用于亥姆霍兹问题的可扩展 DPG 多重网格求解器：收敛性研究

Jacob Bad ger[a]、Stefan Henneking[a]、Socratis Petrides[b]、Leszek Demkowicz[a]

[a]奥登研究所，德克萨斯大学奥斯汀分校[b]劳伦斯利
弗莫尔国家实验室

arXiv:2304.01728v3 [math.NA] 5 Oct 2023

谨以此文献给 Leszek Demkowicz，值此他 70th 生日之际

摘要

本文提出了一种可扩展的多重网格预条件子，旨在求解由高频波算子的间断 Petrov–Galerkin（DPG）离散化产生的大规模系统。本研究基于 Petrides 和 Demkowicz 已开发的多重网格预条件技术（Comput. Math. Appl. 87 (2021) pp. 12–26），并通过一种新的可扩展并行 MPI/OpenMP 实现，将收敛结果从 $\mathcal{O}(10^7)$ 个自由度（DOFs）扩展至 $\mathcal{O}(10^9)$ 个自由度。本文的创新贡献包括基于细网格算子限制构建粗网格系统的另一种定义，由此获得更优的收敛结果。在一致加密情形下，本文提供了详细的收敛性研究，证明了 h 和 p 的稳健收敛性，以及相对于波频率的线性依赖关系。最后，本文给出了 hp-自适应模拟的数值结果，其中包括一个具有高材料对比度的大规模地震建模基准问题。

关键词：多重网格，DPG，预条件子，Helmholtz，高频波， hp-自适应性

致谢

我们感谢 Matteo Croci 提供的宝贵讨论。J. Badger、S. Henneking 和 L. Demkowicz 获得了美国空军科学研究办公室资助（项目编号 FA9550-19-1-0237）和美国国家科学基金会拨款（项目编号 2103524）的支持。本研究由劳伦斯利弗莫尔国家实验室在美国能源部主持下开展，合同编号为 DE-AC52-07NA27344，LLNL-JRNL-847116。

1 引言

1.1 背景

波传播问题出现在许多领域，例如自然资源勘探、医学成像和核聚变研究等。然而，开发用于求解时谐波传播问题的高精度、高效率数值算法，一直是众所周知的难题。传统有限元方法（FEM）虽能实现高精度和最优离散化，但在波算子问题中的效能会因两个主要原因而下降

。首先，除非使用非常细的网格来解析传播波，否则这些方法会面临稳定性问题。在高频区域，这会导致计算代价高得令人难以承受。缺乏渐近前离散稳定性，也使网格自适应技术变得不可靠且效率低下。其次，线性系统具有高度不定性，因此标准迭代求解方案会失效 [26]。当前用于波算子的先进预条件技术，例如多重网格方法 [43, 56, 34], 采用特殊传输条件的区域分解方法 [7, 31, 55, 44], 基于人工吸收的稳定化方法 [27, 6], 移位拉普拉斯[53] 以及扫描预条件子 [23, 24, 11, 46, 57] ，前景十分广阔，但在非均匀介质中效率会下降，而且难以应用于复杂几何 [29, 25]。

另一种方法则采用<style id='1'>最小残差 离散化方法，这些方法在构造上会生成正定离散系统，因此可能适用于更为标准的预条件技术 [33, 49, 50, 48]。事实上，一阶系统最小二乘法（FOSLS） [8, 45], 及其他最小二乘方法 [12], 之所以得到推广，是因为几何多重网格方法和代数多重网格方法可以应用于原本不定的问题。然而，对于波传播问题，众所周知，FOSLS 具有很强的耗散性 [30] ，因此在高频区域并不具有竞争力。本文讨论一种基于最小残差离散化的多重网格求解器，该离散化通过采用带有最优测试函数 [18]的不连续Petrov–Galerkin（DPG）方法应用于超弱变分形式而获得。

1.2 DPG-MG 求解器

Demkowicz 和 Gopalakrishnan 的 DPG 有限元方法 [17, 16, 19] 是一种非标准最小二乘方法，具有若干吸引人的性质：网格无关稳定性、内置误差指示器，以及适用于具有不同函数空间设定的多种变分形式。DPG 方法的一个特殊情形是广为人知的 FOSLS 方法，其中残差在 L^2 检验函数范数中被最小化。然而，如前所述，在波传播背景下，其他变分形式更为适宜。在各种 DPG 变分形式中，所谓的<style id='3'>超弱变分形式已被证明更具优势：与其他 DPG 变分形式 [48], 相比，其耗散性更低，色散误差大致与 Galerkin 离散 [30], 相当；此外，研究表明，通过适度提高离散阶数 [37], 该形式能够抵消污染误差，从而准确求解具有多个波长的问题。这些性质被 Petrides 和 Demkowicz 用于 [50] 定义一种 hp自适应多层预条件器，以处理采用正合序列能量空间中的协调有限元[15]离散的 DPG 波传播问题。

与可杂交方法类似，DPG 方法通过在更大的间断[1] （“分片”）检验空间 [10]上进行测试，在网格骨架上引入额外的迹自由度。对于高阶离散，将所有内部自由度静态凝聚到网格骨架上，可得到规模更小的全局系统，并使场变量和迹变量的实现更加协调。DPG 多重网格求解器（DPG-MG）定义在这个凝聚

[1]DPG 名称中的“D”

的迹自由度全局系统上。为该凝聚系统构造合适的延拓算子颇具挑战，因为细化 h后产生的细网格自由度没有自然对应的粗网格代表；可杂交方法也面临这一挑战 [52, 51]。Petrides 和 Demkowicz [49, 48]在最初的 DPG-MG 工作中作出的重要贡献之一，便是为一般 DPG 问题[2] 构造此类非嵌套凝聚系统之间的稳定延拓算子；第 3 节将对此作概述。

1.3 方向与结构

基于 Petrides 和 Demkowicz 的初始实现 [48], ，我们开发了可扩展的混合 MPI/OpenMP DPG-MG 求解器实现。并行实现及其扩展特性将在后续论文中详细介绍；本文则利用我们高性能的实现，研究 DPG-MG 求解器在均匀 h、均匀 p 和 hp 自适应细化下的收敛特性。本文旨在阐明 DPG-MG 求解器的扩展特性，并找出当前构造中可改进之处。

本文其余部分安排如下：第 2 节定义本文所采用的超弱声学模型和 DPG 离散化。第 3 节回顾 DPG-MG 求解器的构造。第 4 节针对一个具有解析解的模型问题进行若干收敛性研究。第 5 节使用 GO_3D_OBS 模型 [35]，展示该求解器对前沿计算挑战的适用性；该模型是用于评估地震建模中新一代算法的一项高难度基准问题。最后，第 6 节讨论研究结果及未来工作。

2 用于 Helmholtz 问题的超弱不连续 Petrov–Galerkin 方法

不连续 Petrov–Galerkin 方法可自动构造适定变分公式的稳定离散化，并继承连续问题的稳定性。其实现方式是计算最优测试函数 [16] ，使其在离散 inf–sup 条件 [3] 中达到上确界。这些经过特殊选取的检验函数所构成的唯一空间称为最优试函数空间。实践中，通过在一个加密的不连续检验空间 [32] 上求逆全局 Riesz 映射，对该空间进行近似。本文的数值计算采用将检验空间的多项式阶数统一提高 1 进行加密。不连续（分片）的检验空间使最优测试函数能够按单元局部计算。然而，将检验空间分片会产生定义在网格骨架 [10] 上的额外（迹）未知量。

记号与能量空间。 我们简要介绍本文中使用的一些记号和能量空间。考虑一个有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ，其边界为 Lipschitz 边界 $\Gamma \equiv \partial\Omega$。$\Omega$ 上的 L^2-内积记为 $(\cdot,\ \cdot)$， L^2-范数记为 $\|\cdot\|$。我们定义标准能量

[2]采用正合序列能量空间离散化

空格

$$
\begin{aligned}
L^2(\Omega) &= \{y : \Omega \to \mathbb{C} : \|y\| < \infty\},\\
H^1(\Omega) &= \{w : \Omega \to \mathbb{C} : w \in L^2(\Omega), \nabla w \in (L^2(\Omega))^3\},\\
H(\mathrm{div}, \Omega) &= \{v : \Omega \to \mathbb{C}^3 : v \in (L^2(\Omega))^3, \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

在不连续 Petrov–Galerkin 方法中，我们为检验函数使用相应的分片能量空间，这些空间定义为有限元网格 Ω_h 上各单元 $\{K\}_{K\in\Omega_h}$ 的乘积空间:

$$
\begin{aligned}
H^1(\Omega_h) &:= \{w : \Omega \to \mathbb{C} : w|_K \in H^1(K)\ \forall K \in \Omega_h\},\\
H(\mathrm{div}, \Omega_h) &:= \{v : \Omega \to \mathbb{C}^3 : v|_K \in H(\mathrm{div}, K)\ \forall K \in \Omega_h\}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

最后，检验函数 [10]的分片处理导致我们在网格骨架 Γ_h 上引入迹未知量 $= \{\partial K\}_{K\in\Omega_h}$。迹空间可理解为全局协调函数的逐单元迹:

$$
\begin{aligned}
H^{1/2}(\Gamma_h) &:= \{\prod_{K\in\Omega_h} \gamma^K(w|_K) : w \in H^1(\Omega)\},\\
H^{-1/2}(\Gamma_h) &:= \{\prod_{K\in\Omega_h} \gamma_n^K(v|_K) : v \in H(\mathrm{div}, \Omega)\},
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

wh其中， γ^K 和 γ_n^K 是逐单元连续性算子和法向迹算子 [18, 14].

亥姆霍兹问题。 本文研究具有非齐次阻抗边界条件（BC）的时谐线性声学的一阶混合形式。用算子形式表示，方程为

$$
\begin{aligned}
i\omega p + \nabla \cdot u &= 0 \quad \text{in } \Omega,\\
i\omega u + \nabla p &= 0 \quad \text{in } \Omega,\\
Z^{-1}p - u_n &= u_0 \quad \text{on } \Gamma,
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

其中， p 是压力， u 是速度， ω 是角频率，且 $i = \sqrt{-1}$；在阻抗边界条件中， Z 是声波阻抗， $u_n := u \cdot n$ 是沿外法向方向 n 的通量， u_0 是阻抗载荷。

ˆ分片超弱形式。设 $(\mathcal{U},\ \mathcal{U})$ 和 $\mathcal{V}$ 分别为试探空间和检验空间， $\mathcal{V}'$ 为 $\mathcal{V}$ 上的反线性泛函空间。不连续 Petrov–Galerkin 亥姆霍兹问题的形式由如下变分形式定义：给定 $l \in \mathcal{V}'$，求 $\mathfrak{u} \in \mathcal{U}$ 和 $\hat{}\mathfrak{u} \in \hat{}\mathcal{U}$，使其满足

$$
b(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) + \hat{b}(\hat{\mathfrak{u}}, \mathfrak{v}) = l(\mathfrak{v}), \quad \mathfrak{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.5}
$$

ˆ ˆ 其中 b 和 b 分别是定义在 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 和 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 上的半双线性形式。

关于亥姆霍兹超弱形式的详细推导，请参阅 [48, 15] 。The

分片超弱形式由式 (2.5) 给出，其定义如下的组变量和形式：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u} &= (u,p) \in (L^2(\Omega))^3 \times L^2(\Omega), \\
\hat{\mathfrak{u}} &= (\hat{u}_n, \hat{p}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) : Z^{-1}\hat{p} - \hat{u}_n = 0 \text{ on } \Gamma, \\
\mathfrak{v} &= (q,v) \in H^1(\Omega_h) \times H(\mathrm{div}, \Omega_h) : Z^{-1}q + v_n = 0 \text{ on } \Gamma, \\
b(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) &= (i\omega p, q) - (u, \nabla_h q) + (i\omega u, v) - (p, \nabla_h \cdot v) \\
\hat{b}(\hat{\mathfrak{u}}, \mathfrak{v}) &= \langle \hat{u}_n, q \rangle_{\Gamma_h} + \langle \hat{p}, v_n \rangle_{\Gamma_h}, \\
l(\mathfrak{v}) &= \langle u_0, q \rangle_{\Gamma}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

注意，假设检验函数满足 $Z^{-1}q + v_n = 0$ 在 Γ 上，以便将阻抗边界条件纳入其中；阻抗边界条件还隐含地要求边界 Γ上的速度具有额外的正则性。为了使载荷定义良好，可以假设 $u_0 \in H^{-1/2}$(Γ)，在这种情况下，$\langle u_0,\ q\rangle_\Gamma$ 可以按对偶配对的意义理解；另一种选择是假设$u_0 \in L^2$(Γ)，并将 $\langle u_0,\ q\rangle_\Gamma$ 解释为 L^2-意义下的对象；有关阻抗边界条件正则性问题的进一步讨论，请参见 [15] 。

额外未知量$\hat{}u_n$和$\hat{}p$ 分别表示网格骨架 Γ_h上单元边界的法向速度（即通量）和压力；$\hat{}u_n$ 离散为 H(div)-协调有限元的法向迹，而$\hat{}p$ 则离散为 H^1-协调有限元的连续迹。分片检验空间赋予伴随图范数 [50, 18]:

$$\|\mathfrak{v}\|_{\mathcal{V}}^2 := \|A_h^* \mathfrak{v}\|^2 + \alpha \|\mathfrak{v}\|^2, \tag{2.7}$$

其中 $A_h^*\mathfrak{v} = -$(i\omega q + \nabla_h \cdot v,\ \nabla_h q + i\omega v)，α 是一个缩放常数。在本文中，数值结果均使用 $\alpha = 1$ 计算。

3 DPG-MG 求解器

DPG-MG 是一种多重网格预条件共轭梯度求解器，其多层预条件器定义在通过细化生成的网格层次上，具体定义见 [50]。DPG 方法的网格无关稳定性意味着，DPG-MG 求解器可以从任意粗糙的初始网格开始。当前网格上的解达到足够精度后，便使用 DPG 误差指示器生成一组细化，从而定义下一个网格。由于中间网格上的解只需达到足够精度，以便生成下一个网格，因此只需较少的迭代次数、花费较低的成本，就能生成最优的 hp 自适应网格。

延拓。如第 1 节所述，DPG-MG 求解器定义在位于网格骨架上的迹自由度上；h-细化会产生与前一网格骨架不重合的细网格边和面，因此在前一网格上没有自然的对应项。为解决这一问题，Petrides 和 Demkowicz 引入了两阶段延拓 [49]。在限制的第一阶段中，对支撑不在前一网格骨架上的细网格自由度进行静态凝聚；该

所得网格称为宏网格。在限制的第二阶段，将自然包含算子——该算子将粗网格基函数表示为宏网格基函数的线性组合——应用于前一网格的边和面。自然包含算子通过递归应用约束近似技术 [20] 构造而成。

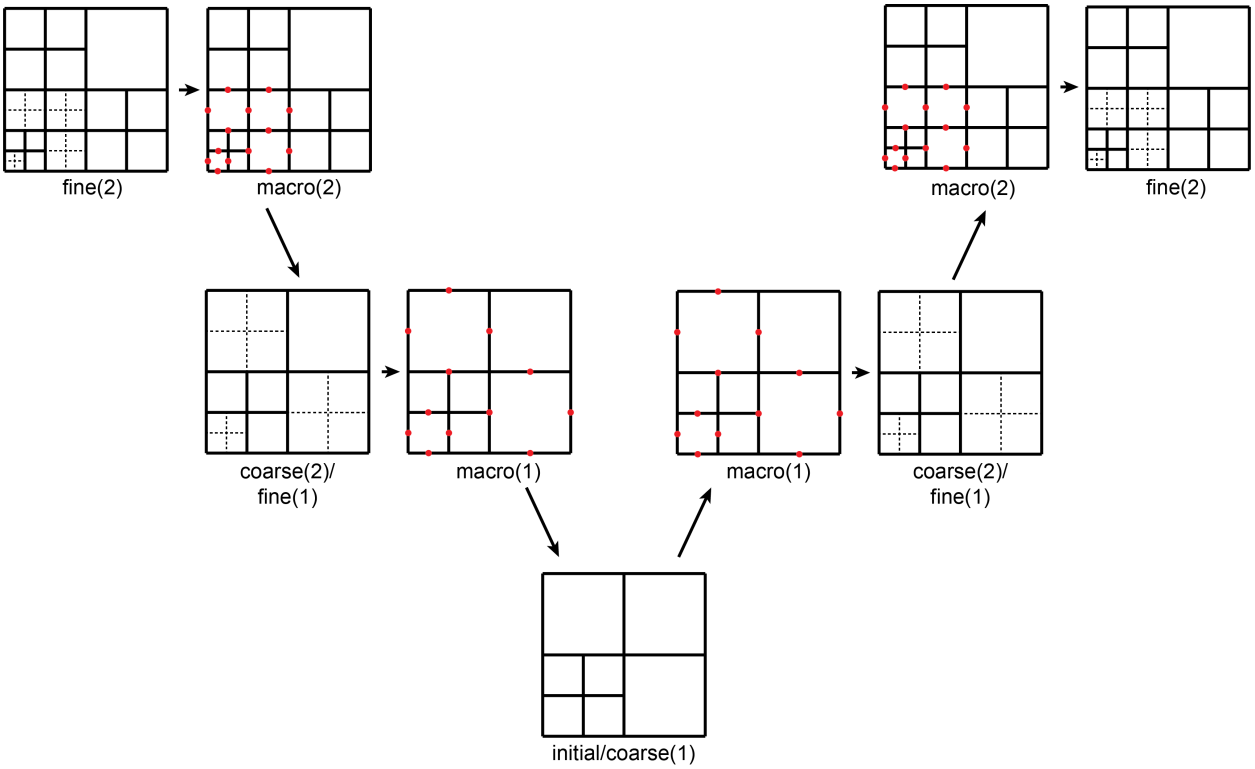


图 1：DPG-MG V 循环。延拓算子首先将所有细网格自由度凝聚到粗网格骨架上；然后在宏网格的边上应用自然包含算子，并在三维情况下应用于面。

V 循环和平滑器。 我们简要说明 DPG-MG V 循环，并介绍用于指代算法中涉及的各种网格的术语。首先，我们与惯例略有不同，不将初始 网格称为粗网格（我们仅将其称为初始网格）。因此，诸如粗网格顶点补丁和粗网格刚度矩阵之类的术语不一定与初始网格相关。相反，我们保留粗 网格和细 网格这两个术语，分别表示一对连续网格中较粗和较细的网格。具体而言，fine(i) 表示对初始网格进行第 i 次细化所生成的网格，而 coarse(i) 则是其对应的粗网格。这种命名约定与 V 循环一起在图 1 中进行了说明。请注意，在下文讨论的 MPI 分布式实现中，coarse(i) 和 fine(i-1) 对应于同一网格的两个不同分区。

DPG-MG 求解器在宏网格上同时采用共轭梯度迭代和平滑。平滑通过加性施瓦茨（重叠块雅可比）平滑器完成，其块定义为支撑在粗网格顶点补丁上的宏网格自由度。fine(i) 上的平滑块使用 coarse(i) 顶点补丁构造。使用顶点补丁可能会导致

较大的平滑块，尤其是在高阶离散的情况下，但避免了为定义在 $H(\text{curl})$ 和 $H(\text{div})$ [2] 中的向量值变量引入额外的复杂性。因此，DPG-MG 求解器无需修改即可应用于任何采用正合序列能量空间离散化的适定DPG问题。平滑块的其他定义可使向量值变量 [42, 43] 的块尺寸更小。

粗网格算子的另一种构造方法。粗网格算子可以通过直接矩阵组装或限制细网格算子来构造。需要注意的是，由于使用了迹空间，并且DPG最优试验空间是即时计算的，这两种方法并不等价（事实上，在非嵌套多重网格迭代中——本文即属此类——这两种方法通常并不等价）。DPG-MG 求解器会在当前网格上组装并求解系统，然后进行细化以定义下一个网格。因此，对于线性问题，只需在细化前存储当前网格上的系统，即可直接组装粗网格算子；原始 DPG-MG 实现 [50]采用的正是这种方法。然而，我们发现，对于高频问题，随着频率增加，收敛会迅速恶化。正如第 4 节将展示的，将粗网格刚度矩阵计算为细网格刚度矩阵的限制结果，可以恢复预期的收敛性。我们正在努力从理论上理解这两种粗网格方法的差异，因此将对这一现象的分析留待后续发表。目前只需指出，对于较大的频率（且 α 固定），当网格从预渐近区域过渡到渐近区域时，采用伴随图试验范数（2.7）的单元Gram矩阵的谱会发生显著变化；这反过来可能使细网格系统与粗网格系统具有截然不同的尺度，而若延拓时未考虑这种差异，就可能导致粗网格校正不稳定。最后值得指出的是，与细网格 DPG 系统的组装相比，将粗网格算子计算为细网格算子的限制结果所需成本相对较低；即使使用和因子分解 [47, 4]加速单元组装，其成本通常也仅为细网格组装成本的 1% 至 10%。

**可扩展的 MPI/OpenMP 实现，位于 hp3D**。DPG-MG 求解器在hp3D 中实现。hp3D 是一款可扩展的有限元软件，用于分析和离散化复杂的三维多物理场应用 [39, 38]。 hp3D 支持多种先进的有限元技术，包括正合序列保形离散化、完全各向异性的 hp自适应性，以及包含“各种形状”单元的混合网格（四面体、六面体、棱柱和棱锥）。该代码采用混合 MPI/OpenMP 并行性，并与多个科学计算库对接，包括 PETSc [5],MUMPS [1], 和 Zoltan [21]。 hp3D 作为开源代码提供，采用 BSD-3许可证。[3]

原始 DPG-MG 实现 [50] 通过 OpenMP 线程实现共享内存并行，用于单节点计算。典型计算节点配置的内存限制，使自适应求解器的可扩展性受限于 $\mathcal{O}(10^7)$ 个自由度。我们扩展了原有求解器实现，使其支持基于 MPI 的可扩展分布式内存计算。该方法基于在子域上分布解自由度和几何自由度 [38, 36]；然而，DPG-

[3]https://github.com/Oden-EAG/hp3d

MG 求解器采用独特的数据结构和算法，在扩展 hp3D 数据结构的基础上，支持非对称地纳入幽灵单元，并实现与相邻子域的高效异步通信。为了在 hp-自适应网格上保持令人满意的并行效率，在细化过程中，每到达一个新的网格层级都会执行动态负载均衡。对于固定频率，已证明该分布式 DPG-MG 求解器实现能够以接近线性的并行效率扩展至 $\mathcal{O}(10^9)$ 个自由度，并运行于 $\mathcal{O}(100)$ 个计算节点上。求解器并行数据结构、算法及其扩展特性的细节并非本文重点，后续将另行发表。

4 收敛性研究

本节将开展若干收敛性研究，以考察 DPG-MG 求解器对于单元尺寸 h、多项式阶数 p 和角频率 ω 的稳健性。此前关于 DPG-MG 求解器的论述涉及多种物理问题、平滑步数和容差，展示了该求解器的多功能性，但也在一定程度上混淆了其扩展行为。为阐明 DPG-MG 求解器的收敛特性，我们固定以下参数：

- 当离散残差的相对 ℓ^2-范数降低至原来的 10_7 分之一时，终止共轭梯度迭代。
- 每次细化后，初始解均重置为零；换言之，不会使用先前网格上的解为后续网格生成初始猜测。
- 每个网格层级均执行一次预平滑和后平滑步骤（V(1,1)-循环），但第 4.2 节中的一个案例除外：为便于比较，该案例分别采用一次和五次平滑步数；届时将对此案例予以说明。
- 初始网格由一个 $p = 2$ 阶单元构成；不过，该初始网格使用 MUMPS 直接求解器求解，因此未报告其迭代次数 [1]。
- 迭代过程中不使用初始网格求解器。我们发现，当初始网格无法解析波时（本研究始终如此），收敛性不会受到影响。

本节中的所有实验均在德克萨斯高级计算中心 [54] 的$Frontera$ Cascade Lake (CLX) 节点上进行。本节不讨论计时统计数据，但将在第 5 节中提供。

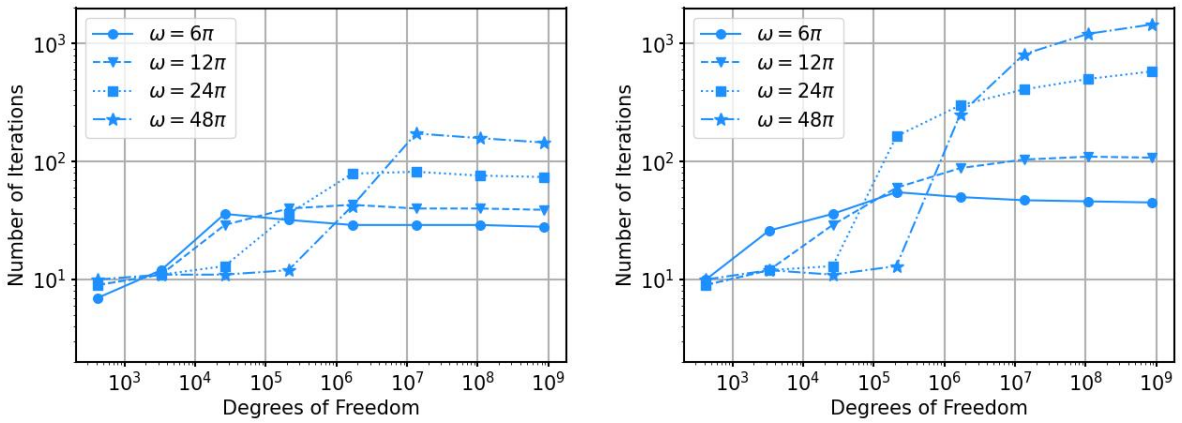
4.1 问题设置

本节中，我们考虑束腰半径为 0.1 的高斯光束在均匀单位立方体区域 $[0,1]^3$ 中的传播。除原点附近通过人为构造的阻抗载荷注入高斯光束的区域外，所有表面均施加齐次阻抗边界条件。解如图 5 所示。

4.2 直接　组装与细网格限制对粗网格算子的影响

如第 3 节所示，粗网格系统既可以直接组装（或从先前网格中存储），也可以通过应用限制算子从细网格系统计算得到。这两种方法分别称为存储 和限制。正如后文将要展示的，粗网格系统的构造方式会对 DPG-MG 求解器的收敛产生重大影响。

均匀 h细化。 我们首先研究 DPG-MG 求解器在均匀 h-细化下的收敛性；也就是说，每个后续网格都是通过对前一个网格进行均匀 h-细化得到的。对于多种频率，各种方法达到收敛所需的迭代次数如图 2 所示。观察图 2a（限制）中的结果可以看出，迭代次数随频率大致呈线性增加，但在渐近区域表现出明显的 h-鲁棒性。迭代次数随频率增加是意料之中的：无法解析波的网格不会对算子预条件化做出贡献。需要注意的是，与标准 Galerkin 方法的多重网格预条件器不同，后者由于粗网格上缺乏离散稳定性而会在此设置下发散，而 DPG 求解器仍能保持稳定。接下来比较图 2a（限制）和图 2b（存储）可以看出，存储粗网格系统始终导致比限制更多的迭代次数；此外，存储粗网格系统不具备 h-鲁棒性。

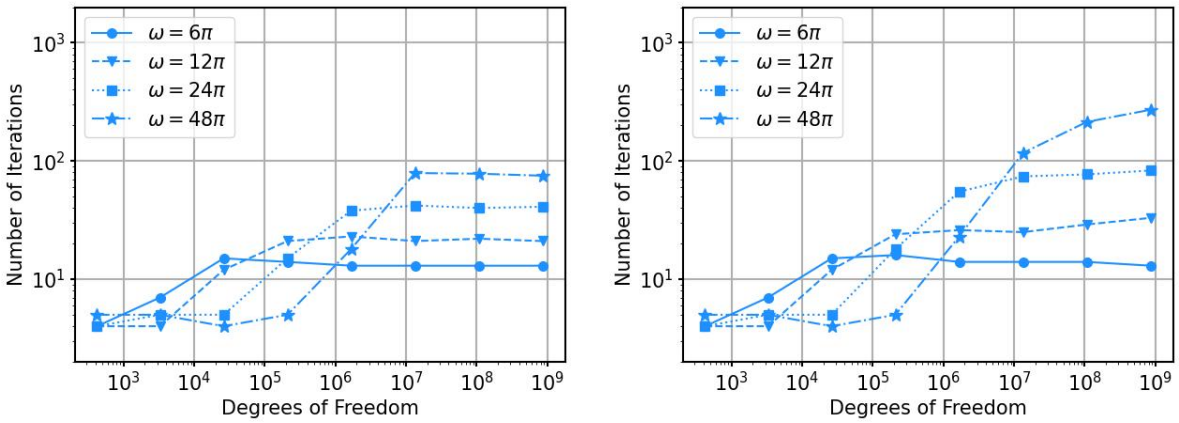


(a) 从细网格系统限制得到的粗网格系统　　(b) 从先前网格存储的粗网格系统

图 2：在均匀 h 加密网格上应用一次平滑步 时，DPG-MG 求解器的收敛情况。该求解器的收敛具有 h-鲁棒性，使用细网格限制时迭代次数更少。收敛所需的迭代次数与频率 ω 成线性关系。

均匀 h细化；五个平滑步。在不连续 Petrov–Galerkin MG 求解器的原始实现中，数值实验通常采用相对较多的平滑迭代（一般为 5 到 10 次）。作为对比，我们采用每次迭代五个平滑步（V(5,5) 循环）重复先前的研究；结果如图 3 所示。采用较多的平滑步往往能恢复 h-稳健收敛性，前提是存储粗网格系统

（图 3b）；然而，达到 h-稳健性所需的平滑步数往往会随频率增加。特别值得注意的是，对于较高频率的情况，使用细网格系统限制并进行一个平滑步（图 2a）时，达到收敛所需的迭代次数实际上少于使用五个平滑步、并存储先前网格上的粗网格算子时（图 3b）。比较图 2a 和图 3a 可见，当通过限制来定义粗网格系统时，将平滑步数增加五倍，只会使平滑迭代次数减少一半。我们不对收敛性随平滑步数的变化进行专门研究，但定性地报告称，在迄今为止的所有数值实验中，每个网格层级执行一个平滑步，在收敛性方面都是最佳选择。



(a) 从细网格系统限制得到的粗网格系统

(b) 从先前网格存储的粗网格系统

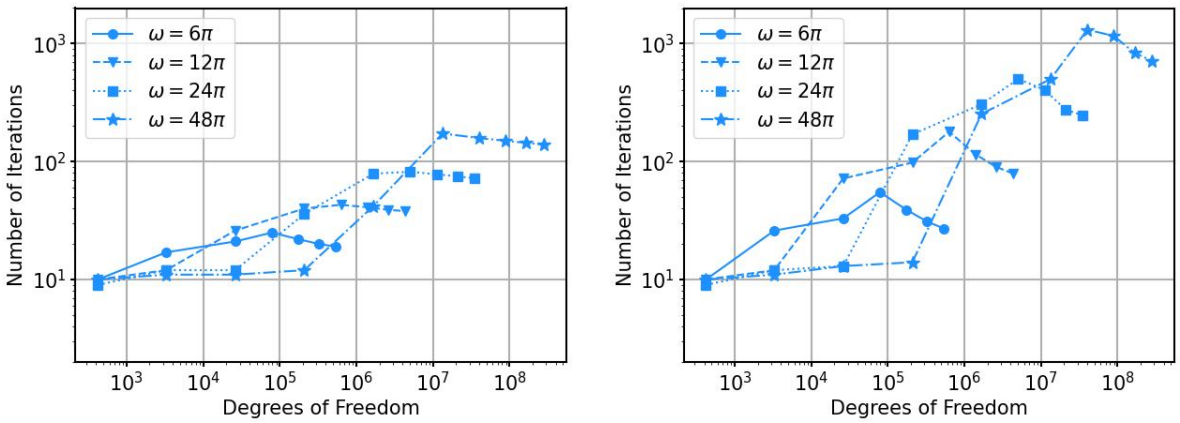
图 3：对均匀 h 细化网格应用五个平滑步 后，DPG-MG 求解器的收敛情况。增加平滑次数在一定程度上有助于恢复 (b) 中的 h 鲁棒性；而在 (a) 中，仍可观察到 h 鲁棒性。不过，与每层执行一个平滑步相比，每层执行五个平滑步只能将收敛所需的迭代次数减少约一半。迭代次数与频率 ω 呈线性关系。

均匀 p细化。 为研究在 p 细化下 DPG-MG 求解器的收敛性，我们首先进行 h 细化，直到每个波长至少包含两个单元（满足奈奎斯特准则）；随后，在每个后续网格上提高离散化的多项式阶数 p。本研究结果如图 4 所示，可以看出，无论采用存储还是限制，都能实现 p 鲁棒收敛；不过，采用限制所需的迭代次数要少得多。

4.3 hp-自适应细化

现在我们考虑 hp自适应细化，采用 Dörfler 标记策略 [22] 来确定需要细化的单元。标记的单元将进行 h细化，直到最大边长小于波长的一半；否则，将进行 p细化。在不再请求任何额外的 h细化后，我们再进行一轮网格细化，然后结束细化过程。如图 5 所示， hp自适应细化会生成一系列具有“扫描”结构的网格，即沿着波束的传播方向进行细化。

在均匀 h细化的情况下，观察到迭代次数随频率线性增加，这是预期之中的，并且与网格不够充分时粗空间校正的不足有关。



（a）由细网格系统限制得到的粗网格系统　　（b）存储自先前网格的粗网格系统

图 4：将 DPG-MG 求解器应用于均匀 hp 细化网格时的收敛情况：网格先均匀进行 h 细化，直至每个波长对应两个单元，然后再均匀进行 p 细化。该求解器的收敛具有 p 鲁棒性，且采用细网格限制时迭代次数更少。收敛所需的迭代次数与频率 ω 呈线性关系。

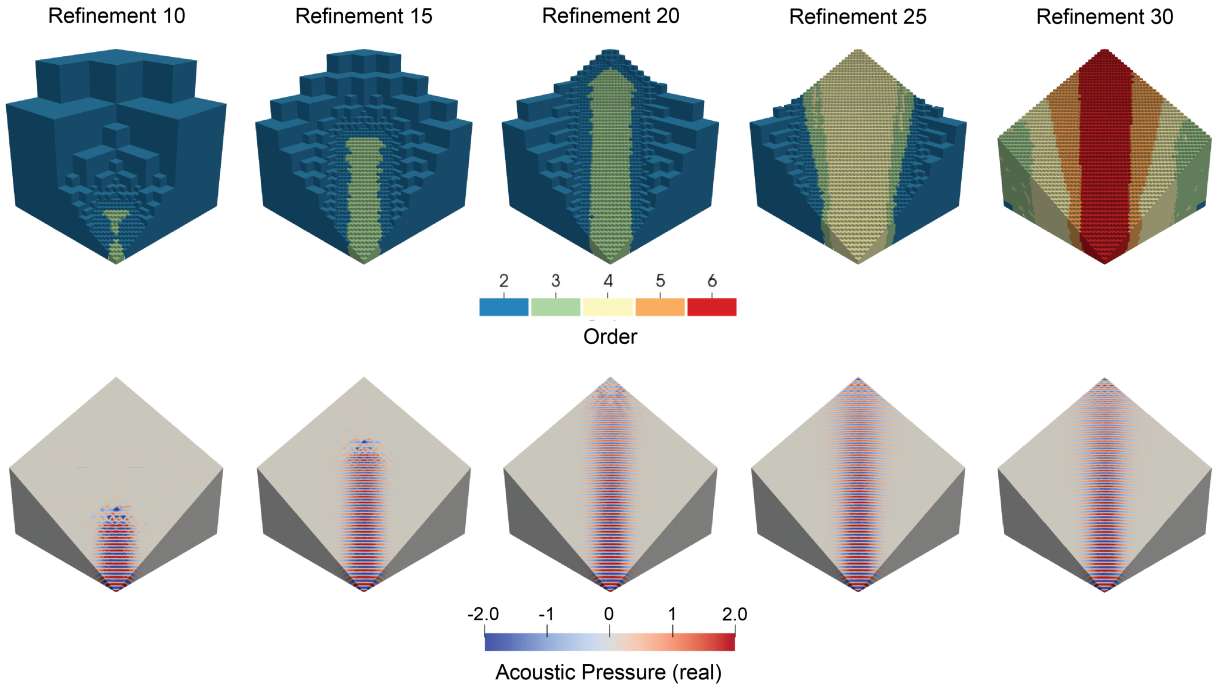
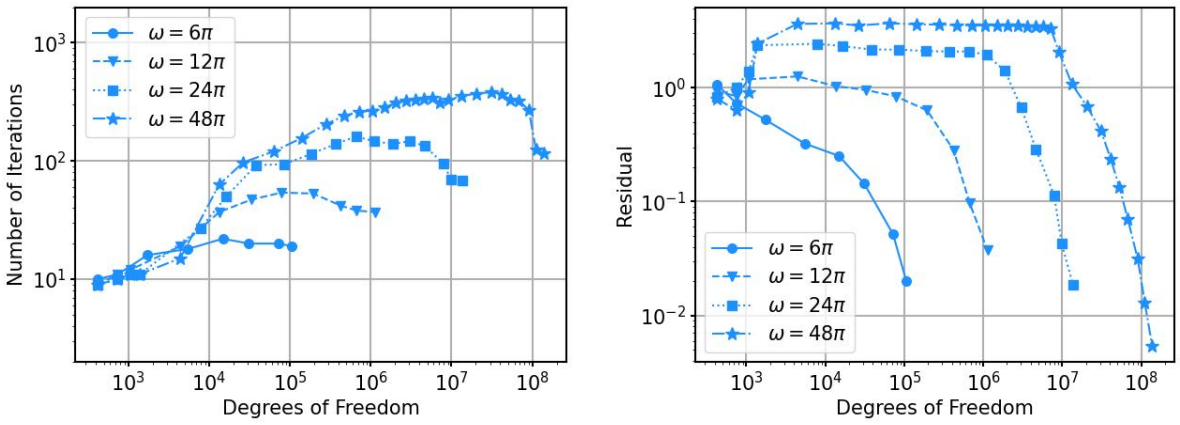


图 5：立方体区域中的高斯光束 hp 自适应传播； hp 自适应网格的锯齿切面（上）以及声压场实部的表面切面（下）。 hp 自适应网格呈现“扫掠”结构：细化首先集中在角点附近，随后向区域内部传播；中间网格上的解稳定，且能部分解析该波。

足够细以解析该波。借助 hp 自适应细化，迭代次数在收敛前随频率变化的行为不太明显，因为中间网格能够部分 解析该波。实际上，我们最初认为网格的“扫描式”结构有助于降低收敛对频率的依赖性。图 6 中的收敛研究似乎表明情况并非如此；迭代次数随频率呈现出明显的线性增长。然而，

请注意，达到收敛所需的最大迭代次数始终高于均匀细化的情况；这出乎意料，因为自适应情形会在每个网格层级上进行平滑，因此总体上执行的平滑步数要多得多。



(a) 达到 10^{-7} 容差所需的迭代次数

(b) DPG 残差的收敛

图 6：DPG-MG 求解器应用于 hp 自适应网格时的收敛情况。达到收敛所需的迭代次数再次随频率（ω）线性增加，且最大迭代次数高于均匀细化的情况（参见图 2a）。

关于 DPG-MG 求解器在 hp 自适应网格上收敛性能变差的原因，初步假设认为，这与存储先前网格的粗网格系统时导致收敛性能变差的现象相似。简而言之，在后一种情况下，逐单元 Gram 矩阵造成细网格系统与粗网格系统之间的尺度差异；通过将粗网格系统构造为细网格系统的限制，使所有系统都继承细网格的尺度，从而减轻了这一问题。在 hp 自适应细化过程中，具有不同尺度的多种单元尺寸（其尺度由逐单元 Gram 矩阵引入）会同时存在。我们正在开展更严格的研究；不过请注意，在图 6a 中，最终网格上的收敛迭代次数显著减少。回到图 5 可以看到，这些最终网格仅由 p 细化构成，且单元尺寸一致、均匀；粗网格系统正是由这些网格限制得到的。

5 应用 – 地震建模

观察到迭代次数随频率 ω 线性增加，这意味着 DPG-MG 求解器在前渐近区域的计算复杂度 $\mathcal{O}(N^{4/3})$ 并非最优；这与其他方法相当，包括移位拉普拉斯 [28, 53]，多重网格 [56, 9, 34]，和区域分解 [7, 44, 55] 方法，但逊于扫掠型预条件子 [24, 59]（包括源传递 [46]，方法及其他方法）所表现出的对数增长。尽管迭代次数线性增加，DPG-MG 求解器在求解大规模高频波传播问题方面仍具有竞争力。为展示 DPG-MG 求解器的性能和灵活性，我们考虑地震建模中的 GO_3D_OBS 基准问题 [35]。该基准问题设置在一个六面体区域中，其中

高对比度非均质结构代表一个俯冲带，其灵感来自南海海槽的地质构造。按照 [58], ，我们考虑该模型的一个 $20 \times 102 \times 28.3\ \mathrm{km}^3$ 剖面。该剖面的波速如图 7 所示，范围从 1 500 m/s 到 8 500 m/s。材料数据以间距为 100 m 的均匀网格给出，该数据由 GO_3D_OBS 模型原始的 25 m 间距数据下采样得到（该模型相当庞大，每个参数占用 132 GB）。以下计算在德克萨斯高级计算中心的 512 个 *Frontera* Cascade Lake（CLX）计算节点（28 672 个处理器核心）上完成。

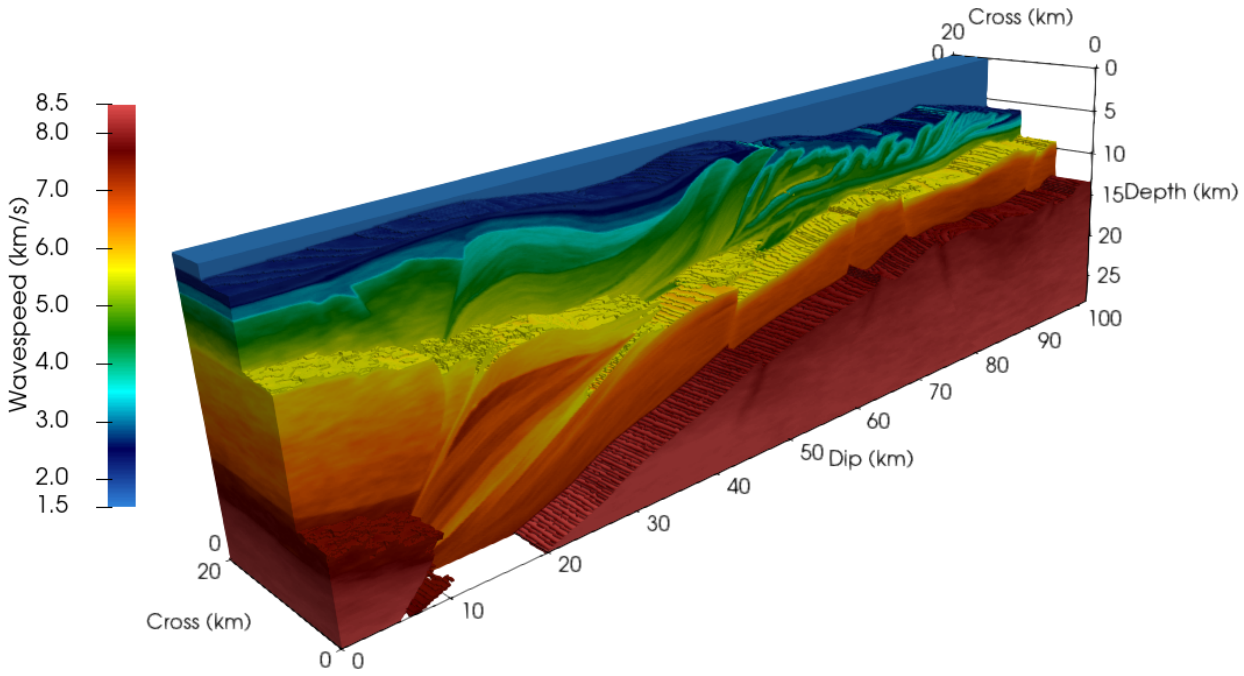


图 7：GO_3D_OBS 模型剖面中的声波波速切面，展示了一个俯冲带。

该问题由一个频率为 3.75 Hz、位于 (10.0, 12.5,0.0) 的点源驱动，该点源以标准差为 $\sigma = 50$ m 的紧致高斯函数实现。为简化起见，我们使用由 $8 \times 42 \times 10$ 个六面体二次（$p = 2$）单元组成的初始网格，总自由度为 205 757。与 DPG-MG 求解器结合使用时，拟合高对比度界面或适应波速的一般非结构网格可发挥显著作用；不过，我们在此展示，从任意粗糙的初始网格出发进行自适应细化，无需手动调优或耗时的网格划分，也能求解复杂问题。

再次使用 Dörfler 标记策略 [22] 标记需要进行自适应细化的单元。我们先进行七次初始 h 自适应细化，以解析点源周围的区域；随后进行 hp 自适应细化，直到 DPG 残差降低至 $3 \cdot 10^2$ 倍（此时计算机内存也恰好耗尽）。 hp 自适应策略会在单元的最大边长小于波长的一半时选择 h 细化；但在高对比度区域（定义为单元内波速变化超过 10%）中，则采用波长的四分之一。否则，选择 p 细化，直到达到最大阶次 $p = 5$，之后再次进行 h 细化。单元阶次限制为 $p = 5$

由于高阶单元可能产生需要大量存储的较大平滑块，我们正在探索多种减少平滑块存储量的策略，包括一种在求解过程中重新计算平滑块的图形处理器实现。对于需要同时求解多个载荷的应用，重新计算平滑块的成本可以分摊到多个载荷上，从而提高这种方法的吸引力。

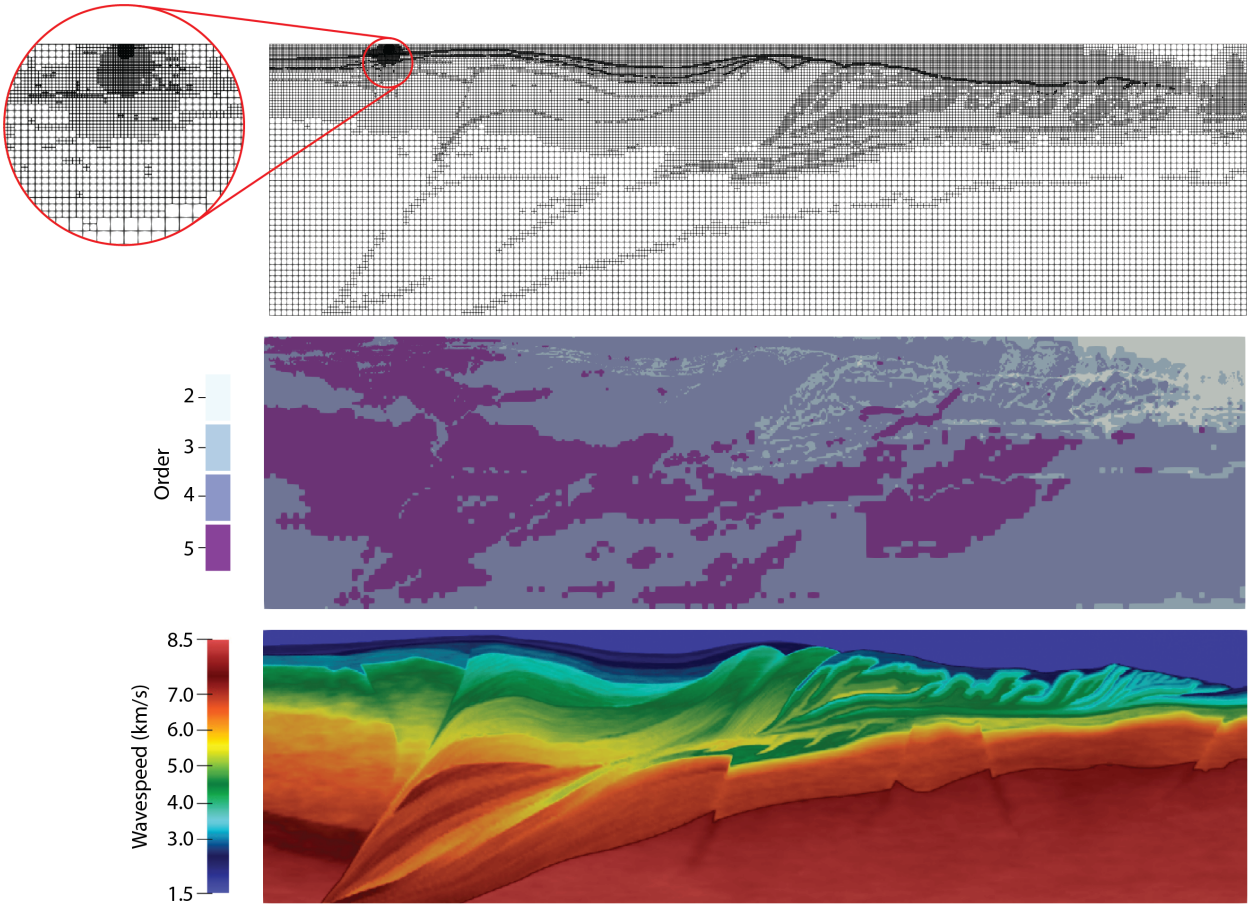


图 8：横截面距离为 10 km 处的六面体网格（顶部）、单元阶次（中部）和波速（底部）的横截面。采用 h-自适应性解析高对比度界面和点源（放大以显示细节），而 p-自适应性有助于减小污染误差。

网格总共细化了 34 次，最终得到的网格（如图 8 所示）包含超过 6.3 百万个单元和 1.9 十亿个自由度。图 8 中网格的右上角尚未完全细化；若要进一步细化该区域，还需要再进行几步自适应细化。不过，展望图 9 可以看出，该区域附近的解振幅相对较小。如前文所述，细化过程因内存不足而终止；这是因为当前实现存储了全部 34 个自适应网格及其相关的粗网格算子（每次细化后，这些算子都会作为细网格算子的限制算子重新计算）。可以采取多种改进策略，例如重构细化树，将深度相近的细化操作分组，以减少网格总数。

横截面　　解的结果如图 9 所示。这些结果在定性上与

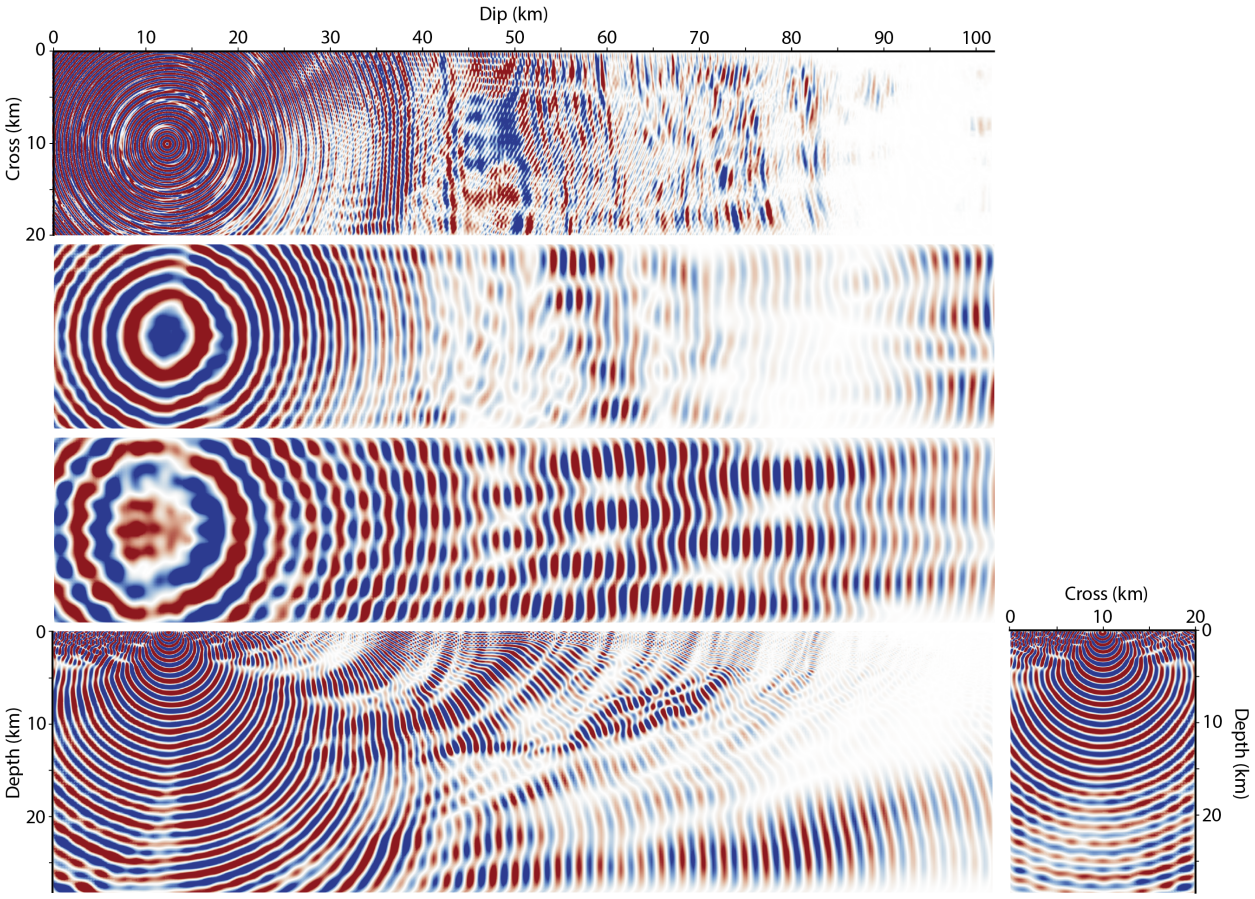
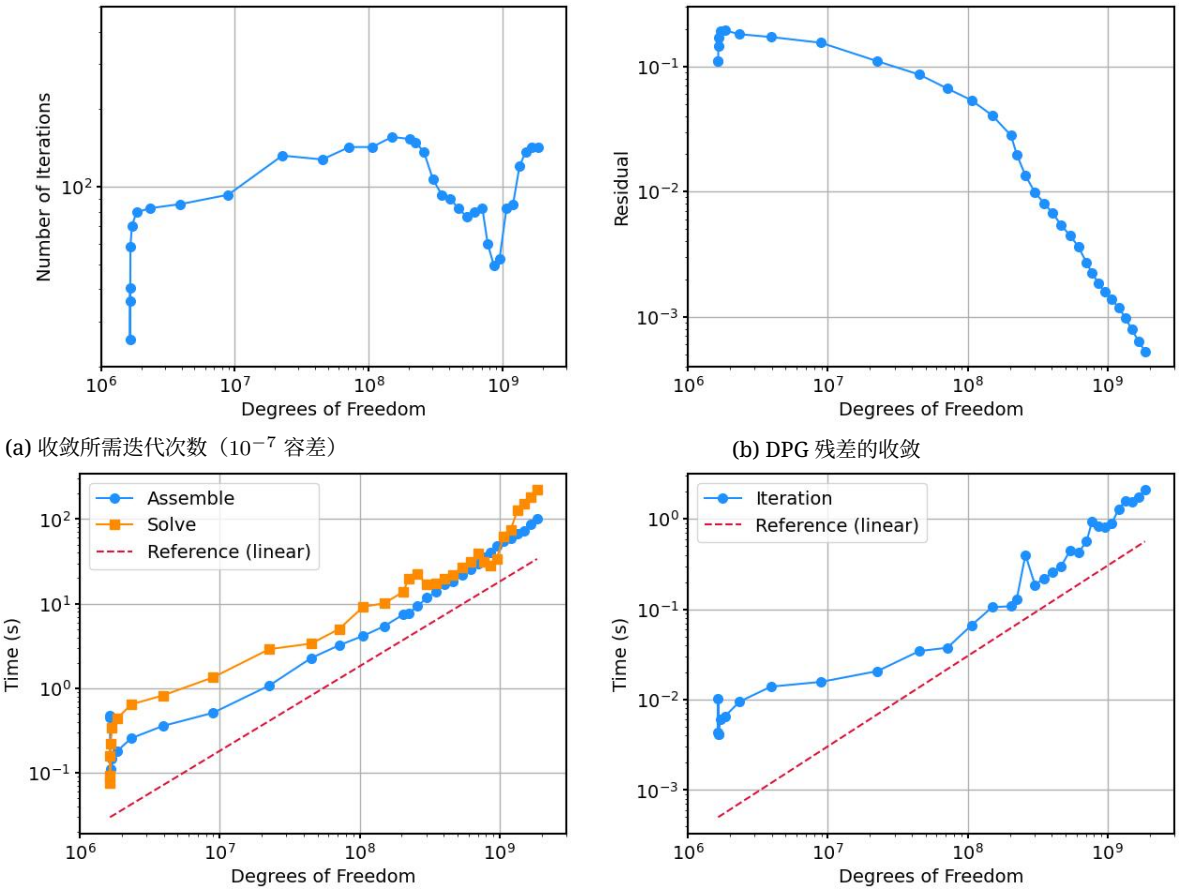


图 9：3.75 Hz 频率和位于 (10, 12.5,0) 的点源所产生的声压（实部）。所示横截面如下：从上到下依次为 0.5 km 深度、15 km 深度、25 km 深度和 10 km 横向截面（左）；以及 12.5 km 倾向截面（右）。对场进行了振幅补偿（按其与源的距离进行缩放），以便在整个区域内实现可视化。

[58], 中所示的结果相似，但需要注意的是，两个解中的点源位置略有不同。定量比较解的精度将留待未来的工作。

该示例的收敛情况和计时结果如图 10 所示。每个网格上达到收敛所需的迭代次数（同样使用 10^{-7} 的容差）显示在图 10a 中；但是需要注意，与第 4 节中的收敛性研究不同，这里我们使用先前网格上的解来初始化后续网格上的解。使用先前解进行初始化的影响在后期迭代中变得明显，此时解已在区域的大部分范围内得到较为合理的解析，而进一步细化只会对解产生相当局部的扰动。图 10b 显示，与图 6b 中的 hp-自适应高斯光束问题相比，DPG 残差在自适应过程的早期就开始下降；这可能是因为波离开点源后衰减得相对较快。

每个网格上的组装和求解阶段的计时结果如图 10 所示；最细网格上的求解耗时 210 秒，而该任务的总运行时间（包括 34 个网格上的组装和求解）为 3029 秒（51 分钟）。由于在



(a) 收敛所需迭代次数（10^{-7} 容差）

(b) DPG 残差的收敛

(c) DPG 系统的组装与求解时间

(d) 总迭代时间

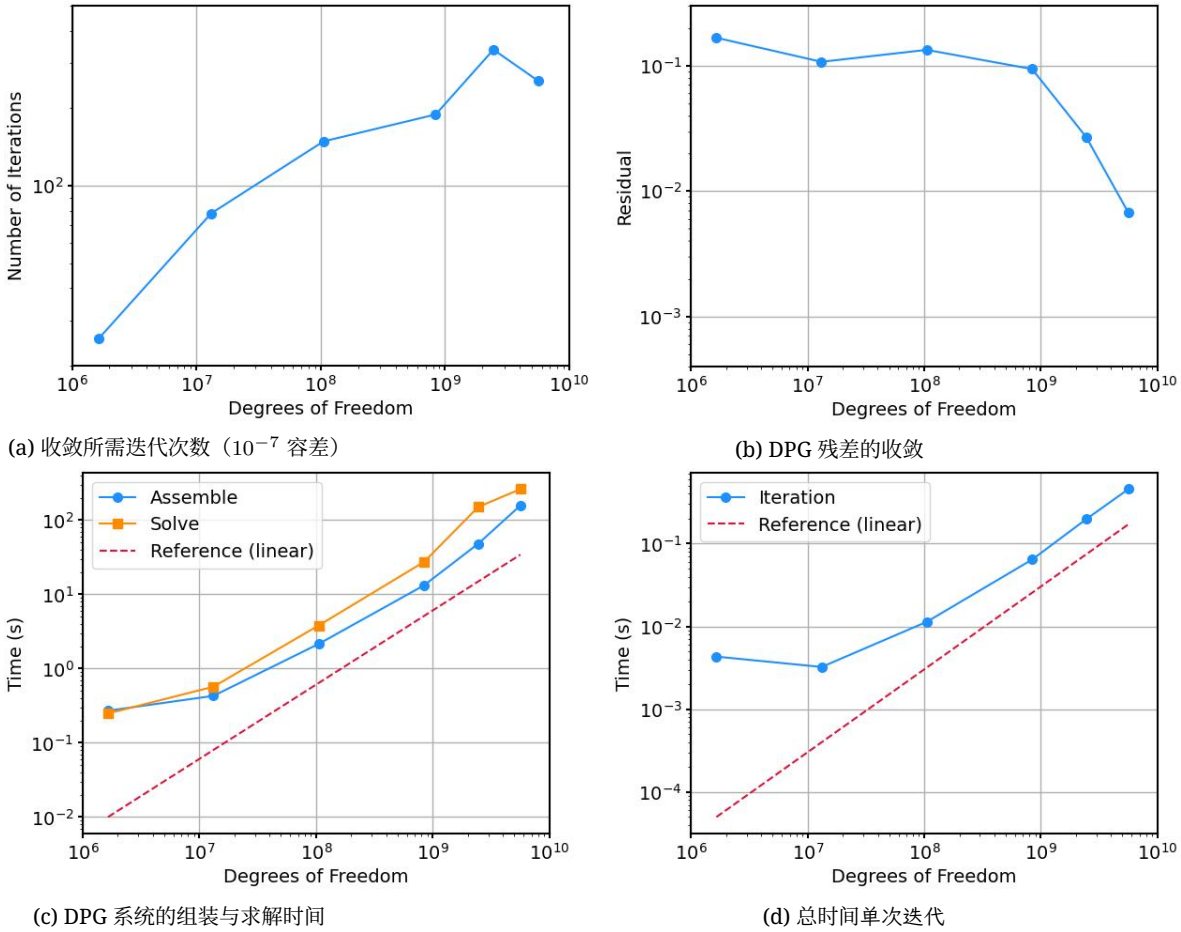
图 10：使用 DPG-MG 求解器（28 672 个处理器核心）对 GO_3D_OBS 模型进行 hp 自适应求解时的收敛情况与耗时。使用先前网格上的解初始化后续网格时，迭代次数更易控制。对于固定频率，DPG-MG 求解器相对于自由度几乎呈线性扩展；超线性扩展是由于自由度的增长低于几何级数。

不同网格上的求解所需的迭代次数不同，图 10d 展示了单次迭代时间，以便更好地评估实现的效率。经过早期的前渐近区域后，可以看到，单次迭代时间大致随自由度线性增长；不过，在规模最大的实例中观察到了超线性增长。当自由度在不同网格层级之间呈次几何级数增长时（如细化过程后期的情况），多重网格求解器出现超线性增长是意料之中的。重构细化树以减少网格层级数量，有助于缓解超线性扩展，并显著降低 hp 自适应求解器迭代的成本。

最后，我们注意到，图 10d 中单次迭代时间的变化与在 hp-自适应网格上进行负载均衡这一重大挑战有关。事实上，hp-自适应细化会生成成本差异极大的单元和平滑块，必须准确预测其成本，然后进行适当划分。本文未对负载均衡策略作出定义，但我们注意到，此处采用的多层方法处理大量相对较小的单元和块；这大大简化了成本估算，可为更细粒度的并行性创造机会，而且通常比其他方法更有利于共享内存并行。

包括区域分解和扫掠型预条件子等方法。可扩展自适应性是 DPG-MG 求解器的一项关键优势，据我们所知，这在亥姆霍兹求解器中尚属首创。

一致加密。 本节最后，我们考虑 GO_3D_OBS 基准问题的一致 h 和 p 细化。如前文所述，在当前实现中，DPG-MG 求解器会存储并操作所有先前的网格；当网格之间仅细化了少量单元时，这可能会带来高昂的开销。由于自适应网格通常只需使用少量自由度即可达到相近的精度，因此这种额外开销在一定程度上是可以接受的。不过，我们仍在努力降低将求解器应用于自适应加密网格时产生的额外开销。下面的一致加密示例旨在为自适应细化的潜在性能提供基准，并为与其他亥姆霍兹求解器实现进行更直接的比较提供参考。



(a) 收敛所需迭代次数（10^{-7} 容差）

(b) DPG 残差的收敛

(c) DPG 系统的组装与求解时间

(d) 总时间单次迭代

图 11：使用 DPG-MG 求解器对 GO_3D_OBS 模型进行一致 h 和 p 细化时的收敛情况与计时结果（28 672 个处理器核心）。与 hp 自适应情形相比，所需自由度几乎增加了三倍，最终 DPG 残差大了十倍（对比图 10b）；然而，单次迭代时间缩短了三倍（对比图 10d）。

我们从 t 开始 相同的 $8\times42\times10$ 初始网格，采用均匀阶数 $p=2$，并进行四次一致

h次细化（对应于水中每个波长约有两个单元），随后进行两次均匀 p次细化。最终网格包含 1600 万个单元和 56 亿个自由度。图 11 给出了收敛和计时信息。比较图 11b 和图 10b 可见，一致加密设置所需的自由度几乎是自适应细化的三倍，而其 DPG 残差仅比 hp自适应细化高十倍，这说明采用 DPG 误差指示器进行 hp自适应细化所生成网格的最优性。尽管如此，比较图 11d 和图 10d 也可见，一致加密网格的单次迭代时间比自适应网格少三倍；若按自由度数量归一化，则少九倍。因此，减少 hp自适应细化过程中使用的网格层级，可能带来显著收益。最后，我们注意到，一致细化的迭代次数（图 11a）高于自适应情形（图 11a）；这与第 4 节中的发现相反，但此处似乎是因为自适应细化能在较早的网格上解析点源，因此其迭代通常从远低于一致加密网格的残差开始。

6 结论

DPG-MG 求解器利用了 DPG 方法的独特性质，包括与网格无关的稳定性、内置误差指示子以及厄米正定离散系统，从而能够稳健、灵活且可扩展地求解高频波传播问题。当粗网格算子由细网格算子的限制算子构造时，DPG-MG 求解器展现出明显的 h 和 p 鲁棒收敛性，且迭代次数随波频率线性增长。对于 hp 自适应细化，也观察到了类似的迭代次数与频率之间的线性关系。尽管迭代次数随频率线性增加，但经验证，可扩展的 MPI/OpenMP DPG-MG 求解器实现在求解高频波传播问题时具有竞争力。在初步的中等规模测试中，DPG-MG 求解器能够在 hp 自适应网格上求解一个具有挑战性的高对比度地震建模基准（GO_3D_OBS），涉及 1.9 亿个自由度；在均匀细化网格上则涉及 5.6 亿个自由度。就异质介质中的高频波传播而言，这一规模超过了我们目前所知的任何相关研究。使用 hp 自适应网格时，所得 DPG 残差显著更小；不过，精度的定量比较将留待后续发表。

未来研究方向。 DPG-MG 求解器的可扩展实现催生了若干前景广阔的研究方向。首先，正如第 4 节所述，我们计划进一步研究在存储粗网格算子时，以及在 hp 自适应网格情况下，DPG-MG 求解器收敛率下降的问题。其次，我们正在着手将该求解器与自动、完全各向异性的 hp 自适应性相结合 [13, 20], ：首先使用 DPG 误差指示器标记各向同性 hp细化，然后从各向同性细化中提取一组最优的各向异性 h 和 p 细化，最后舍弃其余细化。我们预计，DPG-MG 求解器与自动 hp 自适应性的结合，将能胜任复杂

边界层问题以及其他具有强各向异性特征的问题。我们持续致力于提升 DPG-MG 求解器的可扩展性和性能；近期改进包括集成图形处理器以实现节省内存的实现、重构细化树以减少自适应细化过程中涉及的网格数量，以及在 $hp3$D 中实现完全分布式数据结构（目前使用的轻量级但需复制的数据结构限制了可扩展性）。

最后，我们正致力于将可扩展的 DPG-MG 求解器应用于科学与工程领域中的复杂问题。例如，我们已在包含众多凹角和复杂特征的非结构四面体网格上实现了托卡马克装置的超弱时谐麦克斯韦模型； hp-自适应性预计在这一应用中尤其有优势。其他值得关注的应用包括将光纤放大器模型 [40, 41]扩展到弯曲且横截面复杂的光纤，以及实现用于地震建模并最终用于地震反演的超弱弹性 Helmholtz。

参考文献

[1] P. Amestoy、I. Duff、J. L'Excellent 和 J. Koster。“使用分布式动态调度的完全异步多前沿求解器”。载于：*SIAM* 矩阵分析与应用杂志23.1（2001），第 15–41 页。[2] D. N. Arnold、R. S. Falk 和 R. Winther。“H(div) 和 H(curl) 中的多重网格”。载于：数值数学85.2（2000），第 197–217 页。[3] I. M. Babuška。“有限元方法的误差界”。载于：数值数学16.4（1971），第 322–333 页。[4] J. Badger、S. Henneking 和 L. Demkowicz。“棱柱单元上 DPG 矩阵快速积分的和因子分解”。载于：有限元分析与设计172（2020），第 103385 页。[5] S. Balay 等。*PETSc* 用户手册。技术报告 ANL-95/11——第 3.13 版。阿贡国家实验室，2020。[6] M. Bonazzoli 等。“带吸收项的高频时谐麦克斯韦方程的区域分解预处理”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:1711.03789*（2017）。[7] X.-C. Cai 和 O. B. Widlund。“不定椭圆问题的区域分解算法”。载于：*SIAM* 科学与统计计算杂志13.1（1992），第 243–258 页。[8] Z. Cai、T. A. Manteuffel 和 S. F. McCormick。“Stokes 方程的一阶系统最小二乘法及其在线性弹性中的应用”。载于：*SIAM* 数值分析杂志34.5（1997），第 1727–1741 页。[9] H. Calandra、S. Gratton、X. Pinel 和 X. Vasseur。“一种改进的双网格预处理器，用于求解非均匀介质中的三维亥姆霍兹问题”。载于：数值线性代数及其应用20.4（2013），第 663–688 页。[10] C. Carstensen、L. Demkowicz 和 J. Gopalakrishnan。“DPG 方法的断裂空间与形式及其包括麦克斯韦方程在内的应用”。载于：计算数学及其应用72.3（2016），第 494–522 页。[11] Z. Chen 和 X. Xiang。“无界区域中亥姆霍兹方程的源传递区域分解法”。载于：*SIAM* 数值分析杂志51.4（2013），第 2331–2356 页。

[12] H. De Sterck、T. A. Manteuffel、S. F. McCormick 和 L. Olson。“线性双曲型偏微分方程的最小二乘有限元方法与代数多重网格求解器”。载于：SIAM 科学计算杂志 26.1（2004），第 31–54 页。[13] L. Demkowicz。使用 hp 有限元进行计算。I. 一维和二维椭圆问题与麦克斯韦问题。Chapman & Hall/CRC出版社、Taylor and Francis，2006。[14] L. Demkowicz。能量空间。讲义；德克萨斯大学奥斯汀分校，2018。[15] L. Demkowicz。有限元数学理论。讲义；德克萨斯大学奥斯汀分校，2020。[16] L. Demkowicz 和 J. Gopalakrishnan。“一类不连续 Petrov–Galerkin 方法。II. 最优测试函数”。载于：数值方法：偏微分方程 27.1（2011），第 70–105 页。[17] L. Demkowicz 和 J. Gopalakrishnan。“一类不连续 Petrov–Galerkin 方法。第一部分：输运方程”。载于：计算方法：应用力学与工程 199.23-24（2010），第 1558–1572 页。[18] L. Demkowicz 和 J. Gopalakrishnan。“不连续 Petrov–Galerkin（DPG）方法”。载于：计算力学百科全书 第二版（2017），第 1–15 页。[19] L. Demkowicz、J. Gopalakrishnan 和 A. H. Niemi。“一类不连续 Petrov–Galerkin 方法。第三部分：自适应性”。载于：应用数值数学 62.4（2012），第 396–427 页。[20] L. Demkowicz 等。使用 hp 有限元进行计算。II. 前沿：三维椭圆问题与麦克斯韦问题及其应用。Chapman & Hall/CRC，2007。[21] K. Devine 等。“面向并行动态应用的 Zoltan数据管理服务”。载于：计算机科学与工程 4.2（2002），第 90–97 页。[22] W. Dörfler。“泊松方程的一个收敛自适应算法”。载于：SIAM 数值分析杂志 33.3（1996），第 1106–1124 页。[23] B. Engquist 和 L. Ying。“亥姆霍兹方程的扫描预条件子：层次矩阵表示”。载于：纯粹与应用数学通讯 64.5（2011），第 697–735 页。[24] B. Engquist 和 L. Ying。“亥姆霍兹方程的扫描预条件子：移动完全匹配层”。载于：多尺度建模与仿真 9.2（2011），第 686–710 页。[25] Y. A. Erlangga。“亥姆霍兹方程迭代方法与预条件子的进展”。载于：计算方法工程档案 15.1（2008），第 37–66 页。[26] O. Ernst 和 M. J. Gander。“为何使用经典迭代方法求解亥姆霍兹问题十分困难”。载于：多尺度问题的数值分析。计算机科学与工程讲义，第 83 卷。施普林格，2012，第 325–363 页。[27] I. G. Graham、E. A. Spence 和 E. Vainikko。“带吸收项的高频亥姆霍兹问题的区域分解预处理”。载于：数学与计算 86（2015）。[28] M. J. Gander、I. Graham 和 E. Spence。“将 GMRES 应用于带移位拉普拉斯预条件的亥姆霍兹方程：如何保证与波数无关的收敛性，其最大移位是多少？”载于：数值数学 131.3（2015），第 567–614 页。[29] M. J. Gander 和 H. Zhang。“一类亥姆霍兹方程迭代求解器：因子分解、扫描预条件子、源传递、单层势、极化迹与优化 Schwarz 方法”。载于：SIAM 综述 61.1（2019），第 3–76 页。[30] J. Gopalakrishnan、I. Muga 和 N. Olivares。“采用缩放范数的亥姆霍兹方程 DPG 方法中的色散误差与耗散误差”。载于：SIAM 科学计算杂志 36.1（2014），A20–A39。

[31] J. Gopalakrishnan 和 J. Pasciak。“不定时谐 Maxwell 方程的重叠 Schwarz 预条件子”。载于：《数学与计算》72.241（2003），第 1–15 页。[32] J. Gopalakrishnan 和 W. Qiu。“实用 DPG 方法的分析”。载于：《数学与计算》83.286（2014），第 537–552 页。[33] J. Gopalakrishnan 和 J. Schöberl。“DPG 方法中 Schwarz 预条件子的次数和波数 [相] 依赖性”。载于：《偏微分方程谱方法与高阶方法 ICOSAHOM 2014》。施普林格，2015 年，第 257–265 页。[34] J. Gopalakrishnan、J. E. Pasciak 和 L. F. Demkowicz。“时谐 Maxwell 方程多重网格算法的分析”。载于：《SIAM 数值分析杂志》42.1（2004），第 90–108 页。[35] A. Górszczyk 和 S. Operto。“GO_3D_OBS：用于地震成像方法评估和下一代三维勘测设计的多参数基准地质模型（1.0 版）”。载于：《地球科学模型开发》14.3（2021），第 1773–1799 页。[36] S. Henneking。“用于光纤领域应用的可扩展 hp-自适应有限元软件”。博士论文。德克萨斯大学奥斯汀分校，2021 年。[37] S. Henneking 和 L. Demkowicz。“长波导仿真中的污染误差和 DPG 自适应性的数值研究”。载于：《计算数学及其应用》95（2021），第 85–100 页。[38] S. Henneking 和 L. Demkowicz。《使用 hp 有限元进行计算》。III。并行 $hp3$D 代码。编写中，2023 年。[39] S. Henneking 和 L. Demkowicz。“$hp3$D 用户手册”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2207.12211（2022）。[40] S. Henneking、J. Grosek 和 L. Demkowicz。“用于研究光纤放大器的全矢量 Maxwell 模型的模型与计算方法进展”。载于：《计算数学及其应用》85（2021），第 30–41 页。[41] S. Henneking、J. Grosek 和 L. Demkowicz。《高功率光纤放大器的并行仿真》。载于：《计算机科学与工程讲义》（已接收）。2022 年。[42] R. Hiptmair。“三维 H(div) 的多重网格方法”。载于：《电子数值分析汇刊》6.1（1997），第 133–152 页。[43] R. Hiptmair。“Maxwell 方程的多重网格方法”。载于：《SIAM 数值分析杂志》36.1（1998），第 204–225 页。[44] S. Kim 和 H. Zhang。“波导中带完全辐射传输条件的 Helmholtz 方程优化 Schwarz 方法”。载于：《SIAM 数值分析杂志》53.3（2015），第 1537–1558 页。[45] B. Lee、T. A. Manteuffel、S. F. McCormick 和 J Ruge。“Helmholtz 方程的一阶系统最小二乘法”。载于：《SIAM 科学计算杂志》21.5（2000），第 1927–1949 页。[46] W. Leng 和 L. Ju。“带源传递的对角扫掠区域分解法，用于 Helmholtz 方程”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2002.05327（2020）。[47] J. D. Mora 和 L. Demkowicz。“基于和因子分解的 DPG 矩阵快速积分，适用于所有能量空间”。载于：《计算方法与应用数学》19.3（2019），第 523–555 页。[48] S. Petrides。“不连续 Petrov–Galerkin 方法的自适应多层求解器，重点关注高频波传播问题”。博士论文。德克萨斯大学奥斯汀分校，2019 年。

[49] S. Petrides 和 L. Demkowicz。“用于高频时谐波传播问题的自适应 DPG 方法”。载于：计算数学及其应用74.8（2017），第 1999–2017 页。[50] S. Petrides 和 L. Demkowicz。“用于 DPG 方法的自适应多重网格求解器及其在线性声学和电磁学中的应用”。载于：计算数学及其应用87（2021），第 12–26 页。[51] S. Rhebergen 和 G. N. Wells。“压力鲁棒 HDG 离散化 Stokes 方程的预条件”。载于：*SIAM* 科学计算杂志44.1（2022），A583–A604。[52] S. Rhebergen 和 G. N. Wells。“Stokes 方程混合化不连续 Galerkin 有限元方法的预条件”。载于：《科学计算杂志》77.3（2018），第 1936–1952 页。[53] A. H. Sheikh、D. Lahaye 和 C. Vuik。“移位 Laplace 预条件子与多层消去结合时的收敛性”。载于：《数值线性代数及其应用》20.4（2013），第 645–662 页。[54] D. Stanzione 等。“Frontera：国家科学基金会领导级计算的演进”。载于：先进研究计算的实践与经验。2020 年，第 106–111 页。[55] C. C. Stolk。“Helmholtz 方程的快速收敛区域分解方法”。载于：《计算物理学杂志》241（2013），第 240–252 页。[56] C. C. Stolk、M. Ahmed 和 S. K. Bhowmik。“带优化粗网格校正的 Helmholtz 方程多重网格方法”。载于：*SIAM* 科学计算杂志36.6（2014），A2819–A2841。[57] M. Taus、L. Zepeda-Núñez、R. J. Hewett 和 L. Demanet。“L-Sweeps：用于高频 Helmholtz 方程的可扩展并行预条件子”。载于：《计算物理学杂志》420（2020），第 109706 页。[58] P.-H. Tournier 等。“采用多层优化加性 Schwarz 区域分解预条件子的三维有限差分与有限元频域波仿真工具：用于稀疏节点数据集全波形反演”。载于：《地球物理学》87.5（2022），T381–T402。[59] A. Vion 和 C. Geuzaine。“应用于 Helmholtz 问题的优化 Schwarz 方法双扫描预条件子”。载于：《计算物理学杂志》266（2014），第 171–190 页。