含猎物趋性和噪声的捕食者-猎物相互作用随机反应扩散系统的数学分析

穆斯塔法 本达赫曼[1], 赫伯特 恩泽蒂[2], 雅克塔古杰[3] 和 穆罕默德扎古尔[4]

1*Institut de Mathématiques de Bordeaux*, 波尔多大学，*33076* 波尔多 *Cedex*，法国2，3雅温得国立高等理工学院，雅温得第一大学，*B.P 8390* 雅温得，喀麦隆4*Euromed Research Center*，*Euromed University of Fes*，摩洛哥

arXiv:2304.01706v1 [math.AP] 4 Apr 2023

文章信息

关键词：随机偏微分方程、捕食者-猎物系统、猎物趋性、鞅解、唯一性。

摘 要

本文致力于对一个描述含猎物趋性和噪声的捕食者-猎物相互作用的非线性随机反应扩散系统进行数学分析。具体而言，我们详细阐述了如何通过 Faedo-Galerkin 逼近和随机紧性方法证明弱鞅解的存在性。我们通过对 Stampacchia 方法进行随机化改造，证明了解的非负性。最后，我们通过对偶技巧证明了解的唯一性。

1. 引言

猎物-捕食者的种群动力学是生态系统的核心主题之一，有助于解释生物体的演化。正如 [9]中所述，捕食者与猎物之间的动态关系由来已久。由于其普遍存在且十分重要，它也是生态学和数学生态学中的主要研究主题之一。事实上，人们提出了各种数学模型来描述这种捕食者-猎物关系，以预测其长期结果及其对整个生态系统的影响 [44]。例如，开创性的 Lotka-Volterra 模型用于描述两个猎物和捕食者物种相互作用的生物系统动力学 [2]。初始的 Lotka-Volterra 模型经过了许多改进，其中最显著的是对猎物增长函数进行恰当设计，以及引入了多种功能反应（参见 [4, 15]及其参考文献）。

对种群动力学模型的数学研究引起了众多科学家的兴趣，并揭示了许多重要特征，例如自然生态系统中普遍观察到的斑图形成，更多详情请参见 [46] 及其中的参考文献。此外，人们观察到，一些生物物种具有探测环境中刺激信号的能力，并因此能够调整其运动方式。这种现象被称为趋性，许多学者对此进行了研究，例如参见 [5, 13, 22, 33]。文献 [1, 26]提出了具有猎物趋性的确定性捕食者-猎物系统数学模型。许多研究工作考察了该模型的不同扩展，例如参见 [14, 23, 37]。在捕食者-猎物相互作用中，趋性机制表现为追逐与逃逸：捕食者沿着猎物分布梯度的方向移动，这被称为“猎物趋性”；和/或猎物朝着与捕食者分布相反的方向移动，这被称为“捕食者趋性”，参见 [44]。因此，猎物趋性描述了捕食者向猎物种群密度较高区域移动的行为，在生物防治和生态平衡中发挥着关键作用，例如调节猎物种群、控制猎物的初期暴发，或通过形成大规模聚集以求生存 [18, 29, 40]。

众所周知，生物系统会受到环境波动的影响。因此，确定性模型存在一些局限性 [3, 36]。事实上，明确纳入随机性可能会从根本上改变并重新规范相互作用物种的行为 [17]。因此，种群增长的基本机制和因素，如资源和生命率——出生和迁出——会由于环境的持续波动而发生非确定性变化（例如阳光强度、水位的变化） [28]。通过将乘性噪声源纳入确定性系统，可以对这些波动进行建模，从而有效地再现实验数据中的种群动力学（参见 [8, 17, 31]及其中的参考文献）。因此，随机微分方程（SDEs）或随机偏微分方程（SPDEs）在种群动力学领域引起了广泛的科学关注。

mostafa.bendahmane@u-bordeaux.fr (M. Bendahmane[1]); nzetiherbert@yahoo.fr (H. Nzeti[2]); jacques.tagoudjeu@univ-yaounde1.cm(J. Tagoudjeu[3]); m.zagour@insa.ueuromed.org (M. Zagour[4]) ORCID(s):

多篇论文研究了确定性捕食者-猎物模型的有趣数学性质，例如适定性、解的正性、长期动力学行为（如平稳分布的存在性与唯一性）以及最优捕获策略，参见 [20, 30, 38, 39, 42, 43, 45]。对于不含猎物趋性项的随机空间依赖型捕食者-猎物模型，文献 [31, 32] 证明了一个具有非 Lipschitz 非线性增长系数和乘性噪声的随机反应扩散系统的适定性，并研究了解的正则性、密度的存在性以及不变测度的存在性。此外，他们利用温和解的概念研究了解的存在性与唯一性，并推导出了持久性和灭绝的充分条件。

本文旨在研究以下具有猎物趋性的非线性随机捕食者-猎物系统的数学分析：

$$\begin{cases} du_1 - d_1\Delta u_1\,dt + \operatorname{div}(\chi(u_1)\nabla u_2)\,dt = F_1(u_1,u_2)\,dt + \sigma_{u_1}(u_1,u_2)dW_{u_1}(t), \\ du_2 - d_2\Delta u_2\,dt = F_2(u_1,u_2)\,dt + \sigma_{u_2}(u_1,u_2)dW_{u_2}(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

在 Ω_T 中，其中 $\Omega_T := \Omega\times(0,T)$，$T>0$ 是一个固定时间，且 Ω 是 $\mathbb{R}^N$（$N=2$ 或 3）中的有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 光滑，外单位法向量为 η。在系统（1.1）中，函数 F_1 和 F_2 具有如下形式

$$\begin{aligned} F_1(u_1,u_2) &= e\pi(u_2)u_1 - au_1, \\ F_2(u_1,u_2) &= k(u_2) - \pi(u_2)u_1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

扩散系数记为 d_1 和 d_2。系数 e 表示猎物向捕食者的转化率，$-a$（$a>0$）表示捕食者种群的自然指数衰减。我们考虑猎物的逻辑斯蒂增长率 $k(u_2) = ru_2(1-\frac{u_2}{K})$，其中 $r>0$ 为猎物的自然增长率，K 为环境容纳量；捕食率为 $\pi(u_2)=\overline{pu_2/(1+qu_2)}$，其中 $1/p$ 表示捕食者捕捉猎物所花费的时间，q/p 为处理时间，当 $q>0$ 时，较高猎物密度会产生饱和效应。捕食者会被猎物吸引，χ 表示其猎物趋性敏感度。我们假设捕食者存在一个最大密度阈值 u_m，使得 $\chi(u_m)=0$。该阈值条件可解释如下：当捕食者密度达到一定阈值后，它们便停止在某一点聚集；同时，只要 $u_1\ge u_m$，猎物趋性交叉扩散 $\chi(u_1)$ 就恒等于零。因此，

$$\chi\in C^1(\mathbb{R}),\ \chi(u_1)=u_1(u_m-u_1)\ \text{ if }\ 0\le u_1\le u_m\ \text{ and }\ \chi(u_1)=0\ \text{ if no.} \tag{1.3}$$

在数学研究中，我们需要将 F_1 和 F_2 的定义扩展到所有 $u_1,\ u_2\in\mathbb{R}$。为此，我们作如下假设

$$\begin{aligned} F_1(u_1,u_2) &= \begin{cases} e\pi(u_2)u_1 - au_1, & \text{if } u_1,u_2\ge 0, \\ -au_1, & \text{if } u_1\ge 0 \text{ and } u_2<0, \\ 0, & \text{if } u_1<0 \text{ and } u_2\ge 0 \text{ or } u_1,u_2<0, \end{cases} \\ F_2(u_1,u_2) &= \begin{cases} k(u_2)-\pi(u_2)u_1, & \text{if } u_1,u_2\ge 0, \\ 0, & \text{if } u_1\ge 0 \text{ and } u_2<0 \text{ or } u_1,u_2<0, \\ k(u_2), & \text{if } u_1<0 \text{ and } u_2\ge 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.4}$$

在系统（1.1）中，W_{u_i} 是一个柱状维纳过程，其噪声振幅函数为 σ_{u_i}，其中 $i=1,\ 2$。形式上，可以将 $\sigma_{u_i}(u_1,u_2)\,dW_{u_i}$ 视为 $\sum_{k\ge1}\sigma_{u_i,\ k}(u_1,u_2)\,dW_{k,\ u_i}(t)$，其中 $\{W_{k,u_i}\}_{k\ge1}$ 是一个由相互独立的一维布朗运动构成的序列，$\{\sigma_{u_i,k}\}_{k\ge1}$ 是一个噪声系数序列。注意，噪声 dW_{u_1} 和 dW_{u_2} 表示相互独立的环境变量。此外，$\sigma_{u_1}(u_1,u_2)dW_{u_1}$ 和 $\sigma_{u_2}(u_1,u_2)dW_{u_2}$ 对带有猎物趋性的随机捕食者-猎物系统（1.1）中的随机扰动进行建模。我们为系统（1.1）在 $\Sigma_T := \partial\Omega\times(0,T)$上补充无通量边界条件，

$$\frac{\partial u_1}{\partial\eta}=0,\qquad \frac{\partial u_2}{\partial\eta}=0, \tag{1.5}$$

以及 Ω 中的初始分布：

$$u_1(x,0)=u_{1,0}(x),\quad u_2(x,0)=u_{2,0}(x). \tag{1.6}$$

现在我们来讨论本文的贡献。首先，由于所提出的系统（1.1）在最高阶导数项中包含强耦合，随机抛物型系统的标准理论无法自然地适用。此外，随机强迫项也使最大值原理方法变得复杂。本文系统的存在性结果基于鞅解，并通过引入适当的近似（Faedo-Galerkin）解来建立。我们为 Faedo-Galerkin 逼近推导出一系列针对该系统的先验估计，并采用紧性方法证明收敛性。此外，由于系统（1.1）具有非线性结构，因此需要近似解在适当范数下强收敛。我们证明了近似解的概率律具有弱紧性，并利用紧性和 Prokhorov 定理推导出其关于概率变量的强收敛。随后，我们利用 Skorokhod 表示定理构造近似解的几乎必然（a.s.）收敛版本。按照 Stampacchia 方法，我们证明所构造的解非负且一致有界，见 L^∞ 。关于其他类型随机偏微分方程的鞅解存在性，感兴趣的读者可参阅 [10]。最后，我们通过对偶技巧证明解的唯一性。 [6, 12, 16, 19, 27, 30, 32, 31]

本文结构安排如下：第2节介绍随机框架，并陈述噪声系数的假设。接着，给出弱鞅解的定义，并陈述主要结果。第3节采用 Faedo-Galerkin 方法构造近似解。第4节建立这些近似解的一致估计。第5 节旨在确保 Faedo-Galerkin 解序列的强紧性。因此，我们在一个空间中建立时间平移估计，该估计足以获得所需的紧性（以及概率律的紧性）。第6节证明由 Faedo-Galerkin 近似解生成的概率律具有紧性。我们利用紧性和 Skorokhod 表示定理证明，概率律的弱收敛序列存在一个极限，该极限可表示为定义在同一概率空间上的几乎必然收敛的随机变量序列的概率律。我们证明，该序列的极限是此随机系统的弱鞅解。第7节。其在 L^∞ 中的非负性和有界性留待第8 节基于 Stampacchia 方法证明。最后，在第9节建立路径唯一性结果。

2. 随机框架与解的概念

本节旨在回顾随机分析中的一些基本概念和结果（更多细节请参见 [11, 35, 25]）。接下来，我们给出具有猎物趋化性的随机捕食者-猎物系统（1.1）、（1.5）和（1.6）的弱鞅解定义。

2.1. 随机框架与解的概念

设有一个完备概率空间 $(D, \mathcal{F}, P)$，以及一个完备的右连续滤子 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$（我们假设 σ-代数 $\mathcal{F}$ 是可数生成的）。赋予博雷尔 σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{B})$ 后， $\mathbb{B}$ 是一个可分的巴拿赫空间。一个取值于 $\mathbb{B}$ 的随机变量 X 是从 $(D, \mathcal{F}, P)$ 到 $(\mathbb{B}, \mathcal{B}(\mathbb{B}))$ 的可测映射， $D \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{B}$。
$\mathbb{E}[X] := \int_D X \, dP$是随机变量 X 的期望。
对于 $p \geq 1$，巴拿赫空间 $L^p(D, \mathcal{F}, P)$ 是所有取值于 $\mathbb{B}$ 的随机变量的集合，并配备如下范数

$$\|X\|_{L^p(D,\mathcal{F},P)} := \left(\mathbb{E}\left[\|X\|_B^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p < \infty),$$
$$\|X\|_{L^\infty(D,\mathcal{F},P)} := \sup_{\omega\in D} \|X(\omega)\|_B .$$

我们用缩写 a.s.（几乎必然）表示对 P-几乎处处的 $\omega \in D$。随机过程 $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一组取值于 $\mathbb{B}$ 的随机变量 $X(t)$。若映射 $X : D\times[0,T] \to \mathbb{B}$ 是从 $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,T])$ 到 $\mathcal{B}(\mathbb{B})$ 的可测映射，则随机过程 X 称为 可测。可测过程 X 的路径 $t \to X(\omega, t)$ 自动是博雷尔可测函数。若对于所有 $t \in [0,T]$， $X(t)$ 都是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，则随机过程 X 称为 适应的。我们称

$$\mathcal{S} = \left(D, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P, \{W_k\}_{k=1}^\infty\right) \tag{2.1}$$

作为一个（布朗）随机基，其中 $\{W_k\}_{k=1}^\infty$ 是一个相互独立的一维布朗运动序列，且适应于滤子 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$。

考虑配备完备正交基 $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$的希尔伯特空间 $\mathbb{U}$，我们将 $\mathbb{U}$ 上的“柱状布朗运动” W 定义为 $W := \sum_{k\geq 1} W_k\psi_k$。从 $\mathbb{U}$ 到 $\mathbb{X}$ 的所有有界线性算子构成的向量空间记为 $L(\mathbb{U},\mathbb{X})$，其中 $\mathbb{X}$ 是内积为 $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{X}}$、范数为 $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$的可分希尔伯特空间。我们用 $L_2(\mathbb{U},\mathbb{X})$表示从 $\mathbb{U}$ 到 $\mathbb{X}$的希尔伯特–施密特算子集合，也就是说，$R\in L_2(\mathbb{U},\mathbb{X}) \iff R\in L(\mathbb{U},\mathbb{X})$ 并且

$$\begin{aligned} &\|R\|_{L_2(\mathbb{U},\mathbb{X})} := \left(\sum_{k\geq 1}\|R\psi_k\|_{\mathbb{X}}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \\ &\left(\hat{R},\tilde{R}\right)_{L_2(\mathbb{U},\mathbb{X})} = \sum_{k\geq 1}\left(\hat{R}\psi_k,\tilde{R}\psi_k\right)_X, \qquad \hat{R},\tilde{R}\in L_2(\mathbb{U},\mathbb{X}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

注意，对于带有猎物趋性的随机捕食者-猎物系统（1.1），一个自然的选择是 $\mathbb{X} = L^2(\Omega)$。对于给定的柱状布朗运动 W_{u_i}，我们可以如下定义伊藤随机积分 $\int \sigma_{u_i}\, dW_{u_i}$（例如参见 [12, 34]），其中 $i = 1,\ 2$

$$\int_0^t \sigma_{u_i}\, dW_{u_i} = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \sigma_{u_i,k}\, dW_{u_i,k}, \qquad \sigma_{u_i,k} := \sigma_{u_i}\psi_k, \tag{2.3}$$

其中σ_{u_i} 是一个满足以下条件的可预测 X值过程

$$\sigma_{u_i}\in L^2\Big(D,\mathcal{F},P;L^2((0,T);L_2(\mathbb{U},\mathbb{X}))\Big).$$

随机积分（2.3）是一个 $\mathbb{X}$值平方可积鞅，并满足 Burkholder-Davis-Gundy 不等式

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t \sigma_{u_i}\, dW_{u_i}\right\|_{\mathbb{X}}^p\right] \leq C\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left\|\sigma_{u_i}\right\|_{L_2(\mathbb{U},\mathbb{X})}^2\, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right], \tag{2.4}$$

当 $i = 1,\ 2$ 时，其中 $C > 0$ 是一个依赖于 $p \geq 1$的常数。

注意，由于 $W_{u_i} = \sum_{k\geq 1} W_{k,\ u_i}\psi_k$ 是柱状布朗运动，我们可以定义以下随机项

$$\int_\Omega\left(\int_0^t \sigma_{u_i}(u_1,u_2)dW_{u_i}\right)\varphi\, dx = \sum_{k\geq 1}\int_0^t\int_\Omega \sigma_{u_i,k}(u_1,u_2)\varphi\, dx dW_{u_i,k} \qquad \text{for } i = 1,2, \tag{2.5}$$

其中 $\varphi\in L^2(\Omega)$ 和 $\sigma_{u_i,\ k}(u_1,u_2) := \sigma_{u_i}(u_1,u_2)\psi_k$ 是实值函数。

我们对噪声 σ_{u_i}施加条件。对于每个 $u_i\in L^2(\Omega)$，我们假设 $\sigma_{u_i}(u_1,u_2):\mathbb{U}\to L^2(\Omega)$ 由下式定义

$$\sigma_{u_i}(u_1,u_2)\psi_k = \sigma_{u_i,k}(u_1(\cdot),u_2(\cdot)), \quad k\geq 1, \qquad \text{for } i = 1,2,$$

对于某些实值函数 $\sigma_{u_i,\ k}(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 它们满足（对于 $i = 1,\ 2$）

$$\begin{aligned} &\sum_{k\geq 1}\left|\sigma_{u_i,k}(u_1,u_2)\right|^2 \leq C_\sigma\left(1+|u_1|^2+|u_2|^2\right), \qquad \forall u_1,u_2\in\mathbb{R}, \\ &\sum_{k\geq 1}\left|\sigma_{u_i,k}(\bar{u}_1,\bar{u}_2)-\sigma_{u_ik}(\hat{u}_1,\hat{u}_2)\right|^2 \leq C_\sigma\Big(|\bar{u}_1-\hat{u}_1|^2+|\bar{u}_2-\hat{u}_2|^2\Big), \qquad \forall\bar{u}_1,\bar{u}_2,\hat{u}_1,\hat{u}_2\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

对于一个常数 $C_\sigma > 0$。因此，

$$\begin{aligned} &\left\|\sigma_{u_i}(u_1,u_2)\right\|_{L_2(\mathbb{U},L^2(\Omega))}^2 \leq C_\sigma\left(1+\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_2\|_{L^2(\Omega)}^2\right), \quad \forall u_1,u_2\in L^2(\Omega), \\ &\left\|\sigma_{u_i}(\bar{u}_1,\bar{u}_2)-\sigma_{u_i}(\hat{u}_1,\hat{u}_2)\right\|_{L_2(\mathbb{U},L^2(\Omega))}^2 \leq C_\sigma\Big(\|\bar{u}_1-\hat{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\bar{u}_2-\hat{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^2\Big), \quad \forall\bar{u}_1,\bar{u}_2,\hat{u}_1,\hat{u}_2\in L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{2.7}$$

对于 $i=1,\ 2$。

我们用 $\mathcal{B}(\mathbf{A})$ 表示 $\mathbf{A}$ 的 Borel 子集族，用 $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ 表示 $\mathbf{A}$ 上所有博雷尔概率测度构成的族，其中 $\mathbf{A}$ 是可分 Banach（或 Polish）空间。注意，每个随机变量 $X:D\to\mathbf{A}$ 都通过推前测度 $X_{\#}P:=P\circ X^{-1}$ 在 $\mathbf{A}$ 上诱导一个概率测度。最后，若对每个 $\epsilon>0$，都存在一个紧集 $\mathbb{K}_\epsilon\subset\mathbf{A}$，使得对所有 $n\geq 1$ 均有 $\mu_n(\mathbb{K}_\epsilon)>1-\epsilon$，则称 $(\mathbf{A},\mathcal{B}(\mathbf{A}))$ 上的概率测度序列 $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ 是紧的。

2.2. 解的概念与存在性结果

我们首先 给出弱鞅解的定义。接下来，我们陈述存在性结果 ts.

定义 2.1（弱鞅解）。设 $\mu_{u_{1,\ 0}}$ 且 $\mu_{u_{2,\ 0}}$ 是 $L^2(\Omega)$ 上的概率测度。随机捕食者-猎物趋性系统 (1.1)、(1.5) 和 (1.6)的弱鞅解是满足以下条件的一组 $\left(S,u_1,u_2\right)$

1. $S=\left(D,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]},P,\left\{W_{k,u_1}\right\}_{k=1}^{\infty},\left\{W_{k,u_2}\right\}_{k=1}^{\infty}\right)$ 是一个随机基；2. $W_{u_1}:=\sum_{k\geq 1}W_{k,\ u_1}\psi_k$ 和 $W_{u_2}:=\sum_{k\geq 1}W_{k,\ u_2}\psi_k$ 是相对于滤子 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$适应的两个相互独立的柱状布朗运动；3. 对于 P-几乎处处的 $\omega\in D$，$u_1(\omega)$，$u_2(\omega)$ 非负，且$u_1(\omega)$，$u_2(\omega)\in L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega)\right)\cap L^\infty(\Omega_T)\cap L^2\left((0,T);H^1(\Omega)\right)$。
4. $u_{1,\ 0}:=u_1(0)$ 和$u_{2,\ 0}:=u_2(0)$ 的概率分布分别为 $\mu_{u_{1,\ 0}}$ 和 $\mu_{u_{2,\ 0}}$：

$$P\circ u_{1,0}^{-1}=\mu_{u_{1,0}},\qquad P\circ u_{2,0}^{-1}=\mu_{u_{2,0}};$$

5. 以下恒等式对任意 $t\in[0,T]$ 均几乎必然成立（相对于 P）

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_1(t)\varphi_{u_1}\,dx+d_1\int_0^t\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla\varphi_{u_1}\,dx\,ds-\int_0^t\int_\Omega\chi(u_1)\nabla u_2\cdot\nabla\varphi_{u_1}\,dx\,ds\\
&=\int_\Omega u_{1,0}\,\varphi_{u_1}\,dx+\int_0^t\int_\Omega F_1(u_1,u_2)\varphi_{u_1}\,dx\,ds+\int_0^t\int_\Omega\sigma_{u_1}(u_1,u_2)\varphi_{u_1}\,dx dW_{u_1}(s),\\
&\int_\Omega u_2(t)\varphi_{u_2}\,dx+d_2\int_0^t\int_\Omega\nabla u_2\cdot\nabla\varphi_{u_2}\,dx\,ds\\
&=\int_\Omega u_{2,0}\varphi_{u_2}\,dx+\int_0^t\int_\Omega F_2(u_1,u_2)\varphi_{u_2}\,dx\,ds+\int_0^t\int_\Omega\sigma_{u_2}(u_1,u_2)\varphi_{u_2}\,dx dW_{u_2}(s),
\end{aligned}\tag{2.8}$$

对所有 $\varphi_{u_1},\varphi_{u_2}\in H^1(\Omega)$ 均成立。

我们的主要结果是关于弱解的存在唯一性定理 .

定理 2.1（弱鞅解的存在性）。假设(1.3)和(2.6)成立，且初始条件 $(u_{1,0},u_{2,0})$ 在 L^∞ 中非负且有界。设 $\mu_{u_{1,0}}$, $\mu_{u_{2,0}}$ 为满足下列条件的概率测度

$$\int_{L^2(\Omega)}\|u_i\|_{L^2(\Omega)}^r\,d\mu_{u_{i,0}}(u_i)<+\infty\qquad for\ i=1,2\ and\ r>2.\tag{2.9}$$

那么，随机捕食者-猎物趋性系统 (1.1), (1.5) 和 (1.6) 存在一个符合定义*2.1*.

3. 随机 Faedo-Galerkin 解的构造

本节旨在精确定义 Faedo-Galerkin 方程，并证明这些方程存在解。我们先固定一个随机基 S，参见（2.1），以及 $\mathcal{F}_0$-可测的初始数据 $u_{1,\ 0}$，$u_{2,\ 0}\in L^2(D;L^2(\Omega))$，其对应的概率分布分别为 $\mu_{u_{1,\ 0}}$，$\mu_{u_{2,\ 0}}$于 $L^2(\Omega)$ 上。我们寻求由.....得到的近似解。

将 (1.1)、(1.5) 和 (1.6) 投影到有限维空间 $\mathbb{X}_n := \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$，其中序列$\{e_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\Omega)$的正交归一基。记 L^2 为正交投影

$$\Pi_n : L^2(\Omega) \to \mathbb{X}_n = \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_n\}, \quad \Pi_n u := \sum_{\ell=1}^{n} (u, e_\ell)\, e_\ell. \tag{3.1}$$

我们考虑噪声系数的以下近似:

$$\begin{aligned} &\sigma^n_{u_i,k}(u^n_1, u^n_2) := \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_{u_i,k,\ell}(u^n_1, u^n_2) e_\ell, \quad \text{where} \\ &\sigma_{u_i,k,\ell}(u^n_1, u^n_2) := \left(\sigma_{u_i,k}(u^n_1, u^n_2), e_\ell\right)_{L^2(\Omega)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

现在，定义我们的 Faedo-Galerkin 逼近

$$u^n_1, u^n_2 : [0, T] \to \mathbb{X}_n, \quad u^n_1(t) = \sum_{\ell=1}^{n} c^n_{1,\ell}(t) e_\ell, \quad u^n_2(t) = \sum_{\ell=1}^{n} c^n_{2,\ell}(t) e_\ell, \tag{3.3}$$

其中，系数 $c^n_1 = \left\{c^n_{1,\ell}(t)\right\}_{\ell=1}^{n}$ 和 $c^n_2 = \left\{c^n_{2,\ell}\right\}_{\ell=1}^{n}$ 的确定方式使得以下方程成立（对 $\ell = 1, \dots, n$）：

$$\begin{aligned} &\left(du^n_1, e_\ell\right) + d_1 \left(\nabla u^n_1, \nabla e_\ell\right) dt - \left(\chi(u^n_1)\nabla u^n_2, \nabla e_\ell\right) dt \\ &\qquad = \left(F_1(u^n_1, u^n_2), e_\ell\right) dt + \sum_{k=1}^{n} \left(\sigma^n_{u_1,k}(u^n_1, u^n_2), e_\ell\right) dW_{u_1,k}(t), \\ &\left(du^n_2, e_\ell\right) + d_2 \left(\nabla u^n_2, \nabla e_\ell\right) dt \\ &\qquad = \left(F_2(u^n_1, u^n_2), e_\ell\right) dt + \sum_{k=1}^{n} \left(\sigma^n_{u_2,k}(u^n_1, u^n_2), e_\ell\right) dW_{u_2,k}(t), \end{aligned} \tag{3.4}$$

并且，关于初始数据，

$$\begin{aligned} &u^n_1(0) = u^n_{1,0} := \sum_{\ell=1}^{n} c^n_{1,\ell}(0) e_\ell, \quad c^n_{1,\ell}(0) := \left(u^n_{1,0}, e_\ell\right)_{L^2(\Omega)}, \\ &u^n_2(0) = u^n_{2,0} := \sum_{\ell=1}^{n} c^n_{2,\ell}(0) e_\ell, \quad c^n_{2,\ell}(0) := \left(u^n_{2,0}, e_\ell\right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

利用投影算子 Π_n的基本性质，我们得到

$$\begin{aligned} &u^n_1(t) - u^n_1(0) - \int_0^t \Pi_n \left[\mathrm{div}\, \left(d_1 \nabla u^n_1 - \chi(u^n_1)\nabla u^n_2\right)\right] ds \\ &\qquad = \int_0^t \Pi_n \left[F_1(u^n_1, u^n_2)\right] ds + \int_0^t \sigma^n_{u_1}(u^n_1, u^n_2) dW^n_{u_1}(s) \quad \text{in } \left(H^1(\Omega)\right)^\star, \\ &u^n_2(t) - u^n_2(0) - d_2 \int_0^t \Pi_n \left[\Delta u^n_2\right] ds \\ &\qquad = \int_0^t \Pi_n \left[F_2(u^n_1, u^n_2)\right] ds + \int_0^t \sigma^n_{u_2}(u^n_1, u^n_2) dW^n_{u_2}(s) \quad \text{in } \left(H^1(\Omega)\right)^\star, \end{aligned} \tag{3.6}$$

初始数据 $u^n_{1,0} = \Pi_n u_{1,0}$和 $u^n_{2,0} = \Pi_n u_{2,0}$。注意，系统（3.6）允许将 u^n_1, u^n_2视为 $\mathbb{R}^n$中的随机过程，因此我们可以对 Faedo-Galerkin 方程应用有限维伊藤公式。

有限维问题（3.4）、（3.5）的路径解的存在性由以下引理给出。

引理 3.1. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，*Faedo-Galerkin* 方程 (3.3)、(3.4)、(3.5) 在 $[0,T]$ 上存在唯一的适应解$(u_1^n(t), u_2^n(t))$。此外，u_1^n，$u_2^n \in C([0,T];\mathbb{X}_n)$ 几乎处处，其中 $\mathbb{E}\left[\left\|u_i^n(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \lesssim_{T,\, n} 1$、$\forall t \in [0,T]$、$i = 1,\ 2$。

证明。 我们要寻找一个取值于 $\mathbb{X}_n \times \mathbb{X}_n$ 的随机过程 C^n，使其成为以下随机微分方程组的解

$$dC^n = M(C^n)\,dt + \Gamma(C^n)dW^n, \tag{3.7}$$

where $C^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{pmatrix}$, $M(C^n) = \begin{pmatrix} A_{u_1}(C^n) \\ A_{u_2}(C^n) \end{pmatrix}$,

$$A_{u_1}(C^n) = -\Pi_n \mathrm{div}\left(d_1 \nabla u_1^n - \chi(u_1^n)\nabla u_2^n\right) + \Pi_n F_1(u_1^n, u_2^n),$$
$$A_{u_2}(C^n) = -\Pi_n \mathrm{div}\left(d_2 \nabla u_2^n\right) + \Pi_n F_2(u_1^n, u_2^n).$$

and

$$\Gamma(C^n)dW^n := \begin{pmatrix} \sigma_{u_1}^n\left(u_1^n, u_2^n\right) dW_{u_1}^n \\ \sigma_{u_2}^n\left(u_1^n, u_2^n\right) dW_{u_2}^n \end{pmatrix}.$$

我们为系统 (3.7) 补上初始数据 $C^n(0) = C_0^n$，其中 C_0^n 是由 (3.5) 给出的向量。利用 F_1、F_2、Γ 的全局 Lipschitz 连续性，我们很容易推出弱强制性条件：对所有 $C = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{X}_n \times \mathbb{X}_n$,

$$2\big(M(C), C\big) + \|\Gamma(C)\|^2_{L^2(\Omega)} \le K\left(1 + \|C\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \tag{3.8}$$

其中某个常数为 $K > 0$。接下来证明以下局部弱单调性：对于所有 $C_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{X}_n \times \mathbb{X}_n$

以及 $C_2 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{X}_n \times \mathbb{X}_n$ 满足 $\left\|u_i^n\right\|_{L^2(\Omega)}$，$\left\|\tilde{u}_i^n\right\|_{L^2(\Omega)} \le r$，对于任意 $r > 0$ 和 $i = 1,\ 2$，均有

$$\begin{aligned} &2\big(M(C_1) - M(C_2), C_1 - C_2\big) + \big\|\Gamma(C_1) - \Gamma(C_2)\big\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad \le K(r)\left\|C_1 - C_2\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中常数 $K(r)$ 可能依赖于 r，$(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 内积。为此，我们固定一个实数 $r > 0$，并令 $U_1 := u_1 - \tilde{u}_1$ 和 $U_2 := u_2 - \tilde{u}_2$，其中 u_i，$\tilde{u}_i$ 是 $\mathbb{X}_n$ 中的任意函数，且满足 $\|u_i\|_{L^2(\Omega)}$，$\|\tilde{u}_i\|_{L^2(\Omega)} \le r$ 对于 $i = 1,\ 2$。根据杨氏不等式，我们有以下等式

$$\big(M(C_1) - M(C_2), C_1 - C_2\big) + \big\|\Gamma(C_1) - \Gamma(C_2)\big\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=0}^{5} I_i, \tag{3.10}$$

其中 $I_0 = \big\|\Gamma(C_1) - \Gamma(C_2)\big\|^2_{L^2(\Omega)}$ (2.7)$\lesssim$ $\|C_1 - C_2\|^2_{L^2(\Omega)}$ 和

$$I_1 = -\sum_{i=1,2} d_i\big(\nabla U_i, \nabla U_i\big) \le 0,$$
$$I_2 = \left(\begin{pmatrix} \chi(u_1)\nabla U_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nabla U_1 \\ \nabla U_2 \end{pmatrix}\right),$$
$$I_3 = \left(\begin{pmatrix} \big(\chi(u_1) - \chi(\tilde{u}_1)\big)\nabla \tilde{u}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nabla U_1 \\ \nabla U_2 \end{pmatrix}\right),$$
$$I_4 = \big(F_1(u_1,u_2) - F_1(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2), U_1\big), \quad I_5 = \big(F_2(u_1,u_2) - F_2(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2), U_2\big).$$

根据（1.3）和 Hölder不等式，我们得到

$$\begin{aligned}|I_3| &\lesssim \|u_1-\tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\tilde{u}_2\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla U_1\|_{L^4(\Omega)}\\ &\lesssim \|u_1-\tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\tilde{u}_2\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla U_1\|_{H^1(\Omega)},\end{aligned}$$

因此$|I_3|\lesssim_{r,\ n}\sum\|u_i-\tilde{u}_i\|_{L^2(\Omega)}$。根据反应函数 F_1 和 F_2的全局 Lipschitz 连续性，i=1, 2参见（1.2），我们有以下估计

$$|I_4|+|I_5|\lesssim\sum_{i=1,2}\|u_i-\tilde{u}_i\|_{L^2(\Omega)}\sum_{i=1,2}\|U_i\|_{L^2(\Omega)},$$

因此$|I_4|+|I_5|\lesssim_r\sum_{i=1,\ 2}\|u_i-\tilde{u}_i\|_{L^2(\Omega)}$。根据（3.10），我们得到$\sum_{i=0}^5 I_i\lesssim_{r,\ n}\left\|C_1^n-C_2^n\right\|^2_{L^2(\Omega)}$，并且（3.9）成立。最后，（3.7）存在路径解且具有唯一性，这由（3.8）和（3.9）可知（更多详情请参见 [34, 定理 3.1。1]）。

□

4. 基本先验估计

本节给出一系列基本的能量型估计。

引理 4.1. 设 $u_1^n(t)$, $u_2^n(t)$, $t\in[0,T]$, 满足 (3.4)、(3.5)。存在一个常数 $C>0$, 与 n无关，使得

$$\mathbb{E}\left[\left\|u_1^n(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]+\mathbb{E}\left[\left\|u_2^n(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\le C,\qquad\forall t\in[0,T];\tag{4.1}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla u_1^n\right|^2dx\,dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_\Omega\left|\nabla u_2^n\right|^2dx\,dt\right]\le C;\tag{4.2}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|u_1^n(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]+\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|u_2^n(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\le C.\tag{4.3}$$

证明。根据伊藤公式，$dS(u_i^n)=S'(u_i^n)\,du_i^n+\frac{1}{2}S''(u_i^n)\sum_{k=1}^n\left(\sigma_{u_i,k}(u_i^n)\right)^2dt$, $i=1,\ 2$，对于任意 C^2 函数

$S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。对于 $i=1,2$，取 $S(u_i)=\frac{1}{2}|u_i|^2$，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\|u_i^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i=1,2}d_i\int_0^t\int_\Omega|\nabla u_i^n|^2\,dx\,ds\\
&\quad=\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\|u_i^n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i=1,2}\int_0^t\left(F_i(u_1^n,u_2^n),u_1^n\right)_{L^2(\Omega)}ds\\
&\qquad+\sum_{i=1,2}\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_i^n\sigma_{u_i,k}^n(u_1^n,u_2^n)\,dx dW_{u_i,k}+\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega\left(\sigma_{u_i,k}^n(u_1^n,u_2^n)\right)^2dx\,ds\\
&\qquad+\int_0^t\left(\chi(u_1^n)\nabla u_2^n,\nabla u_1^n\right)_{L^2(\Omega)}ds\\
&\quad\le\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\|u_i^n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+C\int_0^t\left(1+\left\|u_1^n(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|u_2^n(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)ds\\
&\qquad+\sum_{i=1,2}\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_i^n\sigma_{u_i,k}^n(u_1^n,u_2^n)\,dx dW_{u_i,k}(s)+\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega\left(\sigma_{u_i,k}^n(u_1^n,u_2^n)\right)^2dx\,ds\\
&\qquad+\frac{d_1}{2}\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla u_1^n\right|^2dx\,ds+C(d_1,u_m)\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla u_2^n\right|^2dx\,ds\\
&\quad\le\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\|u_i^n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+C\int_0^t\left(1+\left\|u_1^n(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|u_2^n(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)ds\\
&\qquad+\sum_{i=1,2}\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_i^n\sigma_{u_i,k}^n(u_1^n,u_2^n)\,dx dW_{u_i,k}(s)+\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega\left(\sigma_{u_i,k}^n(u_1^n,u_2^n)\right)^2dx\,ds\\
&\qquad+\frac{d_1}{2}\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla u_1^n\right|^2dx\,ds+\frac{C(d_1,u_m)}{d_2}\Bigg(\frac{1}{2}\left\|u_2^n(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C\int_0^t\left(1+\left\|u_1^n(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|u_2^n(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)ds\\
&\qquad\qquad+\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_2^n\sigma_{u_2,k}^n(u_1^n,u_2^n)\,dx dW_{u_2,k}(s)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega\left(\sigma_{u_2,k}^n(u_1^n,u_2^n)\right)^2dx\,ds\Bigg),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

这里用到了（1.2）中反应函数的全局利普希茨性质以及杨氏不等式。由（2.7）、（4.4）可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1,2}\|u_i^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i=1,2}\frac{d_1}{2}\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla u_1^n\right|^2dx\,ds+d_2\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla u_2^n\right|^2dx\,ds\\
&\quad\le\sum_{i=1,2}\|u_i^n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+C\int_0^t\left(1+\sum_{i=1,2}\|u_i^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)ds+C\sum_{i=1,2}\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_i^n\sigma_{u_i,k}^n(u_1^n,u_2^n)\,dx dW_{u_i,k}(s).
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

现在将 $\mathbb{E}[\cdot]$ 应用于（4.5），并利用初始数据 $u_{1,0},u_{2,0}$ 几乎必然属于 L^2，

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_i^n\sigma_{u_i,k}^n(u_1^n,u_2^n)\,dx dW_{u_i,k}(s)\right]=0,
$$

对于 $i=1,2$，并应用格朗沃尔不等式，得到（4.1）和（4.2）。

为证明估计式（4.3），我们在（$\sup_{t\in[0,T]}$ 中取 $\mathbb{E}[\cdot]$，然后在（4.4）和（4.5）中取。利用（4.1）以及 L^2 初始数据的有界性，我们最终得到估计

$$
\sum_{i=1,2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\|u_i^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right]\le C\left(1+\sum_{i=1,2}I_{u_i}\right),
\tag{4.6}
$$

其中 $I_{u_i} := \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega u_i^n\sigma^n_{u_i,k}(u_1^n,u_2^n)\,dxdW_{u_i,k}(s)\right|\right]$。利用 BDG 不等式（2.4）、柯西-施瓦茨不等式、（2.6）、柯西不等式以及（4.1），对于 $i=1,\ 2$，可得:

$$\begin{aligned}
\left|I_{u_i}\right| &\le C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{n}\left|\int_\Omega u_i^n\sigma^n_{u_i,k}(u_1^n,u_2^n)\,dx\right|^2 dt\right)^{\frac12}\right]\\
&\le C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\left(\int_\Omega\left|u_i^n\right|^2 dx\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega\left|\sigma^n_{u_i,k}(u_1^n,u_2^n)\right|^2 dx\right)dt\right)^{\frac12}\right]\\
&\le C\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega\left|u_i^n\right|^2 dx\right)^{\frac12}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega\left|\sigma^n_{u_i,k}(u_1^n,u_2^n)\right|^2 dx\,dt\right)^{\frac12}\right]\\
&\le \frac12\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega\left|u_i^n\right|^2 dx\right]+C\mathbb{E}\left[\int_0^T\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega\left|\sigma^n_{u_i,k}(u_1^n,u_2^n)\right|^2 dx\,dt\right]\\
&\le \frac12\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|u_i^n(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]+\tilde{C},
\end{aligned}\tag{4.7}$$

˜对于某些常数 C，$C>0$。结合不等式（4.6）和（4.7），可得估计式（4.3）。 □

现在，考虑 $u_{1,\ 0},\ u_{2,\ 0}\in L^q\left(D,\mathcal{F},P;L^2(\Omega)\right)$ 满足 $q\in(2,q_0]$ 且 $q_0>3$。利用（4.4），对任意 $(u_i,t)\in D\times[0,T]$，有以下估计:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1,2}\sup_{0\le\tau\le t}\left\|u_i^n(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1,2}d_i\int_0^t\left\|\nabla u_i(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds &\le \sum_{i=1,2}\left\|u_i^n(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+C\sum_{i=1,2}\int_0^t\left\|u_i^n(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds\\
&+C\sum_{i=1,2}\sup_{0\le\tau\le t}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_0^\tau\int_\Omega u_i^n\sigma^n_{u_i,k}(u_1^n,u_2^n)\,dxdW_{u_i,k}(s)\right|,
\end{aligned}$$

将该不等式两边提升至 $q/2$次幂，并取期望。因此，

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left\|u_i^n(t)\right\|^q_{L^2(\Omega)}\right]\le C,\quad \mathbb{E}\left[\left\|\nabla u_i^n\right\|^q_{L^2((0,T)\times\Omega)}\right]\le C,\quad i=1,2.\tag{4.8}$$

对某个与 n 无关的常数 $C>0$,

5. 时间平移估计

为了确保 Faedo-Galerkin 解序列的强$L^2_{t,\ x}$紧性，我们在空间 $\left(H^1\right)^\star$ 中建立时间平移估计，这足以推导所需的$L^2_{t,\ x}$紧性（以及紧性）。

引理 5.1. 将满足 $u_1^n(t),u_2^n(t),t\in[0,T]$ 的 *Faedo-Galerkin* 函数在 (3.4) 和 (3.5)之外延拓为零。存在一个与 $[0,T]$ 无关的常数 $C=C(T,\Omega)>0$，且与 n 无关，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{|\tau|\in(0,\delta)}\left\|u_i^n(t+\tau)-u_i^n(t)\right\|_{\left(H^1(\Omega)\right)^\star}\right]\le C\delta^{1/2},\quad \forall t\in[0,T],\tag{5.1}$$

对任意充分小的 $\delta>0,\ i=1,2$。

证明。 我们的目标是估计.....的期望值

$$I(t,\tau):=\left\|u_1^n(t+\tau,\cdot)-u_1^n(t,\cdot)\right\|_{\left(H^1(\Omega)\right)^\star}$$

$$= \sup\left\{ \left| \left\langle u_1^n(t+\tau,\cdot) - u_1^n(t,\cdot), \phi \right\rangle \right| \ : \ \phi \in H^1(\Omega),\ \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \le 1 \right\}$$
$$= \sup\left\{ \int_\Omega \left(u_1^n(t+\tau,x) - u_1^n(t,x)\right)\phi(x)\,dx \ : \ \phi \in H^1(\Omega),\ \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \le 1 \right\},$$

对于 $\tau \in (0,\delta)$, $\delta > 0$。注意，对 $\tau \in (-\delta, 0)$也可以得到相同的估计。使用 Faedo-Galerkin 逼近（3.3），我们得到如下估计

$$I(t,\tau) := \left\| u_1^n(t+\tau,\cdot) - u_1^n(t,\cdot) \right\|_{(H^1(\Omega))^\star} \le \sum_{i=1}^{4} I_i(t,\tau),$$

其中

$$I_1(t,\tau) = \left\| \int_t^{t+\tau} \Pi_n \left[d_1\, \Delta u_1^n \right] ds \right\|_{(H^1(\Omega))^\star},$$
$$I_2(t,\tau) = \left\| \int_t^{t+\tau} \Pi_n \left[\operatorname{div}\left(\chi(u_1^n) \nabla u_2^n \right) \right] ds \right\|_{(H^1(\Omega))^\star},$$
$$I_3(t,\tau) = \left\| \int_t^{t+\tau} \Pi_n \left[[F_1(u_1^n, u_2^n)] \right] ds \right\|_{(H^1(\Omega))^\star},$$
$$I_4(t,\tau) = \left\| \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+\tau} \sigma^n_{u_1,k}(u_1^n, u_2^n) dW_{u_1,k}(s) \right\|_{(H^1(\Omega))^\star}.$$

根据 Hölder不等式（回顾 χ 在（1.3）中的定义），

$$\left| \int_t^{t+\tau} \int_\Omega \chi(u_1^n) \nabla u_2^n \cdot \nabla \Pi_n \phi \, dx\, ds \right| \le C\, \tau^{1/2} \left\| \nabla u_2^n \right\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \left\| \nabla \Pi_n \phi \right\|_{L^2(\Omega)},$$

其中某个常数为 $C > 0$。对两边取期望并使用基本的能量型估计（4.2）后可得，

$$\mathbb{E}\left[\left| \int_t^{t+\tau} \int_\Omega \chi(u_1^n) \nabla u_2^n \cdot \nabla \Pi_n \phi \, dx\, ds \right| \right] \lesssim_{T,\Omega} \tau^{1/2} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

因此，

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le\tau\le\delta} I_2(t,\tau) \right] \lesssim \delta^{1/2}, \quad \text{uniformly in } t \in [0,T].$$

与 I_2 完全相同地进行，可得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le\tau\le\delta} I_1(t,\tau) \right] \lesssim \delta^{1/2}, \quad \text{uniformly in } t \in [0,T].$$

关于 F_1 的定义中的函数 π，可得以下估计

$$\left| \int_t^{t+\tau} \int_\Omega F_1(u_1^n, u_2^n) \Pi_n \phi \, dx\, ds \right| \lesssim \tau^{1/2} \left\| u_1^n + u_2^n \right\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \left\| \Pi_n \phi \right\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\lesssim \tau^{1/2} \left(\left\| u_1^n \right\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} + \left\| u_2^n \right\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} \right) \|\phi\|_{H^1(\Omega)},$$

其中我们使用了杨氏不等式，并利用序列 $\{e_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ 是 $L^2(\Omega)$ 的一组正交归一基，因此 $\left\|\Pi_n \phi\right\|_{L^2(\Omega)} \le \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \le \|\phi\|_{H^1(\Omega)}$。因此

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\tau\in(0,\delta)} I_3(t,\tau) \right] \lesssim \delta^{1/2}, \quad \text{uniformly in } t \in [0,T].$$

对于随机项 I_4，我们使用 Burkholder-Davis-Gundy不等式（2.4）推导得出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{\tau\in(0,\delta)}\left\|\sum_{k=1}^{n}\int_t^{t+\tau}\sigma^n_{u_1,k}(u_1^n,u_2^n)dW_{u_1,k}(s)\right\|_{L^2(\Omega)}\right]\\
&\quad\lesssim \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_t^{t+\delta}\int_\Omega\left(\sigma^n_{u_1,k}(u_1^n,u_2^n)\right)^2\,dx\,ds\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\overset{(2.6)}{\lesssim}_\Omega \delta^{1/2}\left(1+\mathbb{E}\left[\left\|u_1^n\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\left\|u_2^n\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right]\right),
\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}\left[\left\|u_1^n\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\left\|u_2^n\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right]\overset{(4.3)}{\lesssim} 1$。因此，

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\tau\in(0,\delta)} I_4(t,\tau)\right]\lesssim \delta^{1/2},\quad \text{uniformly in } t\in[0,T].$$

这就完成了对5.1）在 u_1^n 上的证明。对于 u_2^n，证明方法相同。 □

6. 紧性与 Skorokhod 几乎处处表示

本节旨在证明由 Faedo-Galerkin 解生成的概率测度的紧性 $\left\{\left(u_1^n,u_2^n,W_{u_1}^n,W_{u_2}^n,u_{1,0}^n,u_{2,0}^n\right)\right\}_{n\geq 1}$。需要指出，$u_1^n$，$u_2^n$ 在 $L^2_{t,\,x}$ 中的强收敛是空间 H^1 估计（4.2）和时间平移估计（5.1）的结果。回顾一下，$H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset\left(H^1(\Omega)\right)^\star$。我们利用 Skorokhod 关于概率测度的紧性（弱紧性）以及随机变量几乎处处表示的相关结果，确保概率变量 $u_i\in D$ 上的 $i=1,\ 2$ 强（几乎处处）收敛 [21]。

我们考虑 Faedo-Galerkin 近似的概率律所对应的以下相空间 s:

$$\mathcal{H}:=\mathcal{H}_{u_1}\times\mathcal{H}_{u_2}\times\mathcal{H}_{W_{u_1}}\times\mathcal{H}_{W_{u_2}}\times\mathcal{H}_{u_{1,0}}\times\mathcal{H}_{u_{2,0}},$$

其中

$$\mathcal{H}_{u_1},\,\mathcal{H}_{u_2}=L^2(0,T;L^2(\Omega))\bigcap C\left(0,T;(H^1(\Omega))^\star\right)$$

and

$$\mathcal{H}_{W_{u_1}},\,\mathcal{H}_{W_{u_2}}=C([0,T];\mathbb{U}_0),\quad \mathcal{H}_{u_{1,0}}=\mathcal{H}_{u_{2,0}}=L^2(\Omega).$$

其中 $\mathbb{U}_0$ 在第 2节中定义。我们知道 $\mathcal{X}_1=L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \mathcal{X}_2=C\left(0,T;(H^1(\Omega))^\star\right)$ 是波兰空间，因此交空间 $\mathcal{X}_1\cap\mathcal{X}_2$ 是波兰空间。此外，已知波兰空间的乘积仍是波兰空间。进一步地，由于 $C([0,T];\mathbb{U}_0)$ 和 $L^2(\Omega)$ 是波兰空间，因此 $\mathcal{H}$ 是波兰空间。接下来，我们记 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 σ 上 Borel 子集构成的 $\mathcal{H}$-代数，并引入可测映射

$$\begin{aligned}
&\Psi_n:(D,\mathcal{F},P)\to(\mathcal{H},\mathcal{B}(\mathcal{H})),\\
&\Psi_n(\omega)=\left(u_1^n(\omega),u_2^n(\omega),W_{u_1}^n(\omega),W_{u_2}^n(\omega),u_{1,0}^n(\omega),u_{2,0}^n(\omega)\right).
\end{aligned}$$

现在我们定义 $\mathcal{L}_n$ 上的概率测度 $(\mathcal{H},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$，其定义为

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{A})=\left(P\circ\Psi^{-1}\right)(A)=P\left(\Psi_n^{-1}(\mathcal{A})\right),\quad \mathcal{A}\in\mathcal{B}(\mathcal{H}).\tag{6.1}$$

分别记 $\mathcal{L}_{u_1^n}$, $\mathcal{L}_{u_2^n}$, $\mathcal{L}_{W_{u_1}^n}$, $\mathcal{L}_{W_{u_2}^n}$, $\mathcal{L}_{u^n_{1,\,0}}$, $\mathcal{L}_{u^n_{2,\,0}}$ 为 u_1^n, u_2^n, $W_{u_1}^n$, $W_{u_2}^n$, $u^n_{1,\,0}$ 以及 $u^n_{2,\,0}$的概率分布，它们分别定义在 $\left(\mathcal{H}_{u_1},\mathcal{B}(\mathcal{H}_{u_1})\right)$, $\left(\mathcal{H}_{u_2},\mathcal{B}(\mathcal{H}_{u_2})\right)$, $\left(\mathcal{H}_{W_{u_1}},\mathcal{B}(\mathcal{H}_{W_{u_1}})\right)$, $\left(\mathcal{H}_{W_{u_2}},\mathcal{B}(\mathcal{H}_{W_{u_2}})\right)$ $\left(\mathcal{H}_{u_{1,0}},\mathcal{B}(\mathcal{H}_{u_{1,0}})\right)$ 和 $\left(\mathcal{H}_{u_{2,0}},\mathcal{B}(\mathcal{H}_{u_{2,0}})\right)$ 上。因此。

$$\mathcal{L}_n=\mathcal{L}_{u_1^n}\times\mathcal{L}_{u_2^n}\times\mathcal{L}_{W_{u_1}^n}\times\mathcal{L}_{W_{u_2}^n}\times\mathcal{L}_{u_{1,0}^n}\times\mathcal{L}_{u_{2,0}^n}.$$

我们给出趋于零的正数序列 $\{r_m\}_{m\geq 1}, \{\nu_m\}_{m\geq 1}$ （当 $m \to \infty$ 时），并引入以下巴拿赫空间

$$\mathcal{Z}_{r_m,\nu_m} := \Bigg\{ z \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) : \sup_{m\geq 1}\frac{1}{\nu_m}\sup_{\tau\in(0,r_m)}\|z(\cdot+\tau)-z\|_{L^\infty(0,T-\tau;(H^1(\Omega))^\star)} < \infty \Bigg\},$$

在范数

$$\|z\|_{\mathcal{Z}_{r_m,\nu_m}} := \|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|z\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \sup_{m\geq 1}\frac{1}{\nu_m}\sup_{0\leq\tau\leq r_m}\|z(\cdot+\tau)-z\|_{L^\infty\left(0,T-\tau;(H^1(\Omega))^\star\right)}.$$

根据 [41],我们有如下紧嵌入（参见 [41, 定理 5]）

$$\mathcal{Z}_{r_m,\nu_m} \subset\subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap C\big([0,T];(H^1(\Omega))^\star\big).$$

关于概率分布 的紧性，我们有如下结论，参见（6.1）。

引理 6.1。 概率测度序列 $\{\mathcal{L}_n\}_{n\geq 1}$ 在相空间 $(\mathcal{H},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$上是（统一） 紧的，因此是弱紧的。

证明。 在我们的证明中，我们构造紧集（对每个 $\delta>0$）

$$\mathbf{C}_{1,\delta} \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) \bigcap C\big(0,T;(H^1(\Omega))^\star\big),$$

$$\text{and} \quad \mathbf{C}_{2,\delta} \subset C([0,T];\cup_0), \quad \mathbf{C}_{3,\delta} \subset L^2(\Omega),$$

使得 $\mathcal{L}_n\left(\mathbf{C}_\delta\right) = P\left(\{\Phi_n \in \mathbf{C}_\delta\}\right) > 1-\delta$，其中 $\mathbf{C}_\delta := \left(\mathbf{C}_{1,\delta}\right)^2 \times \left(\mathbf{C}_{2,\delta}\right)^2 \times \left(\mathbf{C}_{3,\delta}\right)^2$。我们证明，对于 $i=1$，2、3，有$\mathcal{L}_n\left(\mathbf{C}_{i,\delta}^c\right) \leq \delta/6$。为此，我们取满足以下条件的数列 $\{r_m\}_{m=1}^\infty, \{\nu_m\}_{m=1}^\infty$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_m^{1/4}}{\nu_m} < \infty, \tag{6.2}$$

and

$$\mathbf{C}_{1,\delta} := \left\{ z \in \mathcal{Z}_{r_m,\nu_m} : \|z\|_{\mathcal{Z}_{r_m,\nu_m}} \leq R_{1,\delta} \right\},$$

其中$R_{1,\,\delta} > 0$ 是一个稍后确定的数。

现在，我们利用 [41, 定理 5] 推导出 $\mathbf{C}_{1,\,\delta}$是 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$的紧子集。对于 $i=1$，2，我们有

$$\begin{aligned} &P\left(\{u_i \in D : u_i^n(u_i) \notin \mathbf{C}^{1,\delta}\}\right) \\ &\quad\leq P\left(\left\{u_i \in D : \left\|u_i^n(u_i)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} > R_{1,\delta}\right\}\right) \\ &\qquad + P\left(\left\{u_i \in D : \left\|u_i^n(u_i)\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} > R_{1,\delta}\right\}\right) \\ &\qquad + P\left(\left\{u_i \in D : \sup_{\tau\in(0,r_m)}\left\|u_i^n(\cdot+\tau)-u_i^n\right\|_{L^\infty\left(0,T-\tau;(H^1(\Omega))^\star\right)} > R_{1,\delta}\,\nu_m\right\}\right) \\ &\quad=: P_{1,1}+P_{1,2}+P_{1,3} \quad (\text{for any } m\geq 1). \end{aligned}$$

应用切比雪夫不等式，我们推导出

$$P_{1,1} \leq \frac{1}{R_{1,\delta}}\mathbb{E}\left[\left\|u_i^n(u_i)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right] \leq \frac{C}{R_{1,\delta}},$$

$$
\begin{aligned}
P_{1,2} &\le \frac{1}{R_{1,\delta}}\mathbb{E}\left[\left\|u_i^n(u_i)\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right] \le \frac{C}{R_{1,\delta}},\\
P_{1,3} &\le \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{R_{1,\delta}\,\nu_m}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le\tau\le r_m}\left\|u_i^n(\cdot+\tau)-u_i^n\right\|_{L^\infty\left(0,T-\tau;\left(H^1(\Omega)\right)^\star\right)}\right]\\
&\le \frac{C}{R_{1,\delta}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_m^{1/4}}{\nu_m} \overset{(6.2)}{\le} \frac{C}{R_{1,\delta}}.
\end{aligned}
$$

在此，我们用到了（4.2）、（4.3）和（5.1）。我们可以选择 $R_{1,\,\delta}$ 使得

$$
\mathcal{L}_{u_i^n}\left(\mathbf{C}_{1,\delta}^c\right) = P\left(\left\{u_i \in D : u_i^n(u_i) \notin \mathbf{C}_{1,\delta}\right\}\right) \le \frac{\delta}{6}, \quad i = 1,2.
$$

我们知道，有限级数 $W_{u_1}^n$，$W_{u_2}^n$ 在 $C([0,T];\mathbb{U}_0)$ 中当 $n\to\infty$ 时几乎必然（P-a.s.）收敛。因此，概率分布 $\mathcal{L}_{W_{u_1}^n}$，$\mathcal{L}_{W_{u_2}^n}$ 弱收敛。现在，我们使用普罗霍罗夫弱紧性刻画（例如参见 [12, 定理 2.3]）来推导出 $\left\{\mathcal{L}_{W_{u_1}^n}\right\}_{n\ge1}$ 和 $\left\{\mathcal{L}_{W_{u_2}^n}\right\}_{n\ge1}$ 的紧性。因此，对于任意 $\delta>0$，在 $C([0,T];\mathbb{U}_0)$ 中存在一个紧集 $\mathbf{C}_{2,\,\delta}$，使得

$$
\mathcal{L}_{W_{u_i}^n}\left(\mathbf{C}_{2,\delta}^c\right) = P\left(\left\{u_i \in D : W_{u_i}^n(u_i) \notin \mathbf{C}_{2,\delta}\right\}\right) \le \frac{\delta}{6}, \quad i = 1,2.
$$

此外，初始数据近似 $u_{1,\,0}^n$，$u_{2,\,0}^n$ 在 $L^2(\Omega)$ 中当 $n\to\infty$ 时几乎必然（P-a.s.）收敛，并且概率分布 $\mathcal{L}_{u_{1,\,0}^n}$，$\mathcal{L}_{u_{2,\,0}^n}$ 弱收敛（其中 $\mathcal{L}_{u_{1,\,0}^n}\rightharpoonup\mu_{u_{1,\,0}}$、$\mathcal{L}_{u_{2,\,0}^n}\rightharpoonup u_{2,\,0}^n$）。这意味着这些概率分布具有紧性，并且

$$
\mathcal{L}_{w_0^n}\left(\mathbf{C}_{3,\delta}\right) = P\left(\left\{u_i \in D : w_0^n(u_i) \notin \mathbf{C}_{3,\delta}\right\}\right) \le \frac{\delta}{6}, \quad i = 1,2.
$$

这意味着 $\left\{\mathcal{L}_n\right\}_{n\ge1}$ 是一个紧的概率测度序列。根据 [12,定理2.3]，$\left\{\mathcal{L}_n\right\}_{n\ge1}$ 的弱紧性是□Prokhorov 定理的推论。

注意，概率测度 $\mathcal{L}_n$ 在 $(\mathcal{H},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$上构成一个弱紧序列。因此，我们推得 $\mathcal{L}_n$ 弱收敛到 $\mathcal{H}$ 上的一个概率测度 $\mathcal{L}$（取某个子序列）。现在，我们可以应用 ˜ ˜ ˜Skorokhod 定理（例如参见 [12, 定理 2.4]），推得存在一个新概率空间 $(D,\mathcal{F},P)$ 以及新的随机变量

$$
\tilde{\Psi}_n = \left(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n, \tilde{W}_{u_1}^n, \tilde{W}_{u_2}^n, \tilde{u}_{1,0}^n, \tilde{u}_{2,0}^n\right), \quad \tilde{\Psi} = \left(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{W}_{u_1}, \tilde{W}_{u_2}, \tilde{u}_{1,0}, \tilde{u}_{2,0}\right), \tag{6.3}
$$

˜ ˜ ˜ ˜，其联合分布分别为 $\mathcal{L}_n=\mathcal{L}_n$ 和 $\mathcal{L}=\mathcal{L}$，使得 $\Psi_n\to\Psi$ 在 $\mathcal{X}$ 的拓扑下几乎必然成立。因此，以下收敛关系对 P几乎必然成立，当 $n\to\infty$时：˜

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_1^n \to \tilde{u}_1, \quad \tilde{u}_2^n \to \tilde{u}_2 \quad \text{in } L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\tilde{u}_1^n \to \tilde{u}, \quad \tilde{u}_2^n \to \tilde{u}_2 \quad \text{in } C\left([0,T];\left(H^1(\Omega)\right)^\star\right),\\
&\tilde{W}_{u_1}^n \to \tilde{W}_{u_1}, \quad \tilde{W}_{u_2}^n \to \tilde{W}_{u_2} \quad \text{in } C([0,T];\mathbb{U}_0),\\
&\tilde{u}_{1,0}^n \to \tilde{u}_{1,0}, \quad \tilde{u}_{2,0}^n \to \tilde{u}_{2,0} \quad \text{in } L^2(\Omega).
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

注意到，由于概率分布相同，引理4.1和（4.8）中的估计对新的随机变量 $\tilde{u}_i^n$（$i=1,\,2$）仍然成立。此外，所有关于 Faedo-Galerkin 逼近的估计 u_i^n 对定义在新概率空间上的“波浪号”˜ ˜ ˜逼近 $\tilde{u}_i^n$同样成立 $(D,\mathcal{F},P)$。另外，对于任意 $q\in[2,q_0]$（回想一下 $q_0>3$），

$$
\tilde{\mathbb{E}}\left[\left\|\tilde{u}_i^n\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)}^q\right] \le C, \quad \tilde{\mathbb{E}}\left[\left\|\nabla\tilde{u}_i^n\right\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}^q\right] \le C, \quad i=1,2, \tag{6.5}
$$

其中常数 C 与 n无关。

现在，我们考虑随机基

$$\tilde{S}_n = \left(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{F}}, \left\{\tilde{\mathcal{F}}_t^n\right\}_{t\in[0,T]}, \tilde{P}, \tilde{W}_{u_1}^n, \tilde{W}_{u_2}^n\right), \tag{6.6}$$

其中

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^n = \sigma\left(\sigma\left(\tilde{\Psi}_n\Big|_{[0,t]}\right) \bigcup \left\{N \in \tilde{\mathcal{F}} : \tilde{P}(N) = 0\right\}\right).$$

滤子 $\left\{\tilde{\mathcal{F}}_t^n\right\}_{n\geq}$ ~ ~1 是满足条件的最小滤子，“波浪号过程” $\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n, W_{u_1}^n, W_{u_2}^n, \tilde{u}_{1,0}^n$和 $\tilde{u}_{2,0}^n$ 均为适应过程 d.

鉴于概率分布相同，且根据 Wiener过程的 Lévy鞅刻画，参见 [12, 定理 4.6],

~ ~ ~ ~，我们得出 $W_{u_1}^n$ 和 $W_{u_2}^n$ 是柱状Wiener过程。此外，我们声称，相对于在 (6.6) 中定义的滤子 $\left\{\tilde{\mathcal{F}}_t^n\right\}_{n\geq 1}$，$W_{u_1}^n, W_{u_2}^n$ 是柱状Wiener过程。为证明这一点，我们验证 $\tilde{W}_{u_i}^n(t)$是 $\tilde{\mathcal{F}}_t^n$可测的，且 $W_{u_i}^n(t) - W_{u_i}^n(s)$与 $\mathcal{F}_s^n$独立，对所有 $0 \leq s < t \leq T, i = 1, 2$。由于 $W_{u_i}^n$和 $W_{u_i}^n$具有相同的概率分布，且 $W_{u_i}^n(t)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的， $Wu_i{}^n(t) - W_{u_i}^n(s)$ 与 $\mathcal{F}_s$独立，因此可得上述性质。

因此，存在序列（回忆一下，$\left\{\psi_k\right\}_{k\geq 1}$ 是 $\mathbb{U}$ 的基，且级数在 $\mathbb{U}_0 \supset \mathbb{U}$中收敛）$\left\{\tilde{W}_{u_1,k}^n\right\}_{k\geq 1}$,$\left\{\tilde{W}_{u_2,k}^n\right\}_{k\geq 1}$，它们是相互独立的实值Wiener过程，并且关于$\left\{\tilde{\mathcal{F}}_t^n\right\}_{t\in[0,T]}$适应，使得

$$\tilde{W}_{u_i}^n = \sum_{k\geq 1} \tilde{W}_{u_i,k}^n \psi_k, \quad \text{for } i = 1, 2. \tag{6.7}$$

接下来，我们将使用以下 n截断和

$$\tilde{W}_{u_i}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{W}_{u_i,k}^n \psi_k, \quad i = 1, 2,$$

~ ~，它在 $C([0,T];\mathbb{U}_0)$中收敛到 W_{u_i}，并且对 $i = 1$几乎必然成立，2。

~利用（3.6）以及概率分布相同，可得下列等式在新概率空间上几乎必然成立 P-$\left(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_1^n(t) - \int_0^t \Pi_n\left[d_1\,\Delta\tilde{u}_1^n\right]\,ds + \int_0^t \Pi_n\left[\operatorname{div}\left(\chi(\tilde{u}_1^n)\nabla\tilde{u}_2^n\right)\right]\,ds \\
&\qquad = \tilde{u}_{1,0}^n + \int_0^t \Pi_n\left[F_1(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n)\right]\,ds + \int_0^t \sigma_{u_1}^n(\tilde{u}_1^n)\,d\tilde{W}_{u_1}^{(n)}(s) \quad \text{in } L^2(\Omega), \\
&\tilde{u}_2^n(t) - \int_0^t \Pi_n\left[d_2\,\Delta\tilde{u}_2^n\right]\,ds \\
&\qquad = \tilde{u}_{2,0}^n + \int_0^t \Pi_n\left[F_2(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n)\right]\,ds + \int_0^t \sigma_{u_2}^n(\tilde{u}_2^n)\,d\tilde{W}_{u_2}^{(n)}(s) \quad \text{in } L^2(\Omega),
\end{aligned} \tag{6.8}$$

对于任意 $t \in [0,T]$，其中 $\sigma_{u_i}^n(\tilde{u}_i^n)\,d\tilde{W}_{u_i}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \sigma_{u_i'}^n{}_{,\,k}(\tilde{u}_i^n)\,d\tilde{W}_{u_i,\,k}^n$，当 $i = 1$，2。

7. Faedo-Galerkin方程中的极限过程

我们需要为Skorokhod表示的极限构造一个随机基，即为以下变量 $\tilde{\Psi} := \left(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{W}_{u_1}, \tilde{W}_{u_2}, \tilde{u}_{0,1}, \tilde{u}_{0,2}\right)$，参见（6.3）：具体而言，

$$\tilde{S} = \left(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{F}}, \left\{\tilde{\mathcal{F}}_t\right\}_{t\in[0,T]}, \tilde{P}, \tilde{W}_{u_1}, \tilde{W}_{u_2}\right), \tag{7.1}$$

其中 $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma\left(\sigma\left(\tilde{\Psi}\Big|_{[0,t]}\right) \bigcup \left\{N \in \tilde{\mathcal{F}} : \tilde{P}(N) = 0\right\}\right)$。我们知道，$\tilde{W}_{u_1}^n$、$\tilde{W}_{u_2}^n$是相对于 S_n 的柱状维纳过程（见（6.6）和（6.7））， 且 $W_{u_1}^n \to W_{u_1}$、$W_{u_2}^n \to W_{u_2}$ 符合（6.4）的意义。因此，存在 $\left\{\tilde{W}_{u_1,k}\right\}_{k\geq 1}$、$\left\{\tilde{W}_{u_2,k}\right\}_{k\geq 1}$ 实值Wiener过程序列，它们适应于滤子 $\left\{\tilde{\mathcal{F}}_t\right\}_{t\in[0,T]}$，参见（7.1），使得$\tilde{W}_{u_1} = \sum_{k\geq 1} \tilde{W}_{u_1,k}\psi_k$ 且 $\tilde{W}_{u_2} = \sum_{k\geq 1} \tilde{W}_{u_2,k}\psi_k$。

利用估计式（6.5）和（6.4）中的几乎处处收敛，在必要时取子序列后，我们得到 $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\text{i)} \quad \tilde{u}_1^n \to \tilde{u}_1, \quad \tilde{u}_2^n \to \tilde{u}_2 \quad \text{in } L^2\big(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; L^2(0,T; L^2(\Omega))\big),\\
&\text{ii)} \quad \tilde{u}_1^n \rightharpoonup \tilde{u}_1, \quad \tilde{u}_2^n \rightharpoonup \tilde{u}_2 \quad \text{in } L^2\big(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; L^2(0,T; H^1(\Omega))\big),\\
&\text{iii)} \quad \tilde{u}_1^n \overset{\star}{\rightharpoonup} \tilde{u}_1, \quad \tilde{u}_2^n \overset{\star}{\rightharpoonup} \tilde{u}_2 \quad \text{in } L^2\big(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; L^\infty(0,T; L^2(\Omega))\big),\\
&\text{iv)} \quad \tilde{u}_1^n \to \tilde{u}_1, \quad \tilde{u}_2^n \to \tilde{u}_2 \quad \text{in } L^2\big(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; C\big([0,T]; \big(H^1(\Omega)\big)^\star\big)\big),\\
&\text{v)} \quad \tilde{W}_{u_1}^n \to \tilde{W}_{u_1}, \quad \tilde{W}_{u_2}^n \to \tilde{W}_{u_2} \quad \text{in } L^2\big(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; C([0,T]; \mathbb{U}_0)\big),\\
&\text{vi)} \quad \tilde{u}_{1,0}^n \to \tilde{u}_{1,0}, \quad \tilde{u}_{2,0}^n \to \tilde{u}_{2,0} \quad \text{in } L^2\big(\tilde{D}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; L^2(\Omega)\big).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

最后，我们将6.8）中的 Faedo-Galerkin 方程取极限。

引理7.1（极限方程）。由 $\tilde{u}_1$、 $\tilde{u}_2$、 W_{u_1}、 W_{u_2}、 $\tilde{u}_{1,0}$、 $\tilde{u}_{2,0}$ 的 *Skorokhod* 几乎处处表示所对应的极限——这些表示是根据（6.3）和（6.4）构造的 *Faedo-Galerkin* 近似——满足以下方程 *P*-几乎处处成立，对所有 $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \tilde{u}_1(t)\varphi_{u_1}\,dx - \int_\Omega \tilde{u}_{1,0}\,\varphi_{u_1}\,dx + \int_0^t \int_\Omega \big(d_1 \nabla \tilde{u}_1 - \chi(\tilde{u}_1)\nabla \tilde{u}_2\big)\cdot \nabla \varphi_{u_1}\,dx\,ds\\
&\quad = \int_0^t \int_\Omega F_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\varphi_{u_1}\,dx\,ds + \int_0^t \int_\Omega \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\varphi_{u_1}\,dx\,d\tilde{W}_{u_1}(s),
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \tilde{u}_2(t)\varphi_{u_2}\,dx - \int_\Omega \tilde{u}_{2,0}\varphi_{u_2}\,dx + \int_0^t \int_\Omega d_2 \nabla \tilde{u}_2 \cdot \nabla \varphi_{u_2}\,dx\,ds\\
&\quad = \int_0^t \int_\Omega F_2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\varphi_{u_2}\,dx\,ds + \int_0^t \int_\Omega \sigma_{u_2}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\varphi_{u_2}\,dx\,d\tilde{W}_{u_2}(s),
\end{aligned} \tag{7.4}$$

对所有 $\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2} \in H^1(\Omega)$，其中 $\tilde{u}_{1,0}$ 和 $\tilde{u}_{2,0}$ 的概率分布分别为 $\mu_{u_{1,0}}$ 和 $\mu_{u_{2,0}}$。

证明。首先，我们固定 $\varphi_{u_i} \in H^1(\Omega)$，并将 (7.3)-(7.4) 符号性地写作 $I_{u_i}(\omega,t) = 0$，对于 $(\omega,t) \in \tilde{D} \times (0,T)$ 以及 $i = 1, 2$。我们的目标是证明，对于 $i = 1, 2$

$$\big\| I_{u_i} \big\|^2_{L^2(\tilde{D}\times(0,T))} = \tilde{\mathbb{E}} \int_0^T \Big(I_{u_i}(\omega,t) \Big)^2 \, dt = 0,$$

这意味着，对于 $dP \times dt$-几乎处处的 $(\omega,t) \in D \times (0,T)$，有 $I_{u_i} = 0$；因此，根据 Fubini定理，对于几乎处处的 $t \in (0,T)$， $I_{u_i} = 0$ P-几乎必然成立。由 L^2 中的稠密性，我们证明，对于 $i = 1, 2$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbf{1}_Z(\omega,t) I_{u_i}(\omega,t) \right] dt = 0, \tag{7.5}$$

对于可测集 $Z \subset \tilde{D} \times (0,T)$，其中 $\mathbf{1}_Z(\omega,t) \in L^\infty\left(\tilde{D} \times (0,T); \tilde{d}P \times dt\right)$ 表示 Z 的示性函数。

我们将（7.3）乘以 $\varphi_{u_1} \in H^1(\Omega)$，分部积分，并利用投影算子$\Pi_n$ 的基本性质，得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \tilde{u}_1^n(t)\varphi_{u_1}\,dx + \int_0^t \int_\Omega d_1 \nabla \tilde{u}_1^n \cdot \nabla \Pi_n \varphi_{u_1}\,dx\,ds - \int_0^t \int_\Omega \chi(\tilde{u}_1^n)\nabla \tilde{u}_2^n \cdot \nabla \Pi_n \varphi_{u_1}\,dx\,ds\\
&= \int_\Omega \tilde{u}_{1,0}^n \varphi_{u_1}\,dx + \int_0^t \int_\Omega F_1(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n)\Pi_n \varphi_{u_1}\,dx\,ds + \int_0^t \int_\Omega \sigma_{u_1}^n(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n)\Pi_n \varphi_{u_1}\,dx\,d\tilde{W}_{u_1}^{(n)}(s).
\end{aligned} \tag{7.6}$$

接下来，我们将（7.6）乘以（关于 Z 的）示性函数 $\mathbf{1}_Z(\omega,t)$，将结果在 (ω,t) 上积分，然后分别对各项取极限 $n \to \infty$。

现在，我们使用 (7.2) 的第 vi) 部分，得到（回忆一下 $u_{1,0}^n = \Pi_n u_{1,0} \to u_{1,0}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中，以及 $u_{1,0} \sim \mu_{u_{1,0}}$）

$$\tilde{\mathbb{E}} \int_0^T \int_\Omega \mathbf{1}_Z \tilde{u}_{1,0}^n \varphi_{u_1} \, dx \xrightarrow{n\uparrow\infty} \tilde{\mathbb{E}} \int_0^T \int_\Omega \mathbf{1}_Z \tilde{u}_{1,0} \varphi_{u_1} \, dx.$$

由于 $u_{1,0}^n$ 与 $\tilde{u}_{1,0}^n$ 的概率分布相同，我们推得 $\tilde{u}_{1,0} \sim \mu_{u_{1,0}}$。

注意，在 $L^2_{\omega,t,x}$ 中的 ∇u_1^n 弱收敛意味着（参见 (7.2)–(ii)）

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \mathbf{1}_Z(\omega,t) \left(\int_0^t \int_\Omega d_1 \nabla \tilde{u}_1^n \cdot \nabla \Pi_n \varphi_{u_1} \, dx \, ds \right) dt \right] \\
&\quad \xrightarrow{n\uparrow\infty} \tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \mathbf{1}_Z(\omega,t) \left(\int_0^t \int_\Omega d_1 \nabla \tilde{u}_1 \cdot \nabla \varphi_{u_1} \, dx \, ds \right) dt \right].
\end{aligned}$$

对于猎物趋性项，利用以下收敛性： $\chi(\tilde{u}_1^n)\nabla \Pi_n \varphi_{u_1} \xrightarrow{n\uparrow\infty} \chi(\tilde{u}_1)\nabla \varphi_{u_1}$ 在 $L^2_{\omega,t,x}$ 中强收敛， $\nabla \Pi_n \varphi_{u_1} \to \nabla \varphi_{u_1}$在 L^2_x 中，以及 $\tilde{u}_1^n$ 的强 $L^2_{\omega,t,x}$ 收敛。结果为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\int_0^T \mathbf{1}_Z(\omega,t) \left(\int_0^t \int_\Omega \chi(\tilde{u}_1^n) \nabla \tilde{u}_2^n \cdot \nabla \Pi_n \varphi_{u_1} \, dx \, ds \right) dt \right] \\
&\quad \xrightarrow{n\uparrow\infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T \mathbf{1}_Z(\omega,t) \left(\int_0^t \int_\Omega \chi(\tilde{u}_1) \nabla \tilde{u}_2 \cdot \nabla \varphi_{u_1} \, dx \, ds \right) dt \right].
\end{aligned}$$

回顾函数 F_1 是全局 Lipschitz 连续的，且 $\Pi_n \varphi_{u_1} \to \varphi_{u_1}$ 在 $L^2(\Omega)$中，由强收敛 $\tilde{u}_i^n \to \tilde{u}_i$ 在 $L^2_{\omega\text{中},t,x}$ 对 $i = 1, 2$ （参见（7.2）–（i））

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\int_0^T \mathbf{1}_Z(\omega,t) \left(\int_0^t \int_\Omega F_1(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n) \Pi_n \varphi_{u_1} \, dx \, ds \right) dt \right] \\
&\quad \xrightarrow{n\uparrow\infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T \mathbf{1}_Z(\omega,t) \left(\int_0^t \int_\Omega F_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \varphi_{u_1} \, dx \, ds \right) dt \right].
\end{aligned}$$

关于随机积分，我们首先证明

$$\int_0^t \sigma_{u_1}^n(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n) \, d\tilde{W}_{u_1}^{(n)}(s) \xrightarrow{n\uparrow\infty} \int_0^t \sigma_u(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \, d\tilde{W}_{u_1}(s) \quad \text{in } L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right), \tag{7.7}$$

依概率收敛（相对于 $\tilde{P}$）。由于 $\tilde{W}_{u_1}^{(n)} \to \tilde{W}_{u_1}$ 在 $C\left([0,T]; \mathbb{U}_0\right)$中， $\tilde{P}$几乎处处成立，因此也依概率收敛，参见（6.4），只需证明

$$\sigma_{u_1}^n(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n) \to \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \quad \text{in } L^2\left(0,T; L_2(\mathbb{U}; L^2(\Omega))\right), \tilde{P}\text{-almost surely.} \tag{7.8}$$

显然，

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\| \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - \sigma_{u_1}^n(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n) \right\|^2_{L_2(\mathbb{U}; L^2(\Omega))} \, dt \\
&\quad \le \int_0^T \left\| \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1^n, \tilde{u}_2^n) \right\|^2_{L_2(\mathbb{U}; L^2(\Omega))} \, dt \\
&\qquad + \int_0^T \left\| \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - \sigma_{u_1}^n(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \right\|^2_{L_2(\mathbb{U}; L^2(\Omega))} \, dt =: I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

利用（2.7）和（6.4，容易得到

$$I_1 \xrightarrow{n\uparrow\infty} 0, \quad \tilde{P}\text{-almost surely.} \tag{7.10}$$

对于 I_2，我们有（回顾 $\sigma_{u_1,k}$、$\sigma_{u_1,k,\ell}$ 的定义，它们分别定义于（2.3）、（3.2））

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \sum_{k\geq 1} \left\| \sigma_{u_1,k}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) - \sigma^n_{u_1,k}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ &= \int_0^T \sum_{k\geq 1} \left\| \sigma_{u_1,k}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) - \Pi_n\big(\sigma_{u_1,k}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\big) \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt =: \int_0^T \mathcal{I}_n(t)\, dt. \end{aligned}$$

此外，我们有以下界（$\tilde{P}$-几乎必然）（回顾 $\tilde{u}_i \in L^2_\omega L^\infty_t L^2_x$ 对于 $i = 1,\ 2$（几乎必然））

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{I}_n(t) &\leq 4 \sum_{k\geq 1} \left\| \sigma_{u_1,k}(\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t)) \right\|^2_{L^2(\Omega)} = 4 \left\| \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t)) \right\|^2_{L_2(\mathbb{U};L^2(\Omega))} \\ &\overset{(2.7)}{\leq} C\left(1 + \|\tilde{u}_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \in L^1(0,T) \qquad \tilde{P}\text{-a.s..} \end{aligned}$$

这意味着

$\left\| \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) \right\|^2_{L_2(\mathbb{U};L^2(\Omega))} \in L^1_t$ a.s. and $\sum_{k\geq 1} \left| \sigma_{u_1,k}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) \right|^2 \in L^1_{t,x}$ a.s., thus

$$\Pi_n \left(\sum_{k\geq 1} \sigma_{u_1,k}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) \right) \overset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\geq 1} \sigma_{u_1,k}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) \quad \text{in } L^2(\Omega),$$

对于几乎处处的 t 且几乎必然成立。利用这一点，

$$\mathcal{I}_n(t) \overset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{a.e. on } [0,T] \text{ (and a.s)},$$

并应用勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$I_2 \overset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \tilde{P}\text{-almost surely.} \tag{7.11}$$

The 收敛性（7.8）是（7.9）、（7.10）和（7.11）的推论。因此，我们得到（7.7 ）.

接下来，我们固定任意一个数 $q \in (2, q_0]$ (参见 (2.9))，我们使用 Burkholder-Davis-Gundy不等式 (2.4) 和 (2.6)、(6.5) 得到

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbb{E}} \left[\left\| \int_0^t \sigma^n_{u_1}(\tilde{u}^n_1,\tilde{u}^n_2)\, d\tilde{W}^{(n)}_{u_1} \right\|^q_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} \right] \\ &\quad \leq \bar{C}_T \tilde{\mathbb{E}} \left[\sup_{t\in[0,T]} \left\| \sum_{k=1}^n \int_0^t \sigma^n_{u_1,k}(\tilde{u}^n_1,\tilde{u}^n_2)\, d\tilde{W}^n_{u_1,k} \right\|^q_{L^2(\Omega)} \right] \\ &\quad \leq C_T \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \sum_{k=1}^n \left\| \sigma^n_{u_1,k}(\tilde{u}^n_1,\tilde{u}^n_2) \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \right)^{\frac{q}{2}} \right] \leq C_{\sigma,T}. \end{aligned}$$

因此，应用维塔利收敛定理，由 (7.7) 可得

$$\int_0^t \sigma^n_{u_1}(\tilde{u}^n_1,\tilde{u}^n_2)\, d\tilde{W}^{(n)}_{u_1}(s) \to \int_0^t \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\, d\tilde{W}_{u_1}(s) \quad \text{in } L^2\left(\tilde{D},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P};L^2(0,T;L^2(\Omega))\right).$$

然后，利用这一点以及 $\Pi_n\varphi_{u_1} \to \varphi_{u_1}$ 属于 $L^2(\Omega)$ 这一事实，我们推得

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \mathbf{1}_Z(\omega,t) \left(\int_0^t \int_\Omega \sigma^n_{u_1}(\tilde{u}^n_1,\tilde{u}^n_2) \Pi_n\varphi_{u_1}\, dx\, d\tilde{W}^n_{u_1}(s) \right) dt \right] \\ &\quad = \tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^t \sigma^n_{u_1}(\tilde{u}^n_1,\tilde{u}^n_2)\, d\tilde{W}^{(n)}_{u_1}(s) \right) \left(\mathbf{1}_Z(\omega,t) \Pi_n\varphi_{u_1}(x) \right) dx\, dt \right] \\ &\quad \overset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} \tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \mathbf{1}_Z(\omega,t) \left(\int_0^t \int_\Omega \sigma_{u_1}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\varphi_{u_1}\, dx\, d\tilde{W}_{u_1}(s) \right) dt \right]. \end{aligned}$$

这就完成了（7.3）的证明。证明与（7.4）相同。 □

8. 解的最大值原理

在本节中，我们证明，作为 Faedo-Galerkin 逼近的极限而构造的鞅解 (u_1,u_2) 几乎必然是非负的，并且在 L^∞ 中有界。在下面引理的证明中，我们将 a^-记作 $a\in\mathbb{R}$的负部 $\max(-a,0)$。在此，我们使用 $(\cdot)^-$的一个光滑逼近 $S_\varepsilon(\cdot)$。

非负性结果由以下引理给出

引理 8.1。 定理 (u_1,u_2) *2.1* 中构造的解 是非负的，并且在 L^∞ 中几乎必然有界。

证明。 为简单起见，我们省略相关函数上的波浪号；例如，对于 $i=1,\ 2$，我们记作 u_i^n，u_i，而不是 $\tilde{u}_i^n$，$\tilde{u}_i$。对于 $\varepsilon>0$，记 $S_\varepsilon(w)$ 为由 $(w^-)^2$ 定义的 C^2 逼近：

$$S_\varepsilon(w)=\begin{cases} w^2-\frac{\varepsilon^2}{6} & \text{if } w<-\varepsilon,\\ -\frac{w^4}{2\varepsilon^2}-\frac{4w^3}{3\varepsilon} & \text{if } -\varepsilon\le w<0,\\ 0 & \text{if } w\ge 0.\end{cases}$$

注意

$$S_\varepsilon'(w)=\begin{cases} 2w & w<-\varepsilon,\\ -\frac{2w^3}{\varepsilon^2}-\frac{4w^2}{\varepsilon} & -\varepsilon\le w<0,\\ 0 & w\ge 0\end{cases}\qquad S_\varepsilon''(w)=\begin{cases} 2 & w<-\varepsilon,\\ -\frac{6w^2}{\varepsilon^2}-\frac{8w}{\varepsilon} & -\varepsilon\le w<0,\\ 0 & w\ge 0.\end{cases}$$

注意到 $S_\varepsilon(w)\ge 0$，$S_\varepsilon'(w)\le 0$，以及 $S_\varepsilon''(w)\ge 0$ 对所有 $w\in\mathbb{R}$。此外，由于 $\varepsilon\to 0$，以下收敛关于 $w\in\mathbb{R}$是一致的：$S_\varepsilon(w)\to(w^-)^2$，$S_\varepsilon'(w)\to -2w^-$，以及 $S_\varepsilon''(w)\to\begin{cases}2 & \text{若 } w<0\\ 0 & \text{若 } w\ge 0\end{cases}$。现在，对 $S_\varepsilon(u_1^n)$应用伊

藤公式，其中 u_1^n 是（3.6）的解，可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega S_\varepsilon(u_1^n(t))\,dx-\int_\Omega S_\varepsilon(u_1^n(0))\,dx\\ &\quad=-\int_0^t\int_\Omega d_1\,S_\varepsilon''(u_1^n(s))\left|\nabla u_1^n\right|^2\,dx\,ds+\int_0^t\int_\Omega S_\varepsilon''(u_1^n(s))\chi(u_1^n)\nabla u_2^n\cdot\nabla u_1^n\,dx\,ds\\ &\qquad+\int_0^t\int_\Omega S_\varepsilon'(u_1^n(s))F_1(u_1^n,u_2^n)\,dx\,ds+\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega S_\varepsilon'(u_1^n(s))\sigma^n_{u_1,k}(u_1^n,u_2^n)\,dx dW^n_{u_1,k}\\ &\qquad+\frac12\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega S_\varepsilon''(u_1^n(s))\left(\sigma^n_{u_1,k}(u_1^n,u_2^n)\right)^2\,dx\,ds=:\sum_{i=1}^5 I_i.\end{aligned}\tag{8.1}$$

容易看出 $I_1\le 0$。由条件（1.3）可知，

$$\begin{aligned}&S_\varepsilon''(w)=0\quad\text{for } w\ge 0,\quad\text{and}\quad S_\varepsilon''(w)\ge 0\quad\text{for } w\in\mathbb{R},\\ &\text{and}\quad\chi(w)=0,\quad\text{for } w\le 0.\end{aligned}\tag{8.2}$$

因此 $I_2=0$。类似地，根据函数 F_1的定义，参见（1.4），可得 $I_3=0$。利用（7.2）中的收敛结果，并在（ $n\to\infty$（8.1）中令，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left\|S_\varepsilon(u_1(t))\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]-\mathbb{E}\left[\left\|S_\varepsilon(u_1(0))\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\\ &\quad\le\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\int_\Omega S_\varepsilon''(u_1(t))\left(\sigma^n_{u_1,k}(u_1,u_2)\right)^2\,dx\,ds\right],\qquad t\in[0,T].\end{aligned}\tag{8.3}$$

接下来，我们将 $\varepsilon\to 0$ 代入（8.3），并完全按照 [10, 第 3 节。4],从而得到一个 t

$$\mathbb{E}\left[\left\|u_1^-(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]-\mathbb{E}\left[\left\|u_1^-(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\le C\,\mathbb{E}\left[\int_0^t\left\|u_1^-(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds\right],\tag{8.4}$$

几乎处处 $t \in [0,T]$ 其中 $C > 0$ 是一个常数。最后，由于 $u_1(0)$ 的非负性，并对（8.4）应用格朗沃尔不等式，可得 $u_1^- = 0$ 在 $(0,T)\times\Omega$中几乎处处成立，且几乎必然。类似地，可得 $u_2 \geq 0$ 在$(0.T)\times\Omega$中几乎处处成立，且几乎必然。

现在，我们的目标是证明鞅解 u_i 几乎处处且几乎必然被某个数 $M_i > 0$ 所界定，其中 $i = 1,\ 2$。对 $S_\varepsilon(M_1 - u_1^n)$应用伊藤公式，可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S_\varepsilon(M_1 - u_1^n(t))\,dx - \int_\Omega S_\varepsilon(M_1 - u_1^n(0))\,dx \\
&\quad = -\int_0^t \int_\Omega d_1\, S_\varepsilon''(M_1 - u_1^n(s))\left|\nabla u_1^n\right|^2 dx\,ds + \int_0^t \int_\Omega S_\varepsilon''(M_1 - u_1^n(s))\chi(u_1^n)\nabla u_2^n \cdot \nabla u_1^n\,dx\,ds \\
&\qquad + \int_0^t \int_\Omega S_\varepsilon'(M_1 - u_1^n(s))F_1(u_1^n, u_2^n)\,dx\,ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_\Omega S_\varepsilon'(M_1 - u_1^n(s))\sigma_{u_1,k}^n(u_1^n, u_2^n)\,dx dW_{u_1,k}^n \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_0^t \int_\Omega S_\varepsilon''(M_1 - u_1^n(s))\left(\sigma_{u_1,k}^n(u_1^n, u_2^n)\right)^2 dx\,ds =: \sum_{i=1}^5 \tilde{I}_i.
\end{aligned} \tag{8.5}$$

˜注意到 $I_1 \leq 0$。由（1.3）可得

$$\begin{aligned}
&S_\varepsilon''(M_1 - w) = 0 \quad \text{for } w \leq M_1, \quad \text{and} \quad S_\varepsilon''(M_1 - w) \geq 0 \quad \text{for } w \in \mathbb{R}, \\
&\text{and} \quad \chi(w) = 0, \quad \text{for } w \geq M_1.
\end{aligned} \tag{8.6}$$

作为结 ˜果 $I_2 = 0$。类似地，根据函数 F_i的定义，参见（1.2），可得 $I_3 = 0$.

注意到（7.2）中的收敛性（另见 [10, 第 3 节。2]），将 $n \to \infty$ 代入（8.1），可得不等式:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left\|S_\varepsilon(M_1 - u_1(t))\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right] - \mathbb{E}\left[\left\|S_\varepsilon(M_1 - u_1(0))\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right] \\
&\qquad \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^\infty \int_0^t \int_\Omega S_\varepsilon''(M_1 - u_1(t))\left(\sigma_{u_1,k}^n(u_1, u_2)\right)^2 dx\,ds\right], \qquad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{8.7}$$

将 $\varepsilon \to 0$ 代入（8.7），可推出

$$\mathbb{E}\left[\left\|(M_1 - u_1)^-(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right] - \mathbb{E}\left[\left\|(M_1 - u_1)^-(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right] \leq C\,\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|(M_1 - u_1)^-(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right], \tag{8.8}$$

对几乎处处的 $t \in [0,T]$，其中 $C > 0$为常数。最后，由于 $u_1(0) \leq M_1$，并在（8.8）中应用格朗沃尔不等式，可得 $(M_1 - u_1)^- = 0$在 $(0,T)\times\Omega$上几乎处处成立，且几乎必然成立。沿用相同思路，可得 $u_2 \leq M_2$几乎处处成立于$(0.T)\times\Omega$，且几乎必然成立。

□

9. 弱鞅解的唯一性

本节证明一个 L^2 稳定性估计，并由此得到路径唯一性结论。现在可以证明稳定性结果了。

定理 9.1。假设（1.3）和（2.6）成立。设$\bar{U} = \left(S, \bar{u}_1, \bar{u}_2\right)$和$\hat{U} = \left(S, \hat{u}_1, \hat{u}_2\right)$是相对于同一随机基 S的两个弱解（根据定义*2.1*），参见（2.1），其初始数据为$\bar{u}_1(0) = \bar{u}_{1,\,0}$、 $\hat{u}_1(0) = \hat{u}_{1,\,0}$、$\bar{u}_2(0) = \bar{u}_{2,\,0}$和$\hat{u}_2(0) = \hat{u}_{2,\,0}$，其中$\bar{u}_{1,\,0}$、 $\hat{u}_{1,\,0}$、 $\bar{u}_{2,\,0}$、 $\hat{u}_{2,\,0} \in L^2(D, \mathcal{F}, P; L^\infty(\Omega))$均为非负。存在一个正常数 $C \geq 1$，使得</*output*>

$$\sum_{i=1,2} \mathbb{E}\left[\left\|\bar{u}_i - \hat{u}_i\right\|_{L^2(\Omega_T)}^2\right] \leq C \sum_{i=1,2} \mathbb{E}\left[\left\|\bar{u}_{i,0} - \hat{u}_{i,0}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right]. \tag{9.1}$$

由 $\bar{u}_{1,0} = \hat{u}_{1,0}$, $\bar{u}_{2,0} = \hat{u}_{2,0}$，可知弱鞅解是唯一的。

证明。令 $u_1 := \bar{u}_1 - \hat{u}_1$ 和 $u_2 := \bar{u}_2 - \hat{u}_2$。对于 $i = 1, 2,$ P-几乎处处成立,

$$u_i, \bar{u}_i, \hat{u}_i \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^2((0,T); H^1(\Omega)) \cap L^\infty((0,T); L^2(\Omega)).$$

将关于 $\bar{u}_i, \hat{u}_i$ （$i = 1,2$）的 $(H^1(\Omega))^*$ 值方程相减，得到

$$\begin{aligned} du_1 - d_1 \Delta u_1 \, dt + \operatorname{div}(\chi(\bar{u}_1)\nabla\bar{u}_2 - \chi(\hat{u}_1)\nabla\hat{u}_2) \, dt &= \left(F_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - F_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2)\right) \, dt \\ &\quad + \left(\sigma_{u_1}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - \sigma_{u_1}(\hat{u}_1, \hat{u}_2)\right) dW_{u_1}(t), \\ du_2 - d_2 \Delta u_2 \, dt = \left(F_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - F_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2)\right) \, dt &+ \left(\sigma_{u_2}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - \sigma_{u_2}(\hat{u}_1, \hat{u}_2)\right) dW_{u_2}(t). \end{aligned} \tag{9.2}$$

现在定义函数 $\mathcal{N}_w \in H^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$，使得 $\int_\Omega \mathcal{N}_w \, dx = 0$ 并且是问题的解

$$-\Delta \mathcal{N}_w = w \text{ in } \Omega \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial \mathcal{N}_w}{\partial \eta} = 0 \text{ on } \partial\Omega \tag{9.3}$$

对几乎处处的 $t \in (0,T)$。将（9.2）中的第一个方程乘以 $\mathcal{N}_{u_1}$，得到

$$\begin{aligned} \left(du_1, \mathcal{N}_{u_1}\right) &= d_1 \left(u_1, \Delta \mathcal{N}_{u_1}\right) \, dt - \left(\chi(\bar{u}_1)\nabla\bar{u}_2 - \chi(\hat{u}_1)\nabla\hat{u}_2, \nabla\mathcal{N}_{u_1}\right) dt \\ &\quad + \left(F_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - F_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2), \mathcal{N}_{u_1}\right) \, dt + \sum_{k=1}^{n} \left(\sigma_{u_1,k}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - \sigma_{u_1,k}(\hat{u}_1, \hat{u}_2), \mathcal{N}_{u_1}\right) dW_{u_1,k}(t) \\ &= d_1 \left(u_1, \Delta \mathcal{N}_{u_1}\right) \, dt - \left((\chi(\bar{u}_1) - \chi(\hat{u}_1))\nabla\bar{u}_2, \nabla\mathcal{N}_{u_1}\right) dt - \left(\chi(\hat{u}_1)\nabla u_2, \nabla\mathcal{N}_{u_1}\right) dt \\ &\quad + \left(F_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - F_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2), \mathcal{N}_{u_1}\right) \, dt + \sum_{k=1}^{n} \left(\sigma_{u_1,k}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - \sigma_{u_1,k}(\hat{u}_1, \hat{u}_2), \mathcal{N}_{u_1}\right) dW_{u_1,k}(t). \end{aligned} \tag{9.4}$$

现在，利用（9.3）可推出

$$\begin{aligned} 2\int_0^t \left(du_1, \mathcal{N}_{u_1}\right) &= -2\int_0^t \left(d\Delta\mathcal{N}_{u_1}, \mathcal{N}_{u_1}\right) \\ &= \int_0^t d\left|\nabla\mathcal{N}_{u_1}\right|^2 \\ &= \int_\Omega |\nabla\mathcal{N}_{u_1}(t)|^2 \, dx - \int_\Omega \left|\nabla\mathcal{N}_{u_1}(0)\right|^2 \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\mathcal{N}_{u_1}(t)|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{9.5}$$

在 Ω_t 上积分并使 ng Hölder、Young、Sobolev-Poincaré 和 Burkholder-Davis-Gundy 不等式 s

(2.7)由(9.4)推出

$$\begin{aligned}\int_0^t (du_1, \mathcal{N}_{u_1}) \quad &\leq -d_1 \iint_{\Omega_t} |u_1|^2 \, dx \, ds + \tau \iint_{\Omega_t} |u_1|^2 \, dx \, ds \\ &\quad + C \int_0^T \|\nabla \bar{u}_2\|^2_{L^\infty(\Omega)} \left\|\nabla \mathcal{N}_{u_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \\ &\quad + \frac{d_2}{2} \int_0^T \|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds + C \int_0^T \left\|\nabla \mathcal{N}_{u_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \\ &\quad + \tau \iint_{\Omega_t} |u_1|^2 \, dx \, ds + C \int_0^T \left\|\nabla \mathcal{N}_{u_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \\ &\quad + \tau \iint_{\Omega_t} |u_1|^2 \, dx \, ds + C \iint_{\Omega_t} |u_2|^2 \, dx \, ds \\ &\quad + C \int_0^T \left\|\nabla \mathcal{N}_{u_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \\ &= (3\tau - d_1) \iint_{\Omega_t} |u_1|^2 \, dx \, ds \\ &\quad + C \int_0^T \|\nabla \bar{u}_2\|^2_{L^\infty(\Omega)} \left\|\nabla \mathcal{N}_{u_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \\ &\quad + \frac{d_2}{2} \int_0^T \|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds + 3C \int_0^T \left\|\nabla \mathcal{N}_{u_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \\ &\quad + C \iint_{\Omega_t} |u_2|^2 \, dx \, ds,\end{aligned} \tag{9.6}$$

对于某个常数 $C > 0$。对(9.2)应用伊藤公式，并利用 Hölder 不等式、Young 不等式和(2.7)，可得以下不等式:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \|u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + d_2 \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_2|^2 \, dx \, ds \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_2(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega \left(F_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - F_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2)\right) u_2 \, dx \, ds \\ &\quad + \sum_{k\geq 1} \int_0^t \int_\Omega \left|\sigma_{u_2,k}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - \sigma_{u_2,k}(\hat{u}_1, \hat{u}_2)\right|^2 \, dx \, ds + \sum_{k\geq 1} \int_\Omega u_2 \left(\sigma_{u_2,k}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - \sigma_{u_2,k}(\hat{u}_1, \hat{u}_2)\right) dx dW^k_{u_2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_2(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau \iint_{\Omega_t} |u_1|^2 \, dx \, ds + C \iint_{\Omega_t} |u_2|^2 \, dx \, ds + C \int_0^T \left\|\nabla \mathcal{N}_{u_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds,\end{aligned} \tag{9.7}$$

对于某个常数 $C > 0$。(9.6)和(9.7)的推论是

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\|u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] + \mathbb{E}\left[\left\|\nabla \mathcal{N}_{u_1}(t,x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \\ &\qquad \leq C \int_0^T \mathbb{E}\left[\left(\|\nabla \bar{u}_2\|_{L^\infty(\Omega)} + 1\right)\left\|\nabla \mathcal{N}_{u_1}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right] ds + C \int_0^T E\left[\|u_2(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] ds,\end{aligned} \tag{9.8}$$

对于某个常数 $C > 0$。最后，由(9.8)可得格朗沃尔引理

$$u_2 = 0 \text{ and } \nabla \mathcal{N}_{u_1} = 0 \text{ a.e. in } \Omega_t, \text{ almost surely,}$$

从而确保弱鞅解的唯一性。

□

参考文献

[1] B.E. Ainseba、M. Bendahmane 和 A. Noussair，《一种以猎物趋性为模型的捕食者-猎物反应扩散系统》，*Nonlinear Anal. Real WorldAppl.*，（2008），9，2086–2105。

[2] P. Amorim、B. Telch 和 L. M. Villada，带有追逐、躲避和非局部感知的反应扩散捕食者-猎物模型，数学生物科学与工程，5(16)，(2019)，5114–5145。[3] M. Bandyopadhyay、J. Chattopadhyay，比率依赖型捕食者-猎物模型：环境波动的影响与稳定性，非线性，(2005)，18，913–936。[4] M. L. Bates、R. A. Cropp、D. W. Hawker 和 J. Norbury，哪些功能反应能够避免生态种群动力学模型中的灭绝？，生态复杂性，(2016)，26，57–67。[5] N. Bellomo、A. Bellouquid、Y. Tao 和 M. Winkler，迈向生物组织中模式形成的Keller-Segel模型数学理论，数学模型与方法及其应用科学，25(09)，(2015) 1663–1763。[6] M. Bendahmane 和 K.H. Karlsen，随机非局部交叉扩散系统的鞅解，网络与异质性，(2022)，17，719–752。[7] M. Bendahmane、H. Nzeti、J. Tagoudjeu 和 M. Zagour，模拟带有猎物趋性和噪声的捕食者-猎物相互作用的随机反应扩散系统，预印本，(2023)。[8] M. Bendahmane、J. Tagoudjeu 和 M. Zagour，二维随机动理学-流体模型的基于奇偶分解的渐近保持格式，计算物理学杂志，(2022)，471，111649。[9] A.A. Berryman，捕食者-猎物理论的起源与演变，生态学，(1992)，73(5)，1530–1535。[10] M.D. Chekroun、E. Park 和 R. Temam，随机偏微分方程的Stampacchia最大值原理及其应用，微分方程杂志，(2016)，3(260)，2926–2972。[11] G. Da Prato 和 A. Ichikawa，具有几乎周期输入的线性系统最优控制，SIAM控制与优化杂志，(1987)，4(25)，1007–1019。[12] G. Da Prato 和 J. Zabczyk，无限维随机方程，《数学及其应用百科全书》第152卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2014年。[13] F. Dai 和 B. Liu，具有两种癌细胞种类的触性趋化癌症侵袭模型的整体可解性与最优控制，应用数学与优化，(2021)，3(84)，2379–2443。[14] F. Dai 和 B. Liu，带有捕食者趋性的广义交叉扩散双竞争捕食者-单猎物系统的整体解，非线性科学、数值模拟与应用通讯，(2020)，89，105336。[15] J.H.P. Dawes 和 M.O. Souza，捕食者-猎物系统中Holling I、II和III型功能反应的推导，理论生物学杂志，(2013)，327，11–22。[16] A. Debussche、N. Glatt-Holtz 和 R. Temam，抽象流体模型的局部鞅解与路径解，物理学D辑，(2011)，240(14-15)，1123–1144。[17] U. Dobramysl、M. Mobilia、M. Pleimling 和 U.C. Täuber，空间扩展的捕食者-猎物系统中的随机种群动力学，物理学杂志A辑，(2018)，6(51)，063001。[18] D. Grünbaum，利用空间显式模型刻画异质景观中的觅食表现，美国博物学家，(1998)，151，97–115，[19] M. Hofmanová，退化抛物型随机偏微分方程，随机过程及其应用，(2013)，123(12)，4294–4336。[20] Y. Huang、W. Shi、C. Wei 和 S. Zhang，捕食者具有Holling II型递增函数的随机捕食者-猎物模型，生物学动力学杂志，(2021)，15(1)，1–18。[21] A. Jakubowski，非度量空间中子序列的几乎必然Skorokhod表示，概率论及其应用，(1997)，42，167–174。[22] . E. Jeong、K. Junha 和 L. Jihoon，二维双物种趋气性-纳维-斯托克斯系统的稳定化，Nonlinear Anal. Real World Appl.，(2021)，57，103187。[23] H.Y. Jin 和 Z.A. Wang，猎物趋性系统的整体稳定性，微分方程杂志，(2017)，262，1257–1290。[24] H.Y. Jin 和 Z.A. Wang，具有密度依赖运动的捕食者-猎物系统的整体动力学与时空模式，欧洲应用数学杂志，(2021)，32，652–682。[25] I. Karatzas 和 S.E. Shreve，布朗运动与随机微积分，施普林格，1998年。[26] P. Kareiva 和 G. Odell，如果捕食者个体采用区域限制搜索，捕食者群就会表现出“猎物趋性”，美国博物学家，(1987 130, 233 270), — .[27] M. Liu 和 K. Wang，随机非自治Logistic系统中的持久性与灭绝，数学分析与应用杂志，(2011)，2(375)，443–457。[28] R.M. May，《模型生态系统中的稳定性与复杂性》，普林斯顿大学出版社，新泽西州，2001年。[29] W. Murdoch、J. Chesson 和 P. Chesson，生物防治的理论与实践，美国博物学家，(1985)，125，344–366。[30] D. Nguyen 和 G. Yin，随机竞争型Lotka-Volterra模型的共存与排斥，差分方程杂志，(2017)，262，1192–1225。[31] N.N. Nguyen 和 G. Yin，受时空白噪声扰动的随机Lotka-Volterra竞争反应扩散系统：建模与分析，微分方程杂志，(2021)，282，184–232。[32] N.N. Nguyen 和 G. Yin，空间依赖型捕食者-猎物方程的随机偏微分方程模型，离散与连续动力系统B辑，(2020)，1(25)，117–139。[33] S. O’Malley 和 M.A. Bees，剪切流中游动双鞭毛生物的定向，数学生物学通报，(2012)，1(74)，232–255。[34] C. Prévôt 和 M. Röckner，《随机偏微分方程简明教程》，《数学讲义》第1905卷，施普林格，柏林，2007年。[35] C. Prévôt 和 M. Röckner，《随机偏微分方程简明教程》，施普林格，2007年。[36] F. Rao 和 W. Wang，纳入带噪声和外力猎物避难所的Michaelis-Menten型捕食模型的动力学，统计力学杂志，(2012)，P03014。[37] G. Ren 和 B. Liu，同时具有捕食者趋性与猎物趋性的捕食者-猎物模型的整体存在性及向稳态收敛，离散与连续动力系统，(2022)，42(2)，759–779。[38] F.A. Rihan 和 H.J. Alsakaji，具有协同捕猎的捕食者-猎物系统随机时滞微分模型的持久性与灭绝

捕食者中，*Adv. Difference Equ.*，（2020年），124。[39] R. Rudnicki，随机猎物-捕食者模型的长期行为，随机过程及其应用，（2003年），1(108)，93–107。[40] N. Sapoukhina、Y. Tyutyunov 和 R. Arditi，猎物趋性在生物防治中的作用，美国博物学家，（2003年），162，61–76。[41] J. Simon.，空间 $L^p(0,T;B)$ 中的紧集，*Ann. Mat. Pura Appl.*，（1987年），146(4)，65–96。[42] Y. Tao，具有非线性猎物趋性的捕食者-猎物模型的经典解整体存在性，*Nonlinear Anal. Real World Appl.*，（2010年），11，2056–2064。[43] 2015 55, 236 246 [44]

K. Tran 和 G. Yin，随机竞争 Lotka-Volterra 生态系统的最优捕捞策略，*Automatica*，（），– S. Wu、J. Wang 和 J. Shi.，具有捕食者趋性的扩散型捕食者-猎物模型的动力学与模式形成，数学模型与方法及其应用科学，（2018年），11(28)，2275–2312。[45] X. Xu 和 Y. Wang，三物种反应-扩散-趋性系统的整体存在性与有界性，*Adv. Difference Equ.*，（2018年），115。[46] F. Yi、J. Wei 和 J. Shi，均匀扩散型捕食者 - 猎物系统中的分岔与时空模式，微分方程杂志，（ 2009 年），5(246)，1944–1977。