用无迹变换意味着缩放参数 κ 也会影响 RKHS-UKF 中的参数学习。或者，也可以采用高效的数值积分技术，并可从所提出的 RKHS-UKF 直接得到 RKHS-CKF（RKHS-QKF）。在 [68, 69], 中，无迹卡尔曼滤波器（UKF）与神经网络（NN）相结合，用于非线性系统辨识；通过将未知权重与状态增广来学习这些权重，但这种方法的计算开销很大。在 [70], 中，NN 用于建模非线性动力学或不确定性，并利用先前由 UKF 计算的状态估计在线更新权重。然而，一般而言，这些算法的稳定性无法得到保证 [68]。相较之下，我们的 RKHS-UKF 将递归贝叶斯状态估计框架扩展到未知系统，并利用 UKF 递归本身的期望增加了一个参数更新步骤。因此，我们能够在第五节的 V-B 节中使用未知矩阵方法分析其随机稳定性 [40] 。此外，RKHS-EKF [16] 也尚未获得此类稳定性保证。

注4（与核卡尔曼滤波器的区别）。文献中此前已提出基于核的卡尔曼滤波器（核卡尔曼滤波器），用于未知非线性时间序列预测 *[36, 71, 72]*。然而，我们的 *RKHS-UKF* 与这些核卡尔曼滤波器有着根本区别。在 *[71],* 中，未知系统模型被转换到基于再生核希尔伯特空间的特征空间 $\mathcal{H}$，并假设其为线性高斯模型，因此可以应用基于卡尔曼滤波的滤波递归。未知参数由 $\mathcal{H}$ 中的正交归一基表示，并通过精确*EM*算法进行学习。核主成分分析（主成分分析）提供了该正交归一基。 *[36, 72]*中的核卡尔曼滤波器考虑对含噪但线性的观测$\mathbf{y}_k$ 进行条件分布嵌入，以在再生核希尔伯特空间中构建新的状态空间模型。随后应用卡尔曼滤波递归来估计嵌入观测，并据此计算估计值$\hat{\mathbf{x}}_k$ 。相反，我们的 *RKHS-UKF* 使用核函数近似（采用通用高斯核），直接在原始状态空间中表示未知函数，而无需任何特征映射。此外，这些核卡尔曼滤波器分别需要在 *[71]* 和 *[36, 72],* 中进行预训练阶段，以学习正交归一基和嵌入算子。因此，如果训练数据未能充分代表测试数据，核卡尔曼滤波器的性能就会受到影响。相反，我们的 *RKHS-UKF* 根据近似线性相关性（*ALD*）或滑动窗口准则，在线学习其字典（根据计算得到的估计值）。

算法1 RKHS-UKF 初始化 输入：$\hat{\mathbf{x}}0$, $\mathbf{\Sigma}_0$, κ输出：$\{\mathrm{s}_{i,0}\}_{0\le i\le 2n_z}$, $\{\omega_i\}_{0\le i\le 2n_z}$, $\mathbf{\Sigma}_0^z$, L, $\{\widetilde{x}_l\}_{1\le l\le L}$, $\hat{\mathbf{A}}_0$, $\hat{\mathbf{B}}_0$, $\hat{\mathbf{Q}}_0$, $\hat{\mathbf{R}}_0$, $\mathrm{S}_0^{x\phi}$, $\mathrm{S}_0^{\phi 1}$, $\mathrm{S}_0^{y\phi}$ 和 S_0^{ϕ} 1: $\hat{\mathbf{z}}_0 \leftarrow [\hat{\mathbf{x}}_0^T \hat{\mathbf{x}}_0^T]^T$，以及 $\mathbf{\Sigma}_0^z \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_0 & \mathbf{0}_{n_x\times n_x} \\ \mathbf{0}_{n_x\times n_x} & \mathbf{\Sigma}_0 \end{bmatrix}$。 2: 使用公式（4）和 κ计算 $L=1$ $\mathrm{s}_{i,0},\omega_i\}_{0\le i\le 2n_z} \leftarrow S_{gen}(\hat{\mathbf{z}}0, \mathbf{\Sigma}_0^z)$。 3: 设置 $L=1$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_1 \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_0$。 4: 分别用任意的 $\mathbb{R}_{n_x\times L}$ 和 $\mathbb{R}_{n_y\times L}$ 矩阵初始化 A_0 和 B_0 。 5: 用一些合适的正定噪声协方差矩阵初始化 Q_0 和 R_0 。 6: 设置 $\mathrm{S}_0^{x\phi} = \mathbf{0}_{n_x\times L}$、$\mathrm{S}_0^{\phi 1} = \mathbf{0}_{L\times L}$、$\mathrm{S}_0^{y\phi} = \mathbf{0}_{n_y\times L}$ 和 $\mathrm{S}_0^{\phi} = \mathbf{0}_{L\times L}$。返回 $\{\mathrm{s}_{i,0}\}_{0\le i\le 2n_z}$, $\{\omega_i\}_{0\le i\le 2n_z}$, $\mathbf{\Sigma}_0^z$, L, $\{\widetilde{x}_l\}_{1\le l\le L}$, $\hat{\mathbf{A}}_0$, $\hat{\mathbf{B}}_0$, $\hat{\mathbf{Q}}_0$, $\hat{\mathbf{R}}_0$, $\mathrm{S}_0^{x\phi}$、$\mathrm{S}_0^{\phi 1}$、$\mathrm{S}_0^{y\phi}$和 S_0^{ϕ}。

算法2 RKHS-UKF 无迹卡尔曼滤波递归

输入：$\{\mathrm{s}_{i,k-1},\omega_i\}_{0\le i\le 2n_z}$, $\mathbf{\Sigma}_{k-1}^z$, $\hat{\mathbf{A}}_{k-1}$, $\hat{\mathbf{B}}_{k-1}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{k-1}$, $\hat{\mathbf{R}}_{k-1}$, $\mathrm{S}_{k-1}^{x\phi}$, $\mathrm{S}_{k-1}^{\phi 1}$, $\mathrm{S}_{k-1}^{y\phi}$, S_{k-1}^{ϕ}, 和 y_k输出：$\hat{\mathbf{x}}^{k|k}$, $\{\mathrm{s}_{i,k}\}_{0\le i\le 2n_z}$, $\mathbf{\Sigma}_k^z$, $\hat{\mathbf{A}}_k$, $\hat{\mathbf{B}}_k$, $\hat{\mathbf{Q}}_k$, $\hat{\mathbf{R}}_k$, $\mathrm{S}_k^{x\phi}$, $\mathrm{S}_k^{\phi 1}$, $\mathrm{S}_k^{y\phi}$, 和 S_k^{ϕ} 1：通过 $f(\cdot)$ 传播 $\{\mathrm{s}_{i,k-1}\}$，并使用（33）-（35）计算$\hat{\tilde{\mathbf{z}}}^{k|k-1}$ 和$\mathbf{\Sigma}_{k|k-1}^z$ 。2：使用（4）生成西格玛点 $\{\mathrm{q}_{i,k|k-1}\}_{0\le i\le 2n_z}$ $=S_{gen}(\hat{\mathbf{z}}^{k|k-1}, \mathbf{\Sigma}_{k|k-1}^z)$，并使用（36）通过 $h(\cdot)$ 传播。3：使用（37）-（41）计算 $\hat{\mathbf{z}}_k$ 和 $\mathbf{\Sigma}_k^z$ 。4：$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \leftarrow [\hat{\mathbf{z}}_k]_{1:n_x}$。 5：使用（4）生成西格玛点 $\{\mathrm{s}_{i,k}\}_{0\le i\le 2n_z} = S_{gen}(\hat{\mathbf{z}}_k, \mathbf{\Sigma}_k^z)$。6：设置 $\mathrm{s}_i^{(1)},_k = [\mathrm{s}_{i,k}]_{1:n_x}$和 $\mathrm{s}_i^{(2)},_k = [\mathrm{s}_{i,k}]_{n_x+1:2n_x}$。 7：计算 $\tilde{\mathrm{s}}_i^{(1)},_k = \mathbf{\Phi}(\mathrm{s}_i^{(1)}{}_k,)$ 和 $\tilde{\mathrm{s}}_i^{(2)},_k = \mathbf{\Phi}(\mathrm{s}_i^{(2)}{}_k,)$。8：使用（42）-（45）计算 $\mathbb{E}_k[\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^T]$, $\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T]$,$\mathbb{E}_k[\mathbf{x}_k\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_{k-1})^T]$ 和 $\mathbb{E}_k[\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)^T]$。 9：使用（27）-（30）计算 A_k, B_k, Q_k, 和 R_k 。10：根据滑动窗口 [65] 或近似线性相关性 [35] 准则，使用状态估计 $\hat{\mathbf{x}}^{k|k}$ 更新字典 $\{\tilde{\mathbf{x}}_l\}_{1\le l\le L}$。11：如果字典大小增加，则使用适当的初始值扩充 $\hat{\mathbf{A}}_k$, $\hat{\mathbf{B}}_k$, $\mathrm{S}_k^{x\phi}$, $\mathrm{S}_k^{\phi 1}$, $\mathrm{S}_k^{y\phi}$, 和 S_k^{ϕ}， 以适应更新后的字典大小。返回 $\hat{\mathbf{x}}^{k|k}$, $\{\mathrm{s}_{i,k}\}_{0\le i\le 2n_z}$, $\mathbf{\Sigma}_k^z$, $\hat{\mathbf{A}}_k$, $\hat{\mathbf{B}}_k$, $\hat{\mathbf{Q}}_k$, $\hat{\mathbf{R}}_k$, $\mathrm{S}_k^{x\phi}$, $\mathrm{S}_k^{\phi 1}$, $\mathrm{S}_k^{y\phi}$, 和 S_k^{ϕ}。

V. 性能分析

我们采用未知矩阵方法，推导所提出滤波器在指数均方有界意义下随机稳定的充分条件。未知矩阵方法最初由 [40] 针对具有线性观测的无迹卡尔曼滤波器提出，随后被用于推导具有间歇观测的无迹卡尔曼滤波器 [73]和共识无迹卡尔曼滤波的稳定性条件 [74]。接下来，我们针对一般情形，推导 I-UKF 和 RKHS-UKF 的稳定性条件，

时变过程噪声和测量噪声协方差$\mathbf{Q}_k$、$\mathbf{R}_k$ 和$\mathbf{R}_k$ ，分别取代 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 和 $\bar{\mathbf{\Sigma}}_\epsilon$。注意，与卡尔曼滤波器稳定性文献中的情形类似，定理 1、2 和 4 是稳定性的充分条件，但非必要条件。

包括 UKF 在内的采样点卡尔曼滤波器是一类局部近似方法 [15] ，与卡尔曼滤波器不同，其增益计算和协方差更新步骤与状态更新相互耦合。因此，UKF 和 I-UKF 的滤波器渐近收敛性并未定义。相反，我们证明 I-UKF

在定理3中给出了保守估计。

首先，回顾随机过程的指数均方有界性的定义。

定义 1（指数均方有界性 [39]）。如果存在实数 $\eta\ \nu\ >\ 0\qquad 0\ <\ \lambda\ <\ 1\qquad\qquad \mathbb{E}\left[\|\zeta_k\|_2^2\right]\ \leq$，使 $\eta\mathbb{E}\left[\|\zeta_0\|_2^2\right]\lambda^k+\nu\qquad\qquad k\geq 0$ 得对每个均成立，则称随机过程 $\{\zeta_k\}_{k\geq 0}$ 在均方意义下指数有界。

A. 逆向无迹卡尔曼滤波器

可以证明，如果正向无迹卡尔曼滤波器具有稳定性且系统满足一些附加假设，则 I-UKF 的估计误差是指数有界的。特别地，可以证明 I-UKF 的误差动态满足广义无迹卡尔曼滤波器的稳定性条件。因此，我们首先考察正向无迹卡尔曼滤波器的随机稳定性。

1) 正向无迹卡尔曼滤波器：考虑第 III-A 节中具有状态转移方程 (1) 和观测方程 (2) 的正向无迹卡尔曼滤波器。分别用 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\doteq\mathbf{x}_{k+1}-\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$、$\tilde{\mathbf{x}}_k\doteq\mathbf{x}_k-\hat{\mathbf{x}}_k$ 和 $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}\doteq\mathbf{y}_{k+1}-\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}$ 表示状态预测误差、状态估计误差和测量预测误差。根据 (1) 和 (6)，有 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}=f(\mathbf{x}_k)+\mathbf{w}_k-\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{s}_{ik+1|k}^*$；代入 $\mathbf{s}_{ik+1|k}^*=f(\mathbf{s}_{ik}+\hat{\mathbf{x}}_k,k)$ 后，得到 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}=f(\hat{\mathbf{x}}_k,k)+\mathbf{w}_k-\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i f(\mathbf{s}_{ik}+\hat{\mathbf{x}}_k,k)$。在 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 处对 $f(\cdot)$ 作一阶泰勒级数展开，得到 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\approx f(\hat{\mathbf{x}}_k)+\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k-\hat{\mathbf{x}}_k)+\mathbf{w}_k-\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i(f(\hat{\mathbf{x}}_k)+\mathbf{F}_k(\mathbf{s}_{ik}-\hat{\mathbf{x}}_k))$，其中 $\mathbf{F}_k\doteq\frac{\partial f(\mathbf{x},k)}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k}$。西格玛点 $\{\mathbf{s}_{ik}\}_{0\leq i\leq 2n_x}$ 关于 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 对称选取。根据 (5) 将 $\mathbf{s}_{ik}$ 用 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和 $\mathbf{\Sigma}_k$ 表示后，可将状态预测误差简化为 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\approx\mathbf{F}_k\tilde{\mathbf{x}}_k+\mathbf{w}_k$。与 [40], 类似，我们引入一个未知的辅助对角矩阵 $\mathbf{U}_k^x\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$，用于补偿线性化误差，如下所示：

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}=\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\widetilde{\mathbf{x}}_k+\mathbf{w}_k. \tag{46}$$

同样，对式 (2) 中的 $h(\cdot)$ 进行线性化，并在式 (8) 中引入未知对角矩阵 $\mathbf{U}_k^y\in\mathbb{R}^{n_y\times n_y}$，可得

$$\widetilde{\mathbf{y}}_{k+1}=\mathbf{U}_{k+1}^y\mathbf{H}_{k+1}\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}+\mathbf{v}_{k+1}, \tag{47}$$

其中 $\mathbf{H}_{k+1}\doteq\frac{\partial h(\mathbf{x},k)}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}$。利用式 (9)，有 $\tilde{\mathbf{x}}_k=\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}-\mathbf{K}_k\tilde{\mathbf{y}}_k$；将其代入式 (46) 并结合式 (47)，可得正向无迹卡尔曼滤波器的预测误差动态如下

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}=\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}-\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\mathbf{K}_k\mathbf{v}_k+\mathbf{w}_k. \tag{48}$$

令真实预测协方差为 $\mathbf{P}_{k+1|k}=\mathbb{E}\left[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T\right]$，$\delta\mathbf{P}_{k+1|k}$ 定义 $\mathbf{P}$为估计预测协方差 $\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}$ 与真实预测协方差 $\mathbf{P}^{k+1|k}$之差，而 $\Delta\mathbf{P}^{k+1|k}$则是期望 $\mathbb{E}\left[\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)^T\mathbf{F}_k^T\mathbf{U}\right.$近似误差

由 $\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)\mathbf{\Sigma}_{k|k-1}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)^T\mathbf{F}_k^T\mathbf{U}_k^x$ 得出。记 $\hat{\mathbf{Q}}_k=\mathbf{Q}_k+\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T\mathbf{F}_k^T\mathbf{U}_k^x+\delta\mathbf{P}_{k+1|k}+\Delta\mathbf{P}^{k+1|k}$，并采用（48），类似于 [40, 73], ，我们有

$$\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}=\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)\mathbf{\Sigma}_{k|k-1}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)^T\mathbf{F}_k^T\mathbf{U}_k^x+\hat{\mathbf{Q}}_k.$$

同理，我们有

$$\mathbf{\Sigma}_{k+1}^y=\mathbf{U}_{k+1}^y\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{U}_{k+1}^y+\hat{\mathbf{R}}_{k+1},$$
$$\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{xy}=\begin{cases}\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{U}_{k+1}^{xy}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{U}_{k+1}^y, & n_x\geq n_y\\ \mathbf{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{U}_{k+1}^y\mathbf{U}_{k+1}^{xy}, & n_x<n_y\end{cases},$$

其中 $\hat{\mathbf{R}}_{k+1}=\mathbf{R}_{k+1}+\Delta\mathbf{P}_{k+1}^y+\delta\mathbf{P}_{k+1}^y$ 分别表示真实测量预测协方差与估计测量预测协方差之间的差异，以及期望近似中的误差，其中 $\delta\mathbf{P}_{k+1}^y$，$\Delta\mathbf{P}_{k+1}^y$。此外，$\mathbf{U}_{k+1}^{xy}$ 是为计及估计交叉协方差中的误差而引入的未知矩阵 $\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{xy}$。

误差动态方程 (48) 及各种协方差与由 [14, 第 V-B 节1]给出的正向扩展卡尔曼滤波器具有相同形式。因此， [14, 定理 2] 同样适用于正向无迹卡尔曼滤波器稳定性。下面的定理 1 对此进行了形式化表述。

定理 1（正向无迹卡尔曼滤波器的随机稳定性）。考虑由（1）和（2）给出的非线性随机系统的正向无迹卡尔曼滤波器。如果满足以下条件，则正向无迹卡尔曼滤波器的估计误差 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 在均方意义下呈指数有界，并且以概率为 *1* 有界。

C1。存在正实数 f、h、$\bar{\alpha}$、β、$\bar{\gamma}$、σ、$\bar{\sigma}$、$\bar{q}$、$\bar{r}$、$\hat{}q$ 和 $\hat{}r$，使得对于所有 $k\geq 0$，以下界均成立。

$$\|\mathbf{F}_k\|\leq\bar{f},\quad \|\mathbf{H}_k\|\leq\bar{h},\quad \|\mathbf{U}_k^x\|\leq\bar{\alpha},\quad \|\mathbf{U}_k^y\|\leq\bar{\beta},\quad \|\mathbf{U}_k^{xy}\|\leq\bar{\gamma},$$
$$\mathbf{Q}_k\preceq\bar{q}\mathbf{I},\ \mathbf{R}_k\preceq\bar{r}\mathbf{I},\ \hat{q}\mathbf{I}\preceq\hat{}\mathbf{Q}_k,\ \hat{r}\mathbf{I}\preceq\hat{}\mathbf{R}_k,\quad \sigma\mathbf{I}\preceq\mathbf{\Sigma}_{k|k-1}\preceq\bar{\sigma}\mathbf{I}。$$

C2. $\mathbf{U}_k^x$ 和$\mathbf{F}_k$ 对于每个 $k\geq 0$ 均为非奇异矩阵。

C3. 这些常数满足不等式 $\bar{\sigma}\bar{\gamma}\bar{h}^2\bar{\beta}^2<\hat{}r$。

文献 [40,定理 1] 中提及的无迹卡尔曼滤波器稳定性，对于仅有线性测量值的情况，要求测量噪声协方差存在下界$\mathbf{R}_k$，并且$\mathbf{Q}_k$存在上界。但是，定理 1 中$\mathbf{Q}_k$没有上界。我们的非线性稳定性保证要求噪声协方差$\mathbf{Q}_k$（$\mathbf{Q}_k$）和$\mathbf{R}_k$（$\mathbf{R}_k$）分别存在上界（下界）。增大噪声协方差矩阵$\mathbf{Q}_k$ 和$\mathbf{R}_k$，可以使$\mathbf{Q}_k$ 和$\mathbf{R}_k$ 变为正定，从而满足下界要求并增强滤波器的稳定性 [40, 75]。对于能够合理估计状态 $\mathbf{x}_k$ 的实际系统（这是由于过程受到约束），可以利用函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ [76]估计未知矩阵$\mathbf{U}_k^x$ 和$\mathbf{U}_k^y$ 的界。

2) I-UKF：现在考虑第 III-B 节中采用状态转移模型 (12) 和观测模型 (3) 的 I-UKF。与正向无迹卡尔曼滤波器类似，我们引入未知矩阵 $\mathbf{U}_k^x$ 和 $\mathbf{U}_k^a$，以$\tilde{}$计入函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 线性化中的误差，$\tilde{}$以及矩阵 $\mathbf{U}_k^{xa}$，以计入互协方差矩阵估计中的误差。此外，$\bar{}$ $\mathbf{Q}_k$ 和 $\mathbf{R}_k$ 分别表示 I-UKF 误差动态中 $\hat{}\hat{}\mathbf{Q}_k$ 和 $\mathbf{R}_k$的对应项。定义 $\tilde{}\mathbf{F}_k\doteq\frac{\partial\tilde{f}(\mathbf{x},\mathbf{\Sigma}_k,\mathbf{x}_{k+1},0)}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k}$ 以及 $\mathbf{G}_k\doteq\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$。在 I-UKF 中用 $\mathbf{\Sigma}_k^*$ 近似 $\mathbf{\Sigma}_k$ 时，我们忽略任何可能的误差。假设由 $\hat{}\hat{}\mathbf{x}_k$ 计算得到的正向增益 $\mathbf{K}_{k+1}$，与由正向无迹卡尔曼滤波器中的 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 计算得到的增益近似相同。此外，由于在 I-UKF 的稳定性假设下，可以证明 $\mathbf{\Sigma}_k$ 和 $\mathbf{K}_{k+1}$ 是有界矩阵，因此这些近似误差可由正数界定。对于

正向无迹卡尔曼滤波器稳定性所要求的各矩阵界，在 I-UKF 使用自身估计值计算这些矩阵时同样成立，即 $\left\|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right\| \le \bar{f}$ 和 $\left\|\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right\| \le \bar{h}$，其中 $\mathbf{x}$ 可以是任意西格玛点。

定理 2（I-UKF 的随机稳定性）。考虑根据定理 *1* 稳定的攻击者正向无迹卡尔曼滤波器。若以下假设成立，则 *I-UKF* 的状态估计误差在均方意义下呈指数有界，且以概率 *1* 有界。

C4. 存在正实数 $\bar{g}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{p}, \hat{c}, \hat{d}, \underline{p}$，使得对所有 $k \ge 0$，以下界均成立。

$$\|\mathbf{G}_k\| \le \bar{g},\ \|\overline{\mathbf{U}}_k^{a}\| \le \bar{c},\ \|\overline{\mathbf{U}}_k^{za}\| \le \bar{d},\ \overline{\mathbf{R}}_k \preceq \bar{c}\mathbf{I},\ \hat{c}\mathbf{I} \preceq \hat{\mathbf{Q}}_k,$$
$$\hat{d}\mathbf{I} \preceq \hat{\overline{R}}_k,\ \underline{p}\mathbf{I} \preceq \overline{\mathbf{\Sigma}}_{k|k-1} \preceq \bar{p}\mathbf{I}.$$

C5. 存在一个实常数 y（不一定为正），使得对所有 $k \ge 0$，$\mathbf{\Sigma}_k^{y} \succeq y\mathbf{I}$。

C6. 函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 的输出有界，即 $\|f(\cdot)\|_2 \le \delta_f$ 和 $\|h(\cdot)\|_2 \le \delta_h$，其中 δ_f 和 δ_h 为某些正实数。

C7. 对所有 $k \ge 0$，$\tilde{\mathbf{F}}_k^{-1}$ 存在，且其逆矩阵满足 $\|\tilde{\mathbf{F}}_k^{-1}\| \le \bar{a}$，其中某个正实常数为 $\bar{a}$。

C8. 这些常数满足不等式 $\bar{p}\bar{d}\bar{g}^2\bar{c}^2 < \hat{d}$。

证明：见附录 A。 ■

虽然条件 **C5** 对常数 y 没有任何约束，但定理 2 要求对 $\mathbf{\Sigma}_k^{y}$ 施加一个额外的下界，而正向无迹卡尔曼滤波器的稳定性并不需要该下界。此外，正向无迹卡尔曼滤波器需要存在 $(\mathbf{\Sigma}_k^{y})$，以便计算其增益。因此，条件 **C5** 和 **C6** 对于为 $\tilde{\ }$ 雅可比矩阵 $\mathbf{F}_k$ 确定上界是必要的。界 $\|f(\cdot)\|_2 \le \delta_f$ 和 $\|h(\cdot)\|_2 \le \delta_h$ 分别有助于界定由状态估计生成的传播后的西格玛点 $\{\mathbf{s}_{i,k+1|k}^{*}\}$ 和 $\{\mathbf{q}_{i,k+1|k}^{*}\}$ 的大小，进而为各种协方差估计确定上界。此外，增益矩阵 $\mathbf{K}_k$ 的计算涉及 $(\mathbf{\Sigma}_k^{y})^{-1}$；假设 $\mathbf{\Sigma}_k^{y}$ 具有下界（如 **C5** 中所示），即可为其确定上界。注意，定理 2 假设函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 有界，但一般而言，$g(\cdot)$ 的输出并不有界。

3) 保守估计器：回顾保守估计对（$\hat{\ }\mathbf{x}$ $\mathbf{\Sigma}$）的定义。注意，[77] 定义的与一致估计器相同。

定义2（保守估计 [77]）。若随机变量 $\mathbf{x}$ 的无偏估计 $\hat{\ }\mathbf{x}$ 及其对应的误差协方差估计 $\mathbf{\Sigma}$ 满足 $\mathbb{E}[(\mathbf{x}-\hat{\ }\mathbf{x})(\mathbf{x}-\hat{\ }\mathbf{x})^{T}] \preceq \mathbf{\Sigma}$，则称其为保守的，即估计协方差 $\mathbf{\Sigma}$ 为真实误差协方差提供上界。

根据统计线性化技术（SLT）[48]，分别对式（12）和式（3）关于 I-UKF 的增广状态 $\mathbf{z}_k$ 和（正向）估计 $\hat{\ }\mathbf{x}_k$ 进行线性化，得到

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{U}_k^{z}\overline{\mathbf{F}}_k^{x}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{U}_k^{z}\overline{\mathbf{F}}_k^{v}\mathbf{v}_{k+1}, \tag{49}$$
$$\mathbf{a}_k = \mathbf{U}_k^{a}\overline{\mathbf{G}}_k\hat{\mathbf{x}}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k, \tag{50}$$

其中 $\overline{\mathbf{F}}_k = [\overline{\mathbf{F}}_k^{x}, \overline{\mathbf{F}}_k^{v}]$ 和 $\overline{\mathbf{G}}_k$ 分别是线性伪转移矩阵。此外，$\mathbf{U}_k^{z}$ 和 $\mathbf{U}_k^{a}$ 是为补偿统计线性化技术中的近似误差而引入的未知对角矩阵。请注意，这些未知矩阵不同于定理 2 中为泰勒近似的高阶项引入的矩阵。

定理3。考虑 *I-UKF* 的保守初始估计对（$\hat{\ }\hat{\ }\mathbf{x}_0, \mathbf{\Sigma}_0$）。那么，对于任意 $k \ge 1$，*I-UKF* 的递归估计对（$\hat{\ }\hat{\ }\mathbf{x}_k, \mathbf{\Sigma}_k$）也是保守的，满足 $\mathbb{E}[(\hat{\ }\hat{\ }\mathbf{x}_k - \hat{\ }\hat{\ }\mathbf{x}_k)(\hat{\ }\hat{\ }\mathbf{x}_k - \hat{\ }\hat{\ }\mathbf{x}_k)^{T}] \preceq \mathbf{\Sigma}_k$，其中 $\hat{\ }\mathbf{x}_k$ 是正向无迹卡尔曼滤波器的状态估计。

证明：见附录 B。 ■

由定理3和定义2可知，如果初始估计 $\hat{\ }\hat{\ }\mathbf{x}_0$ 是无偏的，且初始误差协方差估计 $\mathbf{\Sigma}_0$ 选择得足够大，则 I-UKF 是保守估计器。然而，定理3仅在基于 SLT 的线性化模型 (49) 和 (50) 分别能很好地近似非线性方程 (12) 和 (3) 时成立。特别地，如果未知矩阵 $\mathbf{U}_k^{z}$ 和 $\mathbf{U}_k^{a}$ 不足以计入近似误差，估计值 $\hat{\ }\hat{\ }\mathbf{x}_k$ 通常会有偏，因此不具备保守性。

B. RKHS-UKF

考虑关于系统动力学和 RKHS-UKF 的以下假设。**A1.** 核为宽度为 $\sigma > 0$ 的高斯核，满足 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2^2}{\sigma^2}\right)$. **A2.** 对于所有 $k \ge 0$，实际状态 $\mathbf{x}_k$ 均位于紧集 $\mathcal{X}$ 内。对于任意状态 $\mathbf{x}$，$f(\mathbf{x}) \in \mathcal{X}$，即在没有过程噪声的情况下，状态始终保持在该紧集内。**A3.** 字典 $\{\tilde{\mathbf{x}}_l\}_{1 \le l \le L}$ 是有限的，且大小固定。

A4. (25)和(26)中的真实系数矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别满足 $\|\mathbf{A}\| \le a$ 和 $\|\mathbf{B}\| \le b$，其中 a 和 b 为某些常数。

定理3.1]讨论了使用ALD准则的有限字典条件。**A2** 对于表示定理成立至关重要 [61], ，对于高斯核以任意小的误差逼近非线性函数也至关重要[66] ，对于满足ALD准则的有限字典同样如此[35]。此外，**A4** 中系数矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的界与函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 有界这一条件一致；该条件是高斯核以较小的近似误差逼近这些函数所必需的。在**A2**条件下，状态转移**(1)**修改为 $\mathbf{x}_{k+1} = \Gamma(f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k)$，其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示到集合 $\mathcal{X}$ 上的投影算子。记投影误差为 $\boldsymbol{\eta}_k$，使得

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k + \boldsymbol{\eta}_k. \tag{51}$$

请注意，此投影仅针对实际状态演化。直观而言，此投影表示对所观测过程状态施加的物理约束。例如，在雷达目标定位问题中，实际目标位置有合理的上界，该上界由雷达的最大无模糊距离和波束方向图（主瓣）决定。噪声 $\mathbf{w}_k$ 因此表示建模不确定性；假设这些不确定性服从高斯分布，可得到简化的闭式解 [33]。RKHS-UKF 的状态估计不会投影到集合 $\mathcal{X}$ 上。然而，RKHS-UKF 的系数矩阵估计 $\mathbf{A}_k$ 和 $\mathbf{B}_k$ 会投影到满足 **A4** 界的范围内。我们将函数 () 和 $_k$ ([33]) 的核函数近似误差分别记为 $\mathcal{X}()$ 和 ($_k$)，使得

函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 的核函数近似误差分别记为 $\boldsymbol{\delta}_f(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{\delta}_h(\cdot)$，使得

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\delta}_f(\mathbf{x}), \tag{52}$$
$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\delta}_h(\mathbf{x}). \tag{53}$$

状态预测误差 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}$、状态估计误差 $\tilde{\mathbf{x}}_{k}$和测量预测误差 $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ 的定义与前文正向无迹卡尔曼滤波器中的定义相同。令 $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = [\hat{\mathbf{x}}^T_{k+1|k}\ \hat{\mathbf{x}}^T_{k|k}]$，利用 (31)、(33) 和 (34)，可得 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_z} \omega_i \hat{\mathbf{A}}_k \boldsymbol{\Phi}([\mathbf{s}_{i,k}]_{1:n_x})$。然后，代入 (51) 和 (52)，得到 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\delta}_f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k + \boldsymbol{\eta}_k - \sum_{i=0}^{2n_z} \omega_i \hat{\mathbf{A}}_k \boldsymbol{\Phi}([\mathbf{s}_{i,k}]_{1:n_x})$。现在，在 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 处对 $\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ 进行线性化，并引入与 (46) 类似的未知对角矩阵 $\mathbf{U}_k^{\phi 1} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_k)\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) + \mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{w}_k \\ + \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\delta}_f(\mathbf{x}_k),\end{aligned} \tag{54}$$

其中 $\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k}) \doteq \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}}$。类似地，在 $\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k}$ 处对 $\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ 进行线性化，引入未知对角矩阵 $\mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$，并使用 (32)、(36)、(37) 和 (53)，可得

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = (\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_k)\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} \\ + \mathbf{v}_{k+1} + \boldsymbol{\delta}_h(\mathbf{x}_{k+1}).\end{aligned} \tag{55}$$

将 $\mathbf{K}_k^1$ 记为子矩阵 $[\mathbf{K}_k]_{(1:n_x,:)}$，使得 (40) 得出 $\hat{\mathbf{x}}^{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k^1\tilde{\mathbf{y}}_k$，且 $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} = \tilde{\mathbf{x}}^{k|k-1} - \mathbf{K}_k^1\tilde{\mathbf{y}}_k$。在 (54) 中代入 $\tilde{\mathbf{x}}^{k|k}$ 和 $\tilde{\mathbf{y}}_k$（使用 (55)）后，再生核希尔伯特空间-无迹卡尔曼滤波器的预测误差动态变为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1\mathbf{U}_k^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}))\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ &+ \mathbf{w}_k - \mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1\mathbf{v}_k + (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_k)\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \\ &- \mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_{k-1})\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \boldsymbol{\eta}_k \\ &+ \boldsymbol{\delta}_f(\mathbf{x}_k) - \mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1\boldsymbol{\delta}_h(\mathbf{x}_k).\end{aligned} \tag{56}$$

将 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$ 记为滤波器对 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k+1|k}]$ 的估计，将 $\boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k+1}$ 记为对 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\tilde{\mathbf{y}}^T_{k+1}]$ 的估计。它们分别是 (35) 中 $\boldsymbol{\Sigma}^z_{k+1|k}$ 和 (39) 中 $\boldsymbol{\Sigma}^{zy}_{k+1}$ 的适当子矩阵。然后，按照正向无迹卡尔曼滤波器稳定性的类似步骤，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} &= \mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{x}_{k|k})(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1\mathbf{U}_k^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}))\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1} \\ &\times (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1\mathbf{U}_k^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}))^T\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{x}_{k|k})^T\mathbf{A}^T\mathbf{U}_k^{\phi 1} + \widetilde{\mathbf{Q}}_k,\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}^y_{k+1} &= \mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T\mathbf{B}^T\mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2} \\ &+ \widetilde{\mathbf{R}}_{k+1},\end{aligned} \tag{58}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{U}^{xy}_{k+1}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T\mathbf{B}^T\mathbf{U}^{\phi 2}_{k+1}, \tag{59}$$

其中 $\widetilde{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{Q}_k + \mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k})\mathbf{K}_k^1\mathbf{K}_k^{1T}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k})^T\mathbf{A}^T\mathbf{U}_k^{\phi 1}$ 以及 $\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1} = \mathbf{R}_{k+1} + \delta\mathbf{P}^y_{k+1|k} + \Delta\mathbf{P}^y_{k+1|k}$ 以及 $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_{k+1} + \delta\mathbf{P}^y_{k+1} + \Delta\mathbf{P}^y_{k+1}$，其中 $\delta\mathbf{P}_{k+1|k}$、$\Delta\mathbf{P}_{k+1|k}$、$\delta\mathbf{P}^y_{k+1}$ 和 $\Delta\mathbf{P}^y_{k+1}$ 的定义与无迹卡尔曼滤波器稳定性中的定义类似。为简单起见，这里仅考虑了 $n_x \geq n_y$ 情形，但同样可以轻易证明这些结果对 $n_y \geq n_x$ 也成立。此外，$\mathbf{U}^{xy}_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ 是为处理互协方差估计误差而引入的未知矩阵。最后，定理4给出了 RKHS-UKF 的稳定性条件。

定理4（RKHS-UKF 的随机稳定性）。考虑针对未知系统模型（1）和（2）的 *RKHS-UKF*，且系统满足 ***A1-A4***。系数矩阵估计值按照（27）和（29）进行投影，使得这些估计值也满足 ***A4***中的界。若以下条件成立，则 *RKHS-UKF* 的估计误差 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 在均方意义下呈指数有界。

C9. 存在正实数 $\underline{\sigma}, \bar{\sigma}, \underline{\gamma}, \beta, \bar{r}, \underline{\alpha}, \bar{q}, q, r, \phi, f$ 和 h，使得对于所有 $k \geq 0$，以下界均成立：

$$\begin{aligned}&\underline{\sigma}\mathbf{I} \preceq \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1} \preceq \bar{\sigma}\mathbf{I},\ \|\mathbf{U}_k^{\phi 1}\| \leq \bar{\alpha},\ \|\mathbf{U}_k^{\phi 2}\| \leq \bar{\beta},\ \|\mathbf{U}_k^{xy}\| \leq \bar{\gamma}, \\ &\mathbf{Q}_k \preceq \bar{q}\mathbf{I},\ \mathbf{R}_k \leq \bar{r}\mathbf{I},\ \widetilde{\mathbf{Q}}_k \succeq \underline{q}\mathbf{I},\ \widetilde{\mathbf{R}}_k \succeq \underline{r}\mathbf{I},\ \|\nabla\boldsymbol{\Phi}(\cdot)\| \leq \bar{\phi}, \\ &\|\boldsymbol{\delta}_f(\cdot)\|_2 \leq \bar{f},\ \|\boldsymbol{\delta}_h(\cdot)\|_2 \leq \bar{h}.\end{aligned}$$

C10. 对于任意状态 $\mathbf{x}$，其处的雅可比矩阵 $\nabla\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$、实际系数矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{U}_k^{\phi 1}$ 对于每个 $k \geq 0$ 均为非奇异矩阵。***C11.*** 这些常数满足不等式 $\sigma\gamma\phi^2\beta^2 b^2 < \underline{r}$。

Proof: See Appendix C. ■

注意，对于高斯核 $K(\cdot,\cdot)$，状态估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 处的雅可比矩阵为 $\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{2}{\sigma^2}\begin{bmatrix} K(\tilde{\mathbf{x}}_1,\mathbf{x})(\tilde{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}})^T \\ \dots \\ (\tilde{\mathbf{x}}_L,\mathbf{x})(\tilde{\mathbf{x}}_L - \hat{\mathbf{x}})^T \end{bmatrix}$。由于 $K(\cdot,\cdot)$ 是有界函数，$\|\nabla\boldsymbol{\Phi}(\cdot)\| \leq \phi$ 意味着 $\tilde{\mathbf{x}}_l - \hat{\mathbf{x}}$ 有界，其中 $\hat{\mathbf{x}}$ 是任意状态估计，而 $\tilde{\mathbf{x}}_l$ 是由状态估计本身得到的字典元素。因此，该假设意味着我们计算出的状态估计（更具体地说，这些估计之间的差值）位于一个有界集内。不过，该集合未必与A2中真实状态所在的紧集 $\mathcal{X}$ 相同。

VI. 数值实验

我们通过比较不同示例系统中的估计误差与递归克拉美-罗下界，展示所提出滤波器的性能。此外，我们还比较逆滤波器与相应前向滤波器的相对性能。请注意，一般而言，非线性滤波器的性能也取决于系统本身，因此选择合适的滤波器需要在精度与计算开销之间进行权衡 [15]。同样的论点也适用于非线性逆滤波器。对于离散时间非线性滤波，递归克拉美-罗下界给出了均方误差（MSE）的下界，如下所示：$\mathbb{E}\left[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T\right] \succeq \mathbf{J}_k^{-1}$ 其中 $\mathbf{J}_k = \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2 \ln p(Y^k, X^k)}{\partial \mathbf{x}_k^2}\right]$ 为费希尔信息矩阵 [41]。这里，$X^k = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ 为状态向量序列，而 $Y^k = \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 为含噪观测值。此外，$p(Y^k, X^k)$ 是变量对 (Y^k, X^k) 的联合概率密度，而 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 是 $\mathbf{x}_k$ 的一个估计，其中 $\partial^2(\cdot)/\partial\mathbf{x}^2$ 表示海森矩阵。

信息矩阵 $\mathbf{J}_k$ 递归计算为 $\mathbf{J}_k = \mathbf{J}_{22}^k - \mathbf{J}_{21}^k\mathbf{J}_{k-1}^{-1} + \mathbf{J}_{11}^k\mathbf{J}_{12}^k$，$\mathbf{J}_{11}^k = \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_{k-1}^2}\right] = \mathbf{J}_{12}^k = \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_k \partial \mathbf{x}_{k-1}}\right] = \mathbf{J}_{21}^{kT}$，其中 $\mathbf{D}\ln(\mathbf{x}\,\mathbf{x})\mathbf{x}$，$\mathbf{D}\ln(\mathbf{x}\,\mathbf{x})\mathbf{x}\,\mathbf{x}(\mathbf{D})$，且 $\mathbf{D}_k^{22} = \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_k^2}\right] + \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_k \ln p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)}\right]$ [41]$\mathbf{x})\partial\mathbf{x}$。对于由 (1) 和 (2) 给出的非线性系统，前向信息矩阵 $\{\mathbf{J}_k\}$ 的递推式为 $\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{H}^T_{k+1}\mathbf{R}^{-1}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{Q}_k^{-1}\mathbf{F}_k(\mathbf{J}_k + \mathbf{F}_k^T\mathbf{Q}_k^{-1}\mathbf{F}_k)^{-1}\mathbf{F}_k^T\mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{Q}_k^{-1}$，其中 $\mathbf{F}_k = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}$，$\mathbf{H}_k = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}$ [40]。这些递推式可直接扩展，以计算逆滤波器估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的信息矩阵 $\mathbf{J}_k$。

在所有实验中，初始信息矩阵 $\mathbf{J}_0$ 和 $\mathbf{J}_0$ 分别设为 $\mathbf{\Sigma}_0^{-1}$和 $\mathbf{\Sigma}_0^{-1}$。

除了达到递归克拉美-罗下界，估计器还需要具有可信度，即其估计误差协方差 $\mathbf{\Sigma}$ 在统计意义上接近实际均方误差矩阵 $\mathbf{P}$。文献 [78]，提出了平均归一化估计误差平方（ANEES）和非可信度指标（NCI）作为可信度度量。然而，与不同估计器进行比较时，NCI 更为合适，因为它对乐观和悲观的惩罚程度相同。乐观（悲观）估计器的$\mathbf{\Sigma}$在统计意义上小于（大于）$\mathbf{P}$。定义 $NCI = (10/M)\sum_{m=1}^{M}\log_{10}(\epsilon_m/\epsilon_m^*)$，其中 $\epsilon_m = \tilde{\mathbf{x}}_m^T\mathbf{\Sigma}_m^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_m$和$\epsilon_m^* = \tilde{\mathbf{x}}_m^T\mathbf{P}_m^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_m$， M 为蒙特卡罗独立运行的总次数。这里，$\tilde{\mathbf{x}}_m = \mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}_m$表示实际状态$\mathbf{x}_m$ 为第 m 次运行时的估计误差，其估计值为 $\hat{\mathbf{x}}_m$。完美归一化一致性指标为 0；NCI 为正（负）表示乐观（悲观）。

A. 使用 *I-UKF* 进行调频解调

考虑调频解调器 [79,Sec. 8.2] 的离散时间非线性系统模型

$$\mathbf{x}_{k+1} \doteq \begin{bmatrix}\lambda_{k+1}\\ \theta_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\exp(-T/\beta) & 0\\ -\beta\exp(-T/\beta)-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_k\\ \theta_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ -\beta\end{bmatrix}w_k,$$

其观测为 $\mathbf{y}_k = \sqrt{2}[\sin\theta_k, \cos\theta_k]^T + \mathbf{v}_k$和 $a_k = \hat{\lambda}_k^2 + \epsilon_k$。其中，$w_k \sim \mathcal{N}(0,\ 0.01)$，$\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \mathbf{I}_2)$，$\epsilon_k \sim \mathcal{N}(0,\ 5)$，$T = 2\pi/16$ 和 $\beta = 100$。此外，λ_k 是前向滤波器对 λ_k 的估计。对于该系统，在前向滤波情形下，观察到扩展卡尔曼滤波器比无迹卡尔曼滤波器更准确。这里，我们比较 I-UKF 和 I-EKF 的性能。对于正向和逆向无迹卡尔曼滤波器，κ 和 κ 均设为 1，但 I-UKF 假定正向无迹卡尔曼滤波器的 κ 为 2。其他参数和初始估计与 [14] 中相同。

图2展示了前向和逆向无迹卡尔曼滤波器及扩展卡尔曼滤波器在500次运行中状态估计的时间平均均方根误差（RMSE）、递归克拉美-罗下界（RCRLB）和归一化一致性指标（NCI）。状态估计的RCRLB值为 $\sqrt{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}^{-1})}$，其中$\mathbf{J}$ 表示相应的信息矩阵。我们还考虑了前向滤波器与真实正向滤波器不一致时的逆滤波器。例如，图2a中的IUKF-E表示I-UKF在假设前向滤波器为无迹卡尔曼滤波器、而真实正向滤波器为扩展卡尔曼滤波器时的估计误差。图2以及后续实验中的其他符号也采用类似定义。从图2可以看出，前向扩展卡尔曼滤波的估计误差较低，但NCI高于正向无迹卡尔曼滤波器。因此，在前向滤波器假设正确时，IUKF-U的误差高于IEKF-E。然而，即使前向滤波器假设不正确，IUKF-E的表现仍优于I-EKF。另一方面，错误的前向滤波器假设会降低I-EKF的性能，即IEKF-U的估计精度低于IEKF-E，且NCI更高。虽然此处考虑的所有滤波器都过于乐观，但I-UKF是可信度最高的滤波器。就可信度而言，I-UKF也优于正向无迹卡尔曼滤波器，因为它利用了额外的真实状态$\mathbf{x}_k$信息。请注意，尽管I-UKF假设正向无迹卡尔曼滤波器的 κ 与其真实值不同，IUKF-U的表现仍优于正向无迹卡尔曼滤波器。

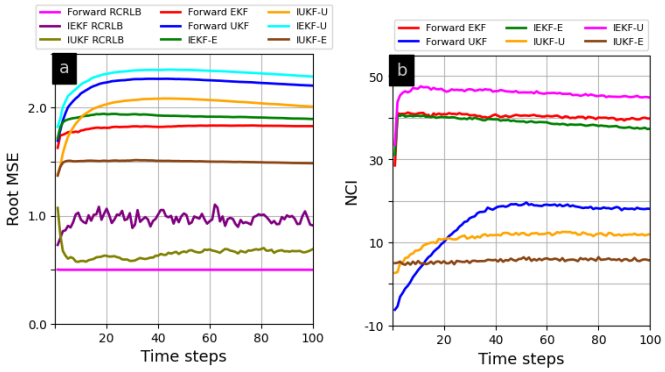

图2。（a）调频解调器系统中正向和逆向无迹卡尔曼滤波器的时间平均均方根误差和递归克拉美-罗下界；（b）归一化一致性指标。

B. 使用 *I-UKF* 的飞行器再入

考虑一个利用距离和方位角测量值跟踪再入飞行器的雷达案例，该案例常用于说明无迹卡尔曼滤波器的性能 [19, 56]。这里，我们考察I-UKF在前向滤波器假设正确和错误两种情况下的表现。将飞行器在第 k个时刻的位置记为 $[\mathbf{x}_k]_1$ 和 $[\mathbf{x}_k]_2$，速度记为 $[\mathbf{x}_k]_3$ 和 $[\mathbf{x}_k]_4$，其恒定的空气动力学参数记为 $[\mathbf{x}_k]_5$。飞行器状态的连续时间演化遵循 $[\dot{\mathbf{x}}_k]_1 = [\mathbf{x}_k]_3$, $[\dot{\mathbf{x}}_k]_2 = [\mathbf{x}_k]_4$, $[\dot{\mathbf{x}}_k]_3 = d_k[\mathbf{x}_k]_3 + g_k[\mathbf{x}_k]_1 + w_1$, $[\dot{\mathbf{x}}_k]_4 = d_k[\mathbf{x}_k]_4 + g_k[\mathbf{x}_k]_2 + w_2$, $[\dot{\mathbf{x}}_k]_5 = w_3$，其中 $[\dot{\mathbf{x}}_k]_i$ 是 $[\mathbf{x}_k]_i$ 关于时间的一阶偏导数，w_1、w_2和 w_3 表示过程噪声。实验中，我们考虑该系统在时间步为0.1秒时的离散化版本。相关量为 $d_k = \beta_k \exp((\rho_0 - \rho_k)/h_0)V_k$ 以及 $g_k = -Gm_0\rho_k^{-3}$ $\beta_k = \beta_0$ $[\ ]_5$ $V_k =$, $\sqrt{[\ ]_3^2 + [\ ]_4^2}$ $\rho_k = \sqrt{[\ ]_1^2 + [\ ]_2^2}$ ρ_0 h_0 G 其中exp (x)、x x和x x，且 , , ,m_0 和 β_0 为常数。雷达的距离和方位角测量值为 $[\mathbf{y}_k]_1 = \sqrt{([\mathbf{x}_k]_1 - \rho_0)^2 + [\mathbf{x}_k]_2^2} + v_1$，以及$[\mathbf{y}_k]_2 = \tan^{-1}\left([\mathbf{x}_{k]_2}\ \mathbf{x}_{k]_1 - \rho_0}\right) + v_2$，其中 v_1 和 v_2 表示测量噪声 [19]。

对于逆滤波器，我们考虑线性观测$\mathbf{a}_k = [[\hat{\mathbf{x}}_k]_1,\ [\hat{\mathbf{x}}_k]_2]^T + \boldsymbol{\epsilon}_k$，其中 $\boldsymbol{\epsilon}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ 3\mathbf{I}_2)$。初始状态为$\mathbf{x}_0 = [6500.4, 349.14, -1.8093, -6.7967, 0.6932]^T$。$\hat{}$ I-UKF 的初始状态估计$\hat{\mathbf{x}}_k$ 设为实际$\mathbf{x}_0$ ，初始协方差估计为 $\mathbf{\Sigma}_0 = diag(10^{-5},\ 10^{-5},\ 10^{-5},\ 10^{-5},\ 1)$。对于正向无迹卡尔曼滤波器，$\kappa$取值为 2.5，使得$\hat{\mathbf{x}}_k$ 处第 0 个西格玛点的权重为 $1/3$，其余所有西格玛点的权重相等。同样，I-UKF 的 κ 设为 $3.\overline{5}$。这里，我们假设 I-UKF 完全已知正向无迹卡尔曼滤波器的 κ 。所有其他系统参数和初始估计均与 [19]相同。

图3展示了正向和逆向无迹卡尔曼滤波器（IUKF-U）的位置估计时间平均误差（均方根）、其递归克拉美-罗下界（同样为时间平均值）以及归一化一致性指标（NCI），其中包括前向扩展卡尔曼滤波器和IUKF-E；后者错误地假设对手使用的前向滤波器是无迹卡尔曼滤波器，而对手实际使用的是扩展卡尔曼滤波器。此处，递归克拉美-罗下界计算为 $\sqrt{[\mathbf{J}^{-1}]_{1,\ 1} + [\mathbf{J}^{-1}]_{2,\ 2}}$。可以观察到，I-UKF 的误差低于正向无迹卡尔曼滤波器，与相应的递归克拉美-罗下界所显示的情况一致。I-UKF 的归一化一致性指标约为 0（完美归一化一致性指标），而正向

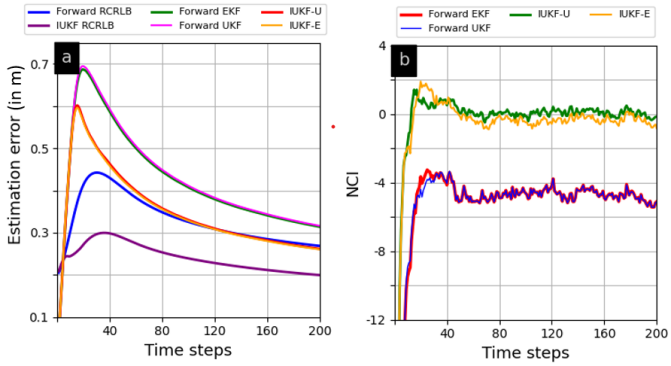

图3。（a）飞行器再入系统运行100次所得的正向和逆向无迹卡尔曼滤波器的时间平均估计误差与递归克拉美-罗下界，以及（b）归一化一致性指标。

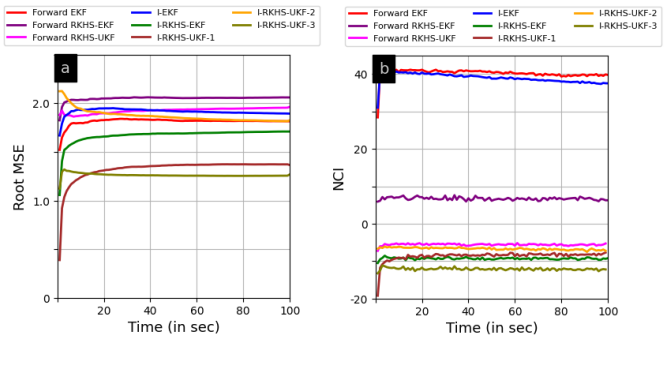

图 4. 调频解调器系统中正向和逆向 RKHS-UKF 的（a）时间平均均方根误差和（b）归一化一致性指标，并与正向和逆向扩展卡尔曼滤波器及 RKHS-EKF 进行比较。

无迹卡尔曼滤波器和扩展卡尔曼滤波器的表现较为悲观。此外，错误地假设前向滤波器（IUKF-E 情形）不会影响 I-UKF 的估计，因为正向无迹卡尔曼滤波器和扩展卡尔曼滤波器的性能相近。对于飞行器再入示例，I-EKF 的误差和归一化一致性指标与 I-UKF 相近，因此未在图3中列出。

C. 使用*RKHS-UKF*进行调频解调

回顾调频解调器系统，并将RKHS-UKF的估计精度与正向和逆向扩展卡尔曼滤波器（具有完美的系统模型信息）以及RKHS-EKF[16]（不具备任何先验信息）进行比较。与 [16, VI-C],类似，攻击者了解其观测函数，并采用简化的逆再生核希尔伯特空间无迹卡尔曼滤波器/扩展卡尔曼滤波器。防御者使用通用的逆再生核希尔伯特空间无迹卡尔曼滤波器/扩展卡尔曼滤波器学习其状态演化和观测模型，并将其作为逆滤波器（记为I-RKHS-UKF/EKF）。注意，正向RKHS-UKF/EKF与I-RKHS-UKF/EKF本质上是相同的算法，只是由不同的智能体用于计算各自所需的估计值。对于高斯核，正向和逆向基于RKHS的滤波器的所有参数均与 [16, VI-C]中的相同。对于RKHS-UKF，κ 分别设置为5和3，用于正向和逆向滤波器。

图 4 展示了前向和逆向 EKF、RKHS-EKF 及 RKHS-UKF 的时间平均均方根误差和归一化一致性指标。我们省略了前向和逆向 UKF 的性能，因为在第 VI-A 节中观察到，它们的准确度低于前向和逆向 EKF。对于 I-EKF 和 I-RKHS-EKF，真实正向滤波器分别为 EKF 和 RKHS-EKF。另一方面，I-RKHS-UKF-1、I-RKHS-UKF-2 和 I-RKHS-UKF-3 的真实正向滤波器分别为 RKHS-UKF、EKF 和 RKHS-EKF。从图 4a 可以看出，前向 RKHS-EKF 和 RKHS-UKF 的误差都高于前向 EKF，因为它们并不完全了解防御者的状态演化函数。另一方面，前向 RKHS-EKF 和 RKHS-UKF 的可信度都高于前向 EKF，但前者过于乐观，后者则过于悲观。不过，前向 RKHS-UKF 比 RKHS-EKF 更准确。尽管所有基于 RKHS 的逆滤波器在没有任何先验系统模型信息的情况下，表现都优于 I-EKF，但在估计相同状态时，I-RKHS-UKF 的表现优于 I-EKF 和 I-RKHS-EKF，即 I-RKHS-UKF-2 和 I-RKHS-UKF-3 的误差分别低于 I-EKF 和 I-RKHS-EKF。性能提升基于 RKHS 的逆滤波器性能有所提升，原因在于对于非线性函数，我们在基于 RKHS 的滤波器中使用核函数近似，而 I-EKF 使用一阶泰勒近似。不过，RKHS-EKF 在进行期望计算时会对非线性核函数进行线性化，因此引入了线性化误差。另一方面，RKHS-UKF 采用无迹变换，因此其表现也优于 RKHS-EKF。有趣的是，尽管 RKHS-UKF 过于悲观，但在所有情况下，包括将其用作前向滤波器（前向 RKHS-UKF）时，其 NCI 都相近，因此比其他所有滤波器都更加稳健。

D. 使用 *RKHS-UKF* 的洛伦兹系统

考虑三维洛伦兹系统 [4 7]

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{x}_k]_1 + \Delta t r_1(-[\mathbf{x}_k]_1 + [\mathbf{x}_k]_2) \\ [\mathbf{x}_k]_2 + \Delta t(r_2[\mathbf{x}_k]_1 - [\mathbf{x}_k]_2 - [\mathbf{x}_k]_1[\mathbf{x}_k]_3) \\ [\mathbf{x}_k]_3 + \Delta t(-r_3[\mathbf{x}_k]_3 + [\mathbf{x}_k]_1[\mathbf{x}_k]_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} w_k,$$

其中，$y_k = \Delta t\sqrt{([\mathbf{x}_k]_1 - 0.5)^2 + [\mathbf{x}_k]_2^2 + [\mathbf{x}_k]_3^2} + 0.065v_k$和 $a_k = \Delta t\sqrt{[\hat{}\mathbf{x}_k]_1^2 + ([\hat{}\mathbf{x}_k]_2 - 0.5)^2 + [\hat{}\mathbf{x}_k]_3^2} + 0.1\epsilon_k$，其中 w_k、v_k、$\epsilon_k \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$，参数为 $\Delta t = 0.01$、$r_1 = 10$、$r_2 = 28$ 和 $r_3 = 8/3$。此处，我们将正向和逆向无迹卡尔曼滤波器（系统模型信息完备）与 RKHS-UKF（不含任何先验信息）进行比较。该系统在数学上颇具研究意义，因为它具有三个不稳定平衡点 [47]。对于攻击者的状态估计，我们采用正向 RKHS-UKF；但与调频解调器应用不同的是，攻击者不知道观测函数。对于正向和逆向 RKHS-UKF，我们选择了 $\kappa = 3$和高斯核宽度 $\sigma^2 = 20$。字典采用滑动窗口准则构建，窗口长度为 15。初始系数矩阵估计（A_0,B_0）和噪声协方差矩阵估计（Q_0,R_0）分别设为适当尺寸的全 1 矩阵和单位矩阵。我们将基于 RKHS-UKF 的正向和逆向滤波器分别与参数为 $\kappa = 1.5$ 的正向无迹卡尔曼滤波器和参数为 $\kappa = 2$的 I-UKF 进行比较。我们将 $\mathbf{x}_0 = [-0.2, -0.3, -0.5]^T = \hat{}\hat{}\mathbf{x}_0$和 $\hat{}\mathbf{x}_{0} = [1.35, -3, 6]^T$初始化，而所有初始协方差均设为 0.35I。

图5展示了正向和逆矩阵 RKHS-UKF 与无迹卡尔曼滤波器的时间平均均方根误差和归一化一致性指标，其中包括错误的正向滤波器假设情形 I-UKF-R；该情形假设使用正向无迹卡尔曼滤波器，而非实际的正向 RKHS-UKF。I-RKHS-UKF 和 I-RKHS-UKF-U

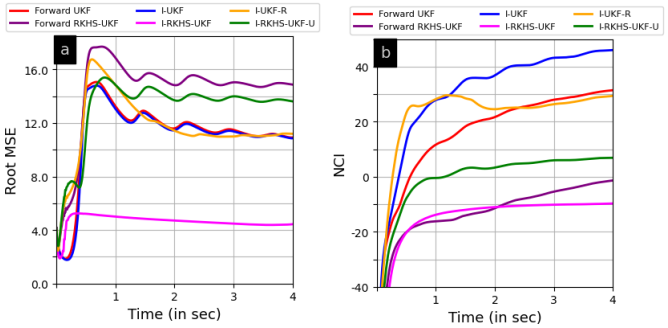

图 5. (a) 洛伦兹系统中正向和逆向 RKHS-UKF 的时间平均均方根误差；(b) 正向和逆向 RKHS-UKF 的时间平均归一化一致性指标，并与正向和逆向无迹卡尔曼滤波器进行比较，结果均为 50 次运行的平均值。

所对应的真实正向滤波器分别为 RKHS-UKF 和无迹卡尔曼滤波器。与图4a类似，我们观察到，在系统信息不完备的情况下，正向 RKHS-UKF 的估计误差高于正向无迹卡尔曼滤波器。虽然 I-UKF 的精度与其正向无迹卡尔曼滤波器相同，但 I-RKHS-UKF（I-RKHS-UKF-U 情形）无法通过自行学习系统模型达到相同的精度。然而，尽管正向 RKHS-UKF 的精度不高，I-RKHS-UKF 仍能够学习其状态估计的演化，并实现最低的估计误差。有趣的是，采用错误正向滤波器假设的 I-UKF-R，其误差也低于其正向 RKHS-UKF。从图5b可以观察到，只有 I-RKHS-UKF 在可信度方面表现稳定。I-RKHS-UKF-U 略显乐观，而 I-RKHS-UKF 则较为悲观。

VII. 总结

针对反对抗系统中的逆向认知问题，我们开发了基于无迹变换的逆向非线性滤波器。基础版 I-UKF 假设系统信息完全准确。我们还对其进行了适当修改，以适用于其他一般情形，包括非高斯噪声、连续时间状态演化和复值系统。理论保证表明，在温和条件下，若攻击者的正向无迹卡尔曼滤波器稳定，则 I-UKF 也稳定。数值结果表明，即使错误地假设正向滤波器的形式，逆滤波器仍能提供合理的估计。由于掌握了准确的实际状态信息，I-UKF 的性能也优于正向无迹卡尔曼滤波器。在无法获取先验系统信息时，我们提出了 RKHS-UKF，它采用核函数近似，并将在线近似期望最大化与无迹卡尔曼滤波递归相结合。结果表明，RKHS-UKF 的估计效果优于 RKHS-EKF。

附录 A 定理 2 的证明

我们首先在附录 A-A 中给出带有非加性过程噪声 的增广状态无迹卡尔曼滤波的稳定性结果（I-UKF 即由此构建）。在附录 A-B 中，我们给出~一些预备结果，包括状态转移（11）关于 $\hat{\mathbf{x}}_k$的雅可比矩阵$\mathbf{F}_k$ 的一个界。随后，附录 A-C 给出 I-UKF 的稳定性结论，附录 A-D 则详细证明断言 1 和 2。我们重述一个用于界定随机过程的有用引理。

引理 1 (随机过程的有界性 [39, 引理 2。1])。 考虑随机过程$\boldsymbol{\zeta}_k$ 的函数 $V_k(\boldsymbol{\zeta}_k)$ 以及实数 v_{min}、 v_{max}、 $\mu > 0$和 $0 < \lambda \leq 1$, 满足 ***(a)*** $v_{min}\|\boldsymbol{\zeta}_k\|_2^2 \leq V_k(\boldsymbol{\zeta}_k) \leq v_{max}\|\boldsymbol{\zeta}_k\|_2^2$, 且***(b)***$\mathbb{E}\left[V_{k+1}(\boldsymbol{\zeta}_{k+1})|\boldsymbol{\zeta}_k\right] - V_k(\boldsymbol{\zeta}_k) \leq \mu - \lambda V_k(\boldsymbol{\zeta}_k)$ 对所有 $k \geq 0$均成立。那么，随机过程 $\{\boldsymbol{\zeta}_k\}_{k\geq 0}$ 在均方意义下指数有界，即对于每个， 均有

$$\mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{\zeta}_k\|_2^2\right] \leq \frac{v_{max}}{v_{min}}\mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{\zeta}_0\|_2^2\right]\ 1-()()。$$

$\lambda^{\ k} + \frac{\mu}{v_{min}}\sum_{i=1}^{k-1} 1-\lambda^{\ i} \qquad k \geq 0 \qquad \{\boldsymbol{\zeta}_k\}_{k\geq 0}$

此外，该过程以概率 *1* 有界。

A. 增广状态无迹卡尔曼滤波的随机稳定性

考虑具有非加性过程噪声的状态演化模型 (1)：

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k). \tag{60}$$

非加性噪声项促使我们采用增广状态 $\mathbf{z}_k = [\mathbf{x}_k^T、\ \mathbf{w}_k^T]^T$来表述无迹卡尔曼滤波器，以估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$，如 [45] 所述。在 $\hat{\mathbf{z}}_k = [\hat{\mathbf{x}}_k^T, \mathbf{0}]^T$ 处对 $f(\cdot)$ 进行线性化后，状态预测误差 $\tilde{\mathbf{x}}^{k+1|k}$ 近似为 $\tilde{\mathbf{x}}^{k+1|k} \approx \mathbf{F}_k\tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{F}_k^w\mathbf{w}_k$，其中 $\mathbf{F}_k \doteq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x},0)\big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k}$，且 $\mathbf{F}_k^w \doteq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\hat{\mathbf{x}}_k,\mathbf{w})\big|_{\mathbf{w}=\mathbf{0}}$。与正向无迹卡尔曼滤波器类似，我们引入未知对角矩阵 $\mathbf{U}_k^x$ 和 $\mathbf{U}_k^w \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$，以计入线性化误差：

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\widetilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w\mathbf{w}_k. \tag{61}$$

因此，预测误差动态变为

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\mathbf{K}_k\mathbf{v}_k + \mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w\mathbf{w}_k. \tag{62}$$

协方差 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$、 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^y$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}$ 可以直接按照正向无迹卡尔曼滤波器情形下的相同形式表示，但其中 $\hat{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w\mathbf{Q}_k(\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w)^T + \mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T\mathbf{F}_k^T\mathbf{U}_k^x + \delta\mathbf{P}_{k+1|k} + \Delta\mathbf{P}^{k+1|k}$。下面的引理将正向无迹卡尔曼滤波器的稳定性结果推广到增广状态无迹卡尔曼滤波。

引理 2 (增广状态无迹卡尔曼滤波的随机稳定性)。考虑由 (60) 和(2)给出的非线性随机系统。若定理 *1* 的所有假设均成立，并且另外存在一个常数 w，使得对所有 $k \geq 0$ 均满足 $\|\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w\| \leq w$，则增广状态无迹卡尔曼滤波的估计误差 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 在均方意义下指数有界，且以概率 *1* 有界。

证明： 与正向无迹卡尔曼滤波器类似，不同的协方差矩阵可表示为未知矩阵的函数：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} &= \mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k)^T\mathbf{F}_k^T\mathbf{U}_k^x \\
&\quad + \hat{\mathbf{Q}}_k, \\
\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^y &= \mathbf{U}_{k+1}^y\mathbf{H}_{k+1}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{U}_{k+1}^y + \hat{\mathbf{R}}_{k+1}, \\
\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy} &= \begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{U}_{k+1}^{xy}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{U}_{k+1}^y, & n_x \geq n_y \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{H}_{k+1}^T\mathbf{U}_{k+1}^y\mathbf{U}_{k+1}^{xy}, & n_x < n_y \end{cases},
\end{aligned}$$

其中 $\hat{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w\mathbf{Q}_k(\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w)^T + \mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T\mathbf{F}_k^T\mathbf{U}_k^x + \delta\mathbf{P}_{k+1|k} + \Delta\mathbf{P}^{k+1|k}$，其他所有矩阵（包括未知矩阵 $\mathbf{U}_{k+1}^y$ 和 $\mathbf{U}_{k+1}^{xy}$）均与正向无迹卡尔曼滤波器中的定义相同。

定义 $V_k(\tilde{\mathbf{x}}^{k|k-1}) = \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^{k|k-1}$ 以应用引理 1。按照定理 [14, 的证明中的类似步骤，我们有

$$\mathbb{E}\left[V_{k+1}(\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1|k})|\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}\right] = \widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T(\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k))^T \times \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}(\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{U}_k^y\mathbf{H}_k))\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbb{E}[\mathbf{w}_k^T(\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w)^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}(\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w)\mathbf{w}_k|\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] + \mathbb{E}[\mathbf{v}_k^T(\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\mathbf{K}_k)^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}(\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\mathbf{K}_k)\mathbf{v}_k|\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}]. \tag{63}$$

考虑式（63）中的最后一个期望项。由于，$\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} \succeq \sigma_1 \mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w(\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w)^T$，我们有 $\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w(\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w)^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w(\mathbf{U}_k^w\mathbf{F}_k^w)^T \preceq \mathbf{I}$，使得按照与定理证明类似的步骤，我们有 $\mathbb{E}\left[\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}\right] \le \mathbf{w}(\mathbf{UF})^2[14, 2]$，利用界 $\mathbf{UF}$，可将其上界估计为 $\frac{w^2}{\sigma}\mathbb{E}[\bar{q}n_x] \le \frac{w^2}{\sigma}\bar{q}n_x(\mathbf{UF})^2$。利用界 $\mathbf{UF}$，可将其上界估计为 $(\mathbf{UF})^2\mathbf{I}$，使得按照与定理证明类似的步骤，即可直接证明引理。

■

B. 证明预备知识

我们陈述引理 3，供后文使用。

引理 3. 向量 $\mathbf{a}$ 和 '$n \times m$' 矩阵 $\mathbf{A}$的界可得以下界。

(a) 若 $\|\mathbf{a}\|_2 \le \delta$，则每个分量都满足 $|[\mathbf{a}]_i| \le \delta$.***(b)*** 若 $\|\mathbf{A}\| \le \delta$，则第 i 行的行和 $\sum_{j=1}^m |[\mathbf{A}]_{i,j}| \le \sqrt{m}\delta$。***(c)*** 若 $\|\mathbf{A}\| \le \delta$，则第 i 行满足 $\|[\mathbf{A}]_{(i,:)}\|_2 \le \delta$。***(d)*** 若每个分量都满足 $|[\mathbf{A}]_{i,j}| \le \delta$，则 $\|\mathbf{A}\| \le \sqrt{nm}\delta$。

证明：下文中，符号 $\|\cdot\|_\infty$ 分别表示向量和矩阵的 l_∞ 范数及诱导最大行和范数。

对于**(a)**，由向量范数的等价性可得$\|\mathbf{a}\|_\infty \le \|\mathbf{a}\|_2$。但根据 l_∞ 范数的定义，$\|\mathbf{a}\|_\infty = \max|[\mathbf{a}]_i|$，因此 $|[\mathbf{a}]_i| \le \delta$。

对于**(b)**，由矩阵范数的等价性可得 $\|\mathbf{A}\|_\infty \le \sqrt{m}\|\mathbf{A}\| \le \sqrt{m}\delta$。但根据 $\|\mathbf{A}\|_\infty$的定义，它是最大行和，因此对于矩阵$\mathbf{A}$的任意第i行，都有界$\sum_{j=1}^m |[\mathbf{A}]_{i,j}| \le \sqrt{m}\delta$。

对于**(c)**，根据谱范数的定义，$\|\mathbf{A}^T\| = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1}\|\mathbf{A}^T\mathbf{x}\|_2$。然而，$\|\mathbf{A}^T\| = \|\mathbf{A}\|$，使得对于$\mathbf{y} = \mathbf{x}^T$，有 $\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1}\|\mathbf{y}\mathbf{A}\|_2$，这意味着对于任意满足 $\|\mathbf{y}\|_2 = 1$的向量$\mathbf{y}$，都有$\|\mathbf{y}\mathbf{A}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|$。取$\mathbf{y}$ 为一个'$1 \times n$'向量，其中只有第 i个分量为 1，其余分量均为0，则$\mathbf{y}\mathbf{A}$ 成为$\mathbf{A}$ 的第 i行，由此结果显然成立。

对于**(d)**，根据矩阵范数的等价性，我们有$\|\mathbf{A}\| \le \sqrt{nm}\|\mathbf{A}\|_{\max}$ 其中 $\|\mathbf{A}\|_{\max}$ = 最大值$_{i,j}|[\mathbf{A}]_{i,j}|$。因此，$|[\mathbf{A}]_{i,j}| \le \delta$ 可得 $\|\mathbf{A}\| \le \sqrt{nm}\delta$。

■

引理 4。在定理 *2* 的假设下，正向无迹卡尔曼滤波器中为测量更新生成的第 i 个西格玛点关于状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的雅可比矩阵 $\frac{\partial \mathbf{q}_{i,\,k+1|k}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}$ 有界为 $\left\|\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial^{k+1|k}\hat{\mathbf{x}}_k}\right\| \le c'$，其中 c' 为某个正实常数。

证明：根据（7），我们观察到 $\mathbf{q}_{i,\,k+1|k}$ 是预测状态 $\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k}$ 和 i 的第 $\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}$ 列的线性函数。为了界定其相对于 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的雅可比矩阵，我们需要界定 $\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k}$ 和 $\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}$ 相对于 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的雅可比矩阵。

我们先考察 $\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k}$。由于 $\mathbf{s}_{i,k+1|k}^* = f(\mathbf{s}_{i,k})$，对于所有 $0 \le i \le 2n_x$，雅可比矩阵 $\frac{\partial \mathbf{s}_i^*}{\partial^{k+1|k}\hat{\mathbf{x}}_k} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{s}_i,^k}$，因为根据（5），$\frac{\partial \mathbf{s}_{i\,k}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} = \mathbf{I}$。因此，对（6）求导可得 $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{k+1|k}}{\partial^{k+1|k}\hat{\mathbf{x}}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{s}_i,^k}$；结合定理 1 中对雅可比矩阵 $\mathbf{F}_k$ 的上界可得

$$\left\|\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}\right\| \le \bar{f}. \tag{64}$$

以下命题 1 给出了 $\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}$ 的导数界，详细证明见附录 A-D1。

Claim 1. *For any i-th column of $\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}$, we have the upper bound $\left\|\frac{\partial[\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}]_{(:,i)}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}\right\| \le n_x\delta_\sigma$ for some $\delta_\sigma > 0$.*

根据断言 1 以及式 (7) 中的界 (64)，我们有 $\left\|\frac{\partial \mathbf{q}_{i,}}{\partial^{k+1|k}\hat{\mathbf{x}}_k}\right\| \le c'$ 其中 $c' = \bar{f} + n_x\delta_\sigma\sqrt{n_x + \kappa}$。

■

引理 5。在定理 *2* 的假设下，状态转移方程 (11) 的雅可比矩阵 $\widetilde{\mathbf{F}}_k = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma}_k, \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{0})\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k}$ 满足界 $\|\mathbf{F}_k\| \le c_f$，其中某个正实常数c_f。

证明：定义 $\mathbf{t}_k = h(\mathbf{x}^{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} - \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{q}_{i,\,k+1|k}^*$ 即实际观测 $\mathbf{y}^{k+1}$ 与其预测值之差。整理式 (11)，并利用 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{s}_{i,\,k+1|k}^*$，I-UKF 的状态转移变为 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{t}_k$，使其关于 $\hat{\mathbf{x}}_k$ （由 I-UKF 状态转移估计的状态）的雅可比矩阵为

$$\widetilde{\mathbf{F}}_k = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}\Big|_{\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{0}} + \frac{\partial(\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{t}_k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}\Big|_{\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{0}}. \tag{65}$$

首先，考虑二阶导数项。"$n_x \times n_x$"雅可比矩阵 $\frac{\partial(\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{t}_k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}$的第 j 行由"$n_x \times 1$"向量 $\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{t}_k$ 的第 j 个元素关于 $\hat{\mathbf{x}}_k$各元素的一阶偏导数组成。该第 j 个元素 $[\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{t}_k]_j = \sum_{m=1}^{n_y}[\mathbf{K}_{k+1}]_{j,\,m}[\mathbf{t}_k]_m$，因此雅可比矩阵的第 j 行可表示为

$$\left[\frac{\partial(\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{t}_k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}\right]_{(j,:)} = \sum_{m=1}^{n_y}[\mathbf{K}_{k+1}]_{j,m}\frac{\partial[\mathbf{t}_k]_m}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} + \sum_{m=1}^{n_y}[\mathbf{t}_k]_m\frac{\partial[\mathbf{K}_{k+1}]_{j,m}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}. \tag{66}$$

下面的命题 2 给出了该第 j 行的上界，详细证明见附录 A-D2。

Claim 2. *The j-th row of Jacobian of $\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{t}_k$ satisfies $\left\|\left[\frac{\partial(\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{t}_k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}\right]_{(j,:)}\right\|_2 \le c_t$ for some $c_t > 0$.*

利用命题 2，我们可以先使用引理 3（**a**），再使用引理 3（**d**），证明 $\left\|\frac{\partial(\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{t}_{\,k})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}\right\| \le n_x c_t$。因此，由（65）以及界（64），由于 $\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k}$ 与噪声 $\widetilde{\mathbf{x}}$ 项 $\mathbf{v}_{k+1}$相互独立，我们有 $\|\mathbf{F}_k\| \le c_f = f + n_x c_t$。

■

C. 定理的证明

定义 $\widetilde{\mathbf{F}}_k^v \doteq \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k, \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{v})\Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}}$ 和 $\mathbf{U}_k^v$，将其作为 I-UKF 动力学中$\mathbf{U}_k^w$ 的对应项。我们将证明，在定理 2 的假设下，I-UKF 的动力学满足

引理 2 所要求的条件。为此，我们证明，对于所有 $k \geq 0$，I-UKF 的动力学都满足以下条件，其中 c_f, c_α, c_q, c_v为某些常数。

A.C1F$\|\widetilde{\mathbf{F}}_k\| \leq c_f$.**A.C2.** $\mathbf{Q}_k \preceq c_q\mathbf{I}$。
A.C3. $\|\mathbf{U}_k^x\| \leq c_\alpha$。 **A.C4.** $\mathbf{U}_k^x$ 对所有 $k \geq 0$都是非奇异的。**A.C5.** $\|\mathbf{U}_k^{v\,\sim}\mathbf{F}_k^v\| \leq c_{v\circ}$

定理 2 假设引理 2 的所有其他条件均成立，因此 I-UKF 的估计误差在均方意义下呈指数有界，并且几乎必然有界。此外，**A.C1** 由引理 5 满足。

对于**A.C2**，状态转移（11）的噪声$\mathbf{v}_{k+1}$ 的协方差为 $\mathbf{Q}_k = \mathbf{R}_{k+1}$，根据定理 1 的一项假设，其上界为$\mathbf{R}_{k+1} \preceq \bar{r}\mathbf{I}$。因此，**A.C2** 在 $c_q = \bar{r}$ 下成立。

对于 **A.C3** 和 **A.C4**，引入未知矩阵 $\mathbf{U}_k^x$ 和 $\mathbf{U}_k^{v\,\sim}\mathbf{F}_k^v = \mathbf{K}_{k+1}$。由于式（11）关于噪声项 $\mathbf{v}_{k+1}$ 的二阶及更高阶导数均为零，因此 I-UKF 的状态预测误差 $\hat{\sim}\mathbf{x}_{k+1|k} \doteq \hat{}\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\hat{}}\mathbf{x}_{k+1|k}$为

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k+1|k} = \overline{\mathbf{U}}_k^x\widetilde{\mathbf{F}}_k\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}, \tag{67}$$

其中，$\hat{\sim}\mathbf{x}_k \doteq \hat{}\mathbf{x}_k - \hat{\hat{}}\mathbf{x}_k$ 是 I-UKF 的状态估计误差。然而，利用式（11）代入 $\hat{}\mathbf{x}_{k+1}$，并利用式（15）代入 $\hat{\hat{}}\mathbf{x}_{k+1|k}$，可得

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k+1|k} = &\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{s}_{i,k+1|k}^* - \mathbf{K}_{k+1}\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{q}_{i,k+1|k}^* + \mathbf{K}_{k+1}h(\mathbf{x}_{k+1}) \\ &+ \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - \sum_{j=0}^{2n_z}\overline{\omega}_j\bar{\mathbf{s}}_{j,k+1|k}^*.\end{aligned} \tag{68}$$

由 $\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{s}_{i,k+1|k}^* = \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i f(\mathbf{s}_{i,k})$ 使用一阶泰勒级数展开，可得 $\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{s}_{i,k+1|k}^* = f(\hat{}\mathbf{x}_k)$，$\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{q}_{i,k+1|k}^* = h(\hat{}\mathbf{x}_{k+1|k})$，$\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{s}}(\hat{}\mathbf{x})$。类似地，$\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{s}}(\hat{}\mathbf{x})$ 和 $\sum_{j=0}^{2n_z}\omega_j\mathbf{s}_{j,k+1|k}^* = \widetilde{f}(\hat{\hat{}}\mathbf{x}_k, \mathbf{\Sigma}_k, \mathbf{x}_{k+1}, 0)$。将 (11) 代入 $f(\cdot)$，并再次对涉及西格玛点的求和项使用泰勒级数展开，可得 $\sum_{j=0}^{2n_z}\omega_j\mathbf{s}_{j,k+1|k}^* = f(\hat{\hat{}}\mathbf{x}_k) - \mathbf{K}_{k+1}h(\mathbf{x}_{k+1|k}) + \mathbf{K}_{k+1}h(\mathbf{x}_{k+1})$，其中，在假设由 $\hat{\hat{}}\mathbf{x}_k$ 计算得到的增益 $\mathbf{K}_{k+1}$ 与由正向无迹卡尔曼滤波器的 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 计算得到的增益近似相同的情况下，$\mathbf{x}_{k+1|k} = f(\hat{\hat{}}\mathbf{x}_k)$。因此，(68) 简化为 $\hat{\sim}\mathbf{x}_{k+1|k} = f(\hat{}\mathbf{x}_k) - f(\hat{\hat{}}\mathbf{x}_k) - \mathbf{K}_{k+1}(h(\hat{}\mathbf{x}_{k+1|k}) - h(\mathbf{x}_{k+1|k})) + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}$。使用正向无迹卡尔曼滤波器中引入的未知矩阵 $\mathbf{U}_k^x$ 和 $\mathbf{U}_k^y$，分别对 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 和 $\hat{}\mathbf{x}_{k+1|k}$处的 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 进行线性化，可得 $\tilde{}\mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\tilde{}\mathbf{x}_k - \hat{}\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{U}_{k+1}^y\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\tilde{}\mathbf{x}_k + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}$。与 (67) 比较可得，$\mathbf{U}_k^x = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{U}_{k+1}^y\mathbf{H}_{k+1})\mathbf{U}_k^x\mathbf{F}_k\tilde{}\mathbf{F}_k^{-1}$，因为定理 2 中假设 $\tilde{}\mathbf{F}_k^{-1}$ 为非奇异矩阵。根据定理 1 中对各矩阵所作的界假设，以及定理 2 中关于 $\|\tilde{}\mathbf{F}_k^{-1}\| \leq \bar{a}$ 的假设，可直接得到 $\|\mathbf{U}_k^x\| \leq \bar{\alpha}\bar{f}\bar{a}(1 + \bar{k}\bar{\beta}\bar{h})$，使得 A.C3 成立，且 $c_\alpha = \bar{\alpha}\bar{f}\bar{a}(1 + \bar{k}\bar{\beta}\bar{h})$。此外，A.C4 也成立，即 $\mathbf{U}_k^x$为非奇异矩阵，因为根据定理 1 的假设，$\mathbf{U}_k^x$ 和 $\mathbf{F}_k$ 均为非奇异矩阵；并且可以证明，在正向无迹卡尔曼滤波器的稳定性条件下，$(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{U}_{k+1}^y\mathbf{H}_{k+1})$ 可逆，正如在定理 2] 的证明[14, 中间步骤所证明的那样。

对于 **A.C5**，由于式（11）关于 $\mathbf{v}_{k+1}$ 的二阶及更高阶导数均为零，因此有 $\mathbf{U}_k^{v\,\sim}\mathbf{F}_k^v = \mathbf{K}_{k+1}$。在定理 1 的假设下，$\|\mathbf{K}_{k+1}\| \leq k$，且 **A.C5** 成立，其中 $c_v = k$。

D. 断言 *1* 和 *2* 的证明

1) 断言 *1* 的证明：为了界定$\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}$的导数，我们首先在断言 3 中对 $\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}$ 的导数取上界。

Claim 3. 对于 $\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}$ 的任意 (l, m) 阶元素，我们有上界 $\left\|\frac{\partial[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m}}{\partial\hat{}\mathbf{x}_k}\right\|_2 \leq 4\delta_f\bar{f}$。

证明：我们有 $\mathbf{\Sigma}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*(\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*)^T - \hat{}\mathbf{x}^{k+1|k}(\hat{}\mathbf{x}^{k+1|k})^T + \mathbf{Q}_k$。其 (l, m) 阶元素为 $[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m} = \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i[\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*]_l[\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*]_m - [\hat{}\mathbf{x}_{k+1|k}]_l[\hat{}\mathbf{x}_{k+1|k}]_m + [\mathbf{Q}_k]_{l,m}$，这意味着

$$\begin{aligned}\frac{\partial[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m}}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k} = &-[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]_l\frac{\partial[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]_m}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k} - [\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]_m\frac{\partial[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]_l}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k} \\ &+ \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i[\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*]_m\frac{\partial[\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*]_l}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k} + \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i[\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*]_l\frac{\partial[\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*]_m}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k}.\end{aligned}$$

注意，此处所有导数都是梯度，因为$[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m}$是标量。定理 2 假设 $f(\cdot)$ 的输出有界，因此，根据引理 3(**a**)，$\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*$ 和 $\hat{}\mathbf{x}^{k+1|k}$ 中每个元素的大小也都被 δ_f 界定，这意味着

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m}}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k}\right\|_2 = &\delta_f\left\|\frac{\partial[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]_m}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k}\right\|_2 + \delta_f\left\|\frac{\partial[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]_l}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k}\right\|_2 \\ &+ \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\delta_f\left\|\frac{\partial[\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*]_l}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k}\right\|_2 + \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\delta_f\left\|\frac{\partial[\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*]_m}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k}\right\|_2.\end{aligned}$$

然而，$\frac{\partial[\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*]_l}{\partial\hat{}\mathbf{x}_k}$ 是雅可比矩阵 $\frac{\partial\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*}{\partial\hat{}\mathbf{x}_k}$ 的第 l 行，其谱范数被 f 界定，因为 $\|\mathbf{F}_k\| \leq f$（如推导式 (64) 时所用）。因此，利用引理 3(**c**)以及谱范数 $\left\|\frac{\partial\mathbf{s}_{i,k+1|k}^*}{\partial\hat{}\mathbf{x}_k}\right\|$和 $\left\|\frac{\partial\hat{}\mathbf{x}_{k+1|k}}{\partial\hat{}\mathbf{x}_k}\right\|$的界，我们得到$\left\|\frac{\partial[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m}}{\partial\hat{}\mathbf{x}_k}\right\|_2 \leq 4\delta_f\bar{f}$。 ■

根据 $\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}$ 的 Cholesky分解，我们有$[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m} = \sum_{j=1}^{n_x}[\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}]_{l,j}[\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}]_{m,j}$。然而，$\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}$ 是一个对称正定矩阵（定理 1 的假设之一），因此，$\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}$ 是一个下三角矩阵，其中$[\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}]_{i,j} = 0$，对于满足 $[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m} = \sum_{j=1}^{\min(l,m)}[\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}]_{l,j}[\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}]_{m,j}$ 的 $j \geq i$，其中索引 l 和 m 的取值范围为 1 到 n_x。对 $\hat{}\mathbf{x}_k$ 的第 i 个元素求导，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m}}{\partial[\hat{}\mathbf{x}_k]_i} = &\sum_{j=1}^{\min(l,m)}[\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}]_{l,j}\frac{\partial[\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}]_{m,j}}{\partial[\hat{}\mathbf{x}_k]_i} \\ &+ \sum_{j=1}^{\min(l,m)}[\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}]_{m,j}\frac{\partial[\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}}]_{l,j}}{\partial[\hat{}\mathbf{x}_k]_i}.\end{aligned} \tag{69}$$

注意，此处所有导数均为标量。我们将对该方程中的每一项分别给出上界。记$\partial[\mathbf{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,m}/\partial[\hat{}\mathbf{x}_k]_i$

为 $a_{l,\ m}$ 它是 $\partial[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,\ \partial}{}^{m}\hat{\mathbf{x}}_k$ 的第 i 个元素。此外，将第 $(l,\ j)$ 个元素 $[\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}]_{l,\ j}$ 记为 $b_{l,\ j}$，其导数 $\partial[\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}]_{l,\ \partial[\ k]_i}{}^{}\hat{\mathbf{x}}$ 记为 $c_{l,\ j}$。我们需要求出 $c_{l,\ j}$ 的上界。

关于 $|a_{l,\ m}|$ 和 $|b_{l,\ j}|$ 以及关于 $|b_{i,\ i}|$ 的上界： 根据 Claim 3 和引理 3**(a)**，我们有 $|a_{l,\ m}| \leq 4\delta_f f$。根据谱范数的定义以及定理 1 的某项假设中的界 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} \preceq \bar{\sigma}\mathbf{I}$，我们有 $\|\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}\| \leq \sqrt{\bar{\sigma}}$；再依次使用引理 3**(c)** 和引理 3**(a)**，得到 $|b_{l,\ j}| \leq \sqrt{\bar{\sigma}}$。

此外，$\det(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}) \neq 0$（正定矩阵），因此 $\det(\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}) \neq 0$。然而，由于 $\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}$ 是下三角矩阵，$\det(\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}})$ 等于其对角元素的乘积。因此，$\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}$ 的对角元素均不为 0，即 $b_{i,\ i} \neq 0$。接下来，考虑定理 2 的某项假设中的界 $\sigma\mathbf{I} \preceq \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$。由于，$\sigma$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$ 的特征值的下界，因此 $\det(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}) \geq \sigma^{n_x}$，使得 $|\det(\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}})| \geq \sigma^{n_x/2}$。将 $\det(\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}})$ 表示为其对角元素的乘积 $b_{i,\ i}$，并对除一个对角元素外的所有对角元素使用 $|b_{i,\ i}|$ 的上界，我们得到下界 $|b_{i,\ i}| \geq c_b$，其中 $c_b = \sigma^{n_x/2}\bar{\sigma}^{(1-n_x)/2}$。

关于 $|c_{l,\ j}|$ 的上界：在 (69) 中代入 l 和 m 的不同取值，可得到一个含有 $n_x(n_x+1)/2$ 个线性方程、未知数数量相同的系统 $c_{l,\ j}$，因为 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$ 是对称的。考虑 $l=1$ 和 $m=1$，可得 $2b_{1,\ 1}c_{1,\ 1} = a_{1,\ 1}$。由于 $b_{1,\ 1} \neq 0$，$c_{1,\ 1} = a_{1,\ 1}/2b_{1,\ 1}$。利用 $|a_{1,\ 1}|$ 的上界和 $|b_{1,\ 1}|$ 的下界，可得 $|c_{1,\ 1}| \leq \frac{4\delta_f \bar{f}}{2c_b}$。再代入 $l=2$ 和 $m=1$，可得 $c_{2,\ 1} = \frac{a_{1}}{\ }$、$_{2-b_{2,}}$、$\frac{}{b_{1\ 1}}{}_{1}c_{1\ 1}$、，这意味着 $|c_{2,\ 1}| \leq \frac{-8c_b\delta_f\bar{f}+4\delta_f\bar{f}\sqrt{\bar{\sigma}}}{2c_b^2}$。以相同方式继续处理线性系统中的所有方程，可以证明，对于 $\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}$ 的所有第 (l,j) 个元素，均有 $|c_{l,\ j}| \leq \delta_\sigma$，其中 δ_σ 是所有这些上界中的最大值，即 $\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}$ 任意元素关于 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 任意元素的偏导数的绝对值有界。因此，$\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}$ 第 i 列的雅可比矩阵 $\frac{\partial[\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}]_{(:,i)}}{\partial}\hat{\mathbf{x}}_k$ 的每个元素的绝对值均有界，由此引理 3 (d) 得出 $\left\|\frac{\partial[\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}]_{(:,i)}}{\partial}\hat{\mathbf{x}}_k\right\| \leq n_x\delta_\sigma$。

2) 命题 *2* 的证明：在此，我们将通过界定以下命题 4–6 中等式右侧各项的大小，对式 (66) 中第 j 行的上界进行估计。

命题 4. 向量 $\mathbf{t}_k$ 的第 m 个元素满足 $|[\mathbf{t}_k]_m| \leq 2\delta_h$。

证明：根据 $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{F}_k$ 在 $\mathbf{v}_{k+1}=0$ 处求值)，可得 $[\mathbf{t}_k]_m = [h(\mathbf{x}_{k+1})]_m - \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i[\mathbf{q}_{i,\ k+1|k}^*]_m$ 因为 $h(\mathbf{x}_{k+1})$ 和 $\{\mathbf{q}_{i,\ k+1|k}^*\}_{0\leq i\leq 2n_x}$ 不依赖于噪声项。此外，$[\mathbf{q}_{i,\ k+1|k}^*]_m = [h(\mathbf{q}_{i,\ k+1|k})]_m$。由于定理 2 假设 $h(\cdot)$ 的输出有界且 $\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i = 1$，引理 3(a) 可推出 $|[\mathbf{t}_k]_m| \leq 2\delta_h$。■

命题 5. $\mathbf{t}_k$ 的第 m 个元素的导数有界，即 $\left\|\frac{\partial[\mathbf{t}_k]_m}{\partial}\hat{\mathbf{x}}_k\right\|_2 \leq \bar{h}c'$，其中常数 c' 与引理 *4* 中定义的相同。

证明：由 $\mathbf{t}_k = h(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} - \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\mathbf{q}_{i,\ k+1|k}^*$，我们得到第 m 个元素的导数为

$$\frac{\partial[\mathbf{t}_k]_m}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k} = -\sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i\frac{\partial[\mathbf{q}_{i,k+1|k}^*]_m}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k}. \tag{70}$$

但是 $\mathbf{q}_{i\ k+1|k}^{*} = h_{\ i\ k+1|k}$，$\left\|\frac{\partial\ {}^{*}_{i\ k+1|k}}{\partial\ \ _k}\right\| = \left\|\frac{\partial h}{\partial}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{q}_{i\ k+1|k}}\frac{\partial\ _{i\ k+1|k}}{\partial\ _k}\right\|$，$(\mathbf{q},)$ 满足 $\mathbf{q},\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{x},\mathbf{q},\hat{\mathbf{x}}$。根据定理 1 的一个假设中对雅可比矩阵 $\mathbf{H}_k$ 的界，我们有 $\left\|\partial\mathbf{q}_i^*,\partial^{\ k+1|k}\hat{\mathbf{x}}_k\right\| \leq \bar{h}\left\|\partial\mathbf{q}_i,\partial^{\ k+1|k}\hat{\mathbf{x}}_k\right\|$。此外，根据引理 4，我们有 $\left\|\partial\mathbf{q}_i^*,\partial^{\ k+1|k}\hat{\mathbf{x}}_k\right\| \leq \bar{h}c'$。最后，利用引理 3(c)（$\partial[\mathbf{q}_{i,k+1|k}^*]_m\hat{\mathbf{x}}_k$ 是 m 的第 $\partial\mathbf{q}_i^*,\partial^{\ k+1|k}\hat{\mathbf{x}}_k$ 行）和 (70)，我们有 $\left\|\frac{\partial}{\partial[\mathbf{t}_{\partial^{\ k]_m}}}\hat{\mathbf{x}}_k\right\|_2 \leq \bar{h}c'$。■

命题 6. $\mathbf{K}_{k+1}$ 的第 (j,m) 个元素的导数满足 $\left\|\frac{\partial[\mathbf{K}_{k+1}]_{j,}}{\partial\ \ {}^{m}\hat{\mathbf{x}}_k}\right\|_2 \leq c_k$，其中某个 $c_k > 0$。

证明：$\mathbf{K}_{k+1}$ 的第 (j,m) 个元素为 $[\mathbf{K}_{k+1}]_{j,m} = \sum_{a=1}^{n_y}\left[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}\right]_{j,a}\left[(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}\right]_{a,m}$ 由此可得

$$\frac{\partial[\mathbf{K}_{k+1}]_{j,m}}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k} = \sum_{a=1}^{n_y}\left[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}\right]_{j,a}\frac{\partial\left[(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}\right]_{a,m}}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k} + \sum_{a=1}^{n_y}\left[(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}\right]_{a,m}\frac{\partial\left[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}\right]_{j,a}}{\partial\hat{\mathbf{x}}_k}. \tag{71}$$

再次，我们将分别界定等式右侧每一项的大小。

对 $\left[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}\right]_{j,\ a}$ 及其导数的界：根据函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 的界，我们有 $|[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]_j| \leq \delta_f$ and $[\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}}]_{j,i}| \leq \sqrt{\bar{\sigma}}$（用于证明引理 4 的命题 1 的 $|b_{j,i}|$ 界）。随后，可直接从 $([\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}]_{j\ a} = \sum_{i=0}^{2n_x}\omega_i[\ _{i\ k+1|k}]_j[\ {}^{*}_{i\ k+1|k}]_a - [\ _{k+1|k}]_j[\ _{k+1|k}]_a$ $|[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}]_{j\ a}| \leq \delta_f\delta_h + \frac{\delta_h\ \delta_f}{}+$ 得到第 a 个元素的界为 $|[\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}]_a| \leq \delta_h$ and 第 j 个元素的界为 $|[\mathbf{q}_{i,k+1|k}]_j| \leq \delta_f + \sqrt{\bar{\sigma}}(n_x+\kappa)$。由于 $,\mathbf{q},\mathbf{q},\hat{\mathbf{x}}\ \hat{\mathbf{x}}$，我们有，$(\sqrt{\bar{\sigma}}(n_x+\kappa))$。上界 $|[\mathbf{q}_{i,k+1|k}^*]_a| \leq \delta_h$ 也用于命题 4 的证明。

此外，按照引理 4 的命题 3 中用于界定 $\left\|\frac{\partial[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}]_{l,\ \partial}{}^{m}\hat{\mathbf{x}}}{\ _k}\right\|_2$ 的类似步骤，我们有 $\left\|\partial[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}]_{l,\ \partial}{}^{m}\hat{\mathbf{x}}_k\right\|_2 \leq c_{xy}$，其中 $c_{xy} = \bar{h}c'(\delta_f + \sqrt{\bar{\sigma}}(n_x+\kappa)) + c'(\delta_f + \sqrt{\bar{\sigma}}(n_x+\kappa)) + \delta_f\bar{h}c' + \delta_h\bar{f}$。

() 的界 $\left[(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}\right]_{a,\ m}$ **及其导数：** 根据定理 2 的假设之一 $y\mathbf{I} \preceq \boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y}$，我们有 $\|(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}\| \leq \frac{1}{|y|}$。使用引理 3**(c)**，然后应用引理 3**(a)**，可得 $|[(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}]_{a,\ m}| \leq 1/|y|$。

(a,m) 阶元素 $(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}$ 的导数可以用 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y}$ 中各元素的导数表示为 $\frac{\partial[(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}]_{a,\partial}{}^{m}\hat{\mathbf{x}}}{\ _k} = ,()\sum_{c\ d}-[\ \boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y\ -1}]_{a\ c}[\ \boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y\ -1}]_{d\ m}\frac{\partial[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y}]_{c\ d}}{\partial}$ $,(),,\hat{\mathbf{x}}_k$。采用与引理 4 的命题 3 中推导 $\left\|\partial[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}]_{l}\right.$ 的上界时相似的步骤，可以证明 $\left\|\partial[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y}]_{c,\partial}{}^{d}\hat{\mathbf{x}}_k\right\|_2 \leq 4\delta_h\bar{h}c'$，使得 $(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}$ 中各元素的界给出 $\left\|\frac{\partial[(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}]_{a}}{\ _k}\right\|_2 \leq \frac{n_x^2 4\delta_h\bar{h}c'}{y^2}$，$\partial\ {}^{m}\hat{\mathbf{x}}_k$。结合所有 $[\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}]_{j,\ a}$ 和 $[(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y})^{-1}]_{a,m}$ 元素的幅值界及其导数的界

它们的导数，式 (71) 给出 $\left\|\frac{\partial[\mathbf{K}_{k+1}]_{j,\cdot}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}\right\|_2 \leq c_k$ 其中

$$c_k = \frac{c_{xy}n_y}{|y|} + \frac{n_y n_x^2 c_{xy}}{y^2}(\delta_f\delta_h + \delta_h(\delta_f + \sqrt{\bar{\sigma}(n_x+\kappa)})).$$ ■

现在，在定理 1 的假设下，$\|\mathbf{K}_{k+1}\| \leq k = \bar{\sigma}\bar{\gamma}h\beta/r$ （如定理 [14, 定理 2]的证明中间步骤所得到），使得引理 3(b) 给出 $\sum_{m=1}^{n_y}|[\mathbf{K}_{k+1}]_{j,m}| \leq \sqrt{n_y}k$。最后，结合该界与式 (66) 中的命题 4–6，我们得到 $\left\|\left[\frac{\partial}{\partial(\mathbf{K}^{k+1}\mathbf{t}_k)}\right]\partial\hat{\mathbf{x}}(j,:)\right\|_2 \leq \sqrt{n_y}khc' + 2n_y c_k\delta_h$，使得命题 2 在 $c_t = \sqrt{n_y}khc' + 2n_y c_k\delta_h$ 下成立。

附录 B 定理3的证明

我们用数学归纳法证明该定理。分别将预测误差和估计误差定义为 $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} \doteq \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_k \doteq \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$。假设 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_k\tilde{\mathbf{x}}_k^T] \preceq \boldsymbol{\Sigma}_k$。我们证明该不等式对第 $(k+1)$ 个时间步也成立。将（49）代入 I-UKF 的递推式，并利用生成的西格玛点的对称性，可得 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{U}_k^z\mathbf{F}_k^x\hat{\mathbf{x}}_k$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} = \mathbf{U}_k^z\mathbf{F}_k^x\boldsymbol{\Sigma}_k(\mathbf{F}_k^x)^T\mathbf{U}_k^z + \mathbf{U}_k^z\mathbf{F}_k^v\mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{F}_k^v)^T\mathbf{U}_k^z$。因此，$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{U}_k^z\mathbf{F}_k^x\tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{U}_k^z\mathbf{F}_k^v\mathbf{v}_{k+1}$，使得 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T] = \mathbf{U}_k^z\mathbf{F}_k^x\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_k\tilde{\mathbf{x}}_k^T](\mathbf{F}_k^x)^T\mathbf{U}_k^z + \mathbf{U}_k^z\mathbf{F}_k^v\mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{F}_k^v)^T\mathbf{U}_k^z$。由于 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_k\tilde{\mathbf{x}}_k^T] \preceq \boldsymbol{\Sigma}_k$，我们有 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T] \preceq \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$。类似地，利用（50），可得 $\hat{\mathbf{a}}^{k+1|k} = \mathbf{U}_{k+1}^a\mathbf{G}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^a = \mathbf{U}_{k+1}^a\mathbf{G}_{k+1}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^T\mathbf{U}_{k+1}^a + \mathbf{R}_{k+1}$，其中 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xa} = \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^T\mathbf{U}_{k+1}^a$。同样，$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{U}_{k+1}^a\mathbf{G}_{k+1})\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\boldsymbol{\epsilon}_{k+1}$，这意味着 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T] = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{U}_{k+1}^a\mathbf{G}_{k+1})\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T](\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{U}_{k+1}^a\mathbf{G}_{k+1})^T + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}\mathbf{K}_{k+1}^T$。最后，利用 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T] \preceq \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$，可得 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T] \preceq \boldsymbol{\Sigma}_{k+1}$。

附录C 定理4的证明

由 $\mathbf{K}_{k+1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y}\end{bmatrix}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{y}\right)^{-1}$，子矩阵 $\mathbf{K}(\cdot)$ 满足

$$\mathbf{K}_{k+1}^1 = \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{U}_{k+1}^{xy}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k})^T\mathbf{B}^T\mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2} \times\left(\mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k})\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k})^T\mathbf{B}^T\mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2} + \mathbf{R}_{k+1}\right)^{-1}$$

且 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}^1\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^y(\mathbf{K}_{k+1}^1)^T$ 得到

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k} - \boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\mathbf{U}_{k+1}^{xy}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k})^T\mathbf{B}^T\mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2} \times\left(\mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k})\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k})^T\mathbf{B}^T\mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2} + \mathbf{R}_{k+1}\right)^{-1} \times\mathbf{U}_{k+1}^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k+1|k})(\mathbf{U}_{k+1}^{xy})^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}.$$

定义 $V_k(\tilde{\mathbf{x}}^{k|k-1}) = \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^{k|k-1}$。然后，利用噪声项的独立性和零均值，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\mathbf{V}_{k+1}(\tilde{\mathbf{x}}^{k+1|k})|\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}]\\ &= \tilde{\mathbf{x}}^{k|k-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1\mathbf{U}_k^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k-1}))^T\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k})^T\mathbf{U}_k^{\phi 1}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\\ &\times\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k})(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1\mathbf{U}_k^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k-1}))\tilde{\mathbf{x}}^{k|k-1}\\ &+\mathbb{E}[\mathbf{v}_k^T(\mathbf{K}_k^1)^T\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k})^T\mathbf{A}^T\mathbf{U}_k^{\phi 1}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k})\\ &\times\mathbf{K}_k^1\mathbf{v}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}]\\ &+\mathbb{E}[\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\mathbf{w}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] + r_k + s_k + q_k + u_k + b_k\\ &+\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] + \mathbb{E}[2\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}]\end{aligned} \tag{72}$$

其中

$$\begin{aligned}r_k &= \delta_f(\mathbf{x}_k) - \mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1\delta_h(\mathbf{x}_k))\\ &+2\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1\mathbf{U}_k^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}))^T\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T\mathbf{A}^T\mathbf{U}_k^{\phi 1}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\\ &\times((\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_k)\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) - \mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_{k-1})\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}),\\ s_k &= \boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_k)^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}((\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_k)\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\\ &-2\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_{k-1})\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + 2\delta_f(\mathbf{x}_k)\\ &-2\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1\delta_h(\mathbf{x}_k)),\\ q_k &= \boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_{k-1})^T(\mathbf{K}_k^1)^T\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T\mathbf{A}^T\mathbf{U}_k^{\phi 1}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\\ &\times(\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_{k-1})\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - 2\delta_f(\mathbf{x}_k)\\ &+2\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1\delta_h(\mathbf{x}_k)),\\ u_k &= \delta_f(\mathbf{x}_k)^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}(\delta_f(\mathbf{x}_k) - 2\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\mathbf{K}_k^1\delta_h(\mathbf{x}_k)),\\ b_k &= \delta_h(\mathbf{x}_k)^T(\mathbf{K}_k^1)^T\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T\mathbf{A}^T\mathbf{U}_k^{\phi 1}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})\\ &\times\mathbf{K}_k^1\delta_h(\mathbf{x}_k).\end{aligned}$$

证明需要对 $\mathbb{E}[\mathbf{V}_{k+1}(\tilde{\mathbf{x}}^{k+1|k})|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}]$ 表达式中的所有项进行适当的界定，使引理 1 的两个条件均得到满足。按照证明 [14, 定理 2],的类似步骤，我们可以证明，在定理4的假设下，以下界成立。

$$(\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1\mathbf{U}_k^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})))^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A} \times\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1\mathbf{U}_k^{\phi 2}\mathbf{B}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})) \preceq (1-\lambda)\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{-1}, \tag{73}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\mathbf{w}_k|\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \leq c_1, \tag{74}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_k^T(\mathbf{K}_k^1)^T\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T\mathbf{A}^T\mathbf{U}_k^{\phi 1}\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\mathbf{U}_k^{\phi 1}\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \times\mathbf{K}_k^1\mathbf{v}_k|\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \leq c_2, \tag{75}$$

其中 $1-\lambda = \left(1 + \frac{\bar{q}}{\sigma\ \alpha\alpha\phi((1+k\beta b\phi)^2)}\right)^{-1}$，其中 $k = \sigma\gamma\phi\beta b/\tilde{r}$ 满足 $0 < \lambda < 1$、$c_1 = \overline{qn_x}/\sigma$ 和 $c_2 = k^2\phi^2\alpha^2\underline{a}^2\underline{r}n_y/\sigma_\circ$

现在，我们将对（72）右侧的其余项进行界定。

断言7。存在常数 c_3、c_4、c_5、c_6 和 c_7，满足 $r_k \leq c_3$、$s_k \leq c_4$、$q_k \leq c_5$、$u_k \leq c_6$ 和 $b_k \leq c_7$，对所有 $k \geq 0$ 均成立。

证明：首先，我们对 r_k 进行上界估计。高斯核函数 $K(\cdot,_)$ 的最大值为 1，因此 $\|\boldsymbol{\Phi}(\cdot)\|_2 \leq \sqrt{L}$。此外，由于对系数矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 估计进行了投影，对于所有 $k \geq 0$，有 $\|\mathbf{A}_k\| \leq a$ 和 $\|\mathbf{B}_k\| \leq b$。然后，利用这些界以及定理4中的假设 **A4**，可得 $\|(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_k)\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k})\|_2 \leq 2a\sqrt{L}$ 以及 $\|(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_{k-1})\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}^{k|k-1})\|_2 \leq b\sqrt{L}$。

接下来，我们需要给出 $\|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}\|_2$ 的一个上界。由于真实状态 $\mathbf{x}_k$ 位于 $\mathcal{X}$ 中，我们有 $\|\mathbf{x}_k\|_2 \leq \epsilon$，其中 $\epsilon > 0$。此外，$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\hat{\mathbf{A}}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}([\mathbf{s}_{i,k-1}]_{1:n_x})$ 也与用于得到（54）的相同。由于 $\hat{\mathbf{A}}_{k-1}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ 有界，因此我们有 $\|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}\|_2 \leq \|\mathbf{x}_k\|_2 \pm \sum_{i=0}^{2n_z}\omega_i\|\hat{\mathbf{A}}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}([\mathbf{s}_{i,k-1}]_{1:n_x})\|_2 \leq \epsilon + a\sqrt{L}$。结合这些界以及假设的各种矩阵界，我们得到所需的 r_k 上界，其中 $c_3 = 2(\epsilon + a\sqrt{L})(1 + k\beta b\phi)\phi a\alpha(2a\sqrt{L} + \alpha a\phi k(2b\sqrt{L}) + f + \alpha a\phi kh)/\sigma_\circ$

按照类似步骤，我们可以得到该命题的其他界，其中包含 $c_4 = 4a\sqrt{L}(a\sqrt{L} + 2\alpha a\phi kb\sqrt{L} + f + \alpha a\phi kh)/\sigma$，$c_5 = 4bk\phi a\alpha\sqrt{L}(\alpha a\phi kb\sqrt{L} + f + \alpha a\phi kh)/\sigma$，$c_6 = f\,f + 2\alpha a\phi kh\ /\sigma$ ■ 和 $c_7 \equiv \alpha^2a^2\phi^2k^2h^2/\sigma_\circ$

命题 8。对于投影误差 $\boldsymbol{\eta}_k$，我们有 $\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \leq c_1$ 和 $\mathbb{E}[2\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \leq 2c_1$，其中 c_1 的定义见 (74)。

证明：利用关于 $\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}$ 的界，我们有 $\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k \leq \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{\eta}_k$。现在，根据投影 $\Gamma(\cdot)$ 的定义，我们有 $\mathbf{x}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}\|f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k - \mathbf{x}\|_2$，这意味着 $\|f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k - \mathbf{x}_{k+1}\|_2 \leq \|f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k - \mathbf{x}\|_2$，对所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ 均成立。特别地，$f(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{X}$，且投影误差 $\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{x}_{k+1} - (f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k)$，满足 $\|-\boldsymbol{\eta}_k\|_2 \leq \|\mathbf{w}_k\|_2$，这意味着 $\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{\eta}_k \leq \mathbf{w}_k^T\mathbf{w}_k$。因此，$\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k \leq \frac{1}{\sigma}\mathbf{w}_k^T\mathbf{w}_k$。取期望，并利用噪声协方差 $\mathbf{Q}_k$ 的上界，按照（[14,定理 2]）的证明中的类似方法，我们得到该结论的第一个界。

现在，$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \leq \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}[\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\eta}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}]$ 利用柯西-施瓦茨不等式可得 $\mathbb{E}[\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \leq \frac{1}{\sigma}\sqrt{\mathbb{E}[\mathbf{w}_k^T\mathbf{w}_k]}\sqrt{\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{\eta}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}]}$。再次利用 $\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{\eta}_k \leq \mathbf{w}_k^T\mathbf{w}_k$，可得 $\mathbb{E}[\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\Sigma}_{k+1|k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k|\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \leq \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}[\mathbf{w}_k^T\mathbf{w}_k]$，从而利用 $\mathbf{Q}_k \preceq q\mathbf{I}$ 可得到该命题的第二个界。■

利用界 (73)-(75) 以及断言 7 和 8，可按照引理 1 类似于 [14,定理 2]的证明方式证明定理 4。

参考文献

[1] D. Simon，《最优状态估计：卡尔曼、H_∞与非线性方法》。约翰·威立父子出版公司，2006年。[2] Y. Bar-Shalom、X. R. Li 和 T. Kirubarajan，《估计及其在跟踪和导航中的应用：理论、算法与软件》。约翰·威立父子出版公司，2004年。[3] K. L. Bell、C. J. Baker、G. E. Smith、J. T. Johnson 和 M. Rangaswamy，“用于目标检测与跟踪的认知雷达框架”，《style id='11'>IEEE《信号处理精选主题期刊》，第9卷，第8期，第1427–1439页，2015年。[4] K. V. Mishra、M. B. Shankar 和 B. Ottersten，“迈向元认知雷达：概念与应用”，载于 *IEEE* 国际雷达会议，2020年，第77–82页。[5] K. V. Mishra 和 Y. C. Eldar，“认知雷达中的时延估计性能”，载于*IEEE* 国际声学、语音与信号处理会议，2017年，第3141–3145页。[6] N. Sharaga、J. Tabrikian 和 H. Messer，“MIMO 雷达/声纳中用于目标跟踪的最优认知波束成形”，*IEEE*《信号处理精选主题期刊》，第9卷，第8期，第1440–1450页，2015年。[7] V. Krishnamurthy 和 M. Rangaswamy，“如何校准对手的能力？用于反自主系统的逆滤波”，*IEEE* 信号处理汇刊，第67卷，第24期，第6511–6525页，2019年。[8] V. Krishnamurthy、D. Angley、R. Evans 和 B. Moran，“认知识别——利用显露偏好的逆强化学习”，*IEEE* 信号处理汇刊，第68卷，第4542页，2020年，第4529页。[9] R. Mattila、C. R. Rojas、V. Krishnamurthy 和 B. Wahlberg，“用于隐马尔可夫模型的逆滤波及其在反对抗自主系统中的应用”，*IEEE* 信号处理汇刊，第68卷，第4987–5002页，2020年。[10] V. Krishnamurthy、K. Pattanayak、S. Gogineni、B. Kang 和 M. Rangaswamy，“对抗性雷达推断：逆向跟踪、认知识别与智能干扰设计”，*IEEE* 航空航天与电子系统汇刊，第57卷，第4期，第2067–2081页，2021年。[11] B. Kang、V. Krishnamurthy、K. Pattanayak、S. Gogineni 和 M. Rangaswamy，“面向认知雷达的智能干扰信号设计”，载于*IEEE* 雷达会议，2023年，第1–6页。[12] R. Mattila、C. Rojas、V. Krishnamurthy 和 B. Wahlberg，“用于隐马尔可夫模型的逆滤波”，《style id='38'>《神经信息处理系统进展》，第30卷，2017年。

[13] H. Singh、A. Chattopadhyay 和 K. V. Mishra，《非线性感知系统中的逆向认知》，载于 Asilomar 信号、系统与计算机会议，2022 年，第 1116–1120 页。[14] ——，《逆扩展卡尔曼滤波器——第一部分：基础》，《IEEE 信号处理汇刊》，第 71 卷，第 2936–2951 页，2023 年。[15] T. C. Li、J. Y. Su、W. Liu 和 J. M. Corchado，《近似高斯共轭性：非线性、多模态、不确定性与约束条件下的参数递归滤波及其他》，《信息技术与电子工程前沿》，第 18 卷，1939，2017 年 12 月，第 1913 页。[16] H. Singh、A. Chattopadhyay 和 K. V. Mishra，《逆扩展卡尔曼滤波器——第二部分：高度非线性与不确定系统》，《IEEE 信号处理汇刊》，第 71 卷，第 2952–2967 页，2023 年。[17] F. Daum，《非线性滤波器：超越卡尔曼滤波器》，《IEEE 航空航天与电子系统杂志》，第 20 卷，第 8 期，第 57–69 页，2005 年。[18] S. Bhaumik 和 P. Date，《非线性估计：基于确定性采样点的方法与应用》。CRC出版社，2019 年。[19] S. J. Julier 和 J. K. Uhlmann，《无迹滤波与非线性估计》，IEEE 会刊，第 92 卷，第 3 期，第 401–422 页，2004 年。[20] T. Lefebvre、H. Bruyninckx 和 J. De Schuller，《关于〈滤波器与估计器中均值和协方差非线性变换的新方法〉的评论》 [及作者回复]，《IEEE 自动控制汇刊》，第 47 卷，第 8 期，第 1406–1409 页，2002 年。[21] R. Van Der Merwe 和 E. A. Wan，《状态与参数估计的平方根无迹卡尔曼滤波器》，载于 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议，第 6 卷，2001 年，第 3461–3464 页。[22] K. K. Kottakki、S. Bhartiya 和 M. Bhushan，《基于非线性更新的无迹高斯和滤波器对非线性动力系统的状态估计》，《过程控制杂志》，第 24 卷，第 9 期，第 1425–1443 页，2014 年。[23] J. Idier，《逆问题的贝叶斯方法》。约翰·威立父子出版公司，2013 年。[24] F. Gustafsson，《故障检测的统计信号处理方法》，《控制年评》，第 31 卷，第 1 期，第 41–54 页，2007 年。[25] R. E. Kalman，《线性控制系统何时最优？》，《基础工程学杂志》，第 86 卷，第 1 期，第 51–60 页，1964 年。[26] A. Y. Ng 和 S. J. Russell，《逆强化学习算法》，载于国际机器学习会议，2000 年，第 663–670 页。[27] M. Opper 和 O. Winther，《在线学习的贝叶斯方法》，载于《神经网络中的在线学习》，D. Saad 编。剑桥大学出版社，1999 年，第 363–378 页。[28] T. P. Minka，《近似贝叶斯推断的期望传播》，arXiv 预印本 arXiv:1301.2294，2013 年。[29] P. S. Maybeck，《随机模型、估计与控制》。学术出版社，1982 年。[30] B. Ristic、B.-T. Vo、B.-N. Vo 和 A. Farina，《伯努利滤波器教程：理论、实现与应用》，《IEEE 信号处理汇刊》，第 61 卷，第 13 期，第 3406–3430 页，2013 年。[31] B. Ristic、J. Houssineau 和 S. Arulampalam，《利用可能性粒子滤波器进行稳健的目标运动分析》，《IET 雷达、声呐与导航》，第 13 卷，第 1 期，第 18–22 页，2019 年。[32] R. P. Mahler，《通过一阶多目标矩进行多目标贝叶斯滤波》，《IEEE 航空航天与电子系统汇刊》，第 39 卷，第 4 期，第 1152–1178 页，2003 年。[33] B. Ristic、S. Arulampalam 和 N. Gordon，《超越卡尔曼滤波器：用于跟踪应用的粒子滤波器》。Artech House，2003 年。[34] P. Zhu、B. Chen 和 J. C. Pr´ıncipe，《使用核递归最小二乘观测器的扩展卡尔曼滤波器》，载于 IEEE 国际神经网络联合会议，2011 年，第 1402–1408 页。[35] Y. Engel、S. Mannor 和 R. Meir，《核递归最小二乘算法》，《IEEE 信号处理汇刊》，第 52 卷，第 8 期，第 2275–2285 页，2004 年。[36] P. Zhu、B. Chen、J. C. Prı 等，《利用再生核希尔伯特空间中的卡尔曼滤波器学习时间序列的非线性生成模型》，《IEEE 信号处理汇刊》，第 62 卷，第 1 期，第 141–155 页，2014 年。[37] H. Singh、K. V. Mishra 和 A. Chattopadhyay，《利用逆无迹卡尔曼滤波器进行反对抗学习》，载于第 62 届 IEEE 决策与控制会议（CDC），2023 年，第 7661–7666 页。[38] D. Zhengyu Huang、T. Schneider 和 A. M. Stuart，《用于逆问题的迭代卡尔曼方法》，arXiv 预印本 arXiv:2102 01580，2021 年。[39] K. Reif、S. Gunther、E. Yaz 和 R. Unbehauen，《离散时间扩展卡尔曼滤波器的随机稳定性》，《IEEE 自动控制汇刊》，第 44 卷，第 4 期，第 714–728 页，1999 年。

[40] K. Xiong、H. Zhang 和 C. Chan，《基于无迹卡尔曼滤波器的非线性滤波性能评估》，Automatica，第 42 卷，第 2 期，第 261–270 页，2006 年。[41] P. Tichavsky、C. H. Muravchik 和 A. Nehorai，《离散时间非线性滤波的后验 Cram´er–Rao 界》，《IEEE 信号处理汇刊》，第 46 卷，第 5 期，第 1386–1396 页，1998 年。[42] K. Pattanayak、V. Krishnamurthy 和 C. Berry，《逆向逆强化学习：如何向对抗性逆强化学习者隐藏策略》，载于 IEEE 决策与控制会议，2022 年，第 3631–3636 页。[43] ——，《元认知：一种面向认知雷达的逆向逆强化学习方法》，载于 IEEE 信息融合国际会议，2022 年，第 01–08 页。[44] O. Straka、J. Dun´ık 和 M. ˇSimandl，《纯传播无迹卡尔曼滤波器的设计》，IFAC 会议论文集，第 47 卷，第 3 期，第 5933–5938 页，2014 年。[45] E. A. Wan 和 R. Van Der Merwe，《用于非线性估计的无迹卡尔曼滤波器》，载于 IEEE 信号处理、通信与控制自适应系统研讨会，2000 年，第 153–158 页。[46] I. Arasaratnam 和 S. Haykin，《容积卡尔曼滤波器》，《IEEE 自动控制汇刊》，第 54 卷，第 6 期，第 1254–1269 页，2009 年。[47] K. Ito 和 K. Xiong，《用于非线性滤波问题的高斯滤波器》，《IEEE 自动控制汇刊》，第 45 卷，927，2000 年第 5 期，第 910 页。[48] I. Arasaratnam、S. Haykin 和 R. J. Elliott，《基于高斯–埃尔米特求积的离散时间非线性滤波算法》，IEEE 会刊，第 95 卷，第 5 期，第 953–977 页，2007 年。[49] H. Singh、K. V. Mishra 和 A. Chattopadhyay，《逆容积与求积卡尔曼滤波器》，《IEEE 航空航天与电子系统汇刊》，2024 年，即将刊出。[50] R. Izanloo、S. A. Fakoorian、H. S. Yazdi 和 D. Simon，《存在非高斯噪声时基于最大相关熵准则的卡尔曼滤波》，载于信息科学与系统年会（CISS）。IEEE，2016 年，第 500–505 页。[51] X. Liu、B. Chen、B. Xu、Z. Wu 和 P. Honeine，《最大相关熵无迹滤波器》，《国际系统科学杂志》，第 48 卷，第 8 期，第 1607–1615 页，2017 年。[52] G. Wang、N. Li 和 Y. Zhang，《针对非高斯测量噪声的最大相关熵无迹卡尔曼滤波器与信息滤波器》，《富兰克林研究所杂志》，第 354 卷，第 18 期，第 8659–8677 页，2017 年。[53] R. Kalman 和 R. Bucy，《线性滤波与预测理论的新结果》，《基础工程学杂志》，第 83 卷，第 1 期，第 95–108 页，1961 年。[54] A. H. Jazwinski，《随机过程与滤波理论》。Courier Corporation，2007 年。[55] G. Y. Kulikov 和 M. V. Kulikova，《用于雷达跟踪的精确连续-离散扩展卡尔曼滤波器》，《IEEE 信号处理汇刊》，第 64 卷，第 4 期，第 948–958 页，2015 年。[56] S. Sarkka，《连续时间非线性系统状态估计中的无迹卡尔曼滤波》，《IEEE 自动控制汇刊》，第 52 卷，第 9 期，第 1631–1641 页，2007 年。[57] D. H. Dini、D. P. Mandic 和 S. J. Julier，《一种广义线性复数无迹卡尔曼滤波器》，《IEEE 信号处理快报》，第 18 卷，第 11 期，第 623–626 页，2011 年。[58] D. H. Dini 和 D. P. Mandic，《广义线性复数卡尔曼滤波器类》，《IEEE 神经网络与学习系统汇刊》，第 23 卷，第 5 期，第 775–786 页，2012 年。[59] X. Zhang、Y. Xia、C. Li 和 L. Yang，《适用于一般复值信号的无迹卡尔曼滤波器》，《IEEE 信号处理快报》，第 29 卷，第 2023–2027 页，2022 年。[60] N. Aronszajn，《再生核理论》，《美国数学会汇刊》，第 68 卷，第 3 期，第 337–404 页，1950 年。[61] B. Sch¨olkopf、R. Herbrich 和 A. J. Smola，《广义表示定理》，载于计算学习理论国际会议，2001 年，第 416–426 页。[62] F. Tobar、P. M. Djuri´c 和 D. P. Mandic，《基于再生核的无监督状态空间建模》，《IEEE 信号处理汇刊》，第 63 卷，第 19 期，第 5210–5221 页，2015 年。[63] L. Ralaivola 和 F. d'Alch´e Buc，《利用核函数对非线性时间序列进行动力学建模与预测》，《神经信息处理系统进展》，第 16 卷，2003 年。[64] W. Liu、I. Park、Y. Wang 和 J. C. Principe，《扩展核递归最小二乘算法》，《IEEE 信号处理汇刊》，第 57 卷，第 10 期，第 3801–3814 页，2009 年。[65] S. Van Vaerenbergh、J. Via 和 I. Santamar´ıa，《滑动窗口核递归最小二乘算法及其在非线性信道辨识中的应用》，载于 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议论文集

，第 5 卷，2006，第V–V页。

[66] I. Steinwart，“核对支持向量机一致性的影响”，机器学习研究期刊，第2卷，第67–93页，2001年。[67] B. Hajek，工程师随机过程。剑桥大学出版社，2015年。[68] S. Haykin，卡尔曼滤波与神经网络。约翰·威立父子出版公司，2004年。[69] R. Zhan 和 J. Wan，“用于非线性状态估计的神经网络辅助自适应无迹卡尔曼滤波器”，*IEEE* 信号处理快报，第13卷，第7期，第445–448页，2006年。[70] A. Kallapur、M. Samal、V. Puttige、S. Anavatti 和 M. Garratt，“用于小型无人机系统辨识的UKF-NN框架”，载于*2008*年第*11*届*IEEE*智能交通系统国际会议，2008年，第1021–1026页。[71] L. Ralaivola 和 F. d'Alch´e Buc，“利用核卡尔曼滤波器进行时间序列滤波、平滑与学习”，载于会议论文集。*IEEE* 国际神经网络联合会议，第3卷，2005年，第1449–1454页。[72] L. Dang、B. Chen、S. Wang、Y. Gu 和 J. C. Pr´ıncipe，“基于条件嵌入和最大相关熵准则的核卡尔曼滤波”，*IEEE*电路与系统汇刊*I*：常规论文，第66卷，第11期，第4265–4277页，2019年。[73] L. Li 和 Y. Xia，“间歇观测下无迹卡尔曼滤波器的随机稳定性”，*Automatica*，第48卷，981，2012年5月，第978期，页码不详。[74] W. Li、G. Wei、F. Han 和 Y. Liu，“基于加权平均一致性的无迹卡尔曼滤波”，*IEEE*控制论汇刊，第46卷，第2期，第558–567页，2015年。[75] K. Xiong、H. Zhang 和 C. Chan，“作者对‘关于“基于UKF的非线性滤波性能评估”的评论’的回复”，*Automat- ica*，第43卷，第3期，第569–570页，2007年。[76] M. Boutayeb 和 D. Aubry，“面向非线性离散时间系统的强跟踪扩展卡尔曼观测器”，*IEEE* 自动控制汇刊，第44卷，第8期，第1550–1556页，1999年。[77] G. Battistelli 和 L. Chisci，“Kullback-Leibler平均、概率密度一致性与具有保证稳定性的分布式状态估计”，*Automatica*，第50卷，第3期，第707–718页，2014年。[78] X. R. Li、Z. Zhao 和 V. P. Jilkov，“估计器可信度的实用度量与检验”，载于估计、跟踪与融合研讨会——致敬*Yaakov Bar-Shalom*。Citeseer，2001年，第481–495页。[79] B. D. Anderson 和 J. B. Moore，最优滤波。Courier Corporation，2012年。