arXiv:2304.01726v1 [math.AP] 4 Apr 2023

CAP半空间中的毛细施瓦茨对称化

ZHENG LU、CHAO XIA 和 XUWEN ZHANG

Abstract. 本文提出了半空间中的毛细管 Schwarz 对称化这一概念。它可视为半空间毛细问题框架下经典施瓦茨对称化的对应形式。其关键要素是一种特殊的各向异性规范函数，它使我们能够将毛细管对称化转化为[Alv+97]中引入的凸对称化。

2020年数学主题分类：35J25、35J65、49Q20。关键词：对称化、毛细问题、等周不等式、各向异性方程。

1. Introduction

对称化是证明尖锐几何或泛函不等式的一种重要技巧。施瓦茨对称化是一种经典方法，它为给定函数赋予一个径向对称函数，使其超水平集或次水平集的体积与给定函数相同。其重要应用包括证明关于第一特征值的瑞利-法贝尔-克拉恩不等式以及尖锐的索伯列夫不等式，参见 [PS51；Tal76a]。

经典施瓦茨对称化以经典等周不等式为基础。事实上，对称化过程通常伴随着等周型不等式，这是一个普遍原则。已有若干种新的对称化方法，例如 Talenti [Tal81] 和 Tso [Tso89] 提出了关于拟质量积分的对称化，其依据是拟质量积分的亚历山德罗夫-芬切尔不等式。Alvino-Ferone-Trombetti-Lions [Alv+97] 提出了关于凸规范函数（或各向异性函数）的凸对称化，其依据是各向异性等周不等式。Della Pietra、Gavitone 和第二作者 [DGX21] 提出了关于混合体积的对称化，其依据是混合体积的亚历山德罗夫-芬切尔不等式。

令 $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, E_n\rangle > 0\}$ 为上半空间，其中 E_n 是第 n 个坐标单位向量。De Giorgi 所证明的相对等周不等式指出，对于 $\theta \in (0,\pi)$ 以及一个有限周长集 $E \subset \mathbb{R}^n_+$，有

$$\frac{P(E;\mathbb{R}^n_+) - \cos\theta P(E;\partial\mathbb{R}^n_+)}{|E|^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{P(\mathcal{B};\mathbb{R}^n_+) - \cos\theta P(\mathcal{B};\partial\mathbb{R}^n_+)}{|\mathcal{B}|^{\frac{n-1}{n}}}, \tag{1.1}$$

其中，$\mathcal{B}$ 表示区域 $B_1(-\cos\theta E_n)\cap\mathbb{R}^n_+$；当且仅当存在某个 $r>0$ 使得 $E = B_r(-r\cos\theta E_n)\cap\mathbb{R}^n_+$ 时，式 (1.1) 中的等号成立。这里，$B_r(-r\cos\theta E_n)$ 表示以 $-r\cos\theta E_n$ 为球心、半径为 r 的欧几里得球。这族球具有一个共同性质：其边界与 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 相交时的接触角恒为 θ。泛函 $P(E;\mathbb{R}^n_+) - \cos\theta P(E;\partial\mathbb{R}^n_+)$ 通常称为毛细现象问题中的自由能泛函，这一泛函在液滴的物理模型中具有自然意义，参见例如 [Mag12]。

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12271449）的资助。

本文旨在引入一种合适的对称化，我们称之为毛细管 Schwarz 对称化，并将其与等周型不等式 (1.1) 相结合。

对于定义在 $\mathbb{R}^n_+$ 上的非正可测函数 u，我们将毛细管 Schwarz 对称化定义为

$$u_\star(x) = \sup\{t \le 0 : r_t < |x + r_t \cos\theta E_n|\},$$

其中，$r_t > 0$ 满足 $|B_{r_t}(-r_t \cos\theta E_n) \cap \mathbb{R}^n_+| = |\{u(x) < t\}|$。根据定义可知，$|\{u_\star(x) < t\}| = |\{u(x) < t\}|$，且 $u_\star(x)$ 的水平集是所需的模型区域 $B_r(-r\cos\theta E_n) \cap \mathbb{R}^n_+$。

为研究毛细管 Schwarz 对称化的性质，我们引入如下凸规范函数 F_θ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$，其定义为

$$F_\theta(\xi) = |\xi| - \cos\theta \langle \xi, E_n\rangle .$$

我们称之为毛细管规范函数。关于 F_θ，一个关键观察是：相对于 F_θ，半径为 r 的 Wulff 球 $\{F^o_\theta(x) < r\}$，等价于 $B_r(-r\cos\theta E_n)$，对任意 $r > 0$ 均成立。这使我们能够将毛细管 Schwarz 对称化转化为相对于 F_θ 的凸对称化（由 Alvino-Ferone-Trombetti-Lions [Alv+97] 提出）。与 [Tal76b; Alv+97] 相比，主要有两点不同：其一，特殊规范函数 F_θ 不是偶函数；其二，我们考虑的是凸对称化的相对形式。尽管如此，遵循 [Alv+97] 的证明，我们仍能证明这种相对凸对称化的 P´olya-Szeg¨o 原理和偏微分方程比较结果，但需额外要求函数非正（或非负）。更一般地，只要相对各向异性等周不等式成立，该结果便适用于任意凸锥，例如参见 [CRS16; DPV22]。借助 F_θ，相应结果最终可转化为毛细管 Schwarz 对称化的结果。

我们指出，将毛细管 Schwarz 对称化转化为凸对称化的想法，受到 De Phillipis-Maggi 近期工作的启发[DM15], 他们采用类似的想法，将毛细现象问题中局部极小化子的正则性转化为各向异性问题中的正则性。这一想法未来可能应用于其他毛细问题。这里我们介绍一个这样的应用。在 [Jia+22]中，Jia 等人证明了如下关于毛细管超曲面的 Heintze-Karcher 型不等式：$\mathbb{R}^n_+$对于有界区域 E，若 $\partial E \cap \mathbb{R}^n_+$ 足够光滑且与 $\mathbb{R}^n_+$ 以接触角 θ相交，则有

$$\int_{\partial E\cap\mathbb{R}^n_+} \frac{1 - \cos\theta\langle \nu, E_n\rangle}{H} \ge \frac{n}{n-1}|E|, \tag{1.2}$$

其中 H 为平均曲率 $\partial E \cap \mathbb{R}^n_+$。由此，Wente 关于半空间中毛细管常平均曲率超曲面的 Alexandrov 型定理得到了重新证明。我们指出，利用规范函数 F_θ，(1.2)可改写为

$$\int_{\partial E\cap\mathbb{R}^n_+} \frac{F_\theta(\nu)}{H_{F_\theta}} \ge \frac{n}{n-1}|E|, \tag{1.3}$$

其中 H_{F_θ} 是各向异性平均曲率，由于 H，它等于 $\nabla^2 F_\theta\,|_\nu$=Id，即单位矩阵。另一方面，(1.3) 是 [Jia+23]中结果的特例，其中 (1.2) 已推广到一般的各向异性毛细管情形。

本文其余部分组织如下。在第 2 节中，我们回顾凸锥中的各向异性等周不等式，并研究凸锥中的相对凸对称化。在第 3 节中，我们引入毛细管规范函数并研究其相关性质。在第 4 节中，

我们在半空间中引入毛细管 Schwarz 对称化，并使用毛细管规范函数重述相应结果。第 2 节 借助毛细管规范函数。

致谢。我们感谢王国芳教授就这一主题进行的启发性讨论，并感谢他一直以来的支持。

2. Convex symmetrization in a convex cone

2.1. 凸锥中的各向异性等周不等式。

本小节回顾凸锥中各向异性周长和各向异性等周不等式的基本知识。

根据 [CRS16, （1.6）], 我们称 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为规范函数，若 F 非负、凸且正一齐，即对所有 $t>0$, $F(t\xi)=tF(\xi)$，并且对所有 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, $F(\xi)>0$。注意， F 不要求为偶函数；这一点对于下一节中毛细管对称化的应用很重要。若进一步满足 F 为偶函数，即对任意 $t\neq 0$, $F(t\xi)=|t|F(\xi)$，则称 F 为范数。

Res将 F 限制在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上，我们得到 $F: \mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}_+$。Cahn-Hoffman 映射由 y

$$\Phi: \mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}^n, \quad \Phi(x):=\nabla F(x),$$

其中 ∇ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的梯度算子。像 $\Phi(\mathbb{S}^{n-1})$ 称为 Wulff 形状。

相应的对偶规范函数 $F^o: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 定义为

$$F^o(x)=\sup\left\{\frac{\langle x,z\rangle}{F(z)}\Big| z\in\mathbb{S}^{n-1}\right\},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示标准欧几里得内积。对于规范函数及其对偶规范函数，以下恒等式成立:

$$F(\nabla F^o(x))=1, \quad \nabla_\xi F(\nabla_x F^o_\theta(x))=\frac{x}{F^o(x)}. \tag{2.1}$$

例如参见 [Del+18, （2.8）], [CL22, 引理 2。2]。

记

$$\mathcal{W}=\{x\in\mathbb{R}^n | F^o(x)<1\}.$$

我们称 $\mathcal{W}$ 为以原点为中心的单位 Wulff 球。可以证明， $\partial\mathcal{W}=\Phi(\mathbb{S}^{n-1})$ 即为 Wulff 形状。更一般地，我们记

$$\mathcal{W}_r(x_0)=r\mathcal{W}+x_0$$

且 c 为以 x_0为中心、半径为 r 的 Wulff 球。我们简记 $\mathcal{W}_r=\mathcal{W}_r(0)$。

设 $\Sigma\subset\mathbb{R}^n$ 为一个顶点位于原点的开凸锥，它由下式给出

$$\Sigma=\{tx: x\in\omega, t\in(0,+\infty)\}$$

对于某个开区域 $\omega\subseteq\mathbb{S}^{n-1}$。相应的 Σ 中的 Wulff 扇形为 $\mathcal{W}\cap\Sigma$.

对于可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$，相对于 Σ 的各向异性周长定义为

$$P_F(E;\Sigma)=\sup\left\{\int_{E\cap\Sigma}\mathrm{div}\sigma\mathrm{d}x: \sigma\in C^1_0(\Sigma;\mathbb{R}^n), F^o(\sigma)\le 1\right\}.$$

根据定义可以验证，量 $P_F(E;\Sigma)$ 有限，当且仅当经典相对周长

$$P(E;\Sigma)=\sup\left\{\int_{E\cap\Sigma}\mathrm{div}\sigma\mathrm{d}x: \sigma\in C^1_0(\Sigma;\mathbb{R}^n), |\sigma|\le 1\right\}<\infty.$$

特别地，对于有限周长集 $E \subset \mathrm{R}^n$，各向异性周长（各向异性表面能）可由下式刻画

$$P_F(E;\Sigma) = \int_{\partial^* E \cap \Sigma} F(\nu_E)\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}, \tag{2.2}$$

其中， $\partial^* E$ 是 E 的约化边界， ν_E 是E的测度论外单位法向量。注意，若 E 在 Σ中具有 C^1边界，则 ν_E 与经典外单位法向量一致。

我们所需的一项关键工具是凸锥中的各向异性等周不等式，其形式如下 [CRS16；DPV22；CL22]。

定理 2.1 ([CRS16，定理 1。3], [DPV22，定理 4。2], [CL22，定理 2。5])。 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个规范函数，且 Σ 是一个以原点为顶点的开凸锥。那么，对于任意满足 $E \subset \mathbb{R}^n$ 且有 $|E \cap \Sigma| < \infty$的可测集，均有

$$\frac{P_F(E;\Sigma)}{|E \cap \Sigma|^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{P_F(\mathcal{W};\Sigma)}{|\mathcal{W} \cap \Sigma|^{\frac{n-1}{n}}}. \tag{2.3}$$

经过旋转后，不妨将 $\Sigma = \mathbb{R}^k \times \tilde{\Sigma}$写作 $0 \leq k \leq n$ ，且 $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ 是一个不含直线的开凸锥。当且仅当(2.3) 取等号时 E 是半径为 r 、以 $x_0 \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}$为中心的 Wulff 球。

注记 2.2. 在 [CRS16], 凸锥中的一个更一般的加权各向异性等周不等式已得到证明，尽管尚未刻画等号成立的情形。对于无权情形，文献[DPV22], 沿用 [FI13]的方法刻画了等号成立的情形。文献[DPV22，定理 42] 中的原始表述针对范数。不过，他们的证明无需改动即可适用于一般规范函数，见 [CL22，定理 25]。

2.2. 凸锥中的凸对称化。

设 $u: \Sigma \to (-\infty, 0]$ 是一个非正的可测函数，且在无穷远处趋于零，即其分布函数

$$\mu(t) = |\{x \in \Sigma : u(x) < t|\}$$

对所有 $t < 0$ 都有限。显然， μ 从 $\mu(-\infty) = 0$ 增至 $\mu(0)$。为简便起见，我们将集合 $\{x \in \Sigma: u(x) < t\}$ 简记为 $\{u < t\}$。

递增 重排记作 u $u_*: [0,\infty] \to [-\infty, 0]$，定义如下：

$$u_*(s) = \sup\{t \leq 0 : \mu(t) < s\}.$$

u 在 Σ 中的凸对称化定义为

$$(u_\star)_{F,\Sigma}(x) := u_*(\kappa_{F,\Sigma}(F^o(x))^n),$$

其中$\kappa_{F,\ \Sigma} = |\mathcal{W} \cap \Sigma|$。为简便起见，我们省略下标$(F, \Sigma)$，并记

$$u_\star := (u_\star)_{F,\Sigma}, \quad \kappa = \kappa_{F,\Sigma}.$$

注 2.3. 当 F 为欧几里得范数时，相应的相对 Schwarz 对称化（下文记作 Σ）已在$u_\#$ 中研究过 [PT86] 和 [LP90]。另一方面，当 F 为范数且 $\Sigma = \mathbb{R}^n$时，相应的凸对称化已在[Alv+97]中研究过。

我们首先证明凸锥中凸对称化的 P´olya-Szeg¨o 原理。

定理 2.4（凸锥中的波利亚-塞戈原理）。设 $p \geq 1$ and $u \in W^{1,p}(\Sigma)$ 是一个非正且在无穷远处趋于零的函数。那么 $u_\star$ 与 u 属于相同的函数空间，并且满足以下性质:

$$\int_\Sigma F^p(\nabla u)\mathrm{d}x \geq \int_\Sigma F^p(\nabla u_\star)\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

证明。 证明与[Alv+97]类似。

我们首先假设 $u \in C^\infty$。根据萨德定理，对于几乎处处的 $t < 0$， $\{u = t\}$ 是正则超曲面。余面积公式给出

$$\mu(t) = \int_{\{u<t\}} 1\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{\{u=r\}} \frac{1}{|\nabla u|} d\mathcal{H}^{n-1} \right) \mathrm{d}r.$$

由此可得，对于几乎处处的 $t < 0$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(t) = \int_{\{u=t\}} \frac{1}{|\nabla u|}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}. \tag{2.5}$$

再次应用余面积公式，对于几乎处处的 $t < 0$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\{u<t\}} F^p(\nabla u)\mathrm{d}x = \int_{\{u=t\}} \frac{F^p(\nabla u)}{|\nabla u|}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}. \tag{2.6}$$

应用 H¨older 不等式，可得

$$\int_{\{u=t\}} F(\nabla u)|\nabla u|^{-1}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \leq \left(\int_{\{u=t\}} \frac{F^p(\nabla u)}{|\nabla u|} \right)^{1/p} \left(\int_{\{u=t\}} \frac{1}{|\nabla u|} \right)^{1-1/p} \tag{2.7}$$

将（2.5）和（2.6）代入（2.7），得到

$$\int_{\{u=t\}} \frac{F^p(\nabla u)}{|\nabla u|}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \geq \left(\int_{\{u=t\}} F(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \right)^p \left(\mu'(t)\right)^{1-p}. \tag{2.8}$$

注意，对于几乎处处的 t， $\{u < t\}$ 沿边界 $\{u = t\}$ 的外向单位法向量由$\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$给出。结合（2.2）、各向异性等周不等式（2.3）以及（2.6），对（2.8）在$-\infty$，0）上积分，可得

$$\int_\Sigma F^p(\nabla u)\mathrm{d}x \geq \int_{-\infty}^{0} (\mu'(t))^{1-p} \left(n\kappa^{1/n}\mu(t)^{1-1/n} \right)^p \mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

只需验证（2.9）的右端与 $\int_\Sigma F^p\left(\nabla u_\star\right)\mathrm{d}x$一致。

我们注意到， $u_\star$ 是各向异性对称的、径向递增的，因此 $u_\star$ 的次水平集与以原点为中心的单位沃尔夫扇区位似。这意味着，对于集合 $\{u_\star < t\}$，各向异性等周不等式取等号，即

$$\int_{\{u_\star=t\}} F(\frac{\nabla u_\star}{|\nabla u_\star|})\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = n\kappa^{1/n}\mu(t)^{1-1/n}.$$

另一方面，H¨older 不等式（2.7）在 $u = u_\star$ 时也成立为等式。这是因为 $F(\nabla u_\star)$ 沿着水平集 $\{u_\star = t\}$ 保持为常数，这归因于以下事实：$F(\nabla F^o(x)) = 1$。

证明只需重复上述论证，并注意到对于 $u_\star$，每个不等式实际上都成立为等式。特别地，可得

$$\begin{aligned}\int_\Sigma F^p(\nabla u_\star)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^0 \left(\int_{\{u_\star=t\}} \frac{F^p(\nabla u_\star)}{|\nabla u_\star|}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^0 (\mu'(t))^{1-p}\left(n\kappa^{1/n}\mu(t)^{1-1/n}\right)^p \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.10}$$

我们完成对 $u \in C^\infty$ 的证明。一般情形 $u \in W^{1,\,p}$ 可由标准的稠密性论证得到。□

2.3. 偏微分方程比较原理。

设 Σ 是一个光滑的开凸锥。设 $\Omega \subset \Sigma$ 是一个有界区域，使得 $\Gamma := \partial\Omega \cap \Sigma$，即 $\partial\Omega \cap \Sigma$ 在 $\mathbb{R}^n$中的拓扑闭包，是一个带边界的光滑超曲面，且 $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma$。我们始终假设 $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_1) > 0$，且 $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) > 0$。这样的区域称为扇形区域。若 $\partial\Omega$ 的外向单位法向量存在，我们用 ν 表示它。

我们考虑 Ω 中以下散度型椭圆方程的混合边值问题。

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(a(x,u,\nabla u)\right) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma, \\ -a(x,u,\nabla u)\cdot\nu = 0 & \text{on } \Gamma_1, \end{cases} \tag{M}$$

其中

$$f \le 0, f \in L^{\frac{2n}{n+2}} \text{ if } n \ge 3 \text{ and } f \in L^p (p>1) \text{ if } n = 2. \tag{2.11}$$

$a(x,\eta,\xi) = \{a_i(x,\eta,\xi)\}_{i=1,\,\cdots,\,n}$是满足以下条件的 Carath´eodory 函数:

$$a(x,\eta,\xi)\cdot\xi \ge F^2(\xi), \quad \text{for a.e. } x \in \Omega,\ \eta \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.12}$$

记 $W^{1,\,2}_0(\Omega;\,\Gamma$为由属于 $W^{1,\,2}(\Omega)$ 且在 $\Gamma = \partial\Omega \cap \Sigma$上迹为零的函数构成的空间。$u \in W^{1,\,2}_0(\Omega;\,\Gamma)$ 称为（M）的弱解，若其满足

$$\int_\Omega \left(a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in W^{1,2}_0(\Omega;\Gamma). \tag{2.13}$$

在 $a(x,\eta,\xi) = \frac{1}{2}F^2(\xi)$ 的情况下，我们记

$$\Delta_F u = \mathrm{div}[\nabla_\xi(\frac{1}{2}F^2)(\nabla u)].$$

本小节旨在为（M）建立比较原理。设 $\Omega_\star$ 为以原点为中心、体积与 Ω 相同的 Wulff 扇形，且 $\Gamma_\star = \partial\Omega_\star \cap \Sigma$和 $(\Gamma_1)_\star = \partial\Sigma \setminus \Gamma_\star$。

定理 2.5. 设 $u \in W^{1,2}_0(\Omega;\,\Gamma)$ 是方程 (M) 的一个解。若 $z \in W^{1,2}_0(\Omega_\star;\,\Gamma_\star)$ 是下列混合边值问题的解

$$\begin{cases} -\Delta_F z = f_\star & in\ \Omega_\star, \\ z = 0 & on\ \Gamma_\star, \\ \nabla_\xi(\frac{1}{2}F^2)(\nabla z)\cdot\nu = 0 & on\ (\Gamma_1)_\star, \end{cases} \tag{2.14}$$

then

$$0 \ge u_\star(x) \ge z(x) \quad for\ any\ x \in \Omega_\star. \tag{2.15}$$

注 2.6. 可以看出，若 z 关于 F 径向对称，即存在某个单变量函数 $\bar{z}$，使得 $z(x) = \bar{z}(F^o(x))$，则 z 自动满足 $(\Gamma_1)_\star$ 上的 $\nabla_\xi(\frac{1}{2}F^2)(\nabla z)\cdot\nu = 0$。因此，由最大值原理可知，解 z 关于 F 径向对称。

我们首先看到，方程 (2.13) 的解是非正的。

引理 2.7。若 u 是混合边界方程 (2.13)的弱解，则 $u \le 0$ 在 Ω中。特别地 $u_\star \le 0$ 在 $\Omega_\star$ 且 (2.14) $z \le 0$ 在 $\Omega_\star$的弱解。

证明。通过以 $\varphi = u^+ = \max\{0, u\} \in W^{1,2}{}_0(\Omega;\Gamma)$ 检验弱解的定义（2.13），结合 a 的椭圆性（2.12）以及 f 的非正性可得

$$0 \ge \int_{\{u>0\}} f u^+ \mathrm{d}x \ge \int_{\{u>0\}} F^2(\nabla u(x))\mathrm{d}x = \int_\Omega F^2(\nabla u^+(x))\mathrm{d}x.$$

由此可知，$u \le 0$ 属于 Ω。 □

定理 2.5 的证明定理 2.5。我们紧密遵循 [Tal76b]。

断言 1. 对任意 $u \in W^{1,2}{}_0(\Omega;\Gamma)$，以下不等式

$$n^2\kappa^{2/n} \le \mu(t)^{-2+2/n}\mu'(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\{u<t\}} F^2(\nabla u)\mathrm{d}x\right) \tag{2.16}$$

对几乎处处的 $t < 0$ 成立。

事实上，由于 $u \in W^{1,2}{}_0(\Omega;\Gamma)$，我们知道 u 在 Ω 中具有有界变差，因此，有界变差函数的余面积定理（参见例如 [EG15，定理 5.9]）给出：集合 $\{u < t\}$ 具有有限周长（其边界由 $\{u = t\}$ 给出，且外单位法向量为 $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$），对几乎处处的 t均成立。于是，我们可以利用余面积公式，并回顾式（2.2），得到

$$\int_{\{u<t\}} F(\nabla u)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^t \int_{\{u=s\}} \frac{F(\nabla u)}{|\nabla u|}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^t P_F(\{u<s\};\Sigma)\mathrm{d}s,$$

这意味着：对几乎处处的 $t < 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\{u<t\}} F(\nabla u)\mathrm{d}x = P_F(\{u<t\};\Sigma).$$

利用各向异性等周不等式（2.3），我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\{u<t\}} F(\nabla u)\mathrm{d}x \ge n\kappa^{1/n}\mu(t)^{1-1/n}. \tag{2.17}$$

另一方面 手写成$\mathrm{d}\,\mathrm{d}t\int_{\{u<t\}}F(\nabla u)\mathrm{d}x$ 的差商形式，我们得到 n

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\{u<t\}} F(\nabla u)\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{\{t<u<t+h\}} F(\nabla u)\mathrm{d}x}{h}\\ &\le \lim_{h\to 0}\frac{|\{t<u<t+h\}|^{1/2}}{h^{1/2}}\frac{\left(\int_{\{t<u<t+h\}} F^2(\nabla u)\mathrm{d}x\right)^{1/2}}{h^{1/2}}\\ &= \left(\mu'(t)\right)^{1/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\{u<t\}} F^2(\nabla u)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

（2.16）由（2.17）和（2.18）可得，从而证明了断言 1。

断言 2。对于任意弱解 u （M），函数

$$\Psi(t) := \int_{\{u<t\}} F^2(\nabla u)\mathrm{d}x$$

是 $-\infty < t < 0$ 上的增函数，且

$$0 \le \Psi'(t) \le \int_0^{\mu(t)} -f_*(s)\mathrm{d}s.$$

对于 $t \le 0$，通过用下述截断函数检验（2.13），可得

$$v_h := \begin{cases} -h & \text{if } u < t-h, \\ u-t & \text{if } t-h < u < t, \\ 0 & \text{if } u \ge t, \end{cases}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \Psi(t) - \Psi(t-h) &= \int_{\{t-h<u<t\}} F^2(\nabla u)\mathrm{d}x \le \int_{\{u<t\}} f v_h \mathrm{d}x \\ &= \int_{\{t-h<u<t\}} f\cdot(u-t)\mathrm{d}x - h\int_{\{u<t-h\}} f\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

两边除以 h 并令 $h \searrow 0$，由 f 和 u 的可积性可知，因此对于几乎处处的 $t<0$，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\{u<t\}} F^2(\nabla u)\mathrm{d}x = \Psi'(t) \le \int_{\{u<t\}} (-f)\mathrm{d}x.$$

哈代–利特尔伍德不等式给出

$$\int_{\{u<t\}} (-f)\mathrm{d}x \le \int_0^{\mu(t)} -f_*(s)\mathrm{d}ds.$$

断言 2 得证。

断言 1 和断言 2 的一个重要推论是下面的不等式：

$$1 \le \frac{\mu'(t)}{n^2\kappa^{2/n}\mu(t)^{2-2/n}} \int_0^{\mu(t)} -f_*(s)\mathrm{d}s.$$

注意到，右端是关于 t 的递增函数的导数。对两边在 $(t, 0)$ 上积分，得到

$$t \ge \frac{1}{n^2\kappa^{2/n}} \int_{\mu(t)}^{|\Omega|} r^{-2+2/n}\mathrm{d}r \int_0^r f_*(s)\mathrm{d}s.$$

再次根据递增重排的定义，我们得到

$$u_*(s) \ge \frac{1}{n^2\kappa^{2/n}} \int_s^{|\Omega|} r^{-2+2/n}\mathrm{d}r \int_0^r f_*(s)\mathrm{d}s. \tag{2.19}$$

通过标准的常微分方程计算，我们知道

$$v_*(s) = \frac{1}{n^2\omega^{2/n}} \int_s^{|\Omega|} r^{-2+2/n}\mathrm{d}r \int_0^r f_*(s)\mathrm{d}s$$

其中， $\omega = |B_1 \cap \Sigma|$ 和 $v_*(s)$ 是混合边值问题的解 v 的递增重排：

$$\begin{cases} \Delta v = -f_\# & \text{in } \Omega_\#, \\ v = 0 & \text{on } \Gamma_\#, \\ \nabla v \cdot \nu = 0 & \text{on } (\Gamma_1)_\#, \end{cases} \tag{2.20}$$

其中 $\Omega_\# = B_r \cap \Sigma$ 对于某个 r 使得 $|\Omega_\#| = |\Omega|$，并且 $f_\#$ 是f 的 Schwarz 对称化（即，当 F 为欧几里得范数时的凸对称化）。

因此，(2.19) 可改写为

$$u_*(s) \geq \frac{\omega^{2/n}}{\kappa^{2/n}} v_*(s). \tag{2.21}$$

命题 3. 对于 $z = z_\star \in W^{1,\,2\,0}(\Omega_\star;\ \Gamma_\star)$ 是方程 (2.14) 的解，成立

$$\frac{\omega^{2/n}}{\kappa^{2/n}} v(x) = z_\#(x), \quad \text{for } x \in \Omega_\#.$$

考虑该泛函

$$\mathcal{F}(w) = \int_{\Omega_\star} \left(\frac{1}{2} F^2(\nabla w) - f_\star w \right) \mathrm{d}x, \quad \text{for } w \in W_0^{1,2}(\Omega_\star; \Gamma_\star).$$

显然， $z = z_\star$ 是 $\mathcal{F}$的极小化子，由引理 2.7 可知其非正，且关于 F径向对称。因此

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z_\star) = \int_{\Omega_\#} \frac{1}{2} \frac{\kappa^{2/n}}{\omega^{2/n}} |\nabla z_\#|^2 - \int_{\Omega_\#} f_\# z_\#.$$

注意，根据欧几里得范数下的 Poly´a-Szeg¨o 不等式，对于任意 $z \in W^{1,\,2\,0}(\Omega_\star;\ \Gamma_\star)$ ，

$$\mathcal{F}_\#(z) := \int_{\Omega_\#} \frac{1}{2} \frac{\kappa^{2/n}}{\omega^{2/n}} |\nabla z|^2 - \int_{\Omega_\#} f_\# z \geq \mathcal{F}_\#(z_\#).$$

因此，$z_\#$ 使泛函 $\mathcal{F}_\#$达到最小值。因此， $\frac{\omega^{2/n}}{\kappa^{2/n}} z_\#$ 满足方程（2.20），命题 3 得证。最后，命题 3 结合（2.21）可推出

$$u_\star(x) \geq z_\star(x) = z(x), \quad x \in \Omega_\star,$$

其中 $z \in W^{1,\,2\,0}(\Omega_\star;\ \Gamma_\star)$ 是方程 (2.14的一个解。至此，证明完成。 □

3. Capillary gauge in the half-space

在本节中，我们首先在 $\mathbb{R}^n_+$ 中引入一个规范函数（作为凸锥的一种特殊情形），借助该规范函数，我们将半空间中的毛细问题转化为 $\mathbb{R}^n_+$ 中关于该规范函数的相关各向异性问题的研究。

记 $E_n = (0, \ldots, 0, 1)$。给定 $\theta \in (0, \pi)$，令 F_θ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 为婷婷五月

$$F_\theta(\xi) = |\xi| - \cos\theta \langle \xi, E_n \rangle. \tag{3.1}$$

显然可见 F_θ 确实是一个规范函数，且在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$上光滑。我们称它为毛细管规范函数（原因见命题 3.2）。注意， F_θ 并非偶函数，除非 $\theta = \frac{\pi}{2}$。由于

$$\nabla F_\theta(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|} - \cos\theta E_n,$$

可以看出，相对于 F_θ 的 Wulff 形状由下式给出】【。

$$\nabla F_\theta(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1} - \cos\theta E_n = \{|x + \cos\theta E_n| < 1\}.$$

命题 3.1。对偶规范函数 F_θ^o: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 由下式给出。

$$F_\theta^o(x) = \frac{|x|^2}{\sqrt{\cos^2\theta \langle x, E_n\rangle^2 + \sin^2\theta |x|^2} - \cos\theta \langle x, E_n\rangle}.$$

证明。考虑由 $\nabla F_\theta(\mathbb{S}^{n-1}) = \{|x + \cos\theta E_n| = 1\}$ 确定的凸体 K。我们将求出 K 的径向函数。设 $y \in \nabla F_\theta(\mathbb{S}^{n-1})$ 由 $y = \rho(x)x, x \in \mathbb{S}^{n-1}$ 给出。因此

$$|\rho(x)x + \cos\theta E_n| = 1.$$

因此可得

$$\rho(x) = \sqrt{\cos^2\theta \langle x, E_n\rangle^2 + \sin^2\theta} - \cos\theta \langle x, E_n\rangle.$$

也就是说， K 的径向函数由 ρ 给出： $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 如上所述。凸体理论中的一个经典结果表明，对偶凸体 K^o 的支撑函数等于 K的径向函数的倒数，参见例如[Sch14， （1.52）]。另一方面，F_θ^o在限制于 $\mathbb{S}^{n-1}$时，恰好是 K^o的支撑函数。因此，我们看到 F_θ^o： $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$由下式给出

$$F_\theta^o(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta \langle x, E_n\rangle^2 + \sin^2\theta} - \cos\theta \langle x, E_n\rangle}.$$

将 F_θ^o 对 $\mathbb{R}^n$ 作一次齐次延拓，即 $F_\theta^o(x) = |x| F_\theta^o(\frac{x}{|x|})$，即可得到所述结论。 □

命题 3.2. 关于 F_θ，以原点为中心、半径为 r 的 Wulff 球 $\mathcal{W}_{r,\theta}$ 为 $B_r(-r\cos\theta E_n)$，即以 $-r\cos\theta E_n$ 为中心、半径为 r 的欧几里得球。特别地，$\partial\mathcal{W}_{r,\theta}$ 与超平面 $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x_n = 0\}$ 相交时的接触角为 θ。

证明。 利用 命题 3.1，直接验证可得 $F_\theta^o(x) < r$ 等价于 $|x + r\cos\theta E_n| < r$，于是得到第一个结论。对于任意 $z \in \partial B_r(-r\cos\theta E_n) \cap \{x_n = 0\}$，

$$\left\langle \frac{z - (-r\cos\theta E_n)}{r}, E_n \right\rangle = \cos\theta.$$

第二个结论随即得出。 □

令

$$\mathbf{b}_\theta := |\mathcal{W}_{1,\theta} \cap \mathbb{R}^n_+|.$$

容易看出，

$$|\mathcal{W}_{r,\theta} \cap \mathbb{R}^n_+| = \mathbf{b}_\theta r^n.$$

利用规范函数 F_θ，我们观察到，经典自由能泛函可以重新表述为各向异性面积泛函。

命题 3.3. 设 E 是 $\mathbb{R}^n_+$ 中的有限周长集。那么

$$P_{F_\theta}(E; \mathbb{R}^n_+) = P(E; \mathbb{R}^n_+) - \cos\theta P(E; \partial\mathbb{R}^n_+).$$

证明。由于 $\operatorname{div}(E_n) = 0$，利用散度定理可得

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}(E_n)\mathrm{d}x = \int_{\partial^* E \cap \mathbb{R}^n_+} \langle \nu_E, E_n\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} - P(E; \partial\mathbb{R}^n_+).$$

另一方面，根据 F_θ 的定义可得

$$P_{F_\theta}(E;\mathbb{R}^n_+)=\int_{\partial^* E\cap\mathbb{R}^n_+}F_\theta(\nu_E)\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}=P(E;\mathbb{R}^n_+)-\cos\theta\int_{\partial^* E\cap\mathbb{R}^n_+}\langle\nu_E,E_n\rangle\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

至此，证明完成。 □

由此，我们看出 $\mathbb{R}^n_+$ 中的经典相对等周不等式，

$$P(E;\mathbb{R}^n_+)-\cos\theta P(E;\partial\mathbb{R}^n_+)\geq n\mathbf{b}_\theta^{\frac{1}{n}}|E|^{\frac{n-1}{n}},$$

等价于关于 F_θ 的各向异性等周不等式，

$$P_{F_\theta}(E;\mathbb{R}^n_+)\geq n\mathbf{b}_\theta^{\frac{1}{n}}|E|^{\frac{n-1}{n}},$$

其中，当且仅当 $E=\mathcal{W}_{r,\theta}\cap\mathbb{R}^n_+$（在 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上相差一个平移）时，等号成立。

本着同样的思路，由 [CNV04，定理 2] 以及 [CFR20，定理A。1], 我们得到以下最优 Sobolev 不等式。

定理 3.4. 给定 $\theta\in(0,\pi)$ 和 $1<p<n$，令 $u\in\dot{W}^{1,\,p}(\mathbb{R}^n_+):=\{u\in L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n_+):\ \nabla u\in L^p(\mathbb{R}^n_+)\}$ 为非正函数。则

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n_+)}\leq C_{\theta,p}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}(|\nabla u|-\cos\theta\langle\nabla u,E_n\rangle)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这里 $C_{\theta,p}$ 由.....给出

$$C_{\theta,p}=\frac{1}{(\int_{\mathbb{R}^n_+}(|\nabla U_{\theta,p}|-\cos\theta\langle\nabla U_{\theta,p},E_n\rangle)^p)^{\frac{1}{p}}},$$

with

$$U_{\theta,p}(x)=-\left(\frac{1}{\sigma_{p,\theta}+F^o_\theta(x)^{\frac{p}{p-1}}}\right)^{\frac{n-p}{p}},$$

且$\sigma_{p,\,\theta}>0$ 由$\|U_{\theta,\,p}\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n_+)}=1$. 当且仅当等号成立

$$u(x)=CU_{\theta,p}(\lambda(x-x_0))$$

对于某个常数 $C\geq 0$、$\lambda\neq 0$ 以及某个点 $x_0\in\partial\mathbb{R}^n_+$。

注 3.5。 文献 [CFR20，定理 A。1] 中指出，索伯列夫不等式对符号可能改变的 u也成立。然而，由于 F_θ 在此处并非偶函数，根据证明，必须限制为非负函数或非正函数。

4. Capillary Schwarz symmetrization in the half-space

我们以相当直接的方式定义毛细管 Schwarz 对称化。给定一个非正的可测函数 $u:\mathbb{R}^n_+\to(-\infty,0]$，该函数在无穷远处趋于零，我们令 r_t 为 $\mathcal{W}_{r_t,\,\theta}=B_{r_t}(-r_t\cos\theta E_n)$ 的半径，使得

$$\mathbf{b}_\theta r_t^n=|\mathcal{W}_{r_t,\theta}\cap\mathbb{R}^n_+|=|\{x\in\mathbb{R}^n_+:u(x)<t\}|=\mu(t).$$

u 的毛细管对称化定义为

$$u_\star(x):=\sup\{t\leq 0:\mu(t)<\mathbf{b}_\theta|x-(-r_t\cos\theta E_n)|^n\}=\sup\{t\leq 0:r_t<|x+r_t\cos\theta E_n|\}.$$

根据定义，很容易看出，对于任意 $t<0$，重排函数 $u_\star$ 的次水平集 $\{u_\star<t\}$ 是某个 $\mathcal{W}_{r_t,\,\theta}\cap\mathbb{R}^n_+$，其测度与 $\{u<t\}$ 相同。这与 Schwarz 对称化的经典思想一致。

下面回顾毛细管规范函数 F_θ 及其对偶 F_θ^o。如命题 3.2的证明所示， $F_\theta^o(x) > r$ 等价于 $|x + r$ 余弦 $\theta E_n| > r$. 因此，毛细管对称化 $u_\star$ 可将 u 改写为

$$u_\star(x) = u_*\left(\mathbf{b}_\theta(F_\theta^o(x))^n\right),$$

其中 u_* 是递增重排。在特殊情形 $\theta = \pi/2$ 下，我们看到 $F_\theta^o(x) = |x|$，且毛细管对称化就是

$$u_\star(x) = u_*(\frac{\omega_n|x|^n}{2}).$$

从这个角度来看，我们可以将结果推广到第 2 节中的毛细管对称化。以下是相应的 P´olya-Szeg¨o 原理，沿用定理 2.4。

定理 4.1. 设 $p \geq 1$ 和 $u \in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n_+)$ 是一个在无穷远处趋于零的非正函数。那么 $u_\star$ 与 u 属于同一函数空间，且下式成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}(|\nabla u| - \cos\theta\nabla u\cdot E_n)^p\,\mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^n_+}(|\nabla u_\star| - \cos\theta\nabla u_\star\cdot E_n)^p\,\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

接下来，我们考虑扇形区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n_+$ 中关于F_θ 的各向异性偏微分方程的以下混合边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta_{F_\theta}u = f & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \text{on } \Gamma = \overline{\partial\Omega\cap\mathbb{R}^n_+},\\ \nabla_\xi(\frac{1}{2}F_\theta^2)(\nabla u)\cdot E_n = 0 & \text{on } \Gamma_1 = \partial\Omega\setminus\Gamma. \end{cases} \tag{4.2}$$

弱解 $u \in W^{1,\,2\,0}(\Omega;\,\Gamma)$ 满足 (4.2)

$$\int_\Omega \nabla_\xi(\frac{1}{2}F_\theta^2)(\nabla u)\cdot\nabla v\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega;\Gamma). \tag{4.3}$$

通过直接计算，我们看到（4.3）等价于

$$\int_\Omega(|\nabla u| - \cos\theta\langle\nabla u, E_n\rangle)\left\langle\frac{\nabla u}{|\nabla u|} - \cos\theta E_n, \nabla v\right\rangle\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega;\Gamma). \tag{4.4}$$

我们对 (4.2 有如下比较结果，其证明沿用 定理 2.5。

定理 4.2. 设 $u \in W^{1,2\,0}(\Omega;\,\Gamma)$ 是方程 (4.2) 的弱解，其中 f 满足 (2.11)。设 $\Omega_\star$ 为某个 $\mathcal{W}_{r,\,\theta}\cap\mathbb{R}^n_+$，其测度与 Ω 相同，并且 $z \in W^{1,2\,0}(\Omega_\star)$ 是以下重排后的混合边值问题的解。

$$\begin{cases} -\Delta_{F_\theta}z = f_\star & in\ \Omega_\star,\\ z = 0 & on\ \Gamma_\star,\\ \nabla_\xi(\frac{1}{2}F_\theta^2)(\nabla z)\cdot E_n = 0 & on\ (\Gamma_1)_\star, \end{cases} \tag{4.5}$$

then

$$0 \geq u_\star(x) \geq z(x) \quad for\ any\ x \in \Omega_\star. \tag{4.6}$$

作为一个特例，我们关注 $f = -n$的情形。接下来我们通过以下观察进行讨论，它很好地说明了我们定义毛细重排的动机。

命题 4.3。函数

$$u(x) = \frac{F_\theta^o(x)^2 - r^2}{2} \tag{4.7}$$

满足

$$\begin{cases} -\Delta_{F_\theta} u = -n & in\ \mathcal{W}_{r,\theta} \cap \mathbb{R}^n_+, \\ u = 0 & on\ \partial\mathcal{W}_{r,\theta} \cap \mathbb{R}^n_+, \\ \nabla_\xi(\frac{1}{2}F_\theta^2)(\nabla u) \cdot E_n = 0 & on\ \bar{\mathcal{W}}_{r,\theta} \cap \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{4.8}$$

此外，如果 u 关于 F_θ 是径向对称的，且满足(4.8)，那么 u 必定具有(4.7)的形式。

证明。利用（2.1）直接计算即可得到结论。 □

作为定理 4.2的一个简单但重要的应用，我们有

推论 4.4。设 $u \in W^{1,\,2\,0}(\Omega;\,\Gamma)$ 是一个弱解

$$\begin{cases} -\Delta_{F_\theta} u = -n & in\ \Omega, \\ u = 0, & on\ \Gamma, \\ \nabla_\xi(\frac{1}{2}F_\theta^2)(\nabla u) \cdot E_n = 0 & on\ \Gamma_1. \end{cases}$$

那么， u 在 Ω 中有界，且

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{1}{2}\left(\frac{|\Omega|}{\mathbf{b}_\theta}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

证明。 由 定理 4.2，可知 $0 \ge u_\star(x) \ge z(x)$，对任意 $x \in \Omega_\star$ 均成立，其中 $z = z_\star$是（关于 F_θ）重排偏微分方程混合边界问题的径向对称解

$$\begin{cases} -\Delta_{F_\theta} z = -n & \text{in } \Omega_\star, \\ z = 0, & \text{on } \Gamma_\star, \\ \nabla_\xi(\frac{1}{2}F_\theta^2)(\nabla z) \cdot E_n = 0 & \text{on } (\Gamma_1)_\star. \end{cases} \tag{4.9}$$

由 命题 4.3 可知， $z(x) = {F_\theta^o(x)}_2^{\,2} - r^2$，其中 r 是 $\Omega_\star$ 的半径，即，

$$\mathbf{b}_\theta r^n = |\Omega_\star| = |\Omega|.$$

因此

$$|u_\star| \le |z| \le \frac{1}{2}\left(\frac{|\Omega|}{\mathbf{b}_\theta}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

回想 $\|u\|_{L^\infty} = \|u_\star\|_{L^\infty}$，证明即告完成。 □

References

[Alv+97] Angelo Alvino、Vincenzo Ferone、Guido Trombetti 和 Pierre-Louis Lions。《凸对称化及其应用》。英文。载于：*Ann. Inst. Henri Poincar´e, Anal. NonLin´eaire* 14.2 (1997)，第275–293页。 ISSN：0294-1449。 DOI：10.1016/S0294-1449(97)80147-3。MR：1441395。Zbl：0877.35040。[CFR20] Giulio Ciraolo、Alessio Figalli 和 Alberto Roncoroni。《凸锥中的临界各向异性 p-拉普拉斯方程的对称性结果》。载于：几何与泛函分析30.3 (2020)，第770–803页。 ISSN：1016-443X。 DOI：10.1007/s00039-020-00535-3。MR：4135671。Zbl：1453.35104。

[CL22] Giulio Ciraolo 和 Xiaoliang Li。《凸锥中 Finsler$N$-拉普拉斯算子的外部超定问题》。载于：Calc. Var. Partial Differential Equations 61.4 (2022)，论文编号121，共27页。 ISSN：0944-2669。 DOI：10.1007/s00526-022-02235-2。MR：4417386。Zbl：1487.35256。[CNV04] D. Cordero-Erausquin、B. Nazaret 和 C. Villani。《通过质量输运方法证明尖锐的 Sobolev 和 Gagliardo-Nirenberg 不等式》。载于：Adv. Math. 182.2 (2004)，第307–332页。 ISSN：0001-8708。 DOI：10.1016/S0001-8708(03)00080-X。MR：2032031。Zbl：1048.26010。[CRS16] Xavier Cabr´e、Xavier Ros-Oton 和 Joaquim Serra。《通过 ABP 方法得到的尖锐等周不等式》。载于：J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18.12 (2016)，第2971–2998页。ISSN：1435-9855。 DOI：10.4171/JEMS/659。MR：3576542。Zbl：1357.28007。[Del+18] Matias G. Delgadino、Francesco Maggi、Cornelia Mihaila 和 Robin Neumayer。《几乎具有常值平均曲率的 L^2气泡现象及晶体的 Alexandrov 型定理》。载于：Arch. Ration. Mech. Anal. 230.3 (2018)，第1131–1177页。 ISSN：0003-9527。 DOI：10.1007/s00205-018-1267-8。MR：3851057。Zbl：1421.35076。[DGX21] Francesco Della Pietra、Nunzia Gavitone 和 Chao Xia。《关于混合体积的对称化》。载于：Adv. Math. 388 (2021)。编号107887，共31页。 ISSN：0001-8708。 DOI：10.1016/j.aim.2021.107887。MR：4288211。Zbl：1469.35008。[DM15] G. De Philippis 和 F. Maggi。《各向异性毛细现象问题中自由边界的正则性及杨氏定律的有效性》。英文。载于：Arch. Ration. Mech. Anal. 216.2 (2015)，第473–568页。 ISSN：0003-9527。 DOI：10.1007/s00205-014-0813-2。MR：3317808。Zbl：1321.35158。[DPV22] Serena Dipierro、Giorgio Poggesi 和 Enrico Valdinoci。《具有不连续非线性的各向异性及加权扩散方程解的径向对称性》。载于：Calc. Var. Partial Differential Equations 61.2 (2022)，论文编号72，共31页。 ISSN：0944-2669。 DOI：10.1007/s00526-021-02157-5。MR：4380032。Zbl：1485.35014。[EG15] Lawrence Craig Evans 和 Ronald F. Gariepy。《测度论与函数的精细性质》。英文。佛罗里达州博卡拉顿：CRC Press，2015，第xiv页 + 299。MR：3409135。Zbl：1310.28001。[FI13] A. Figalli 和 E. Indrei。《凸锥内相对等周不等式的尖锐稳定性结果》。英文。载于：J. Geom. Anal. 23.2 (2013)，第938–969页。 ISSN：1050-6926。 DOI：10.1007/s12220-011-9270-4。MR：3023863。Zbl：1262.49045。[Jia+22] Xiaohan Jia、Guofang Wang、Chao Xia 和 Xuwen Zhang。《楔形区域中的 Heintze-Karcher 不等式与毛细管超曲面》。2022年。arXiv：2209.13839。[Jia+23] Xiaohan Jia、Guofang Wang、Chao Xia 和 Xuwen Zhang。《半空间中各向异性毛细管超曲面的 Alexandrov 定理》。载于：Arch. Ration. Mech. Anal. 247.2 (2023)，第25页。 ISSN：0003-9527。 DOI：10.1007/s00205-023-01861-0。MR：4562813。[LP90] Pierre-Louis Lions 和 Filomena Pacella。《凸锥的等周不等式》。英文。载于：Proc. Am. Math. Soc. 109.2 (1990)，第477–485页。 ISSN：0002-9939。 DOI：10.2307/2048011。MR：1000160。Zbl：0717.52008。[Mag12] Francesco Maggi。《有限周长集合与几何变分问题：几何测度论导论》。英文。第135卷。剑桥：剑桥大学出版社，2012，第xix页 + 454。 ISBN：978-1-107-02103-7；978-1-139-10813-3。DOI：10.1017/CBO9781139108133。MR：2976521。Zbl：1255.49074。[PS51] George P´olya 和 G´abor Szeg¨o。《数学物理中的等周不等式》。第27卷。《数学年刊研究丛书》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1951年。 DOI：10.1515/9781400882663。MR：0043486。Zbl：0044.38301。

[PT86] Filomena Pacella 和 Mariarosaria Tricarico。《具有混合边界条件的一类椭圆方程的对称化》。英文。载于：《摩德纳大学数学与物理研讨会学报》34（1986），第75–93页。 ISSN：0041-8986。MR：876139。Zbl：0629.35032。[Sch14] Rolf Schneider。《凸体：布鲁恩-闵可夫斯基理论》。第2版，扩充版。第151卷。《数学及其应用百科全书》。剑桥：剑桥大学出版社，2014年。 ISBN：978-1-107- 60101-7；978-1-139-00385-8。 DOI：10.1017/CBO9781139003858。MR：3155183。Zbl：1287.52001。[Tal76a] Giorgio Talenti。《索伯列夫不等式中的最佳常数》。载于：《纯粹与应用数学年刊》（第4辑）110（1976），第353–372页。 ISSN：0373-3114。 DOI：10.1007/BF02418013。MR：463908。Zbl：0353.46018。[Tal76b] Giorgio Talenti。《椭圆方程与重排》。载于：《比萨高等师范学校科学年刊》数学与物理科学类（第4辑）3.4（1976），第697–718页。 ISSN：0391-173X。MR：601601。Zbl：0341.35031。 URL：http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1976_4_3_4_697_0。[Tal81] Giorgio Talenti。《二维空间中 Monge-Amp`ere 型方程解的一些估计》。载于：《比萨高等师范学校科学年刊》科学类（第4辑）8（1981），第183–230页。 ISSN：0391-173X。MR：623935。Zbl：0467.35044。 URL：http://www.numdam.org/item?id=ASNSP

[Tso89] Kaising Tso。《对称化与赫essian方程》。载于：*J. Anal. Math.* 52（1989），第94–106页。 ISSN：0021-7670。 DOI：10.1007/BF02820473。MR：981497。Zbl：0675.35040。

School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 361005, Xiamen, P.R. China& Mathematisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Freiburg im Breisgau, 79104, Germany*Email address*: zhenglu@stu.xmu.edu.cnSchool of Mathematical Sciences, Xiamen University, 361005, Xiamen, P.R. China*Email address*: chaoxia@xmu.edu.cn School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 361005, Xiamen, P.R. China& Institut für Mathematik, Goethe-Universität,60325, Frankfurt, Germany*Email address*: xuwenzhang@stu.xmu.edu.cn