随机延迟测量与数据包丢失系统的建模与估计

Ranjeet Kumar Tiwari 和 Shovan Bhaumik

arXiv:2304.01707v1 [eess.SP] 4 Apr 2023

摘要——网络化系统通常使用共享通信网络，将测量值传输到远程估计中心。由于信道带宽有限，接收测量值时可能出现延迟。该延迟可以是任意步数的随机延迟，并且在传输过程中，有时会因延迟超过某个允许的步数而发生数据包丢失。本文采用泊松分布对这类测量值进行建模，从而使用户能够确定系统可能遭受的最大延迟。当测量延迟超过允许的步数时，就会发生数据包丢失。基于所提模型，我们假设状态的先验密度和后验密度均为高斯分布，并据此求解问题，推导出估计状态和误差协方差的表达式。随后，我们放宽密度的高斯假设，提出一种基于序贯蒙特卡洛（SMC）方法的解决方案。所提出的SMC方法将粒子集划分为若干组，每组对应一种可能性，即接收的测量值延迟特定步数。每组的权重由测量值延迟的步数与该组所代表的步数相同的概率决定。该方法既能估计状态，也能根据接收的测量值评估延迟量。最后，我们将所开发的估计器应用于两个非线性估计问题，并对仿真结果进行了比较。与所设计的高斯延迟滤波器以及现有的带延迟粒子滤波器相比，所提出的SMC方法表现更佳。

索引词—泊松分布、随机时延、序贯蒙特卡罗方法、高斯近似方法。

I. 引言

THE 网络化控制系统广泛应用于无人机、陆地与太空探索以及危险环境探测等诸多领域。在这类系统中，信息通过容量有限的公共通信信道传输，因此不可避免地会出现一些不利情况，例如测量值随机时延、测量值缺失/数据包丢失、传感器饱和和信号量化等网络引发的现象。因此，这些不利情况要求对该系统传统的状态估计算法作出一定修改。本文考虑了测量值随机时延和数据包丢失事件，并据此开发贝叶斯估计器。

Ranjeet Kumar Tiwari 和 Shovan Bhaumik 任职于印度理工学院巴特那分校电气工程系，印度（电子邮箱：ranjeet.pee16@iitp.ac.in 和 shovan.bhaumik@iitp.ac.in。）

文献中已有多项研究在设计高斯状态估计器时考虑了测量值随机时延[4]–[7]。文献 [8] 提出了一种采用状态增广的无迹卡尔曼滤波器，用于处理测量值发生两步随机时延的情况。文献 [9] 的作者假设延迟测量有界且存在数据包丢失，并据此为网络化控制系统设计了一个最优估计器。同一作者还提出了一种针对有时间戳和无时间戳延迟测量的最优线性滤波器 [10]。文献 [11]介绍了一种广义滤波方法，适用于测量值最多存在一步随机时延的高斯系统；而文献 [12] 则在开发通用高斯滤波器时，同时处理了多步延迟测量和数据包丢失。上述非线性估计器假设，即使系统受到动力学非线性和测量值随机时延的影响，仍保持高斯分布。此外，这些方法采用的测量模型允许同一测量值被接收多次；因此，接收测量并不独立于过去的测量值，测量噪声序列也会随时间相关。

为处理非高斯系统，文献 [13]提出了一种针对单步随机延迟测量值的粒子滤波方法，通过修改重要性权重来实现。随后，同一作者将其工作扩展到多步延迟测量 [14]。采用不同的测量模型，同时考虑数据包丢失和随机延迟测量， [15] 也提出了一种用于状态估计的粒子滤波方法。这些工作在整个最大延迟长度内的后续时间步中，反复利用每个粒子，将似然密度乘积之和用于计算。它们还采用了能够生成相关测量值和相关噪声序列的测量模型。

在本技术札记中，我们提出一种新的测量模型，通过采用泊松随机变量来表示测量值中的随机时延和数据包丢失。该广义模型只需改变一个参数，即可涵盖各种延迟与数据包丢失场景。它不允许任何测量值被接收多次，因此测量噪声序列之间不相关。此外，我们首先通过计算测量值随机时延所影响的各项，推导出适用于所提出时延模型的广义高斯近似估计器。

随后，我们提出一种序贯蒙特卡洛（SMC）方法，无需强制假设系统为高斯系统，即可在延迟环境下进行

状态估计。所提出的SMC算法将从提议分布中采样得到的粒子集划分为多个组，每个组对应一种可能性，即接收测量延迟了特定的步数。随后，根据粒子所属的延迟组计算其重要性权重。最后，通过重采样选出能够有效支持接收测量的粒子。此外，在此方法中，分配给重采样后粒子的延迟值包含接收测量的延迟步数信息，因此可在每一步进行估计。与现有粒子滤波方案中使用的似然密度乘积和方法不同，所提出的方法避免在计算重要性权重时重复使用同一粒子。因此，相关粒子更有可能代表状态的后验密度。

通过将两个非线性状态估计问题的仿真结果与现有估计器的表现进行比较，验证了所提出的贝叶斯估计器。仿真结果表明，所提出的估计器是有效的。

II. 随机延迟测量下的系统表示

考虑一个可由以下方程描述的非线性动态系统：

$$\textit{State equation:} \qquad x_k = f_{k-1}(x_{k-1}) + \eta_{k-1}, \tag{1}$$

$$\textit{Measurement equation:} \qquad z_k = h_k(x_k) + v_k, \tag{2}$$

其中，$x_k \in \Re^{n_x}$ 表示系统的状态向量，$z_k \in \Re^{n_z}$ 表示任意离散时间$k \in (0, 1, \cdots)$的测量值；$\eta_{k-1} \in \Re^{n_x}$和 $v_k \in \Re^{n_z}$是相互独立的白噪声，其概率密度函数（pdf）任意但已知。考虑这样一种情况：由于传感器与估计器之间的通信网络存在带宽有限、通信故障等限制，接收测量可能是前一时间步的随机延迟测量。假设测量值没有时间戳，并且在任一给定时间步，估计器端最多只能接收到一个测量值。文献中有许多模型描述了具有不同特性的类似情形。

A. 随机延迟测量的现有模型

在文献中，伯努利随机变量主要用于表示测量值中的随机时延。现有的大多数基于伯努利的多步延迟模型都可以借助以下两个模型进行解释：

(i) 延迟的测量值，y_k，表示为 [14]

$$y_k = \sum_{j=0}^{N} \beta_k^j z_{k-j}; \quad k \geq 2, \tag{3}$$

其中

$$\beta_k^j = \begin{cases} \prod_{i=0}^{j} \alpha_k^i (1 - \alpha_k^{j+1}); & 0 \leq j < N, \text{ and } \alpha_k^0 = 1 \\ \prod_{i=1}^{j} \alpha_k^i; & j = N. \end{cases}$$

这里，α_k^i 是伯努利随机数，满足 $\mathbb{E}[\alpha_k^i] = \Theta$，并且在任意时刻，$\beta_k^j$ 中只有一个可以为 1，其余均为 0。表 I 模拟了采用该模型得到的一组接收测量值，其中第二行表示 $\alpha_k^j = 1$时索引 j 的值。

表 I：接收的测量值与 $\Theta = 0.5$ 和 $N = 2$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j	0	1	0	1	0	2	0	1	0	0
y_k	z_1	z_1	z_3	z_3	z_5	z_4	z_7	z_7	z_9	z_{10}

[11], [13], [16], [17] 中的作者使用伯努利分布对一步随机时延进行建模，而 [8]则借助它对两步时延进行建模。一步或两步时延模型本质上是上述多步时延模型的特例，其中 N 分别设为 1 和 2。在这些模型中，每个时间步都必须接收到测量值，不允许发生数据包丢失。

(ii) 接收测量 y_k 表示为 [12]

$$y_k = \sum_{j=0}^{N} \beta_k^j z_{k-j} + \left(1 - \sum_{j=0}^{N} \beta_k^j\right) y_{k-1}; \qquad k \geq 2, \tag{4}$$

其中 $\beta_k^j = \prod_{i=0}^{j} \alpha_k^i (1 - \alpha_k^{j+1})$。此外，$\alpha_k^i$ 是满足 $\mathbb{E}[\alpha_k^i] = \Theta$ 的伯努利随机变量，而 β_k^j 是二进制变量，在给定时刻 k，j $(0 \leq j \leq N)$ 中只有一个可以为 1。表 II 展示了使用上述模型进行仿真时接收到的测量值的单个代表性序列。主要区别在于，这种_久久爱

表 II：使用 $\Theta = 0.5$ 和 $N = 2$ 的接收测量值

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j	0	1	0	$\beta_k^j = 0$	0	1	0	2	0	0
y_k	z_1	z_1	z_2	丢失(y_3)	z_5	z_5	z_7	z_6	z_9	z_{10}

当α_k^j 在任何 j取值下都不为 1 时，这些模型允许丢弃测量值。例如，[9], [15], [18] 中的模型已将丢包的情况与随机时延一并纳入考虑。另一方面，[19], [20] 中的作者在 [14]的结构中使用了一个额外的伯努利变量，以对接收测量中的缺失情况进行建模。然而，在所有这些模型中，同一测量值可能被接收多次，这种情况是冗余的，而且可能无助于重建状态。

关于现有时延模型，可以作出以下说明：

- 当反复收到相同的测量值时，它们不再相互条件独立，测量噪声序列也会随时间产生相关性。这些现象限制了估计器采用标准的贝叶斯估计结构。

- [10] 中的作者提出了一种模型，其中测量值不会被重复接收；然而，他们

针对不同的延迟步使用了一组伯努利随机变量，因此表达式明显变得复杂且冗长。

- 文献中的所有模型都表明，测量值没有延迟的可能性高于经历非零步数延迟的可能性；此外，延迟步数越多，概率越低。这或许反映了大多数现实情况，但它仍只是一个一般模型的特殊情况；在该一般模型中，任意延迟步数都可能在一组接收的测量值中占主导地位。

B. 提出的测量模型

为从数学上表示一种能够克服上述困难的测量模型，我们提出采用泊松分布，如下所示。若 y_k 是在时间步 k 接收到的测量值，则

$$y_k = \sum_{j_k=0}^{N} \beta_k^{j_k} z_{k-j_k}, \tag{5}$$

其中， $\beta_k^{j_k}$定义为

$$\beta_k^{j_k} = \begin{cases} \alpha_k^0; & j_k = 0 \\ \alpha_k^{j_k} \prod_{i=1}^{j_k} (1-\alpha_{k-i}^{j_k-i}); & j_k > 0. \end{cases} \tag{6}$$

这里， $\alpha_k^{j_k}(j_k = 0, 1, \cdots, N)$是一组二元变量，其中$N$ 是其时变索引 j_k的最大值； j_k表示延迟步数。如果接收到的测量值的延迟步数大于 N，则假定该测量值对于状态估计而言不包含有效信息，并将其视为该步的数据包丢失。此外，在时间步 k， $\alpha_k^{j_k}$中至多只有一个取值为1，其余均为0。对于泊松分布索引 j_k，当 $\alpha_k^{j_k}$取值为1时，其概率质量函数（pmf）为

$$P(\alpha_k^{j_k} = 1) = e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^{j_k}}{j_k!}, \tag{7}$$

其中， λ_k 是泊松随机变量 j_k的均值，即$\mathbb{E}[j_k] = \lambda_k$，表示每个时间步延迟的平均值。此外， $\alpha_k^{j_k}$ 的期望为

$$\mathbb{E}[\alpha_k^{j_k}] = e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^{j_k}}{j_k!}.$$

注 1. 为了描述同一测量值可能被重复接收的情况，式 (5) 的一个特殊情况（其中$\beta_k^{j_k} = 1$、 $\forall j_k$）可表示为

$$y_k = z_{k-j_k}; \quad j_k \le k, \tag{8}$$

其中， j_k 是一个独立同分布的泊松随机变量，表示测量值在时间步$k - j_k$ 产生后，经过多少个延迟步才能在时间步 k被接收。然而，该模型没有限制最大延迟步数。

注 2. 为规避式 (8) 中重复测量的这些特性以及延迟步数不受限制的问题，已考虑一组二进制变量 $\alpha_k^{j_k}(j_k = 0, 1, \cdots, N)$，其中 N 是用户定义的最大允许延迟步数。

注 3. 式 (5) 中的所提模型表示一类广义的非重复测量模型。类似地，在引入最大允许延迟数 N后，式 (8) 描述了具有随机丢包的重复测量模型的一般情况。

在任意时间步 k，测量值以 $P(\beta_k^{j_k} = 1)$ 的概率延迟 j_k 步，而同一测量值被丢弃的概率为 $1-P(\sum_{j_k=0}^{N} \beta_k^{j_k} = 1)$。这些概率由引理1和引理2计算得出。

引理 1. 接收测量 y_k 延迟 j_k 步的概率为

$$\gamma_k^{j_k} = \begin{cases} e^{-\lambda_k}; & j_k = 0 \\ e^{-\lambda_k} \dfrac{\lambda_k^{j_k}}{j_k!} \prod_{i=1}^{j_k} \left(1 - e^{-\lambda_{k-i}} \dfrac{\lambda_{k-i}^{j_k-i}}{(j_k-i)!}\right); & j_k > 0. \end{cases} \tag{9}$$

证明. 情况 I ($j_k = 0$): 通过使用方程 (7) 和 (6)，我们有

$$\begin{aligned} \gamma_k^0 = P(\beta_k^0 = 1) &= \mathbb{E}[\beta_k^0 = \alpha_k^0] \\ &= e^{-\lambda_k}. \end{aligned}$$

Case II ($j_k > 0$): Similarly,

$$\gamma_k^{j_k} = P(\beta_k^{j_k} = 1) = \mathbb{E}\left[\alpha_k^{j_k} \prod_{i=1}^{j_k} (1 - \alpha_{k-i}^{j_k-i})\right].$$

考虑到二进制变量 $\alpha_k^{j_k}(j_k = 0, 1, \cdots, N)$ 在各时间步之间相互独立，我们可以写作

$$\begin{aligned} \gamma_k^{j_k} &= \mathbb{E}[\alpha_k^{j_k}] \prod_{i=1}^{j_k} \mathbb{E}[(1 - \alpha_{k-i}^{j_k-i})] \\ &= \mathbb{E}[\alpha_k^{j_k}] \prod_{i=1}^{j_k} (1 - \mathbb{E}[\alpha_{k-i}^{j_k-i}]). \end{aligned} \tag{10}$$

将（7）代入上述方程即可得到（9）。 □

引理 2。测量值 y_k 从未在估计器端接收到的概率为 $1 - \sum_{j_k=0}^{N} \gamma_k^{j_k}$。

证明。对于所有允许的 j_k， $\beta_k^{j_k}$ 为零的概率为

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{j_k=0}^{N} \beta_k^{j_k} = 0\right) &= 1 - \sum_{j_k=0}^{N} \mathbb{E}[\beta_k^{j_k}] \\ &= 1 - \sum_{j_k=0}^{N} \gamma_k^{j_k}. \end{aligned}$$

□

与现有模型相比，所提出的时延模型具有以下性质：

(i) 一旦为 N 定义一个值，它便能自然地对具有非零概率的随机丢包进行建模，这与真实场景非常相似。当测量值经历的延迟超过

N 步时，就将其视为丢失。 [8], [11], [14] 中使用的时延模型没有为测量数据包丢失留出空间，估计器必须在每个时间步接收一个测量值。 [20] 中的工作必须使用额外的随机变量来表示随机测量丢失。

(ii) 在所提模型中，每个测量值仅传输一次，且每个测量值最多接收一次。多次使用同一个测量值进行估计是冗余的，并且可能无助于重构该时间步的状态。 [8], [11], [14] 中的时延模型倾向于让同一个测量值被接收多次，而不是发生数据包丢失。相比之下，在 [12], [15], 中，如果当前时间步发生数据包丢失，作者会使用先前接收的测量值来估计状态。

(iii) 噪声序列失去白性，使设计者无法使用标准的贝叶斯估计算法。然而，在所提模型中，同一个测量值不会被接收多次；因此，该模型保持当前测量 y_k 与其先前接收的测量值 $y_{1:k-1}$之间的条件独立性。此外，如附录A所示，与 [8],[11], [12], [14], [15] 中使用的模型不同，该模型保持了测量噪声序列的白性。

(iv) 参数 λ_k 是所提模型的重要组成部分，通过适当选择其取值，可涵盖网络化系统的多种时延情形。对于测量值而言，无延迟的可能性高于经历非零延迟步数的可能性，这一特性由 $\lambda_k \in (0,1]$ 描述。若选择 $\lambda_k = 3$，则延迟步数为 3 的测量值出现的可能性最高，且随着延迟步数向 3 的两侧增加，概率逐渐降低。图 1 展示了服从泊松分布的 j_k 的概率与延迟步数之间的关系。表 III 展示了当所有 k 均满足 $N = 2$ 时， $\lambda_k = 0.7$ 的一批接收测量值。

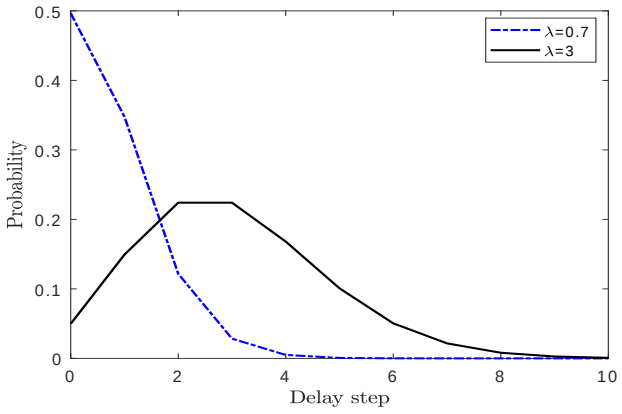


图 1：泊松分布的延迟步数与概率

C. 问题陈述

我们旨在设计采用高斯近似和序贯蒙特

表 III：具有 $\lambda = 0.7$ 和 $N = 2$ 的接收测量值

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j_k	0	$\beta_2^{j_2} = 0$	1	1	0	$\beta_6^{j_6} = 0$	0	2	0	0
y_k	z_1	lost ($\hat{}y_2$)	z_2	z_3	z_5	lost ($\hat{}y_6$)	z_7	z_6	z_9	z_{10}

卡罗（SMC）方法的贝叶斯估计算法，以递归方式重建后验密度， $p(x_k|y_{1:k})$，以及关于未观测状态的后验密度可积函数的期望， $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$。该算法利用接收的测量值， $\{y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$。接收的测量值由式（2）和所提出的时延模型（5）给出，未观测状态遵循式（1）中的动态过程。

III. 随机时延测量的高斯滤波器

在本节中，我们利用贝叶斯框架，在高斯假设下推导所提模型（5）的非线性滤波算法。给定接收的测量值后，状态的联合密度可表示为

$$\begin{aligned} p(x_{0:k}|y_{1:k}) &= \frac{p(x_{0:k}, y_{1:k})}{p(y_{1:k})} \\ &= \frac{p(y_k|x_{0:k}, y_{1:k-1})p(x_{0:k}, y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})p(y_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(y_k|x_{0:k}, y_{1:k-1})p(x_{0:k}|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}. \end{aligned} \tag{11}$$

由测量模型 (2) 和 (5) 可知，接收测量， y_k，与状态， x_k、 $\cdots$、 x_{k-N}，相关。因此，放宽测量值相互独立这一标准假设后，我们可以认为， y_k 在给定 $x_{k-N:k}$ 的条件下，与之前的测量值和状态相互独立，即 $p(y_k|x_{0:k}, y_{1:k-1}) = p(y_k|x_{k-N:k})$。此外，对于时间步 k 的递归估计，假设截至时间步 $k-1$ 的状态估计已知。因此，利用 (11)，状态的滤波密度可表示为

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_{k-N:k})p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}, \tag{12}$$

其中，预测密度 $p(x_k|y_{1:k-1})$ 由 Chapman-Kolmogorov 积分给出：

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x_{k-1}. \tag{13}$$

考虑过程噪声 η_{k-1} 和测量噪声 v_k 均为零均值白高斯序列，其协方差分别为 Q_{k-1} 和 R_k。初始状态 x_0 也服从高斯分布，且 x_0、 η_{k-1} 和 v_k 是不相关序列。现在，假设如果 $p(x_{k-1}|y_{1:k-1})$ 服从高斯分布，则式（13）中的预测密度 $p(x_k|y_{1:k-1})$ 也服从高斯分布，那么 $p(x_k|y_{1:k-1})$ 的一阶和二阶矩可以

表示为

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k-1} &= \mathbb{E}[x_k|y_{1:k-1}] \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbb{E}[(x_k-\hat{x}_{k|k-1})(x_k-\hat{x}_{k|k-1})^\top|y_{1:k-1}].\end{aligned} \tag{14}$$

由于式 (13) 中的预测密度取决于状态动态和先前估计，而不取决于当前测量，因此可以采用文献中已有的任意高斯近似方法来计算其期望[21]–[23]。

类似地，假设当前测量值的预测密度也服从高斯分布，即 $p(y_k|y_{1:k-1}) = \mathcal{N}(y_k; \hat{}y_{k|k-1}, \mathrm{P}^{yy}_{k|k-1})$。其矩见引理 3，其中 $\hat{}z_{k-j_k|k-1}$ 和 $\mathrm{P}^{zz}_{k-j_k|k-1}$ 可按照高斯近似方法中的说明计算。

引理 3. 时间步k 处测量值的预测估计为

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{j_k=0}^{N} \bar{\gamma}_k^{j_k} \hat{z}_{k-j_k|k-1}, \tag{15}$$

测量协方差为

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{yy}_{k|k-1} = &\sum_{j_k=0}^{N} \bar{\gamma}_k^{j_k} \mathbf{P}^{zz}_{k-j_k|k-1} \\ &+ \sum_{j_k=0}^{N} \bar{\gamma}_k^{j_k}(1-\bar{\gamma}_k^{j_k}) \hat{z}_{k-j_k|k-1}\hat{z}^\top_{k-j_k|k-1}.\end{aligned} \tag{16}$$

证明. 第 k 个时间步接收测量的预测估计可表示为

$$\hat{y}_{k|k-1} = \mathbb{E}[y_k|y_{1:k-1}] = \mathbb{E}\left[\sum_{j_k=0}^{N} \beta_k^{j_k} z_{k-j_k}|y_{1:k-1}\right].$$

由于变量 $\beta_k^{j_k}$和 z_{k-j_k} 相互独立，上述期望可写为

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{j_k=0}^{N} \mathbb{E}[\beta_k^{j_k}|y_{1:k-1}]\mathbb{E}[z_{k-j_k}|y_{1:k-1}].$$

利用 $\beta_k^{j_k}$ 与过去接收的测量 $y_{1:k-1}$ 不相关这一事实，并根据引理 1，可由上述方程得到式 (15)。请注意，此测量值估计的计算排除了未接收到测量值的时刻，因此使用归一化时延概率 $\bar{\gamma}_k^{j_k} = \gamma_k^{j_k}/\sum_{j_k=0}^{N}\gamma_k^{j_k}$ 作为 $\beta_k^{j_k}$ 的期望。

此外，由式 (15) 可得第 k 个时间步接收测量值的估计误差为

$$\begin{aligned}y_k - \hat{y}_{k|k-1} &= \sum_{j_k=0}^{N} \beta_k^{j_k} z_{k-j_k} - \sum_{j_k=0}^{N} \bar{\gamma}_k^{j_k} \hat{z}_{k-j_k|k-1} \\ &= M_1 - M_2,\end{aligned} \tag{17}$$

并且，根据式（17），测量协方差定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{yy}_{k|k-1} &= \mathbb{E}[(y_k-\hat{y}_{k|k-1})(y_k-\hat{y}_{k|k-1})^\top|y_{1:k-1}] \\ &= \mathbb{E}[M_1M_1^\top|y_{1:k-1}] - \mathbb{E}[M_1M_2^\top|y_{1:k-1}] \\ &\quad - \mathbb{E}[M_2M_1^\top|y_{1:k-1}] + \mathbb{E}[M_2M_2^\top|y_{1:k-1}].\end{aligned} \tag{18}$$

现在，我们按如下方式计算式（18）的期望:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[M_1M_1^\top|y_{1:k-1}] \\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{s=0}^{N}\beta_k^s z_{k-s}\sum_{l=0}^{N}\beta_k^l z_{k-l}^\top|y_{1:k-1}\Big] \\ &= \sum_{s=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\mathbb{E}[\alpha_k^s(1-\alpha_{k-1}^{s-1})\cdots(1-\alpha_{k-s}^0)\alpha_k^l(1-\alpha_{k-1}^{l-1})\cdots \\ &\quad \times(1-\alpha_{k-l}^0)]\mathbb{E}[z_{k-s}z_{k-l}^\top]\end{aligned}$$

考虑以下几种情况来计算上述方程。

情形 I（$s=l$）：已知 α_{k-s}^s 是一个二元变量，且 $\mathbb{E}[(\alpha_{k-s}^s)^2] = \mathbb{E}[\alpha_{k-s}^s]$，利用关系 $\mathbf{P}^{zz}_{k-s|k-1} = \mathbb{E}[z_{k-s}z_{k-s}^\top] - \hat{}z_{k-s|k-1}\hat{}z_{k-s|k-1}^\top$，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[M_1M_1^\top|y_{1:k-1}] \\ &= \sum_{s=0}^{N}]\mathbb{E}[(\alpha_k^s)^2(1-\alpha_{k-1}^{s-1})^2\cdots(1-\alpha_{k-s}^0)^2\mathbb{E}[z_{k-s}z_{k-s}^\top] \\ &= \sum_{s=0}^{N}\mathbb{E}[\beta_k^s](\mathbf{P}^{zz}_{k-s|k-1} + \hat{z}_{k-s|k-1}\hat{z}^\top_{k-s|k-1}) \\ &= \sum_{s=0}^{N}\bar{\gamma}_k^s(\mathbf{P}^{zz}_{k-s|k-1} + \hat{z}_{k-s|k-1}\hat{z}^\top_{k-s|k-1}).\end{aligned} \tag{19}$$

情况 II（$s\neq l$）：利用非延迟测量值 $z_k(k\in\mathbb{N})$ 和 α_k^j $(k\in\mathbb{N}, 0\le j\le N)$ 相互独立这一事实，我们可以写出

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[M_1M_1^\top|y_{1:k-1}] \\ &= \sum_{s=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\mathbb{E}[\alpha_k^s(1-\alpha_{k-1}^{s-1})\cdots(1-\alpha_{k-s}^0)]\mathbb{E}[\alpha_k^l(1-\alpha_{k-1}^{l-1}) \\ &\quad \times\cdots(1-\alpha_{k-l}^0)]\mathbb{E}[z_{k-s}]\mathbb{E}[z_{k-l}^\top] \\ &= \sum_{s=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\bar{\gamma}_k^s\bar{\gamma}_k^l\hat{z}_{k-s|k-1}\hat{z}^\top_{k-l|k-1}.\end{aligned} \tag{20}$$

同样，计算式（18）的第二项，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[M_1M_2^\top|y_{1:k-1}] \\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{s=0}^{N}\beta_k^s z_{k-s}\sum_{l=0}^{N}\bar{\gamma}_k^l\hat{z}^\top_{k-l|k-1}|y_{1:k-1}\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{s=0}^{N}\beta_k^s z_{k-s}|y_{1:k-1}\Big]\sum_{l=0}^{N}\bar{\gamma}_k^l\hat{z}^\top_{k-l|k-1}|y_{1:k-1} \\ &= \sum_{s=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\bar{\gamma}_k^s\bar{\gamma}_k^l\hat{z}_{k-s|k-1}\hat{z}^\top_{k-l|k-1}.\end{aligned} \tag{21}$$

类似地，

$$\mathbb{E}[M_2M_1^\top|y_{1:k-1}] = \sum_{s=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\bar{\gamma}_k^s\bar{\gamma}_k^l\hat{z}_{k-s|k-1}\hat{z}^\top_{k-l|k-1}. \tag{22}$$

最后，

$$\mathbb{E}[M_2 M_2^\top | y_{1:k-1}] = \sum_{s=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \bar{\gamma}_k^s \bar{\gamma}_k^l \hat{z}_{k-s|k-1} \hat{z}_{k-l|k-1}^\top. \quad (23)$$

现在，若将方程 (19)、(20)、(21)、(22) 和 (23) 代入 (18)，即可得到 (16)。 □

进一步求后验估计时，互协方差 $\mathrm{P}_{k|k-1}^{xy}$ 在下述引理中给出。

引理 4. 时间步 k 的互协方差为

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{xy} = \sum_{s=0}^{N} \bar{\gamma}_k^s \mathbf{P}_{k,k-s|k-1}^{xz}. \quad (24)$$

证明. 根据 (5) 和 (15)，条件互协方差定义为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k|k-1}^{xy} &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})|y_{1:k-1}] \\
&= \mathbb{E}\Big[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})\Big(\sum_{s=0}^{N} \beta_k^s z_{k-s} - \sum_{s=0}^{N} \bar{\gamma}_k^s \hat{z}_{k-s|k-1}\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})\Big(\sum_{s=0}^{N} \beta_k^s (z_{k-s} - \hat{z}_{k-s|k-1}) \\
&\quad + \sum_{s=0}^{N} \beta_k^s \hat{z}_{k-s|k-1} - \bar{\gamma}_k^s \hat{z}_{k-s|k-1}\Big)\Big] \\
&= \sum_{s=0}^{N} \mathbb{E}[\beta_k^s]\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(z_{k-s} - \hat{z}_{k-s|k-1})] \\
&\quad + \sum_{s=0}^{N} \mathbb{E}[\beta_k^s - \bar{\gamma}_k^s]\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})\hat{z}_{k-s|k-1}].
\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}[\beta_k^s - \bar{\gamma}_k^s] = 0$ 和 $\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(z_{k-s} - \hat{z}_{k-s|k-1})] = \mathrm{P}_{k,\ k-s|k-1}^{xz}$，因此有

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{xy} = \sum_{s=0}^{N} \bar{\gamma}_k^s \mathbf{P}_{k,k-s|k-1}^{xz}.$$

□

注 4. 在高斯假设下，(24) 中的 $\mathrm{P}_{k,\ k-s|k-1}^{xz}$ 为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k,k-s|k-1}^{xz} = \int & x_k h_{k-s}(x_{k-s}) \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \\
& \times \mathrm{d}x_k - \hat{x}_{k|k-1} \hat{z}_{k-s|k-1},
\end{aligned}$$

其中，上述积分可通过文献中已有的高斯近似方法进行近似。

定理 1. 系统 (1)、(2)、(5) 的后验估计和协方差为：

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - \hat{y}_{k|k-1}), \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - K_k \mathbf{P}_{k|k-1}^{yy} K_k^\top, \quad (26)$$

其中 $K_k = \mathrm{P}_{k|k-1}^{xy}(\mathrm{P}_{k|k-1}^{yy})^{-1}$.

证明。继续计算后验滤波密度，式（12）可改写为

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k, x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}, \quad (27)$$

其中，联合密度 $p(y_k, x_k|y_{1:k-1})$ 根据我们先前关于预测密度的假设服从高斯分布，可表示为

$$\begin{aligned}
& p(y_k, x_k|y_{1:k-1}) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{y}_{k|k-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k-1} & \mathbf{P}_{k|k-1}^{xy} \\ (\mathbf{P}_{k|k-1}^{xy})^\top & \mathbf{P}_{k|k-1}^{yy} \end{bmatrix}\right),
\end{aligned} \quad (28)$$

其中，协方差 $\mathrm{P}_{k|k-1}$、$\mathrm{P}_{k|k-1}^{yy}$ 和 $\mathrm{P}_{k|k-1}^{xy}$ 分别定义于 (14)、(16) 和 (24) 中。现在，将 (28) 代入 (27)，并对高斯密度进行平方运算（参见 [11] 的附录A），可得

$$p(x_k|y_{1:k}) = \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}), \quad (29)$$

其中，$\hat{x}_{k|k}$ 和 $\mathrm{P}_{k|k}$ 分别由式 (25) 和 (26) 给出。

□

因此，(14) 和 (25) 分别给出了高斯假设下随机系统的预测估计和后验分布估计。此外，如果在时间步 k 未收到测量值，我们使用预测测量值 $\hat{y}_{k|k-1}$ 进行状态估计。

IV. 随机延迟测量的 SMC 方法

本节中，我们将开发一种估计算法，不对系统噪声和先验信息作特定分布假设。考虑 $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ 是一个不可观测的马尔可夫过程，其初始分布为 $p(x_o)$，转移概率密度由式 (1) 给出。接收到的测量值 $\{y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ 在给定过程 $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ 的条件下相互独立，其似然密度由式 (2) 和 (5) 定义。后验分布 $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ 可借助从该分布中抽取的一组独立同分布样本近似表示，如下所示：[24]

$$\hat{p}(x_{0:k}|y_{1:k}) = \frac{1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s} \delta_{x_{0:k}^i}(x_{0:k}), \quad (30)$$

其中，N_s 为样本总数，粒子 $\{x_{0:k}^i\}_{i=1}^{N_s}$ 从后验分布中抽取。不幸的是，后验分布通常是非标准的多变量分布，且仅在比例常数意义下已知，因此几乎不可能对粒子进行采样。作为替代方案，我们采用贝叶斯重要性采样方法，选择一个已知且易于采样的提议分布 $q(x_{0:k}|y_{1:k})$，从中可以轻松抽取粒子。如果 $g_k(x_{0:k})$ 是一个 $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ 可积函数，则其期望，

$\mathbb{E}_{p(\cdot|y_{1:k})}(g_k(x_{0:k}))$，可表示为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{p(\cdot|y_{1:k})}(g_k(x_{0:k})) \\
&= \int g_k(x_{0:k}) \frac{p(x_{0:k}|y_{1:k})}{q(x_{0:k}|y_{1:k})} q(x_{0:k}|y_{1:k}) dx_{0:k} \\
&= \int g_k(x_{0:k}) \frac{p(y_{1:k}|x_{0:k}) p(x_{0:k})}{p(y_{1:k}) q(x_{0:k}|y_{1:k})} q(x_{0:k}|y_{1:k}) dx_{0:k} \\
&= \frac{1}{p(y_{1:k})} \int g_k(x_{0:k}) w_k(x_{0:k}) q(x_{0:k}|y_{1:k}) dx_{0:k},
\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $w_k(x_{0:k})$ 是未归一化重要性权重，定义为

$$w_k = \frac{p(y_{1:k}|x_{0:k}) p(x_{0:k})}{q(x_{0:k}|y_{1:k})}. \tag{32}$$

现在，为了根据在提议分布$q(x_{0:k}|y_{1:k})$上取的期望来计算$\mathbb{E}_{p(\cdot|y_{1:k})}(g_k(x_{0:k}))$，我们可以将归一化常数写为$p(y_{1:k}) = \int p(y_{1:k}|x_{0:k}) p(x_{0:k}) dx_{0:k}$，并将其代入式（31）。经过一些变换后，式（31）可写为

$$\mathbb{E}_{p(\cdot|y_{1:k})}(g_k(x_{0:k})) = \frac{\mathbb{E}_{q(\cdot|y_{1:k})}(w_k(x_{0:k}) g_k(x_{0:k}))}{\mathbb{E}_{q(\cdot|y_{1:k})}(w_k(x_{0:k}))}.$$

上述期望的估计可以借助一组从提议分布 $q(x_{0:k}|y_{1:k})$ 中抽取的独立同分布样本 $\{x_{0:k}^i\}_{i=1}^{N_s}$ 和公式（32）来计算。此外，我们的目标是在每个时间步 k 顺序估计后验分布及其相关期望。为了实现顺序估计，可以假设提议分布分解为

$$q(x_{0:k}|y_{1:k}) = q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}) q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k}). \tag{33}$$

这里，我们使用了链式法则，并假设状态（$x_{0:k-1}$）与未来测量值（y_k）相互独立。此外，根据测量模型（2）和（5），显然，当前测量值 y_k与状态x_k、x_{k-1}、$\cdots$和x_{k-N}相关。因此，利用链式法则，并基于我们的假设，即状态构成一个马尔可夫过程，且在给定状态的条件下，各测量值相互独立，我们有

$$\begin{aligned}
p(x_{0:k}) &= p(x_0) \prod_{l=1}^{k} p(x_l|x_{l-1}), \\
p(y_{1:k}|x_{0:k}) &= \prod_{l=1}^{k} p(y_l|x_{l-\bar{N}:l}); \ k > 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

其中 $N = \min(N, l-1)$。现在，将方程 (33) 和 (34) 代入方程 (32)，可推导出未归一化重要性权重的递归表达式，即

$$\begin{aligned}
w_k &= \frac{p(y_{1:k}|x_{0:k}) p(x_{0:k})}{q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}) q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})} \\
&= w_{k-1} \frac{p(y_{1:k}|x_{0:k}) p(x_{0:k})}{p(y_{1:k-1}|x_{0:k-1}) p(x_{0:k-1}) q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})} \\
&= w_{k-1} \frac{p(y_k|x_{k-\bar{N}:k}) p(x_k|x_{k-1})}{q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})}.
\end{aligned} \tag{35}$$

A. 状态后验密度的估计

现在，整组粒子被划分为若干组，组数与接收到的测量值可能具有的不同延迟步数相同。每组代表测量值的一种可能版本，并对应一定数量的延迟步。因此，我们可以用这些粒子组来近似状态的后验概率密度函数，而不再使用单一的粒子集。

定理 2。对于系统 (1)、(2)、(5)，其滤波密度，$p(x_k|y_{1:k})$，可以借助从提议分布 $q(x_k|x_{0:k-1}^i, y_{1:k})$ 中抽取的一组独立同分布样本计算如下：

$$\hat{p}(x_k|y_{1:k}) = \sum_{j_k=0}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^{N_s^{j_k}} \bar{w}_k^{j_k,i} \delta_{x_k^{j_k,i}}(x_k), \tag{36}$$

where $w_k^{j_k,i} = w_{k-1}^{j_{k-1},i} p(y_k|x_{k-j_k}^i) \frac{p(x_k^i|x_{k-1}^i)}{q(x_k^i|x_{0:k-1}^i, y_{1:k})}$, $\bar{w}_k^{j_k,i} = \frac{w_k^{j_k,i}}{\sum_{j_k=0}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^{N_s^{j_k}} w_k^{j,i}}$, *and* $N_s^{j_k} = \bar{\gamma}_k^{j_k} N_s$ *such that* $\sum_{j_k=0}^{\bar{N}} N_s^{j_k} = N_s$.

证明。在式（35）中，似然密度 $p(y_k|x_{k-\bar{N}:k})$ 可写为联合密度 $p(y_k, \beta_k^{j_k}|x_{k-\bar{N}:k})$，它是对 $\beta_k^{j_k}(j_k = \bar{0}, \cdots, N)$ 的所有可能取值进行边缘化后得到的，如下所示。

$$p(y_k|x_{k-\bar{N}:k}) = \sum_{j_k=0}^{\bar{N}} p(y_k, \beta_k^{j_k}|x_{k-\bar{N}:k}) \tag{37}$$

在任意给定的时间步 k，$\beta_k^{j_k}(j_k = 0, \cdots, \bar{N})$ 中至多只有一个为 1，其余均为 0，概率如式 (9) 所示。请注意，似然是在接收到测量值的时间步计算的，因此不考虑所有 $\beta_k^{j_k}$ 均为 0 的情况，因为这会导致测量丢失。由式 (5) 和式 (9)，式 (37) 可展开如下：

$$\begin{aligned}
p(y_k|x_{k-\bar{N}:k}) &= \sum_{j_k=0}^{\bar{N}} p(y_k|\beta_k^{j_k}, x_{k-\bar{N}:k}) p(\beta_k^{j_k}|x_{k-\bar{N}:k}) \\
&= p(y_k|\beta_k^0 = 1, x_{k-\bar{N}:k}) P(\beta_k^0 = 1) + \cdots \\
&\quad + p(y_k|\beta_k^{\bar{N}} = 1, x_{k-\bar{N}:k}) P(\beta_k^{\bar{N}} = 1) \\
&= \sum_{j_k=0}^{\bar{N}} p(y_k|x_{k-j_k}) \bar{\gamma}_k^{j_k}.
\end{aligned} \tag{38}$$

将式 (38) 代入式 (35)，可得

$$\begin{aligned}
w_k &= w_{k-1} \sum_{j_k=0}^{\bar{N}} p(y_k|x_{k-j_k}) \bar{\gamma}_k^{j_k} \frac{p(x_k|x_{k-1})}{q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})} \\
&= \sum_{j_k=0}^{\bar{N}} w_k^{j_k} \bar{\gamma}_k^{j_k},
\end{aligned} \tag{39}$$

其中，递归未归一化重要性权重为：

当测量值预计延迟 j_k 步时，为

$$w_k^{j_k} = w_{k-1}^{j_{k-1}} p(y_k|x_{k-j_k}) \frac{p(x_k|x_{k-1})}{q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})}.$$

现在，使用独立同分布样本来近似后验分布，类似于（30）中当粒子从提议分布 $q(x_k|x_{0:k-1}^i, y_{1:k})$ 中采样时的情形，我们有

$$\begin{aligned}\hat{p}(x_k|y_{1:k}) &= \sum_{j_k=0}^{\bar{N}} \bar{\gamma}_k^j \sum_{i=1}^{N_s} \bar{w}_k^{j_k,i} \delta_{x_k^i}(x_k) \\ &= \sum_{j_k=0}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^{N_s^{j_k}} \bar{w}_k^{j_k,i} \delta_{x_k^{j_k,i}}(x_k),\end{aligned} \tag{40}$$

where $\bar{w}_k^{j_k,i} = \frac{w_k^{j_k,i}}{\sum_{j_k=0}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^{N_s^{j_k}} w_k^{j_k,i}}$, and $N_s^{j_k} = \bar{\gamma}_k^{j_k} N_s$. Also, since $\sum_{jk=0}^{\bar{N}} \bar{\gamma}_k^j = 1$, it implies that $\sum_{j_k=0}^{\bar{N}} N_s^{j_k} = N_s$. □

注 5. 定理 2 中重要性权重的计算对于系统（1）、（2）、（5）接收到测量值的时刻是有效的。然而，当 $\beta_k^{j_k} = 0$ 对所有 j_k 均成立且测量值丢失时，只有从提议分布中采样的粒子以及 $w^{j_k,\ i}_{\ k} = w^{j_{k-1},\ i}_{\ k-1}$。

B. 粒子的延迟转移规则

显然，根据定理 2，在任意时间步 k，粒子被划分为 $\bar{N}+1$ 组，其中每组均表示以下事实：接收测量值 y_k 经历了 $j_k(0 \le j_k \le \bar{N})$ 个延迟步，并且包含 $N_s^{j_k}$ 个粒子。因此，有必要制定一组规则，以便在每个粒子从提议分布 $q(x_k|x_{0:k-1}^i, y_{1:k})$ 中抽取后，为其分配延迟。现在，假设截至时间步 $k-1$ 每个粒子的延迟分配已知，那么在步骤 k，我们需要考虑两件事来分配延迟步：

(i) 粒子最近 N 步的延迟历史，以及 (ii) $0 \le j_k \le \bar{N}$ 的延迟概率 $\bar{\gamma}_k^{j_k}$。

由于同一测量值不能被接收多次，对于粒子 $x^{j_k,\ i}_{\ k-\tau}$，若其被分配了 $j_{k-\tau}$ 步的延迟，以支持时间步 $k-\tau$ 的测量值 $z_{k-j_{k-\tau}}$，那么当 $j_k = j_{k-\tau} + \tau$、 $0 < \tau \le N$ 时，它就不能支持时间步 k 的、具有 j_k 延迟的测量值 z_{k-j_k}。这意味着，在时间步 k，第 i 个粒子被分配 j_k 步延迟的概率为

$$P(\beta_k^{j_k} = 1|x_k^{j_k,i}) = \gamma_k^{j_k,i} = \begin{cases} 0; \text{ if } j_k = j_{k-\tau} + \tau, \\ \bar{\gamma}_k^{j_k}; \text{ else, when } 0 < \tau \le \bar{N}. \end{cases} \tag{41}$$

此外，每个粒子的延迟分配可按如下方式执行。若满足以下条件，则在时间步 k，第 i 个粒子被分配 τ 步延迟：

$$\sum_{d=0}^{\tau} \bar{\gamma}_k^{d,i} \le u < \sum_{d=0}^{\tau+1} \bar{\gamma}_k^{d,i};\ 0 \le \tau \le \bar{N},$$

其中 $\bar{\gamma}^{d,\ i}_{\ k} = \frac{\gamma^{d,\ i}_{\ k}}{\sum_{d=0}^{\bar{N}} \gamma^{d,\ i}_{\ k}}$，而 u 是在 $[0,1]$ 中均匀采样的数。

备注 6。 *[15]* 和 *[14]* 中采用的似然密度乘积求和方法，会在 N 步内反复使用每个粒子来计算重要性权重，而不考虑该粒子是否已在先前的步骤中用于近似后验状态密度。另一方面，如式 (41) 所示，本章不再将曾在早先步骤中使用过的粒子用于计算重要性权重。因此，我们提出一种方法，使相关粒子更有机会代表后验密度。

C. 重采样

为当前时间步的每个粒子分配延迟后，按定理 2 所述计算相应的重要性权重。根据计算得到的重要性权重，对粒子进行离散重采样，仅保留那些以显著权重支持当前测量值的粒子。重采样后粒子的延迟步数实际上承载了所接收测量值的延迟信息。根据启发式方法，测量值延迟 j_k 步的概率可近似表示为 $\frac{N_s'^{j_k}}{N_s}$，其中 $N_s'^{j_k}$ 是重采样后被分配了 j_k 步延迟的粒子数。请注意，引理 1 给出的是测量值延迟若干步的先验概率；另一方面，我们借助重采样后的状态粒子计算的是延迟的后验概率。下一小节将阐述计算该后验概率的一种更系统的方法。

D. 延迟步数估计

延迟变量 j_k 是独立同分布的泊松随机数，它通过 $\beta_k^{j_k}$ 与状态和接收的测量值相关，如式（5）和式（2）所示。

ˆ 定理 3. 系统 (1)、(2)、(5) 的随机时延滤波估计 j_k 给定为

$$\hat{j}_k = \arg \max_{0 \le j_k \le \bar{N}} \hat{p}(j_k|y_{1:k}), \tag{42}$$

where $\hat{p}(j_k|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^{N_s^{j_k}} \bar{w}_k^{j_k,i} \bar{\gamma}_k^{j_k,i}$.

证明。由于 β_k^j 和 $y_{1:k-1}$ 不相关，延迟步的预测密度 $p(j_k|y_{1:k-1})$ 为 $P(\beta_k^{j_k} = 1)$。因此，滤波密度可表示为

$$\begin{aligned} p(j_k|y_{1:k}) &= \int p(j_k, x_k|y_{1:k}) \mathrm{d}x_k \\ &= \int p(j_k|x_k) p(x_k|y_{1:k}) \mathrm{d}x_k \\ &= \int P(\beta_k^{j_k} = 1|x_k) p(x_k|y_{1:k}) \mathrm{d}x_k. \end{aligned}$$

现在，如果我们使用（36）中的粒子近似，并令$\beta_k^{j_k} = 1$ 即， $y_k = z_{k-j_k}$，那么只有被分配了 j_k 步延迟的粒子才用于近似上述积分。利用第 i个粒子被

分配了 j_k 步延迟的概率，我们可以进一步将上述方程写为

$$\hat{p}(j_k|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^{N_s^{j_k}} \bar{w}_k^{j_k,i} p(\beta_k^{j_k} = 1|x_k^{j_k,i}) = \sum_{i=1}^{N_s^{j_k}} \bar{w}_k^{j_k,i} \bar{\gamma}_k^{j_k,i}.$$

如果在 $0 \le j_k \le N$ 上使 $p(j_k|y_{1:k})$ 最大化，我们就能得到延迟步的估计值。□

推论1. 如果 d 表示在时间步 k 分配给第 i 个粒子 $d_k^i = d$ 的延迟，则延迟步数的均值为 $\sum_{d=1}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^{N_s^d} \bar{w}_k^{d,i} d$。

状态后验密度 $\hat{p}(x_k|y_{1:k})$ 和延迟步后验密度 $\hat{p}(j_k|y_{1:k})$ 的近似步骤见附录 B。请注意，当估计器未收到测量值时，后验分布由 $w^{j_k,i}_k = w^{j_{k-1},i}_{k-1}$ 近似，且不会对延迟步进行估计。

V. 仿真结果

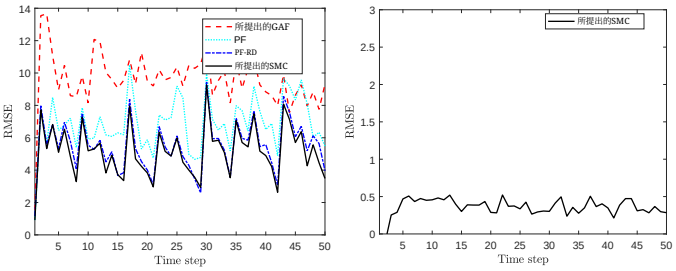
为验证所提出的高斯近似滤波器（GAF）和用于随机延迟测量的 SMC 方法，我们对两个非线性状态估计问题进行了仿真：（i）非平稳增长模型；（ii）转弯率未知且协调的机动目标。为展示所提出的贝叶斯估计器的优越性，我们将其性能与现有滤波器在上述两个问题上的性能进行了比较。使用容积求积采样点 [25] 实现所提出的 GAF。文献 [14], [15] 中提出的随机延迟测量粒子滤波器（PF-RD）针对所提出的测量模型进行了重新构建，并与标准 PF [26], 一同用作现有滤波器进行性能比较。所有实现的滤波器均采用均方根误差（RMSE） [21] 作为性能指标。此外，由于每个粒子在每一步都被分配一个延迟，SMC 方法也用于估计延迟步数，而其他实现的滤波器无法做到这一点。

A. 问题 1

由于具有非平稳特性，时变增长模型常用于文献中，以验证新开发的滤波算法 [8], [13], [26]。系统模型如下：

$$x_k = 0.5x_{k-1} + 25\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + 8\cos(1.2k) + q_{k-1}, \quad z_k = x_k^2/20 + v_k, \tag{43}$$

其中，q_{k-1} 和 v_k 是相互独立的零均值高斯过程，分别具有 $\mathbb{E}[q_k^2] = 10$ 和 $\mathbb{E}[v_k^2] = 1$。初始估计表示为 $p(\hat{x}_0) \sim \mathcal{N}(0, 1)$，仿真所使用的粒子数为 $N_s = 500$。延迟测量值使用平稳的 $\lambda_k = \lambda = 0.80$生成，最大允许延迟步数为 $N = 3$。



(a) (b)

图 2：（a）估计状态的均方根误差。（b） $N = 3$ 下估计延迟步数的均方根误差。

为比较性能，图2a绘制了每个滤波器通过100次蒙特卡洛（MC）运行计算得到的估计状态均方根误差在50个时间步内的变化。所提出的SMC、PF-RD、标准 PF和所提出的GAF的时间平均均方根误差分别为5.14、5.48、7.05和9.60。可以看出，考虑延迟的序贯蒙特卡洛方法和PF-RD以额外的计算负担为代价，比其他滤波器具有更高的精度，相关结果如表IV所示。图2b显示了所提出的SMC方法通过100次蒙特卡洛运行得到的估计延迟均方根误差。

表 IV：相对计算时间

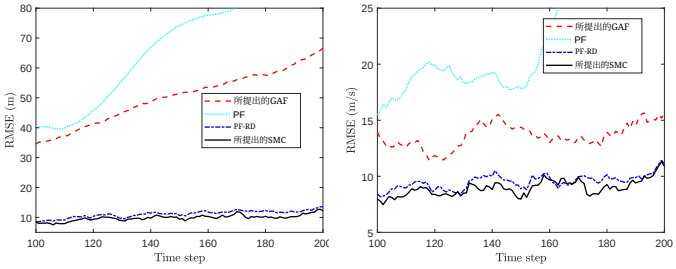
算法	相对计算时间
所提出的GAF	0.09
标准 PF	1
PF-RD	2
所提出的SMC	1.75

B. 问题 2

考虑采用协调转弯模型进行航空航天目标跟踪，其中飞机在二维平面内以固定但未知的转弯率 Ω 执行机动转弯。该模型利用雷达观测到的方位角和距离测量值，估计飞机不可观测的运动学状态。表示飞机运动学状态的状态为 $x_k = [\zeta \quad \dot{\zeta} \quad \eta \quad \dot{\eta} \, \Omega]^\top$，其中 ζ 和 η 表示位置，而 ζ 和 $\dot{\eta}$ 分别表示沿 X 和 Y 轴的速度。目标飞机的离散时间动态由 [15], [21] 给出：

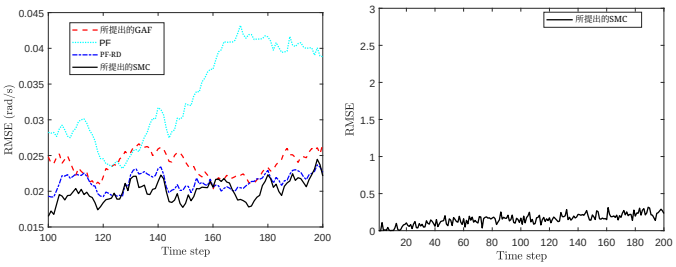
$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \Omega T}{\Omega} & 0 & -\left(\frac{1-\cos \Omega T}{\Omega}\right) & 0 \\ 0 & \cos \Omega T & 0 & -\sin \Omega T & 0 \\ 0 & \frac{1-\cos \Omega T}{\Omega} & 1 & \frac{\sin \Omega T}{\Omega} & 0 \\ 0 & \sin \Omega T & 0 & \cos \Omega T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + q_{k-1}, \tag{44}$$

其中，T 是连续两次接收测量值之间的时间间隔。q_{k-1} 是一个零均值高斯序列，其



(a) (b)

图3：(a). 位置均方根误差。(b). 速度均方根误差。



(a) (b)

图4：(a). 转弯率的均方根误差。(b). 延迟步数的均方根误差（$N = 3$）。

协方差为 $Q = \text{diag}[\mathrm{q}_1 M \mathrm{q}_1 \; M \mathrm{q}_2 T]$，其中$\mathrm{q}_1$和$\mathrm{q}_2$是噪声强度参数，且 $M = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}$。距离$r$和方位角 θ是可用于跟踪的观测量，它们由放置在原点的雷达观测得到。测量模型可表示为

$$z_k = \begin{bmatrix} r_k & \theta_k \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \sqrt{\zeta_k^2 + \eta_k^2} & \tan^{-1}\left(\frac{\eta_k}{\zeta_k}\right) \end{bmatrix}^\top + v_k, \quad (45)$$

其中，v_k 是一个相互独立、均值为零的高斯序列，其协方差为 $R = \text{diag}[\sigma_r^2 \quad \sigma_\theta^2]$。本次仿真所用参数见表 V。状态的初始估计值分别取自均值和协方差为$\hat{x}_0 = [1000\ \text{m}\ 300\ \text{ms}^{-1}\ \ 1000\text{m}\ 0\text{ms}^{-1}\ \ -3^o\text{s}^{-1}]^T$和 $\mathrm{P}_{0|0} = \text{diag}[100\text{m}^2 \ \ 10\,\text{m}^2\text{s}^{-2} \ \ 100\text{m}^2 \ \ 10\text{m}^2\text{s}^{-2} \ \ 100\text{mrad}^2\text{s}^{-2}]$的正态分布。仿真所用粒子数为$N_s = 5000$。延迟测量值由平稳的 $\lambda_k = \lambda = 0.90$ 和 $N = 3$生成。

表 V：跟踪参数

采样时间（T）	0.125 s
转弯率 (Ω)	-3^os^{-1}
q_1	0.1 米^{2}秒$^{-3}$
q_2	$1.75 \times 10^{-4}\text{s}^{-3}$
σ_r	10 m
σ_θ	$\sqrt{10}$ mrad

对不同滤波器在 100 次蒙特卡洛运行中计算得到的均方根误差绘于图 3 和图 4。从图中可以看出，未考虑随机时延的标准 PF 会发散，而所提出的 SMC、PF-RD 和所提出的 GAF 等针对随机时延设计的算法则具有更高的精度。此外，PF 类滤波器的性能优于 GAF，但代价是计算开销更大，如表VI所示。需要注意的是，由于所提出的 SMC 方法不会在每个时间步重复使用粒子来计算似然，因此它对目标运动学的跟踪精度略高于 PF-RD，同时计算开销也相对较低。

表VI：相对计算时间

算法	相对计算时间
所提出的GAF	0.03
标准 PF	1
PF-RD	2.16
所提出的SMC	1.26

VI. 结论

本文提出了一种测量模型，利用泊松随机变量表示网络化系统接收测量值时的随机时延和数据包丢失。所提模型可在时间上生成相互独立的测量值和不相关噪声序列。随后，我们通过推导因测量值随机时延而发生变化的项，提出了适用于所构建时延模型的广义高斯近似滤波器。此外，我们还提出了一种用于随机延迟测量和数据包丢失的 SMC 算法。该方法根据可能的延迟步数，将整个样本集划分为若干组。每个样本都分配一个延迟值，表示测量值延迟的步数；延迟步数在每个时间步更新。所提出的算法还提供了一种估计某一时间步接收测量的延迟步数的方法。仿真结果表明，若滤波算法考虑随机时延，其精度将高于传统滤波器。此外，均方根误差图显示，SMC 方法具有更优的性能，但这需要付出额外的计算开销。

附录A 修正测量噪声的自相关计算

利用式（2），可将式（5）中的所提测量模型改写为

$$y_k = \sum_{j_k=0}^{N} \beta_k^{j_k} h_{k-j_k}(x_{k-j_k}) + \sum_{j_k=0}^{N} \beta_k^{j_k} v_{k-j_k},$$

其中，修正噪声定义为

$$\nu_k = \sum_{j_k=0}^{N} \beta_k^{j_k} v_{k-j_k}. \quad (46)$$

设非延迟测量噪声具有以下性质： $\mathbb{E}[v_k] = 0$ 和 $\mathbb{E}[v_k v_k^\top] = R_k, \quad \forall k$。现在，利用修正测量噪声的定义 ν_k，根据式（46）可得 $\mathbb{E}[\nu_k] = 0$。进一步地，其自相关可表示为 $\mathbb{E}[\nu_k \nu_m^\top]$; $k - m = a$，其中a 为任意整数。该式还可进一步计算为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\nu_k \nu_m^\top] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{s=0}^{N} \alpha_k^s (1-\alpha_{k-1}^{s-1})\cdots(1-\alpha_{k-s}^0) v_{k-s} \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{N} \alpha_m^l (1-\alpha_{m-1}^{l-1})\cdots(1-\alpha_{m-l}^0) v_{m-l}^\top\Big] \\ &= \sum_{s=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \mathbb{E}[\alpha_k^s (1-\alpha_{k-1}^{s-1})\cdots(1-\alpha_{k-s}^0)\alpha_{k-a}^l \\ &\quad \times (1-\alpha_{k-a-1}^{l-1})\cdots(1-\alpha_{k-a-l}^0)]\mathbb{E}[v_{k-s} v_{k-a-l}^\top].\end{aligned} \tag{47}$$

请注意，在上述展开式中，如果 $s = 0$，则只有一项，即 α_k^0; 而如果 $s = 1$，则展开式将包含 $\alpha_k^1(1-\alpha_{k-1}^0)$，依此类推。对于 l，情况也是如此。现在，考虑 a 的不同整数值，(47) 可计算如下。

Case-I. $0 < a \le N$:
显然，在上述方程中 q

$$\mathbb{E}[v_{k-s} v_{k-a-l}^\top] = \begin{cases}\mathbb{E}[v_{k-s} v_{k-s}^\top] = R_{k-s}; \text{ if } s - l = a \\ 0; \text{ else,}\end{cases}$$

这实际上意味着，我们只需针对满足 $s - l = a$ 的 s 和 l 的取值，计算 (47) 中第一部分的期望。对 (47) 的第一次期望运算可展开为

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\mathbb{E}[\alpha_k^s (1-\alpha_{k-1}^{s-1})\cdots(1-\alpha_{k-a}^{s-a})\cdots(1-\alpha_{k-s}^0) \\ &\qquad \times \alpha_{k-a}^l (1-\alpha_{k-a-1}^{l-1})\cdots(1-\alpha_{k-a-l}^0)],\end{aligned}$$

对于给出 $s - l = a$ 的 s 和 l 的每一种组合，都存在如下情况:

$$\mathbb{E}[(1-\alpha_{k-a}^{s-a})\alpha_{k-a}^l] = \mathbb{E}[(1-\alpha_{k-a}^l)\alpha_{k-a}^l].$$

此外，鉴于 α_{k-a}^l 是一个二元变量，我们可以写成 $\mathbb{E}[(\alpha_{k-a}^i)^2] = \mathbb{E}[\alpha_{k-a}^l]$, $\mathbb{E}[(1-\alpha_{k-a}^l)\alpha_{k-a}^l] = 0$。因此,

$$\mathbb{E}[\nu_k \nu_{k-a}^\top] = 0; \quad 0 < a \le N.$$

情况 II. $a > N$:
鉴于 $0 \le s、 l \le N$ 和 $a > N$，式 (47) 的第二个期望为 $\mathbb{E}[v_{k-s} v_{k-a-l}^\top] = 0、 \forall s、 l.$。因此,

$$\mathbb{E}[\nu_k \nu_{k-a}^\top] = 0; \quad a > N.$$

情况-III。 $a = 0$:
式（47）可写为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\nu_k \nu_m^\top] &= \sum_{s=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\mathbb{E}[\alpha_k^s (1-\alpha_{k-1}^{s-1})\cdots(1-\alpha_{k-s}^0)\alpha_k^l \\ &\quad \times (1-\alpha_{k-1}^{l-1})\cdots(1-\alpha_{k-l}^0)]\mathbb{E}[v_{k-s} v_{k-l}^\top].\end{aligned} \tag{48}$$

显然,

$$\mathbb{E}[v_{k-s} v_{k-l}^\top] = \begin{cases}\mathbb{E}[v_{k-t} v_{k-t}^\top] = R_{k-t}; \text{ if } s = l = t, \\ = 0; \text{ else.}\end{cases}$$

因此，当 s 和 l 的值相等，均为 $s = l = t$时，对（48）进行求值，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\nu_k \nu_m^\top] &= \sum_{t=0}^{N}\mathbb{E}[(\alpha_k^t)^2 (1-\alpha_{k-1}^{t-1})^2\cdots(1-\alpha_{k-t}^0)^2 \\ &\quad \times \mathbb{E}[v_{k-t} v_{k-t}^\top].\end{aligned}$$

由于 $\alpha_k^t (k = 0, 1, \cdots$ 和 $0 \le t \le N)$ 相互独立，且 $\mathbb{E}[(1-\alpha_k^t)^2] = \mathbb{E}[(1-\alpha_k^t)]$, , 我们可以将上述表达式简化为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\nu_k \nu_m^\top] &= \sum_{t=0}^{N}\mathbb{E}[\alpha_k^t]\mathbb{E}[(1-\alpha_{k-1}^{t-1})]\cdots\mathbb{E}[(1-\alpha_{k-t}^0)] \\ &\quad \times \mathbb{E}[v_{k-t} v_{k-t}^\top] \\ &= \sum_{t=0}^{N}\gamma_k^t R_{k-t}\end{aligned}$$

情形 IV。$a < 0$:
采用与情形 I 和 II（其中， $a > 0$）类似的推导，可得 $\mathbb{E}[\nu_k \nu_m^\top] = 0; \quad a < 0.$

因此，式（46）中的修正测量噪声 ν_k 具有以下性质:

$$\mathbb{E}[\nu_k] = 0 \text{ and } \mathbb{E}[\nu_k \nu_m^\top] = \begin{cases}\sum_{t=0}^{N}\gamma_k^t R_{k-t}; & \text{if } k = m \\ 0; & \text{if } |k-m| > 0.\end{cases}$$

Appendix B
Steps for proposed SMC

$[\{\{x_k^{j_k,i}, w_k^{j_k,i}\}_{i=1}^{N_s^{j_k}}\}_{j_k=0}^{\bar{N}}] :=$
所提出的_SMC$[\{\{x_{k-1}^{j_{k-1},i}, w_{k-1}^{j_{k-1},i}\}_{i=1}^{N_s^{j_k}}\}_{j_{k-1}=0}^{\bar{N}}, \lambda_k, y_k]$

- 令 $N^- = \min(N, k-1)$，以及 $\bar{\gamma}_k^{j_k} = \dfrac{\gamma_k^{j_k}}{\sum_{j_k=0}^{\bar{N}}\gamma_k^{j_k}}$.
- 计算 $N_s^{j_{k-1}} = \bar{\gamma}_{k-1}^{j_{k-1}}$。
- , 针对 $j_{k-1} = 0$: N
  - 针对 $i = 1$: $N_s^{j_{k-1}}$
    - 绘制 $x^{j_{k-1},\,k} \quad ^i \sim q(x_k | x^{j_{0:k-1},\,0\,k-1} \quad ^i :, \; y_{1:k})$
    - 更新粒子的延迟，更新量为
      以概率分配 j_k 步

$$\gamma_k^{j_k,i} = \begin{cases}0; \text{ if } j_k = j_{k-\tau} + \tau, \forall\, 0 < \tau \le \bar{N} \\ \bar{\gamma}_k^{j_k}; \text{ else.}\end{cases}$$

    - 将分配给第 i个粒子的 j_k 延迟步数记为$j_{k,i}$。
    - 将带有 j_k 延迟的观测值的**重要性权重**计算为

$$w_k^{j_k,i} = w_{k-1}^{j_{k-1},i} p(y_k | x_{k-j_k}^{j_k,i}) \frac{p(x_k^{j_k,i} | x_{k-1}^{j_{k-1},i})}{q(x_k^{j_k,i} | x_{0:k-1}^{j_{0:k-1},i}, y_{1:k})}.$$

  - *end for*
- *end for*

• 将粒子的**重要性权重**归一化为 $\bar{w}^{j_k,i}_k = \frac{w^{j_k,i}_k}{\sum_{j_k=0}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^{N_s^{j_k}} w^{j_k,i}_k}$。按照式（36）构造后验分布 $\hat{p}(x_k|y_{1:k})$。

• 估计延迟步为 $\hat{j}_k = \sum_{j_k=1}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^{N_s^{j_k}} \bar{w}^{j_k,i}_k j_k$,

• 对粒子进行重采样 $[\{\{x_k^{j_k,i}, w_k^{j_k,i}\}_{i=1}^{N_s^{j_k}}\}_{j_k=0}^{\bar{N}}] := 重采样 [\{\{x_k^{j_k,i}, w_k^{j_k,i}\}_{i=1}^{N_s^{j_k}}\}_{j_k=0}^{\bar{N}}]$

参考文献

[1] H. B. Khamseh、S. Ghorbani 和 F. Janabi-Sharifi，《用于操纵无人机的无迹卡尔曼滤波器状态估计》，《航空航天科学与技术》，第92卷，第446–463页，2019年。[2] C. Abbondanza、T. M. Chin、R. S. Gross、M. B. Heflin、J. W. Parker、B. S. Soja、T. van Dam 和 X. Wu，《JTRF2014、喷气推进实验室卡尔曼滤波器和平滑器对国际地球参考系统的实现》，《地球物理研究杂志：固体地球》，第122卷，第10期，第8474–8510页，2017年。[3] J. Hu、Z. Wang、D. Chen 和 F. E. Alsaadi，《具有网络诱导现象的网络化系统的估计、滤波与融合：最新进展与展望》，《信息融合》，第31卷，第65–75页，2016年。[4] L. He、D. Han、X. Wang 和 L. Shi，《利用线性时间编码在丢包网络上进行最优线性状态估计》，《自动化》，第49卷，第4期，第1075–1082页，2013年。[5] J. Ma 和 S. Sun，《具有传输延迟和数据包丢失的网络化随机不确定系统的分布式融合滤波器》，《信号处理》，第130卷，第268–278页，2017年。[6] X. Wang、Y. Liang、Q. Pan 和 Y. Wang，《测量随机延迟概率识别》，《IEEE 自动控制汇刊》，第61卷，第12期，第4210–4216页，2016年。[7] B. Yan、H. Lev-Ari 和 A. M. Stankovi´c，《具有延迟和不规则间隔带时间戳观测的网络化状态估计》，《IEEE 网络系统控制汇刊》，第5卷，900，2017年3，888第期。页–。[8] A. Hermoso-Carazo 和 J. Linares-P´erez，《非线性系统中使用两步随机延迟观测的无迹滤波算法》，《应用数学建模》，第33卷，第9期，第3705–3717页，2009年。[9] S. Sun，《具有有界随机测量延迟和数据包丢失的系统的线性最小方差估计器》，《信号处理》，第89卷，第7期，第1457–1466页，2009年。[10] Shuli Sun，《带有/不带时间戳的离散时间系统随机延迟和丢失测量的最优线性滤波器》，《IEEE 自动控制汇刊》，第58卷，第6期，第1551–1556页，2012年。[11] X. Wang、Y. Liang、Q. Pan 和 C. Zhao，《具有一步随机延迟测量的非线性系统高斯滤波器》，《自动化》，第49卷，第4期，第976–986页，2013年。[12] A. K. Singh、P. Date 和 S. Bhaumik，《随机延迟测量的改进贝叶斯滤波器》，《IEEE 自动控制汇刊》，第62卷，第1期，第419–424页，2016年。[13] Y. Zhang、Y. Huang、N. Li 和 L. Zhao，《具有一步随机延迟测量和未知延迟概率的粒子滤波器》，《国际系统科学杂志》，第47卷，221，2016年1，209第期。页–。[14] Y. Huang、Y. Zhang、N. Li 和 L. Zhao，《具有多步随机延迟测量的非线性系统粒子滤波器》，《电子学快报》，第51卷，第23期，第1859–1861页，2015年。[15] R. K. Tiwari、S. Bhaumik、T. Kirubarajan 等，《具有未知延迟概率的随机延迟测量粒子滤波器》，《传感器》，第20卷，第19期，第5689页，2020年。[16] S. Zhou 和 G. Feng，《具有随机变化传感器延迟的离散时间系统H∞滤波》，《自动化》，第44卷，第7期，第1918–1922页，2008年。[17] X. Wang、Y. Liang、Q. Pan、C. Zhao 和 F. Yang，《具有随机延迟测量和相关噪声的非线性系统高斯滤波器的设计与实现》，《应用数学与计算》，第 232 卷，第 1011–1024 页，2014年。[18] S. Sun、L. Xie 和 W. Xiao，“具有随机测量时延和多次数据包丢失的离散时间系统的最优全阶滤波”，Journal of Control Theory and Applications，第 8 卷，第 1 期，第 105–110 页，2010年。[19] X. Song、Z. Duan 和 J. H. Park，“具有测量时延和数据包丢弃的离散时间系统的线性最优估计”，Applied Mathematics and Computation，第 284 卷，第 115–124 页，2016年。[20] J. Ma 和 S. Sun，“具有随机传感器时延、多次数据包丢失和不确定观测的系统的最优线性估计器”，IEEE Transactions on Signal Processing，第 59 卷，第 11 期，第 5181–5192 页，2011年。[21] S. Haykin 和 I. Arasaratnam，“容积卡尔曼滤波器”，IEEE Trans. Autom. Control，第 54 卷，第 6 期，第 1254–1269 页，2009年。[22] S. J. Julier 和 J. K. Uhlmann，“卡尔曼滤波器向非线性系统的新扩展”，载于《信号处理、传感器融合与目标识别 VI》，第 3068 卷，International Society for Optics and Photonics，1997年，第 182–193 页。[23] K. Ito 和 K. Xiong，“非线性滤波问题的高斯滤波器”，IEEE 自动控制汇刊，第 45 卷，927，2000年 5，910 第。– 页。[24] A. Doucet 、 A. M. Johansen 等，“ 粒子滤波与平滑教程：十五年后”，Handbook of nonlinear filtering，第 12 卷，第 656-704 期，第 3 页，2009年。[25] S. Bhaumik 等，“容积求积卡尔曼滤波器”，IET Signal Processing，第 7 卷，第 7 期，第 533–541 页，2013年。[26] M. S. Arulampalam、S. Maskell、N. Gordon 和 T. Clapp，“在线非线性/非高斯贝叶斯跟踪的粒子滤波器教程”，IEEE Transactions on Signal Processing，第 50 卷，188，2002年 2，174第。– 页。