arXiv:2304.01735v1 [math.DG] 4 Apr 2023

半空间中的奇异毛细常平均曲率超曲面的亚历山德罗夫型定理

Chao Xia 和 Xuwen Zhang

Abstract. 本文研究半空间中相对等周型问题的临界点分类问题。在一定的正则性假设下，我们证明了半空间中奇异毛细管常平均曲率超曲面的亚历山德罗夫型定理。其关键在于一种新的平移距离函数，该函数适用于研究半空间中的毛细问题。

MSC 2020年： 35J93, 49Q15, 49Q20,53C45。**关键词：** 常平均曲率超曲面、毛细超曲面、Alexandrov定理、有限周长集。

1. Introduction

著名的 Alexandrov定理 [Ale62] 指出，在欧几里得空间中，任何嵌入的闭常平均曲率（常平均曲率）超曲面都是一个标准球面。Alexandrov发展了移动平面法来证明他的定理。Ros [Ros87]和 Montiel- Ros [MR91] 通过 Heintze-Karcher不等式找到了实现 Alexandrov 定理的另一种方法。众所周知，在 C^2-超曲面中，常平均曲率超曲面充当欧几里得等周问题的临界点。从现代变分法的角度看，De Giorgi [De 58] 证明了，在有限周长集之中，标准球是唯一的等周集。刻画有限周长集中的欧几里得等周问题临界点是一个自然问题。最近，Delgadino- Maggi [DM19] 给出了完整的刻画。

定理 A ([DM19，定理 1])。 在有限周长且有限体积的集合中，有限个半径相等的球所构成的并集是欧氏等周问题唯一的临界点。

众所周知，若有限周长且有限体积的集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是欧氏等周问题的临界点，那么除去一个 $\mathcal{L}^{n+1}$-零测集后，其拓扑边界$\partial\Omega = \partial^*\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial^*\Omega)$，其中约化边界 $\partial^*\Omega$ 局部上是解析的常平均曲率超曲面，并且在 $\partial\Omega$ 中相对开，而 $\mathcal{H}^n(\partial\Omega \setminus \partial^*\Omega) = 0$，例如参见 [DM19，第 2.4] 节。事实上，Delgadino-Maggi [DM19] 证明，若有限周长且有限体积的集合 Ω 满足由 $\partial^*\Omega$ 诱导的变分流形具有常广义平均曲率，且 $\mathcal{H}^n(\partial\Omega \setminus \partial^*\Omega) = 0$，那么 Ω 必为有限个半径相等的球之并。Delgadino-Maggi 通过精妙的分析得出这一结果，将 Montiel-Ros 在 [MR91] 中的论证推广到了有限周长集。值得一提的是，De Rosa-Kolasinski-Santilli [DKS20] 也对各向异性情形进行了与 Delgadino-Maggi 类似的研究；Maggi-Santilli [MS23] 则研究了 Brendle 类扭曲积流形中的常平均曲率问题 [Bre13]。

本研究得到国家自然科学基金（项目编号：11871406、12271449）资助。

毛细现象自然出现在研究给定固体容器中悬滴和平衡形状的晶体时。Young、Laplace、Gauss 等人的工作建立了相应的数学模型：在体积约束下最小化自由能泛函的变分问题。我们关注一种简单但重要的模型，其中容器的内部和边界均为欧氏空间，即欧氏半空间中的毛细现象。令 $\mathbf{R}^{n+1}_+ = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \colon x \cdot E_{n+1} > 0\}$ 为开上半空间，其中 E_{n+1} 是（$n+1$）坐标方向的单位向量。Gonzalez [Gon76]已对 $\mathbf{R}^{n+1}_+$中相应相对等周型问题的全局体积约束极小化者进行了分类。具体而言，对于有限周长且有限体积的集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$以及 $\theta \in (0, \pi)$，考虑自由能泛函

$$\mathcal{E}(\Omega) = P(\Omega; \mathbf{R}^{n+1}_+) - \cos\theta P(\Omega; \partial\mathbf{R}^{n+1}_+).$$

Gonzalez [Gon76] 利用 Schwarz对称化证明了全局极小化者具有轴对称性。通过等周不等式进行标准的比较论证，可知唯一满足体积约束的全局极小化者是与 ∂R$^{n+1}_+$相交且接触角为 θ 的球冠（例如参见 [CM07b，第 2 节2] 和 [CM07a]）。另见[Mag12，第 19 节4]，其中概述了这一问题；关于引力能的引入，可参见 [MM16] 。最近，作者结合对 [SZ98] 所提方法所作的若干调整，以及 De Philippis-Maggi 在 [DM15; DM17], 中处理的正则性问题，在 [XZ21，定理 111]中刻画了半空间内自由能泛函的体积约束局部极小化者的唯一性。

在光滑情形下，毛细常平均曲率超曲面是相对等周问题在 C^2-超曲面类中的临界点。这里，容器中的毛细超曲面是指与容器边界以恒定接触角相交的超曲面。

Wente [Wen80]运用移动平面法证明了一个亚历山德罗夫型定理，该定理指出，在$\mathbf{R}^{n+1}_+$中，任何嵌入的毛细常平均曲率超曲面都必须是球冠。最近，我们与 Jia 和 Wang 合作Jia+22]，通过发展一种R$^{n+1}_+$中毛细超曲面的 Heintze-Karcher 型不等式，以MR91]的思路重新证明了 Wente 的结果。另见DW22]，其中讨论了半空间中的相关问题；以及Jia+23]，其中讨论了各向异性情形。

在非光滑情形中，CMC 超曲面的研究备受关注。利用极小极大理论，Zhou-ZhuZZ19] 证明了任意闭黎曼流形中存在非平凡、光滑、闭的几乎嵌入的常平均曲率超曲面($3 \le n+1 \le 7$) [；随后，同一作者在ZZ20]中将这一结果推广至预设平均曲率（PMC）情形。最近，De Masi-De PhilippisDD21]和 Li-Zhou-ZhuLZZ21] 分别独立运用极小极大方法，证明了带边界的紧致三维流形中毛细极小超曲面或常平均曲率超曲面的存在性。

沿着 [LZZ21], 在非光滑情形下研究毛细现象的思路，我们考虑定义在半空间中有限周长集上的以下泛函。

定义 1.1 ($\mathcal{A}$-泛函)。给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和常数 $c > 0$，对于有限周长且有限体积的集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$，$\Omega$ 关于 θ 和 c 的 $\mathcal{A}$-泛函定义为

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega) - c|\Omega|. \tag{1.1}$$

我们称 Ω 对 $\mathcal{A}$-泛函是驻定的，如果对于任意具有紧支集的 C^1-微分同胚 $f : \overline{\mathbf{R}^{n+1}_+} \to \overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}$，满足 $f : \partial\mathbf{R}^{n+1}_+ \to \partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 是 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 的一个微分同胚，

有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}\,\mathcal{A}(\psi_t(\Omega))=0,$$

其中，$\{\psi_t\}_{|t|<\epsilon}$ 是由 f诱导的一参数微分同胚族。

定义 1.2。对于任意有界的有限周长相对开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^{n+1}_+$，令 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega:=\partial\Omega\cap\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}$为 Ω 的相对边界，并令 $\Gamma:=\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\cap\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$。$\Omega$ 的正则部分 ∂_{rel}定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega=\{x\in\partial_{\mathrm{rel}}\Omega:\ &\text{there exists an } r_x>0 \text{ such that } \mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\cap B_{r_x}(x)\\ &\text{is a } C^2\text{-manifold possibly with boundary contained in } \partial\mathbf{R}^{n+1}_+\},\end{aligned}$$

而 $\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega=\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\setminus\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 称为 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的奇异集。由此，$\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 在 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 中是相对闭的。

我们还将 $\mathrm{reg}\Gamma:=\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\cap\Gamma$ 表示 M 在 Γ 中的正则部分，并将 $\mathrm{sing}\Gamma=\Gamma\setminus\mathrm{reg}\Gamma$ 表示 M 在 Γ中的奇异部分。此外，ν_Ω 表示 Ω 沿 $\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的外单位法向量，H表示 $\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 在 R^{n+1}中的平均曲率；μ、$\bar{\nu}$ 分别表示 $\mathrm{reg}\Gamma$在 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 中以及 $\mathrm{reg}\Gamma$ 在 T中的外单位余法向量。图 2 给出了示意图。

受 Delgadino-Maggi 的工作 [DM19], 启发，一个自然的问题是刻画 $\mathcal{A}$-泛函在有限周长集上的临界点。这是本文的主要目的。

定理 1.3。给定 $\theta\in(0,\pi)$ 以及 $c>0$。设 $\Omega\subset\mathbf{R}^{n+1}_+$是一个有界的相对开有限周长集，具有有限体积，且关于 $\mathcal{A}$-泛函驻定。假设$\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$，并且 Γ 是 $\partial(n-1)$-流形。则 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 必为有限个 θ-帽和半径相等的球面的并。

注 1.4。我们对主定理的假设作几点说明。

(1) 对于 $\theta=\pi/2$ 的情形，$\mathcal{A}$-驻定集确实是半空间中相对等周问题（面积泛函）的临界点，其刻画可由 Delgadino-Maggi 的结果推出。具体而言，若 $\mathcal{H}^n(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$,$\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\Gamma)=0$, 则自由边界可求整 varifold 的 Allard 正则性定理[GJ86，定理 4.13] 蕴含了 $\theta=\pi/2$ 的杨氏定律。因此，可以将 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$~关于超平面 $\{x_{n+1}=0\}$ 反射，从而得到一个闭超曲面 Σ，使得 ~$\mathrm{reg}\Sigma$ 的诱导变分流形具有常数广义平均曲率，且 $\mathcal{H}^n(\mathrm{sing}\Sigma)=0$；由此，结论可直接由 [DM19，定理 1]推出。

鉴于上述讨论，我们预计对于一般的 θ，条件 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$in定理 1.3 可以弱化为 $\mathcal{H}^n(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$，$\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\Gamma)=0$。我们的假设 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$对证明而言是技术性的，但至关重要；详细说明留待 备注 1.6。

(2) Haslhofer-Hershkovits-White 将经典的 Alexandrov 移动平面法推广到了积分变分数的背景下 [HHW20], , 并对积分变分数提出了所谓的温和性假设 [HHW20，定义 1。6]条件 Γ是一个光滑的（$n-1$）流形，实际上已包含在温和性条件中。另一方面，假设 Γ 是一个光滑的（$n-1$）流形，且 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 在 Γ 处具有足够的正则性，以确保 $\mathcal{H}^{n-1}$几乎处处满足杨氏定律（该定律给出了接触角条件）。这样的 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 将在定义为半空间中的奇异毛细管常平均曲率超曲面定义 2.10。

为阐释证明，我们先简要回顾 Jia-Wang-Xia-Zhang 的论证[Jia+22] 在光滑情形下的论证；该论证可视为将 Montiel-Ros 的论证[MR91] 推广到毛细情形。对于 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$，若 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 具有常平均曲率，且 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 与$\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$以角度 θ相交，我们定义集合

$$Z = \left\{ (x,t) \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega \times \mathbf{R} : 0 < t \leq \frac{1}{\max_i \kappa_i(x)} \right\},$$

以及一个表示一族平移后的平行超曲面的映射，

$$\zeta_\theta : Z \to \mathbf{R}^{n+1} : \quad \zeta_\theta(x,t) = x - t(\nu_\Omega - \cos\theta E_{n+1})$$

其中 κ_i，$i = 1\cdots$，n 是主曲率，且 $\max_i \kappa_i(x) \geq \frac{H_\Omega}{n} > 0$。利用毛细边界条件，我们发现 ζ_θ 映射到 Ω 上是满射，即 $\Omega \subset \zeta_\theta(Z)$。由面积公式可得

$$\begin{aligned} |\Omega| \leq |\zeta_\theta(Z)| &\leq \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \int_0^{\frac{1}{\max_i \kappa_i(x)}} (1 - \cos\theta\nu_\Omega \cdot E_{n+1}) \prod_{i=1}^{n} (1 - t\kappa_i(x)) \mathrm{d}t \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) \\ &\leq \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \frac{1 - \cos\theta\nu_\Omega \cdot E_{n+1}}{H_\Omega} \mathrm{d}\mathcal{H}^n, \end{aligned}$$

因此 Heintze-Karcher 不等式成立

$$|\Omega| \leq \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \frac{1 - \cos\theta\nu_\Omega \cdot E_{n+1}}{H_\Omega} \mathrm{d}\mathcal{H}^n$$

且等号成立当且仅当 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 是一个 θ-帽。结合 Minkowski 型公式

$$\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} x \cdot (H_\Omega \nu_\Omega) \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} n(1 - \cos\theta\nu_\Omega \cdot E_{n+1}) \mathrm{d}\mathcal{H}^n,$$

我们得出 Heintze-Karcher 不等式中的等号成立，进而 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 是一个 θ-帽。

我们的目标是按照 Delgadino-Maggi [DM19]的思路，将上述论证推广到有限周长集。Delgadino-Maggi 的证明 [DM19] 的关键在于，为有限周长集 $\Omega \subset \mathrm{R}^{n+1}$构造一个由大量良好点组成的子集 $\Omega^\star$，使其具有如下性质：对于经典的平行超曲面映射 ζ（见 [MR91]），将其限制在 Ω 的约化边界上时，可以证明 $|\Omega^\star \setminus \zeta(Z)| = 0$ 和 $|\Omega \setminus \Omega^\star| = 0$，因此，基于面积公式的论证仍然适用。我们指出，他们构造 $\Omega^\star$ 的方法，依赖于对边界距离函数的水平集进行精细分析。要将他们的论证调整到我们的情形，首先需要找到他们在 [DM19]中考虑的距离函数的一个合适的毛细对应物。以下观察给出了这一做法。

在 Jia-Wang-Xia-Zhang [Jia+22] 的证明中，为了证明 ζ_θ 的满射性，我们必须证明：对于任意 $y \in \Omega$，总存在某个 $x \in \Sigma$，使得 y 可以从 x 经由 ζ_θ 流动。为此，我们考虑如下叶状结构 $\{\partial B_r(y - r\cos\theta E_{n+1})\}_{r\geq 0}$，并关注其半径从 0 增大时，该叶状结构与 Σ 的首次接触点。在此情形下，首次接触点在某种程度上相当于从 y 到 Σ 的平移“唯一点投影”，这启发了以下平移距离函数的定义。给定一个有界的、相对开且具有有限周长的集合 $\Omega \subset \mathrm{R}^{n+1}_+$ 以及 $\theta \in (0,\pi)$，令 $\delta : \mathrm{R}^{n+1} \to \mathrm{R}$ 为关于 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的距离函数，定义为

$$\delta(y) = \sup_{r\geq 0}\{r : B_r(y) \cap \partial_{\mathrm{rel}}\Omega = \varnothing\}. \tag{1.2}$$

且 $\delta_\theta : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ 为关于 平移距离函数 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 以及 θ，定义为

$$\delta_\theta(y) = \sup_{r\geq 0}\{r : B_r(y - r\cos\theta E_{n+1}) \cap \partial_{\mathrm{rel}}\Omega = \varnothing\}. \tag{1.3}$$

由定义可知

$$\delta_\theta(y) = \delta(y - \delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1}) \tag{1.4}$$

且对于任意 $0 < r < \delta_\theta(y)$，有

$$\delta(y - r\cos\theta E_{n+1}) > r. \tag{1.5}$$

见图 1。

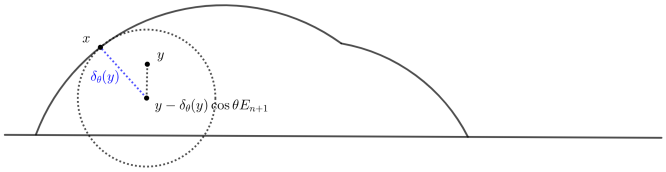


FIGURE 1. 平移距离函数

对于 $s > 0$，我们将 Ω 中 δ_θ 的超水平集和水平集定义为

$$\Omega_s := \{y \in \overline{\Omega} : \delta_\theta(y) > s\}, \quad \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s := \{y \in \overline{\Omega} : \delta_\theta(y) = s\}. \tag{1.6}$$

δ_θ 确实发挥了与 [DM19], 中所考虑的距离函数相同的作用，因此我们可以调整 Delgadino-Maggi 的方法，在我们的情形下如下定义良好点的大子集 $\Omega^\star_\theta$。

定义 1.5 ($\Gamma^t_{s;\theta}$ 和 $\Gamma^+_{s\,\theta;}$)。设 Ω 是 $\mathbf{R}$ 中有界的有限周长相对开集$\mathbf{R}^{n+1}_+$，且 $\theta \in (0, \pi)$。对于每个 $0 < s < t < \infty$，定义 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 为由满足以下条件的 $y \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s$组成的集合：存在一条测地线 $\gamma_y : [0,t] \to \mathbf{R}^{n+1}$，使得 $\gamma_y(s) = y$，并且对于每个 $r \in [0,t]$ 都有 $\delta_\theta(\gamma_y(r)) = r$。

此外，对于每个 $0 < s < \infty$，定义

$$\Gamma^+_{s;\theta} = \bigcup_{t>0}\Gamma^t_{s;\theta}, \quad \Omega^\star_\theta = \bigcup_{s>0}\Gamma^+_{s;\theta}.$$

首先，我们将证明 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 是 C^1,1-可求 rectifiable（定理 3.1）。我们证明关于平移距离函数的 C^1,1-可求 rectifiability 定理的策略，大体上沿用 [DM19，定理 1，步骤 1]。借助 C^1,1-可求 rectifiability 定理，我们能够证明 $|\Omega \setminus \Omega^\star_\theta| = 0$。接下来，我们证明 $|\Omega^\star_\theta \setminus \zeta_\theta(Z)| = 0$，遵循 [DM19，定理 1，步骤 4]。与 [DM19，定理 1，步骤 4], 中的闭超曲面情形不同，在这里我们必须谨慎地

处理奇异毛细管常平均曲率超曲面 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的边界（定义见定义 2.10）。事实上，一个亟待澄清的关键问题是 $g_{s\,\theta}^{-1}$ 的计数测度；对于$x \in \mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，（$x$）（定义见定理 1.3 的证明中关于 $g_{s\,\theta}^{-1}$； 的定义），当 x 位于 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的内部，即 $x \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega \setminus \Gamma$ 时，我们可以通过研究 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 在 x 处的放大特征，并运用驻定可求 rectifiable 锥的极大值原理，采用 [DM19]，中的相同论证，得出计数测度至多为 2。同样，我们还必须研究 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 和 T 沿 Γ 的边界行为，并考察每个 $x \in \Gamma$ 处的放大过程。为此，我们首先在定义 2.13 中引入 θ-驻定三元组的新定义（在定理 1.3 的正则性假设下，奇异毛细管常平均曲率超曲面的放大极限满足该定义），然后利用新的边界强最大值原理引理 2.16 和引理 2.17 来研究放大过程。

一旦这些性质 $|\Omega \setminus \Omega_\theta^\star| = 0$ 和 $|\Omega_\theta^\star \setminus \zeta_\theta(Z)| = 0$ 得到确立，我们便可以在有限周长集的框架下，沿用 Jia-Wang-Xia-Zhang 的论证 [Jia+22] 。

最后，我们进一步讨论技术性假设 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 0$ in 定理 1.3。

注 1.6. 正如我们已经讨论过的，在 定理 13 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 0$ 是一个技术性但至关重要的假设。这里我们给出一些说明。

(1) 为研究 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 和 T 沿 Γ的边界行为，我们需要考虑 θ-平稳三元组；由于引理 2.8，该三元组是良定义的。引理 2.8 的证明建立在 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 奇异点附近的光滑截断函数之上，而这些函数的存在很大程度上依赖于假设 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 0$。(2) 正如我们在注 1.4(1) 中提到的，借助自由边界可求整变分流形的 Allard 正则性定理 [GJ86, Theorem 4.13]，可以由 $\mathcal{H}^n(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\Gamma) = 0$ 以及 Ω 的 $\mathcal{A}$-平稳性推出杨氏定律。然而，对于具有一般接触角的毛细子流形，Allard 型正则性定理是否成立仍是一个开放问题。尽管缺少 Allard 型正则性结果，只要满足$\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 0$，我们仍可在命题 2.9 中为 $\mathcal{A}$-平稳集得到杨氏定律。

论文结构。 在第 2 节中，我们整理了几何测度论的一些背景知识，并证明了在 Alexandrov 型定理的证明中对放大分析有用的边界最大值原理。在 第 3 节 中，我们研究了 $\Gamma_{s;\theta}^t$ 的精细性质，随后证明了可求 rectifiability 结果定理 3.1。在 第 4 节中，我们证明主要结果定理 1.3。

致谢。 我们感谢 Guofang Wang 教授就这一主题进行了富有启发性的讨论，并给予我们一贯的支持。

2. Preliminaries

2.1. 记号。 考虑$\mathbf{R}^{n+1}$的拓扑时，我们用 Ω 表示集合 Ω 的拓扑闭包，用 $\mathrm{int}(\Omega)$ 表示 Ω 的拓扑内部，用 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的拓扑边界。对于子空间拓扑（相对拓扑），采用以下记号：设 X为一个拓扑空间， S为 X的一个子空间，我们用 $\mathrm{cl}_X S$， $\mathrm{int}_X S$， $\partial_X S$分别表示 S 在拓扑空间 X 中的闭包、内部和边界。特别地，对于有界的相对开有限周长集 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$。我们记为

$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega := \partial_{\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}}\Omega = \overline{\partial\Omega \cap \mathbf{R}^{n+1}_+}\Omega$ 在上半空间 $\mathbf{R}^{n+1}_+$中相对边界，记$T := \mathrm{cl}^{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}(\partial\Omega \setminus \overline{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega})$，并记为 $\Gamma := \partial_{\mathrm{rel}}\Omega \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}_+$，示意见 图 2 。

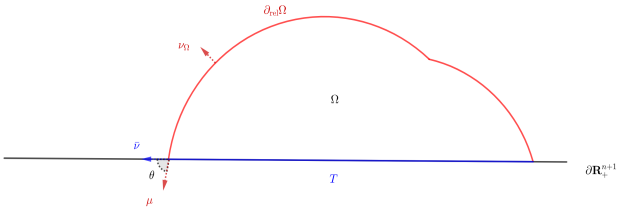


FIGURE 2. 记号

- $\boldsymbol{\mu}_r$ 是位似映射 $y \mapsto ry$;
- $\boldsymbol{\tau}_x$ 是平移映射 $y \mapsto y - x$;
- $\boldsymbol{\eta}_{x,\ r}$ 是复合映射 $\boldsymbol{\mu}_{r^{-1}} \circ \boldsymbol{\tau}_x$，即 $y \mapsto \frac{y-x}{r}$; ——
- $\mathcal{H}^k$ 是$\mathbf{R}^{n+1}$上的 k维豪斯多夫测度;
- $\mathcal{L}^{n+1}$ 是$\mathbf{R}^{n+1}$上的勒贝格外测度;
- $B_r(x)$ 是$\mathbf{R}^{n+1}$中的开球，以 x 为球心，半径为 r;
- ω_n 是$\mathbf{R}^{n+1}$中 n维单位球的体积;
- spt 表示测度的支集，参见 [Mag12，第 2 节。4]。
- 本文使用以下向量场空间:

$\mathfrak{X}_c(\mathbf{R}^{n+1}) := \{\mathbf{R}^{n+1}$ 上所有具有紧支集的 C^1-向量场空间$\}$,

$\mathfrak{X}(\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}) := \left\{X \in \mathfrak{X}_c(\mathbf{R}^{n+1}) : X(p) \in T_p\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+} \text{ for all } p \in \overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}\right\}$,

$\mathfrak{X}_c(\underline{\mathbf{R}^{n+1}_+}) := \left\{X \in \mathfrak{X}(\underline{\mathbf{R}^{n+1}_+}) :\ X \text{ 在开半空间 } \mathbf{R}^{n+1}_+\right\}$,$\mathfrak{X}_t(\mathbf{R}^{n+1}_+) := \left\{X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^{n+1}_+) :\ X(p) \in T_p(\partial \mathbf{R}^{n+1}_+) \text{ 对所有 } p \in \partial\underline{\mathbf{R}^{n+1}_+}\right\}$.都具有相对紧支集

> 注意，对于任意 $x \in \partial\mathbf{R}^{n+1}_+$, $T_x\mathbf{R}^{n+1}_+$恰好是$\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 $(n+1)$ 维半空间，其边界为 $T_x\partial \mathbf{R}^{n+1}_+$。

2.2. **可求长集**。 博雷尔集 $M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个局部 $\mathcal{H}^n$可求长集，如果 M 除去一个 $\mathcal{H}^n$-零测集后，可由从$\mathbf{R}^n$ 到$\mathbf{R}^{n+1}$的可数个利普希茨像覆盖，并且 $\mathcal{H}^n \llcorner M$在$\mathbf{R}^{n+1}$上局部有限。 M 称为 $\mathcal{H}^n$可求长，如果此外 $\mathcal{H}^n(M) < \infty$; 若 $M = \mathrm{spt}(\mathcal{H}^n \llcorner M)$，即， M 称为归一化，

$$x \in M \quad \text{if and only if } \mathcal{H}^n(B_\rho(x) \cap M) > 0 \quad \text{for all } \rho > 0.$$

命题 2.1 (面积公式，适用于 k可求长集， [Mag12，定理 11。6])。对于 $1 \leq k \leq m$，若 $A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个局部 $\mathcal{H}^k$可求长集，并且 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 是一个利普希茨映射，那么

$$\int_{\mathbf{R}^m} \mathcal{H}^0\left(A \cap \{f=y\}\right) \mathrm{d}\mathcal{H}^k(y) = \int_A \mathrm{J}^A f(x) \mathrm{d}\mathcal{H}^k(x), \tag{2.1}$$

其中 $\{f\colon =y\} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon \ f(x)=y\}$，$\mathrm{J}^A f(x)$是 f关于 A在 x(例如参见 *[Mag12, (11.1)]*) 的雅可比行列式，其对 $\mathcal{H}^k$-几乎处处 $x \in A$存在。

引理 2.2 (沿可求 *rectifiable* 集的 *Lipschitz* 函数的切向性质， [DM19，第 2.1 节(iv)])。设 $M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个局部 $\mathcal{H}^n$-可求 *rectifiable* 集，且 $f\colon \ M \to \mathbf{R}^{n+1}$ 是定义在 M上的 *Lipschitz* 映射，则对于任意 *Lipschitz* 函数 F，$G\colon \ \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ 满足 $F=G=f$在M上，我们有

$$\nabla^M F = \nabla^M G \quad \mathcal{H}^n\text{-}a.e.\ on\ M. \tag{2.2}$$

特别地，如果 $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个 *Lipschitz* 映射，且 $E \subset \mathbf{R}^n$ 是一个博雷尔集，那么 $T_x M = (\nabla g)_{g^{-1}(x)}[\mathbf{R}^n]$ 对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in M \cap g(E)$，有

$$(\nabla^M F)_x[\tau] = \nabla(F \circ g)_{g^{-1}(x)}[(\nabla g)_x^{-1}[\tau]] \quad \forall \tau \in T_x M. \tag{2.3}$$

此处 $\nabla^M F$（x）表示 F相对于 M在 x处的切向微分，该微分根据 $\mathcal{H}^n$-几乎处处 $x \in M$ 由 *Rademacher* 型定理 *[Mag12，定理 11 得出。4]*。

2.3. **可求 rectifiable 变分流形**。现在我们简要回顾$\mathbf{R}^{n+1}$中的可求 rectifiable 变分流形的一些基本概念，详情请参阅标准参考文献 [All72;Sim83]。

设 M 为一个局部 $\mathcal{H}^k$-可求 rectifiable 集，并考虑一个 Borel 可测函数 $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{H}^k \llcorner M; \mathbf{R}^+)$。由 M 和 ψ 定义的可求 rectifiable 变分流形 $V = \mathbf{var}(M, \psi)$ 是定义在 $\mathbf{R}^{n+1} \times G(n+1, k)$ 上的 Radon 测度，其定义为

$$\int_{\mathbf{R}^{n+1} \times G(n+1,k)} \Phi \mathrm{d}\mathbf{var}(M,\psi) = \int_M \Phi(x, T_x M)\psi(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^k(x),$$

对每个有界、紧支集的博雷尔函数 Φ，定义于 $\mathbf{R}^{n+1} \times G(n+1,k)$ 上。特别地，对于任意 $X \in \mathfrak{X}_c(\mathbf{R}^{n+1})$，众所周知的一阶变分公式为

$$\delta\mathbf{var}(M,\psi)[X] = \int_M \mathrm{div}_M X(x)\psi(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^k(x).$$

$||V|| = \psi\mathcal{H}^k \llcorner M$的权测度记为 $V = \mathbf{var}(M, \psi)$。如同 [Sim83, Definition 42.3]，，我们将 VarTan(V, x) 记为 V在某个 $x \in \mathrm{spt}||V||$. 处的 varifold 切锥集合。根据 Radon 测度的紧致性 [Sim83, Theorem 4.4]，，当上密度 $\Theta^{*k}(||V||, x)$ 有限时，VarTan(V, x) 是紧致且非空的。

定义 2.3 （平稳变分流形）。若可求 rectifiable 变分流形 $\mathbf{var}(M, \psi)$满足：对于任意 $X \in \mathfrak{X}_c(\mathbf{R}^{n+1})$，均有 $\delta\mathbf{var}(M, \psi)[X] = 0$，则称其在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中是驻定的；若对于任意 $X \in \mathfrak{X}_t(\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+})$，均有 $\delta\mathbf{var}(M, \psi)[X] = 0$，则称其在 $\mathbf{R}^{n+1}_+$中具有自由边界。

在我们的证明中需要用到以下有用的反射技巧，参见 [All75, (3.2)], [GJ86, 注 4.11(iii)] 以及 [LZ21, 引理 2。2]。

引理 2.4 (反射原理)。设 $E_{n+1}\colon = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}_+$。令 $\theta_{n+1}\colon \overline{\mathbf{R}^{n+1}} \to \mathbf{R}^{n+1}$表示关于单位向量 E_{n+1} 的反射映射，即 $\theta_{n+1}(u) = u - 2(u \cdot E_{n+1})E_{n+1}$。对于任意可求 *rectifiable* 变分流形 $V\colon = \mathrm{var}(M, \psi)$，定义加倍变分流形

$$\bar{V} := V + (\theta_{n+1})_{\#} V. \tag{2.4}$$

如果 V 在具有自由边界的 $\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中是驻定的，那么 $\bar{V}$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中也是驻定的。

2.4. **有限周长集**。关于有限周长集的基础知识，请参阅专著 [Mag12]（特别是第15章），其中有详细介绍。

给定一个勒贝格可测集 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$，若 Ω 是R^{n+1} 中的有限周长集，则

$$\sup\left\{\int_{\mathbf{R}^{n+1}} \operatorname{div} X \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} : X \in C^1_c(\mathbf{R}^{n+1};\mathbf{R}^{n+1}), |X| \le 1\right\} < \infty.$$

有限周长集的一个等价刻画（见 [Mag12，命题12。1]）是：存在一个取值于 $\mathbf{R}^{n+1}$的 Radon 测度 μ_Ω，定义在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上，使得对任意 $X \in C^1_c(\mathbf{R}^{n+1};\ \mathbf{R}^{n+1})$,

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} X \cdot \mathrm{d}\mu_\Omega. \tag{2.5}$$

μ_Ω 称为 Ω 的高斯-格林测度。Ω 在 $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$中的相对周长，以及 Ω 的周长，定义如下：

$$P(\Omega; E) = |\mu_\Omega|(E), \quad P(\Omega) = |\mu_\Omega|(\mathbf{R}^{n+1}).$$

关于有限周长集的拓扑边界 E，有（见 [Mag12，命题12。19]）

$$\operatorname{spt}\mu_\Omega = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : 0 < |\Omega \cap B_r(x)| < \omega_{n+1} r^{n+1}, \quad \forall r > 0\} \subset \partial\Omega.$$

约化边界 $\partial^*\Omega$ 是满足以下极限的那些 $x \in \operatorname{spt}\mu_\Omega$ 的集合

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_\Omega(B_r(x))}{|\mu_\Omega|(B_r(x))} \text{ exists and belongs to } \mathbf{S}^n.$$

博雷尔向量场 $\nu_\Omega : \partial^*\Omega \to \mathbf{S}^n$ 称为 Ω 的测度论外单位法向量，并且有

$$\overline{\partial^*\Omega} = \operatorname{spt}\mu_\Omega.$$

此外，当 Ω 是 $\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中有界的有限周长相对开集时，约化边界是局部 $\mathcal{H}^n$-可求 rectifiable 的，且集合 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\ T$ 是归一化的。根据 [DM15，(2.1)]，

$$\mu_\Omega = \nu_\Omega \mathcal{H}^n \llcorner (\partial^*\Omega \cap \mathbf{R}^{n+1}_+) - E_{n+1}\mathcal{H}^n \llcorner (\partial^*\Omega \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}_+),$$

因此 (2.5) 可写为

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} = \int_{\partial^*\Omega\cap\mathbf{R}^{n+1}_+} X \cdot \nu_\Omega \mathrm{d}\mathcal{H}^n - \int_{\partial^*\Omega\cap\partial\mathbf{R}^{n+1}_+} X \cdot E_{n+1}\mathrm{d}\mathcal{H}^n.$$

在正则　　性假设 $\mathcal{H}^n(\operatorname{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 0$ 下，上述等式可写成

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} = \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} X \cdot \nu_\Omega \mathrm{d}\mathcal{H}^n - \int_T X \cdot E_{n+1}\mathrm{d}\mathcal{H}^n. \tag{2.6}$$

对于$\mathbf{R}^{n+1}_+$中的每个有限周长集，我们总能以自然的方式关联整数可求 rectifiable 变分流形 $\operatorname{var}(\partial^*\Omega \cap \mathbf{R}^{n+1}_+, 1)$ 和 $\operatorname{var}(\partial^*\Omega \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}_+, 1)$。为简便起见，我们分别将它们记为 $\operatorname{var}(\partial^*\Omega \cap \mathbf{R}^{n+1}_+)$ 和 $\operatorname{var}(\partial^*\Omega \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}_+)$。

2.5. **的临界点 $\mathcal{A}$泛函**。回顾一下， $\mathcal{A}$泛函定义于定义 1.1中，该定义源自 [LZZ21，定义 1。1]。事实上，给定 $\theta \in (0,\pi)$、一个常数 $c>0$以及定义 1.1 中的有限周长集 Ω，对于 $\mathcal{A}$ 沿着 $X \in \mathfrak{X}$ ($\mathbf{R}^{n+1}_+$的一阶变分为（见 [LZZ21， （1.7）]）

$$\delta\mathcal{A}\,|_{\Omega}\,(X)=\int_{\partial^*\Omega\llcorner\mathbf{R}^{n+1}_+}\operatorname{div}_{\partial\Omega}X\mathrm{d}\mathcal{H}^n+\cos(\pi-\theta)\int_{\partial^*\Omega\llcorner\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}\operatorname{div}_{\partial\Omega}X\mathrm{d}\mathcal{H}^n-c\int_{\partial^*\Omega}X\cdot\nu_{\Omega}\mathrm{d}\mathcal{H}^n, \tag{2.7}$$

wh这意味着以下事实：如果 Ω 对 $\mathcal{A}$ 如 定义 1.1中所述的，则 Ω 是驻定的， n

(1) 当 $\theta \in (0,\ \pi)$ 时，Ω 对自由能泛函是驻定的

$$\mathcal{E}(\Omega)=P(\Omega;\mathbf{R}^{n+1}_+)-\cos\theta P(\Omega;\partial\mathbf{R}^{n+1}_+).$$

在体积约束下，参见例如 [XZ21，定义 4。2], 其原因在于， $|\Omega|$ 沿着 X 的一阶变分确实由 $\int_{\partial^*\Omega}X\cdot\nu_{\Omega}\mathrm{d}\mathcal{H}^n$给出，参见 [Mag12， （17.31）]。

(2) 当 $\theta \in [\pi/2,\pi)$ 时，自然诱导的变分流形 $\mathrm{var}(\partial^*\Omega\cap\mathbf{R}^{n+1}_+)$ 具有固定接触角 θ，并且 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$在 $\partial^*\Omega\cap\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$的意义下满足 [KT17，定义 3，1] 其广义平均曲率为 $H=c$，因为对于任意 $X\in\mathfrak{X}_t(\mathbf{R}^{n+1}_+)$， （2.7）可写为

$$\int_{\partial^*\Omega\llcorner\mathbf{R}^{n+1}_+}\operatorname{div}_{\partial\Omega}X\mathrm{d}\mathcal{H}^n+\cos(\pi-\theta)\int_{\partial^*\Omega\llcorner\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}\operatorname{div}_{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}X\mathrm{d}\mathcal{H}^n=\int_{\partial^*\Omega\llcorner\mathbf{R}^{n+1}_+}X\cdot(c\nu_{\Omega})\mathrm{d}\mathcal{H}^n. \tag{2.8}$$

此外，自然导出的变分流形对 $(\mathrm{var}(\partial^*\Omega\cap\mathbf{R}^{n+1}_+),\ \mathrm{var}(\partial^*\Omega\cap\partial\mathbf{R}^{n+1}_+))$满足接触角条件 θ，其意义见 [DD21，定义 3。1]

对于 $\theta \in (0,\ \pi/2)$ 的情形，我们有如下观察。

注 2.5. 当毛细角为 $\theta \in (0,\ \pi/2)$ 时，由于我们只考虑有界的有限周长集，因此可以假设存在一个足够大的光滑开集 $\mathbf{B}_+$ ，使得 $\Omega\subset\mathbf{B}_+\subset\mathbf{R}^{n+1}_+$。一旦集合 $\mathbf{B}_+$ 固定下来，我们便知道$P(\mathbf{B}_+;\partial\mathbf{R}^{n+1}_+)$ 是一个固定值，并且显然

$$P(\Omega;\partial\mathbf{R}^{n+1}_+)=P(\mathbf{B}_+;\partial\mathbf{R}^{n+1}_+)-P(\mathbf{B}_+\setminus\Omega;\partial\mathbf{R}^{n+1}_+),$$

这意味着以下事实：若 Ω 是 $\mathcal{A}$-驻定的（如 定义 1.1中所述），那么它对于修正泛函也是驻定的

$$\tilde{\mathcal{A}}(\Omega):=P(\Omega;\mathbf{R}^{n+1}_+)+\cos\theta P(\mathbf{B}_+\setminus\Omega;\partial\mathbf{R}^{n+1}_+)-c|\Omega|, \tag{2.9}$$

其含义是，对于任意 C^1-微分同胚 $f:\mathbf{R}^{n+1}_+\to\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}$，若 $\overline{\mathrm{spt}f}\subset\subset\mathbf{B}_+$，且 $f:\overline{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}\to\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 是 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 的微分同胚，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}\,\tilde{\mathcal{A}}(\psi_t(\Omega))=0,$$

其中 $\{\psi_t\}_{|t|<T}$ 是由 f 诱导的单参数微分同胚族。

我们将用于 $\mathcal{A}$-驻定集的一个重要性质是，它们满足以下欧几里得体积增长条件：

命题 2.6. 给定 $\theta\in(0,\pi)$ 以及 $c>0$。设 $\Omega\subset\mathbf{R}^{n+1}_+$是 $\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}$中的一个非空有界相对开集，具有有限周长，且关于 $\mathcal{A}$-泛函是驻定的，则

$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 具有欧几里得体积增长，也就是说，存在一些仅依赖于 Ω 和 n 的通用常数 $R_1>0$ 和 $C_1>0$，使得对任意 $x\in\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 以及任意 $0<r<R_1$，均有

$$\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\cap B_r(x))\le C_1 r^n. \tag{2.10}$$

证明。**情形 1**。 $\theta\in[\pi/2,\pi)$。

我们的出发点是，如下方 (2.7) 所示，$\mathrm{var}(\partial^*\Omega\llcorner\mathbf{R}^{n+1}_+)$ 与 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 在 $\partial^*\Omega\llcorner\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 处具有固定接触角θ，其含义见 [KT17，定义 3.1]，且广义平均曲率有界，因此单调性公式 [KT17，定理 3.2] 在此适用。此外，由于 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$是平面的，我们知道，在 [KT17] 中用于定义管状邻域 (N_{s_0}) 的最大距离 (s_0) 在本例中可以取尽可能大的值。取$s_0=6\cdot\mathrm{diam}(\Omega):=6\cdot\max_{y\in\Omega}|x-y|$，并在 [KT17 中固定 $p=n+1$，(3.9)], 我们得到：对于任意$x\in\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 以及任意 $0<r<\mathrm{diam}(\Omega)$,

$$\frac{\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\cap B_r(x))}{r^n}\le\omega_n\left\{\left(\frac{2\mathcal{H}^n(\partial^*\Omega)}{\omega_n(\mathrm{diam}(\Omega))^n}\right)^{\frac{1}{n+1}}+\gamma\cdot(\mathrm{diam}(\Omega))^{\frac{1}{n+1}}\right\}^{n+1}:=C,$$

其中 $\gamma:=\left(\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial^*\Omega\cap\mathbf{R}^{n+1}_+}2|H(x)|^{n+1}\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x)\right)^{\frac{1}{n+1}}$有界，因为 Ω 的周长有限且$|H|=c$ （这由 Ω 的 $\mathcal{A}$-平稳性推出），因此

$$\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\cap B_r(x))\le Cr^n$$

对每个 $x\in\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$, $r<\mathrm{diam}(\Omega)$。这表明 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 具有欧几里得体积增长。

情形 2. $\theta\in(0,\pi/2)$.

回顾注 2.5，$\mathrm{var}(\partial^*\Omega\cap\mathbf{R}^{n+1}_+)$ 具有固定接触角 $\tilde{\theta}:=\pi-\theta\in(\pi/2,\pi)$，且$\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$在 $\partial^*(\mathbf{B}_+\setminus\Omega)\cap\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$处，依照 KT17 的定义 3.1]，其广义平均曲率为 $H=c$。对情形 1 稍作修改即可证明：当 $\theta\in(0,\pi/2)$ 时， $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 同样满足欧几里得体积增长条件。证明完毕。□

注 2.7。 我们的主定理是在正则性假设 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$ 下表述的。鉴于奇异集的豪斯多夫维数，在下文中，我们不区分积分 $\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}\cdot\mathrm{d}\mathcal{H}^n$、 $\int_{\partial^*\Omega\cap\mathbf{R}^{n+1}_+}\cdot\mathrm{d}\mathcal{H}^n$ 和 $\int_{\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}\cdot\mathrm{d}\mathcal{H}^n$； $\int_\Gamma\cdot\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$ 和 $\int_{\mathrm{reg}\Gamma}\cdot\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$。

在正则性假设下，对于 $\mathcal{A}$-驻定集，我们有以下有用的切向散度定理，其证明推迟至 附录 A。

引理 2.8。 给定 $\theta\in(0,\ \pi)$ 和 $c>0$，设 Ω 是 $\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中一个非空、有界的相对开集，且具有有限周长，并满足 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$。若 Ω 关于 $\mathcal{A}$-泛函是驻定的，则对任意 $X\in\mathfrak{X}(\mathbf{R}^{n+1}_+)$，有

$$\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}\mathrm{div}_{\partial\Omega}X\mathrm{d}\mathcal{H}^n=\int_\Gamma X\cdot\mu\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}+\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}X\cdot(c\nu_\Omega)\mathrm{d}\mathcal{H}^n, \tag{2.11}$$

并且对于任意 $X\in\overline{\mathfrak{X}_t(\mathbf{R}^{n+1}_+)}$，有

$$\int_T\mathrm{div}_{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}X\mathrm{d}\mathcal{H}^n=\int_\Gamma X\cdot\bar{\nu}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}. \tag{2.12}$$

2.6. **半空间中的奇异毛细常平均曲率超曲面。** 我们先汇总关于 $\mathcal{A}$-驻定集的基本事实，然后给出半空间中奇异毛细常平均曲率超曲面的正式定义。给定一个固定的毛细接触角 $\theta \in (0,\pi)$ 和一个正常数 c。设 Ω 是$\mathbf{R}^{n+1}_+$中的非空、有界、有限周长相对开集，且关于 $\mathcal{A}$-泛函驻定。由命题 2.6 可知 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 满足欧几里得体积增长条件（2.10）。另一方面，若 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$，则可在 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 和 T 上使用切向散度定理，如引理 2.8所示。

牢记这些事实，并回想 $\mathcal{A}$-驻定集 Ω 对自由能泛函 $\mathcal{E}(\Omega)$ 在体积约束下确实是驻定的（见下文（2.7）），由此我们得到

命题 *2.9*（[*XZ21*，命题 *4.3*]）。给定 $\theta \in (0,\pi)$ 和 $c>0$，设 Ω 是 R^{n+1}_+ 中具有有限周长的非空、有界、相对开集，使得 $\mathcal{H}^{n-1}(sing\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$。如果 Ω 关于 $\mathcal{A}$-泛函是驻定的，则杨氏定律成立。确切地，在 $reg\Gamma = reg\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \cap \partial R^{n+1}_+$ 上，测度论超曲面 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 与 ∂R^{n+1}_+ 以恒定接触角 θ 相交，即，

$$\nu_\Omega \cdot (-E_{n+1}) = -\cos\theta = -\mu\cdot\bar{\nu} \quad on\ \mathrm{reg}\Gamma. \tag{2.13}$$

这表明，用于定义 θ 的固定接触角 $\mathcal{A}$-泛函定义 1.1确实是 $\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 与 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$之间的接触角，因此下面的定义是合理的。

定义 2.10。 给定 $\theta\in(0,\pi)$ 和 $c>0$，设 Ω 是 $\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中一个非空、有界、具有有限周长的相对开集，满足 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$。若 Ω 是 $\mathcal{A}$-驻定的，则称 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 为位于 $\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中的奇异毛细管常平均曲率超曲面。

显然，定义 2.10 对我们在 定理 1.3 中考虑的 Ω 成立；关于奇异毛细管常平均曲率超曲面，我们将用到的一个重要事实是以下 Minkowski 型公式，参见 [AS16]在光滑情形下。

命题 2.11 (半空间中的 Minkowski 型公式)。给定 $\theta\in(0,\ \pi)$ 和 $c>0$，设$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 是$\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中的奇异毛细管常平均曲率超曲面。则有

$$\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} n(1-\cos\theta\nu_\Omega\cdot E_{n+1}) - x\cdot(c\nu_\Omega)\mathrm{d}\mathcal{H}^n = 0. \tag{2.14}$$

证明. 对 E_{n+1} 在 Ω 上积分，广义高斯–格林公式（2.6）以及 注 2.7给出

$$0=\int_\Omega \mathrm{div}(E_{n+1})\mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} = \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}\nu\cdot E_{n+1}\mathrm{d}\mathcal{H}^n - |T|.$$

另一方面，由于 Ω 是 $\mathcal{A}$-驻定的，用向量场 $X\in\mathfrak{X}_t(\mathbf{R}^{n+1}_+)$（即位置向量场 $X(x)=x$ 在 $\overline{\Omega}$ 的某个邻域内）检验 (2.7)，可得

$$\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} n\mathrm{d}\mathcal{H}^n - n\cos\theta|T| - \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} x\cdot(c\nu_\Omega)\mathrm{d}\mathcal{H}^n = 0.$$

（2.14）由结合这些等式即可得出。 □

Minkowski 型公式给出了如下对所给常数$c>0$的刻画。

推论 2.12。 给定 $\theta \in (0,\pi)$ 和 $c>0$，设 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 是$\mathbf{R}^{n+1}_+$中的奇异毛细管常平均曲率超曲面。常平均曲率 c 满足

$$c = H^0_{\Omega;\theta} := \frac{n\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}(1-\cos\theta\nu_\Omega\cdot E_{n+1})\,d\mathcal{H}^n}{(n+1)|\Omega|} > 0. \tag{2.15}$$

证明。考虑位置向量场 $X(x)=x$，在有限周长集 Ω 上对 $\mathrm{div}X$ 积分，并使用广义 Gauss-Green 公式（2.6）和备注 2.7，得到

$$(n+1)|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{div}X(x)\mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1}(x) = \int_{\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} x\cdot\nu_\Omega(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x).$$

由于 c 是常数，我们可以利用 Minkowski 型公式（2.14）得到

$$(n+1)c|\Omega| = n\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}(1-\cos\theta\nu_\Omega\cdot E_{n+1})\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n.$$

整理等式，得到（2.15）。 □

2.7. 半空间中接触角为 θ 的变分流形三元组。如引言中所述，为研究沿边界的放大过程，我们引入以下变分流形三元组的接触角条件。

给定 $\theta\in(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)$ 和 $c>0$。设 $\Omega\subset\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}$是一个有界相对开集，具有有限周长和有限体积，并且对于 $\mathcal{A}$-泛函是驻定的，其中 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)=0$。根据杨氏定律和引理 2.8，我们进行如下经典计算：对任意 $X\in\mathfrak{X}(\mathbf{R}^{n+1}_+)$,

$$\begin{aligned}&\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}\mathrm{div}_{\partial\Omega}X(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) = \int_\Gamma X\cdot\mu\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}X\cdot(c\nu_\Omega)\mathrm{d}\mathcal{H}^n\\ &=\cos\theta\int_\Gamma X\cdot\bar\nu\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} - \sin\theta\int_\Gamma X\cdot E_{n+1}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}X\cdot(c\nu_\Omega)\mathrm{d}\mathcal{H}^n,\end{aligned} \tag{2.16}$$

这里我们用到了以下事实： $\mu=$余弦 $\theta\bar\nu-$正弦 θE_{n+1} 沿 $\mathrm{reg}\Gamma$。利用（2.12）并注意到T 是平面的，我们得到

$$\int_T \mathrm{div}_{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}X\mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_T \mathrm{div}_{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}(X^T+X^\perp)\mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_\Gamma X\cdot\bar\nu\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}, \tag{2.17}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}\mathrm{div}_{\partial\Omega}X\mathrm{d}\mathcal{H}^n + \cos(\pi-\theta)\int_T\mathrm{div}_{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}X\mathrm{d}\mathcal{H}^n\\ &=\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}X\cdot(c\nu_\Omega)\mathrm{d}\mathcal{H}^n - \sin\theta\int_\Gamma X\cdot(E_{n+1})\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

受 [DD21定义 3.1、命题 3.1] 以及上述经典计算的启发，我们为三重可求 rectifiable 变分流形引入以下接触角条件；该条件比 [DD21定义 3.1] 更强，因为它不仅包含切向信息，也包含法向信息。

定义 2.13. 给定 $\theta\in(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)$。设 $M\subset\mathbf{R}^{n+1}_+, T\subset\overline{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}$为归一化的局部可求 $\mathcal{H}^n$-rectifiable 集，设 $\Gamma\subset\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$为归一化的局部可求 $\mathcal{H}^{n-1}$-rectifiable 集，并设 ψ 为 M 上局部 $\mathcal{H}^n$-可积的正函数。若存在一个 $\mathcal{H}^n\llcorner M$-可测、 $\mathcal{H}^n\llcorner M$-可积的向量场$\mathbf{H}$ ，使得三元组 $(\mathrm{var}(M,\psi),\mathrm{var}(T),\mathrm{var}(\Gamma))$ 满足接触角条件 θ，则称：

(1) 对任意 $X \in \mathfrak{X}(\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+})$，有

$$\begin{aligned}&\int_M \psi \mathrm{div}_M X \mathrm{d}\mathcal{H}^n + \cos(\pi-\theta)\int_T \mathrm{div}_{\partial \mathbf{R}^{n+1}_+} X \mathrm{d}\mathcal{H}^n \\ &= -\int_M \psi X\cdot \mathbf{H}\mathrm{d}\mathcal{H}^n - \sin\theta \int_\Gamma X\cdot E_{n+1}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1},\end{aligned} \tag{2.19}$$

(2) t 存在 $\bar{\nu}\in L^1(\partial \mathbf{R}^{n+1}_+, \mathcal{H}^n \llcorner \Gamma)$，使得 $|\bar{\nu}|=1$ 对于几乎处处的 $x\in\Gamma$，并满足：

$$\int_T \mathrm{div}_{\partial \mathbf{R}^{n+1}_+} X \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_\Gamma X\cdot \bar{\nu}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}, \quad \forall X\in \mathfrak{X}_t(\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}). \tag{2.20}$$

特别地，如果 $\mathbf{H}=0$ 对于几乎处处的$x\in M$成立，我们称 $(\mathbf{var}(M,\psi), \mathbf{var}(T), \mathbf{var}(\Gamma))$ 为一个 θ-驻定三元组。在这种情况下，一阶变分公式简化为

$$\begin{aligned}&\int_M \psi \mathrm{div}_M X \mathrm{d}\mathcal{H}^n + \cos(\pi-\theta)\int_T \mathrm{div}_{\partial \mathbf{R}^{n+1}_+} X \mathrm{d}\mathcal{H}^n \\ &= -\sin\theta \int_\Gamma X\cdot E_{n+1}\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}, \quad \forall X\in \mathfrak{X}(\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}).\end{aligned} \tag{2.21}$$

注意到，我们已经根据 (2.18) 和 (2.17) 证明，变分流形三元组 $(\mathbf{var}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega), \mathbf{var}(T), \mathbf{var}(\Gamma))$ 满足接触角条件 θ。现在我们关注该三元组沿 Γ 的吹起行为，并旨在证明该三元组的放大极限是 θ-驻定的。回顾亚历山德罗夫型定理定理 1.3 中的假设： Γ 是在 $\partial\mathbf{R}^{n+1}$ 中的一个光滑 $(n-1)$-流形。该假设的直接推论是， T 现在是 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+ \cong \mathbf{R}^n$ 中边界为光滑边界 Γ 的紧区域；显然，对于任意$x\in\Gamma$， T的任意放大都是 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中的一个半 n-平面，其边界（一个 $(n-1)$-平面）恰好是 Γ的放大极限。

由于（见下文（2.7））变分流形对（$\mathbf{var}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$,$\mathbf{var}(T)$)具有固定接触角 θ，如 [DD21，定义 3 所述。1] 且广义平均曲率为常数，因此当$\theta\in(\pi/2,\pi)$ 时，变分流形

$$V := \mathrm{var}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) + \cos(\pi-\theta)\mathrm{var}(T) \tag{2.22}$$

是$\mathbf{R}^{n+1}_+$中的自由边界变分流形，且广义平均曲率为常数。根据 [De 21，定理 1，4], 可知，密度 $\Theta^n(||V||,x)$ 对每个 $x\in\Gamma$都存在且有限，并且密度函数在 Γ上半连续，因此

$$\Theta^n(||V||,x) \geq \frac{1+\cos(\pi-\theta)}{2} > 0, \quad \forall x\in\Gamma, \tag{2.23}$$

由于对每个 2.23）都成立，因此对每个 $x\in \mathrm{reg}\Gamma$。

利用 V 的非平凡一致密度下界，我们可以沿用[LZZ21 定理 5.1 第 2]步中的论证。应用反射原理引理 2.4，可得：$\mathbf{VarTan}(V,x)$ 非空，并且任意 $C\in\mathbf{VarTan}(V,x)$ 都是 $T_x\mathbf{R}^{n+1}_+ \cong \mathbf{R}^{n+1}_+$ 中非平~~凡的~~驻定 ~~n-可~~求 rectifiable 锥。此外，由于我们假设 Γ 是$\partial\mathbf{R}^{n+1}$中的光滑（$n-1$）流形，因此可知，在 $x\in\Gamma$ 处对 T 作任意放大，其结果都将是 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$中的半个 n-平面，从而 $\Theta^n(||\mathbf{var}(T)||,x) = \frac{1}{2}$；结合（2.23）可得 $\Theta^n(||\mathbf{var}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)||,x) \geq \frac{1}{2}$。因此，$\mathbf{VarTan}(\mathbf{var}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega), x)$ 非空，并且任意放大极限都是非平凡的可求 rectifiable 锥。

对于 $\theta\in(0,\pi/2)$ 的情形，我们考虑该变分流形（见 注 2.5）

$$\tilde{V} := \mathrm{var}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) + \cos\theta \mathrm{var}(\partial\mathbf{B}_+ \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}_+ \setminus T)$$

代替 V 在 (2.22) 中，采用相同的方法，我们可以得出 VarTan(var($\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$) x) 非空，且任意放大极限都是非平凡的可求 rectifiable 锥。

为继续进行，我们固定任意一点 $x \in \Gamma$。根据上述论证，并再次利用 $\Gamma \subset \partial\mathbf{R}^{n+1}$ 和 T 光滑这一假设，我们可以找到一个序列 $\rho_j \searrow 0$，当 $j \to \infty$ 时，使得存在可求 rectifiable 锥 var($\tilde{M}$, ψ_1),var($\tilde{T}$) 和 var($\tilde{\Gamma}$)，满足（此处 $\frac{T-x}{\rho_j} \to \tilde{T}$ 当 $j \to \infty$ 时是 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中的一个 n 维半空间，而 $\tilde{\Gamma}$ 是 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中 $\tilde{T}$ 的边界）

$$\frac{1}{\rho_j^n}(\boldsymbol{\eta}_{x,\rho_j})_{\#}(\mathcal{H}^n \llcorner \partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = \mathcal{H}^n \llcorner (\frac{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega - x}{\rho_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} \psi_1 \mathcal{H}^n \llcorner \tilde{M}.$$

特别地，由 ~由 2.18 式以及 var(M, ψ_1) 的平稳性，$+\cos(\pi-\theta)\mathrm{var}(T)$，我们得到~：

$$\int_{\tilde{M}} \psi_1 \mathrm{div}_{\tilde{M}} X \mathrm{d}\mathcal{H}^n + \cos(\pi-\theta)\int_{\tilde{T}} \mathrm{div}_{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+} X \mathrm{d}\mathcal{H}^n = -\sin\theta \int_{\tilde{\Gamma}} X \cdot E_{n+1} \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^{n+1}_+). \tag{2.24}$$

另一方面，显然我们有

$$\int_{\tilde{T}} \mathrm{div}_{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+} X \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_{\tilde{\Gamma}} X \cdot \bar{\nu} \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}_t(\overline{\mathbf{R}^{n+1}_+}), \tag{2.25}$$

其中，$\bar{\nu}$ 表示 $\tilde{T}$ 沿其在 $\partial\mathbf{R}^{n+1}$中的边界 $\tilde{\Gamma}$的外单位法向量。

结合这些事实，我们发现该三元组的放大极限 θ是定义 2.13意义下的平稳的。

2.8. **极大值原理**。 我们以以下针对可求 rectifiable 变分流形的关键极大值原理结束预备部分。

引理 2.14 ([DM19，引理 3])。 设 M 是一个归一化的局部 $\mathcal{H}^n$-可求 ***rectifiable*** 集，满足var(M, ψ) 在 $\mathbf{R}^{n+1}$上驻定。若 M 是一个锥（即，对每个 $M = tM$ 都有 $t > 0$），且 M包含于一个闭半空间 H，其中 $0 \in \partial H$，则 $M = \partial H$。特别地， M 不能包含于两个不同且不相对的、包含原点的半空间的凸交集中。

受内部最大值原理的证明启发，引理 2.14，我们推导出以下边界极大值原理。

引理 *2.15.* 设 $M \subset \overline{R^{n+1}_+}$是一个归一化的局部 $\mathcal{H}^n$-可求 ***rectifiable*** 集，设 ψ 是 M 上的正的局部$\mathcal{H}^n$可积函数，满足对 $x \in M$ 和 $t > 0$有 $\psi(x) = \psi(tx)$，并且 ***var(M, ψ)*** 是一个在 R^{n+1}_+中具有自由边界的平稳 ***varifold***。若 M 是一个锥（即，对每个 $t > 0$都有 $M = tM$），且 M 包含于一个闭半空间 H，其中 $0 \in \partial H$，并且 H 与 ∂R^{n+1}_+正交相交，则 $M = \partial H \cap R^{n+1}_+$。特别地，$M$ 不能包含于两个不同且不相对、包含原点并与 ∂R^{n+1}_+正交相交的半空间的凸交集中。

引理 2.15 的证明。令 $H = \{z \in \mathrm{R}^{n+1} : z \cdot \nu \le 0\}$，其中 $\nu \in \mathrm{S}^{n-1} \subset \partial\mathrm{R}^{n+1}_+ \cong \mathrm{R}^n$。给定$\varphi \in C_c^\infty([0,\infty))$，其中 $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi(r) = 1$在 $[0, \epsilon)$ 上，对某个 $\epsilon > 0$成立，且 $\varphi'(r) < 0$在 $\{0 < \varphi < 1\}$上。现在我们令 $X(x) = \varphi(|x|)\nu$，其中 $x \in \mathrm{R}^{n+1}$；显然 $X \in \mathfrak{X}_t(\mathrm{R}^{n+1}_+)$，且 $\nabla X = \varphi'(|x|)\nu \otimes \hat{x}$，其中 $\hat{x} = x/|x|$ 若 $x \neq 0$。令 ν_M : $M \to \mathrm{S}^n$ 为一个博雷尔向量场，使得对$\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in M$，有 $T_x M = \nu_M(x)^\perp$。由于 M是一个锥，对 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in M$，有 $\hat{x} \cdot \nu_M(x) = 0$，因此

$$\mathrm{div}_M X = \mathrm{div} X - \nu_M \cdot \nabla X[\nu_M] = \varphi'(|x|)(\nu \cdot \hat{x} - (\nu_M \cdot \nu)(\nu_M \cdot \hat{x})) = \varphi'(|x|)(\nu \cdot \hat{x}),$$

因此，由于 var$(M,\ \psi)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中的自由边界静止变分，我们有

$$0=\int_M \mathrm{div}_M X\psi \mathrm{d}\mathcal{H}^n=\int_M \varphi'(|x|)(\nu\cdot\hat{x})\psi(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x). \tag{2.26}$$

由于 $M\subset H$，我们知道对于每个 $x\in M,\ \nu\cdot\hat{}x\leq 0$。$\epsilon$ 的任意性进而意味着，对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x\in M,\ \nu\cdot\hat{}x=0$，因此 $M=\partial H\cap\mathbf{R}^{n+1}_+$。

Th引理陈述的其余部分引理 2.15 很容易推出。因此引理得证 . □

引理 *2.16.* 给定 $\theta\in[\pi/2,\pi)$。设 $M\subset R^{n+1}_+$、$T\subset\partial R^{n+1}_+$ 为归一化的局部 $\mathcal{H}^n$- 可求 *rectifiable* 集，设 $\Gamma\subset\partial R^{n+1}_+$ 为归一化的局部 $\mathcal{H}^{n-1}$-可求 *rectifiable* 集。假设 *var*(M,ψ_1)、*var*(T,ψ_2) 和 *var*(Γ,ψ_3) 是可求 *rectifiable* 锥（其含义是，对于每个 $t>0$，$M=tM$，且 ψ_1 是定义在 M 上的正局部 $\mathcal{H}^n$-可积函数，并满足 $\psi_1(x)=\psi_1(tx)$，其中 $x\in M$ 和 $t>0$），使得三元组 *(var*(M,ψ_1), *var*(T,ψ_2), *var*(Γ,ψ_3)*)* 如定义 *2.13* 所述为 θ-驻定。若 M 包含于闭半空间 $H^-=\{z\in R^{n+1}:\ z\cdot\nu\leq 0\}$，其中 $0\in\partial H^-,\nu\in S^n$，则 $\alpha:=\arccos(\nu\cdot(-E_{n+1}))\leq\theta$。此外，若 $\alpha=\theta$，则 $M=\partial H^-\cap R^{n+1}_+$。

证明引理 *2.16*。 根据 α的定义，我们很容易看出存在一个常向量场$e_1\in T\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$使得

$$\nu=\sin\alpha e_1-\cos\alpha E_{n+1}.$$

给定 $\varphi\in C^\infty_c([0,\infty))$，其中 $0\leq\varphi\leq 1$, $\varphi(r)=1$ 在 $[0,\epsilon)$ 上成立，某个 $\epsilon>0$，且 $\varphi'(r)<0$在 $\{0<\varphi<1\}$ 上成立。现在我们定义 $X_1(x)=\varphi(|x|)e_1$，其中 $x\in\mathrm{R}^{n+1}$，显然 $X_1\in\mathfrak{X}_t(\mathrm{R}^{n+1}_+)$，并且 $\nabla X_1=\varphi'(|x|)e_1\otimes\hat{}x$，其中当 $x\neq 0$ 时，$\hat{}x=x/|x|$。令 $\nu_M\colon M\to\mathrm{S}^n$ 为一个博雷尔向量场，使得 $T_xM=\nu_M(x)^\perp$ 对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x\in M$ 成立。由于 M 是一个锥，因此对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的$x\in M$，我们有 $\hat{}x\cdot\nu_M(x)=0$，从而

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M X_1(x)=&\mathrm{div}X_1(x)-\nu_M(x)\cdot\nabla X_1[\nu_M(x)]\\ =&\varphi'(|x|)\left(e_1\cdot\hat{x}-(e_1\cdot\nu_M(x))(\hat{x}\cdot\nu_M(x))\right)=\varphi'(|x|)e_1\cdot\hat{x}.\end{aligned}$$

同样，由于 $e_1\cdot E_{n+1}=0$，我们有

$$\mathrm{div}_{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}X_1=\mathrm{div}X_1-E_{n+1}\cdot\nabla X_1[E_{n+1}]=\varphi'(|x|)e_1\cdot\hat{x},\quad\forall x\in\partial\mathbf{R}^{n+1}_+.$$

由于三元组 $(\mathrm{var}(M,\psi_1),\mathrm{var}(T,\psi_2),\mathrm{var}(\Gamma,\psi_3))$ 是 θ-驻定的，用 2.21) 和 (2.20) 检验 X_1，可得

$$\begin{aligned}&\int_M\varphi'(|x|)e_1\cdot\hat{x}\psi_1(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x)=\cos\theta\int_T\varphi'(|x|)e_1\cdot\hat{x}\psi_2(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x)\\ =&\cos\theta\int_\Gamma\varphi(|x|)e_1\cdot\bar{\nu}(x)\psi_3(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x)\leq-\cos\theta\int_\Gamma\varphi(|x|)\psi_3(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x).\end{aligned}\tag{2.27}$$

在最后一个不等式中，我们用到了 $\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi)$。

另一方面，我们考虑 $X_2(x)=\varphi(|x|)E_{n+1}$ 对 $x\in\mathbf{R}^{n+1}$，并且有 $\nabla X_2=\varphi'(|x|)E_{n+1}\otimes\hat{}x$。同样，由于 M 是一个锥，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M X_2(x)=&\mathrm{div}X_2(x)-\nu_M(x)\cdot\nabla X_2[\nu_M](x)\\ =&\varphi'(|x|)E_{n+1}\cdot\hat{x},\end{aligned}$$

以及也

$$\mathrm{div}_{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}X_2=\mathrm{div}X_2-E_{n+1}\cdot\nabla X_2[E_{n+1}]=0,\quad\forall x\in\partial\mathbf{R}^{n+1}_+.$$

以（2.21） X_2进行检验，我们得到

$$\int_M \varphi'(|x|)E_{n+1}\cdot\hat{x}\psi_1(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) = -\sin\theta\int_\Gamma \varphi(|x|)\psi_3(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x). \tag{2.28}$$

回忆一下， $\nu=$正弦 αe_1-余弦 αE_{n+1}，结合式（2.27）和式（2.28），可得

$$\begin{aligned}\int_M \varphi'(|x|)\nu\cdot\hat{x}\psi_1(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) &\le -\sin\alpha\cos\theta\int_\Gamma \varphi(|x|)\psi_3(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x)\\ &+\sin\theta\cos\alpha\int_\Gamma \varphi(|x|)\psi_3(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x)=\sin(\theta-\alpha)\int_\Gamma \varphi(|x|)\psi_3(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x).\end{aligned} \tag{2.29}$$

由于 $M\subset H^-$，我们有

$$\int_M \varphi'(|x|)\nu\cdot\hat{x}\psi_1(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x)\ge 0.$$

由此可得 $\theta\ge\alpha$。

另一方面，若 $\alpha=\theta$，则由上述论证（特别是（2.29））可知 $\nu\cdot\hat{x}=0$ 对 $\mathcal{H}^n$-几乎处处成立 $x\in M$，这意味着 $M=\partial H^-\cap\mathbf{R}^{n+1}_+$。证明至此完成。□

从上述证明可知，我们之所以必须限制 $\theta\in[\pi/2,\pi)$，唯一原因是为了推导不等式（2.27）；换言之，若（2.27）中等号成立（从而（2.29）中等号也成立），则可以取消角度限制。对此，我们有如下最大值原理。

引理 *2.17*。给定 $\theta\in(0,\pi)$ 和一个闭半空间 $H^-=\{z\in R^{n+1}:z\cdot\nu\le 0\}$ *with* $0\in\partial H^-$，$\nu\in S^n$ *(*并且令 H^+ 为对跖闭半空间*)*。令 $M\subset R^{n+1}_+$为一个归一化的局部 $\mathcal{H}^n$-可求 *rectifiable* 集，$T=H^+\cap\partial R^{n+1}_+,\Gamma=\partial H^+\cap\partial R^{n+1}_+$。假设 *var*$(M,\psi_1)$ 是一个可求 *rectifiable* 锥（其含义是，对每个 $t>0$，ψ_1 都是定义在 M 上的正的局部 $\mathcal{H}^n$-可积函数，且对 $x\in M$ 和 $t>0$，有 $\psi_1(x)=\psi_1(tx)$*)*，使得三元组 *(var*(M,ψ_1)*, var*(T)*, var*(Γ)*)* 如定义 *2.13* 所述是 θ-驻定的。若 M 包含于 H^-，则 $\alpha:=\arccos(\nu\cdot(-E_{n+1}))\le\theta$。此外，若 $\alpha=\theta$，则 $M=\partial H^-\cap R^{n+1}_+$。——

证明。 我们可以按照引理 2.16 的证明进行，并注意到以下事实： $e_1=-\bar{\nu}$ 沿着 Γ因为 $T=H^+\cap\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$和 $\Gamma=\partial H^-\cap\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$。特别地，这意味着（2.27）以等式形式成立，从而我们得到（2.29）中的等式。由于$M\subset H^-$，对于以下两种情况，我们可以得出与引理 2.16 相同的结论：$\pi>\alpha>\theta>0$ 以及 $\alpha=\theta$。证明完毕。□

最后，我们将利用 Sch¨atzle 推导出的可求 rectifiable 变分流形的内部强最大值原理。

定理 2.18 ([Sch04，定理 6。2])。 设 M 为一个具有分布意义下的平均曲率向量 $\boldsymbol{H}\in L^p(\psi\mathcal{H}^n\llcorner M;\mathbf{R}^{n+1})$ 的归一化局部 $\mathcal{H}^n$-可求 *rectifiable* 集，其中 $p>\max\{2,n\}$。

取 $\nu\in\mathbf{S}^n$, $h_0\in\mathbf{R}$，并考虑一个连通开集 $U\subset\nu^\perp$，使得

$$\varphi(z)=\inf\{h>h_0:z+h\nu\in M\},\quad z\in U, \tag{2.30}$$

对每个 $z\in U$，均满足 $\varphi(z)\in(h_0,\infty)$。

若 $\eta\in W^{2,p}(U;(h_0,\infty))$满足：对某个 $z_0\in U$，在 U 上有 $\eta\le\varphi$，且 $\eta(z_0)=\varphi(z_0)$，则不可能

$$-\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}\right)(z)\le\mathbf{H}(z+\varphi(z)\nu)\cdot\frac{-\nabla\varphi(z)+\nu}{\sqrt{1+|\nabla\varphi(z)|^2}}, \tag{2.31}$$

除非在 U 上有 $\eta = \varphi$，否则对 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $z \in U$ 都成立。

3. $C^{1,\ 1}$-RECTIFIABILITY THEOREM OF $\Gamma^t_{s;\theta}$

回顾 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 在 定义 1.5 中定义的内容。本节的主要结果是关于该集合的 $C^{1,1}$-可求 rectifiability 定理。

定理 3.1. 给定 $\theta \in (0,\pi)$。若 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$ 是一个非空、有界的相对开集，且具有有限周长，则对每个 $0 < t < \infty$，以及几乎处处的 $0 < s < t$，都存在 $\{\mathcal{U}_j\}_{j\geq 1}$ 个由 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 的紧子集构成的可数族，使得 $\mathcal{H}^n(\Gamma^t_{s;\theta} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{U}_j) = 0$，且每个 $\mathcal{U}_j$ 都包含在 $C^{1,1}$-超曲面中$\mathbf{R}^{n+1}$。此外，记平移距离函数 δ_θ 的梯度为 N_θ，则对每个 $j \geq 1$，$N_\theta\,|_{\mathcal{U}_j}$ 都是利普希茨连续的。

Th以下关于 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 的精细性质对于证明可求 rectifiability 结果至关重要 .

3.1. $\Gamma^t_{s;\theta}$的精细性质。给定 $\theta \in (0,\pi)$，对于任意非空、有界的相对开集，且其周长有限的 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$，我们定义 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 和Γ^+_s ; θ如定义 1.5 所述。回顾一下，对于任意 $y \in \mathbf{R}^{n+1}$，从 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$出发的平移距离函数定义为 $\delta_\theta(y) = \sup_{r\geq 0}\{r : B_r(y - r\cos\theta E_{n+1}) \cap \partial_{\mathrm{rel}}\Omega = \varnothing\}$。按照 Fed59，定义 4.1]，，我们如下定义平移唯一点投影映射。

定义 3.2。给定 $\theta \in (0,\ \pi)$，对于任意非空、有界的相对开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$，令 $\mathrm{Unp}_\theta(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$ 表示点的集合 $y \in \mathbf{R}^{n+1}$，其中的每一点相对于平移距离函数 δ_θ都存在 Ω ∂_{rel}中唯一的最近点，并且映射

$$\xi_\theta : \mathrm{Unp}_\theta(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) \to \partial_{\mathrm{rel}}\Omega \tag{3.1}$$

将 $y \in \mathrm{Unp}_\theta(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$ 与满足 $\delta_\theta(y) = \mathrm{dist}(x, y - \delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1})$ 的唯一 $x \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 相关联。

我们的第一个观察是 $\Gamma^t_{s;\theta} \subset \mathrm{Unp}_\theta(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$，我们参见 图 3 作示意。

引理 3.3。给定 $\theta \in (0,\pi)$，对于任意非空、有界、具有有限周长的相对开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$，以及任意 $0 < s < t < \infty$，令 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 如 定义 *1.5*所述。则对于任意$y \in \Gamma^t_{s;\theta}$，它关于 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 相对于 δ_θ 有唯一点投影，其表达式为 $\xi_\theta(y) = x$；换言之，$\Gamma^t_{s;\theta} \subset \mathrm{Unp}_\theta(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$。

证明。根据定义，对于任意 $y \in \Gamma^t_{s;\theta}$，存在 $x = \gamma_y(0) \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，$z = \gamma_y(t) \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_t$。考虑定义在 $\gamma_y(r) - r\cos\theta E_{n+1}$ 上的测地线，根据 (1.4) 式，有

$$\delta(\gamma_y(r) - r\cos\theta E_{n+1}) = \delta_\theta(\gamma_y(r)) = r \quad \forall r \in [0,t],$$

这意味着 $\gamma_y(r) - r\cos\theta E_{n+1}$ 是一个单位速度线段，并且很容易看出以下断言成立。

断言。 $|x - (y - s\cos\ \theta E_{n+1})| = s$， $|y - s\cos\ \theta E_{n+1} - (z - t\cos\ \theta E_{n+1})| = t - s$

现在我们证明 x 由 y 唯一确定。由于 $y \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s$，如果存在 $x' \neq x \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 使得 $|x' - (y - s\cos\theta E_{n+1})| = s$，那么根据三角不等式，我们有

$$|x' - (z - t\text{余弦}\ \theta E_{n+1})| < |x' - (y - s\cos\theta E_{n+1})| + |y - z + (t-s)\cos\theta E_{n+1}| = s + t - s = t,$$

这与 $z \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_t$ 这一事实矛盾。因此，我们已经证明 x 是 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 中相对于 δ_θ 距离 y 最近的唯一点；也就是说，$\xi_\theta(y) = x$。□

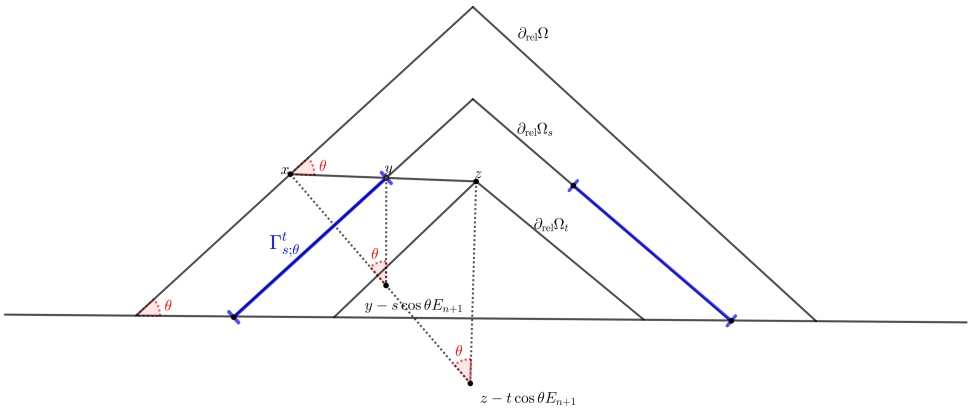


FIGURE 3. $\Gamma^t_{s;\theta}$

一旦 $0 < s < t < \infty$ 和 $y \in \Gamma^t_{s;\theta}$ 固定，由引理 3.3 可知，测地线（匀速线段）$\gamma_y : [0,t] \to \mathbf{R}^{n+1}$ 如定义 1.5 所述，是唯一的。此外，对于定义在$\gamma_y(r) - r\cos\theta E_{n+1}$ 上的测地线 $r \in [0,t]$，由引理 3.3 的证明可知，其上任意一点在 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 上相对于距离函数都存在唯一点投影 δ，即

$$\xi(\gamma_y(r) - r\cos\theta E_{n+1}) = x, \quad \forall r \in [0,t).$$

利用 $\Gamma^t_{s;\theta} \subset \mathrm{Unp}_\theta(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$ 这一事实，我们可以研究 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的平移距离函数δ_θ 以及 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 上的唯一点投影映射 ξ_θ。我们汇总 δ_θ 和 ξ_θ 的精细性质如下。

引理 3.4. 给定 $\theta \in (0,\pi)$，对于任意非空、有界、周长有限的相对开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$，以下结论成立：

(1) δ_θ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的 *Lipschitz* 函数，其 *Lipschitz* 常数至多为 $1-|\cos\theta|$，即对于任意 x、$y \in \mathbf{R}^{n+1}$，

$$|\delta_\theta(y) - \delta_\theta(x)| \le \frac{1}{1-|\cos\theta|}|x-y|.$$

(2) 对于 $0 \le r_1 < r_2$，且对于任意 $y \in \mathbf{R}^{n+1}$，严格包含关系成立：

$$B_{r_1}(y - r_1\cos\theta E_{n+1}) \subset B_{r_2}(y - r_2\cos\theta E_{n+1}).$$

(3) $N_\theta(y) := \nabla\delta_\theta(y)$ 对 $\mathcal{L}^{n+1}$-几乎处处的 $y \in \mathbf{R}^{n+1}$ 存在。此外，在其存在时，有

$$\frac{1}{1+|\cos\theta|} \le |N_\theta(y)| \le \frac{1}{1-|\cos\theta|}. \tag{3.2}$$

特别地，当其存在时，$\theta = \pi/2$, $|N_\theta(y)| = 1$。

(4) 对于 $0 < s < t$，ξ_θ 在 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 上连续。

证明。 (1) 任取 x， $y \in \mathbf{R}^{n+1}$。由于 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中是紧的，我们可以取 $a \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，使得 $\delta_\theta(x) = |a-(x-\delta_\theta(x)\cos\theta E_{n+1})|$。不失一般性，假设 $\delta_\theta(y) \geq \delta_\theta(x)$，则由三角不等式可得

$$\begin{aligned}|\delta_\theta(y)-\delta_\theta(x)| =& \delta_\theta(y)-\delta_\theta(x)\\ \leq& |a-(y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1})|-|a-(x-\delta_\theta(x)\cos\theta E_{n+1})|\\ \leq& |x-y+(\delta_\theta(y)-\delta_\theta(x))\cos\theta E_{n+1}|\\ \leq& |x-y|+|\delta_\theta(y)-\delta_\theta(x)||\cos\theta|,\end{aligned}$$

我们重新排列这一式，以便看出

$$|\delta_\theta(y)-\delta_\theta(x)| \leq \frac{1}{1-|\cos\theta|}|x-y|. \tag{3.3}$$

这就完成了(1)的证明。

(2) 这相当于一个由三角不等式得出的简单观察。事实上，对于任意$z \in \partial B_{r_1}(y-r_1\cos\theta E_{n+1})$，若 $|z-(y-r_2\cos\theta E_{n+1})| \geq r_2$，则有

距离$(z, y-r_1\cos\theta E_{n+1})$ +距离$(y-r_1\cos\theta E_{n+1}, y-r_2\cos\theta E_{n+1})$ ≥距离$(z, y-r_2\cos\theta E_{n+1})$,也就是说,

$$r_1+(r_2-r_1)|\cos\theta| \geq r_2,$$

这就导致矛盾，因为 $\theta \in (0, \pi)$，从而完成了 (2 的证明).

(3) 根据 Rademacher 定理， δ_θ 在 $\mathcal{L}^{n+1}$-几乎处处的 $y \in \mathbf{R}^{n+1}$可微。当$N_\theta(y)$存在时，我们可以假设存在唯一的 $x \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，使得 $\delta_\theta(y) = |x-(y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1})|$。

断言 1. $\nabla\delta_\theta(y) \parallel x-(y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1})$。

事实上, 由（1.4），我们得到距离和平移距离之间的如下关系 :

$$\delta(y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1}) = \delta_\theta(y). \tag{3.4}$$

注意，根据 [Fed59，定理 4.8 (3)], $(\nabla\delta)(y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1}) = {}^{x-}{}_{(y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1})\delta_\theta(y)}$。对（3.4）两边求导，即得该断言。

断言 2. 对于任意 $0 < t \leq 1$, $\delta_\theta(y+t(x-y)) = (1-t)\delta_\theta(y)$。

注意到 $y+t(x-y)-(1-t)\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1} = y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1}+t(x-(y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1}))$，并且显然有 $|x-\mathrm{RHS}| = (1-t)\delta_\theta(y)$，因为 $\mathrm{dist}(x, y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1}) = \delta_\theta(y)$。因此，我们有： $\delta_\theta(y+t(x-y)) \leq (1-t)\delta_\theta(y)$。

另一方面，由于 $1/(1-t) > 1$，我们知道

$$\bar{B}_{(1-t)\delta_\theta(y)}(y+t(x-y)-(1-t)\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1}) \subset \bar{B}_{\delta_\theta(y)}(y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1})$$

仅有的公共点为 x，由(2) 可知，对于任意 $r < (1-t)\delta_\theta(y)$， $B_r(y+t(x-y)-r\cos\theta E_{n+1})$ $\cap\partial_{\mathrm{rel}}\Omega = \varnothing$，这意味着 $\delta_\theta(y+t(x-y)) = (1-t)\delta_\theta(y)$，并证明了该断言。

ˆ 现在我们已准备好证明3.2，将 $N_\theta(y)/|N_\theta(y)|$ 记作 $N_\theta(y)$。

ˆ 根据**断言 1**，我们知道 $x-(y-\delta_\theta(y)\cos\theta E_{n+1}) = -\delta_\theta(y)N_\theta(y)$，因此 $x-y =$ˆ$-\delta_\theta(y)(N_\theta(y)+\cos\theta E_{n+1})$。注意， $\delta_\theta(y+t(x-y))$ 在 y 处的泰勒展开为

$$\delta_\theta(y+t(x-y)) = \delta_\theta(y)+tN_\theta(y)\cdot(x-y)+o(t),$$

根据**断言 2** 和上述观察，可写成

$$-t\delta_\theta(y) = tN_\theta(y)\cdot\left(-\delta_\theta(y)\left(\hat{N}_\theta(y)+\cos\theta E_{n+1}\right)\right)+o(t),$$

代入 $t \searrow 0^+$ 并重新整理，得到

$$|N_\theta(y)| = \frac{1}{1+\cos\theta \hat{N}_\theta(y)\cdot E_{n+1}}, \tag{3.5}$$

(3.2) 易得。

对于(4)，反设存在某个 $\epsilon > 0$ 以及一个点列$\{y_i\}_{i=1}^\infty \subset \Gamma^t_{s;\theta}$收敛到 $y \in \Gamma^t_{s;\theta}$，使得对于每个充分大的 i，都有 $|\xi_\theta(y) - \xi_\theta(y_i)| \geq \epsilon$。

根据定义，对于每个 i，当 i 足够大时，有以下结论。

$$|\xi_\theta(y_i) - (y_i - s\cos\theta E_{n+1})| = \delta_\theta(y_i) = s. \tag{3.6}$$

利用三角不等式以及 y_i 收敛到 y 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}|\xi_\theta(y_i) - (y - s\cos\theta E_{n+1})| \leq& |\xi_\theta(y_i) - (y_i - s\cos\theta E_{n+1})| + |y_i - y| \\ =& s + |y_i - y| < s + \epsilon.\end{aligned}$$

这意味着，所有点 $\{\xi_\theta(y_i)\}_i$ 都位于 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \cap B_{s+\epsilon}(y - s\cos\theta E_{n+1})$ 中，而后者是紧集 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的一个有界子集。因此，通过取一个子序列，我们可以假设 $\{\xi_\theta(y_i)\}_i$ 收敛到某个点 $x \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$。但由于 δ_θ 是连续的，我们有

$$s = \delta_\theta(y) = \lim_{i\to\infty}\delta_\theta(y_i) = \lim_{i\to\infty}|\xi_\theta(y_i) - (y_i - s\cos\theta E_{n+1})| = |x - (y - s\cos\theta E_{n+1})|,$$

这意味着 $x = \xi_\theta(y)$，因为我们已经证明 $y \in \Gamma^t_{s;\theta} \subset \mathrm{Unp}_\theta(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$ 中的 引理 3.3。然而，这与以下假设矛盾

$$|x - \xi_\theta(y)| = \lim_{i\to\infty}|\xi_\theta(y_i) - \xi_\theta(y)| \geq \epsilon,$$

由此完成证明。 □

注 3.5。 当 Ω 包含于欧几里得空间时，类似的结果已包含在 [Fed59,4.8(1)(2)(3)(4)]。

借助 引理 3.3 和 引理 3.4，我们可以充分探究 $\Gamma^t_{s;\theta}$和 $\Gamma^+_{s\,\theta;}$ 它们在欧几里得情形下已得到充分理解，见 [DM19，定理1]。

命题 3.6。 给定 $\theta \in (0,\pi)$。对于任意非空、有界、周长有限的相对开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}_+$，以及每个 $0 < s < t < \infty$，有以下结论。

(1) 对于 $s < t_1 < t_2$，$\Gamma^{t_2}_{s;\theta} \subset \Gamma^{t_1}_{s;\theta}$。特别地，$\Gamma^+_{s;\theta} = \lim_{t\to s^+}\Gamma^t_{s;\theta}$。*(2)* $\Gamma^t_{s;\theta}$ 是$\mathbf{R}^{n+1}_+$中的一个紧集。*(3)* 在任意 $y \in \Gamma^t_{s;\theta}$处，$\Gamma^t_{s;\theta}$ 被$\mathbf{R}^{n+1}$ 中两个彼此相切的球所夹住，其半径分别为 s 和$t-s$。*(4)* δ_θ 在每个 $y \in \Gamma^t_{s;\theta}$处都可微。

证明。 **(1)** 该陈述的第一部分可由 $\Gamma^t_{s;\theta}$的定义轻易推出，而由该包含关系可明显看出 $\Gamma^+_{s;\theta} = \lim_{t\to s^+}\Gamma^t_{s;\theta}$。

(2) 只需证明 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 是一个闭集，即如果点列 $\{y_i\}_{i=1}^\infty \subset \Gamma^t_{s;\theta}$ 收敛于 y，那么必有 $y \in \Gamma^t_{s;\theta}$。

根据 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 的定义，对于每个 y_i，存在相应的点 $x_i \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ $z_i \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_t$。根据引理 3.4， ξ_θ 在 Γ^t_s上连续，因此我们有： $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 是 ∂_{rel}中的柯西序列。注意， $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 在$\mathbf{R}^{n+1}$中是闭集，因此 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 收敛到某个 $x \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$。同理，$\{z_i\}_{i=1}^\infty$ 收敛到某个 $z \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_t$。

由连续性可得

$$\delta_\theta(y)=\lim_{i\to\infty}\delta_\theta(y_i)=s,\quad |x-(y-s\cos\theta E_{n+1})|=\lim_{i\to\infty}|\xi_\theta(y_i)-(y_i-s\cos\theta E_{n+1})|=s.$$

同样地，我们推得 $|y-s\cos\theta E_{n+1}-(z-t\cos\theta E_{n+1})|=t-s$。再次利用三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned}t=\delta_\theta(z)\leq&|x-(z-t\cos\theta E_{n+1})|\\ \leq&|x-(y-s\cos\theta E_{n+1})|+|y-z+(t-s)\cos\theta E_{n+1}|=t,\end{aligned}$$

容易看出，连接 x and $z-t\cos\theta E_{n+1}$ 的线段必然包含 $y-s\cos\theta E_{n+1}$，因此根据定义可验证 $y\in\Gamma^t_{s;\theta}$，从而完成了对（**2**）的证明。

(3) 可由 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 和 引理 3.3的定义推出。事实上，容易看出，对于每个 $y\in\Gamma^t_{s;\theta}$,

$$\{y-s\cos\theta E_{n+1}\}=\partial B_{t-s}(z-t\cos\theta E_{n+1})\cap\partial B_s(x),\tag{3.7}$$

因此，在 $y-s\cos\theta E_{n+1}$ 处，$\Gamma^t_{s;\theta}-s\cos\theta E_{n+1}$ 被夹在 $B_{t-s}(z-t\cos\theta E_{n+1})$ 和 $B_s(x)$ 之间。这进一步意味着，在其每个点处， $\Gamma^t_{s;\theta}$ 都被两个半径分别为 s 和 $t-s$ 的相互相切球所夹住。

(4) 是以下事实的直接推论： $y\in\Gamma^t_{s;\theta}\subset\mathrm{Unp}_\theta(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$，该事实已在引理 3.3中证明。 □

3.2. $C^{1,1}$-可求 rectifiability 定理及其推论。

定理 *3.1*的证明。 我们紧密沿用了 [DM19中定理 1 的证明：步骤 1]，并对平移距离函数 δ_θ作了修改。回顾一下，我们用 $N_\theta(y)$ 表示 δ_θ 在 y处的梯度；根据 $y\in\Gamma^t_{s;\theta}$ 命题 3.6**(4)**，该梯度处处存在。我们将归一化向量 $N_\theta(y)/|N_\theta(y)|$ 简记为 $N_\theta(y)$。

步骤 1。 C^1-可求 rectifiability： $\Gamma^t_{s;\theta}$。

首先，对于任意 $|N_\theta(y)\cdot(y'-y)|$，我们估计 y， $y'\in\Gamma^t_{s;\theta}$。由 引理 3.4(3) 和命题 3.6，可得 $N_\theta(y)$ 关于 x， y， z 的显式表达式。事实上，由 **断言 1** 以及 引理 3.4(3) 的证明，我们得到

$$\hat N_\theta(y)=\frac{-x+(z-t\cos\theta E_{n+1})}{|-x+(z-t\cos\theta E_{n+1})|}.\tag{3.8}$$

这一点结合**断言 2**在引理 3.4（3）的证明中，推出以下事实：对任意$y\in\Gamma^t_{s;\theta}$，以及对 $r\in[-s,t-s]$，都有

$$y-s\cos\theta E_{n+1}+r\hat N_\theta(y)\in\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_{s+r}-(s+r)\cos\theta E_{n+1},\tag{3.9}$$

这里我们约定 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_0=\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$。将其重新排列可得

$$y+r(\hat N_\theta(y)+\cos\theta E_{n+1})\in\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_{s+r}.\tag{3.10}$$

利用（3.10），并回顾（1.4），对于 y， $y'\in\Gamma^t_{s;\theta}$，我们有

$$\begin{aligned}s^2\leq&|y-s(\hat N_\theta(y)+\cos\theta E_{n+1})-(y'-s\cos\theta E_{n+1})|^2\\ =&s^2-2s\hat N_\theta(y)\cdot(y-y')+|y-y'|^2,\end{aligned}\tag{3.11}$$

并且

$$\begin{aligned}(t-s)^2 \leq & \left|\left(y+(t-s)(\hat{N}_\theta(y)+\cos\theta E_{n+1})-t\cos\theta E_{n+1}\right)-(y'-s\cos\theta E_{n+1})\right|^2 \\ = & |y+(t-s)\hat{N}_\theta(y)-y'|^2=(t-s)^2+2(t-s)\hat{N}_\theta(y)\cdot(y-y')+|y-y'|^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

结合这些事实并利用（3.2），我们得到估计

$$\begin{aligned}|N_\theta(y)\cdot(y'-y)| \leq & |N_\theta(y)|\max\{\frac{1}{s},\frac{1}{t-s}\}\frac{|y-y'|^2}{2} \\ \leq & \max\{\frac{1}{s},\frac{1}{t-s}\}\frac{|y-y'|^2}{2(1-|\cos\theta|)} \quad \text{for all } y,y'\in\Gamma^t_{s;\theta}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

由命题 3.6，N_θ 在 $\Gamma^t_{s;\theta}$上连续，因此我们得到一对（δ_θ，N_θ）$\in C^0$（$\Gamma^t_{s;\theta}$；$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n+1}$），满足关键估计（3.13）。注意到

$$\begin{aligned}&\limsup_{\epsilon\to 0^+}\{\frac{|\delta_\theta(y')-\delta_\theta(y)-N_\theta(y)\cdot(y'-y)|}{|y'-y|}:0<|y'-y|\leq\epsilon,\quad y',y\in\Gamma^t_{s;\theta}\} \\ \leq &\limsup_{\epsilon\to 0^+}\left\{\frac{\max\{\frac{1}{2(t-s)},\frac{1}{2s}\}|y-y'|^2}{(1-|\cos\theta|)\,|y'-y|}:0<|y'-y|\leq\epsilon,\quad y',y\in\Gamma^t_{s;\theta}\right\}=0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中，在不等式中我们用到了 $\delta_\theta(y')=\delta_\theta(y)=s$ 以及（3.13）这一事实。特别地，在此条件下，我们可以使用 C^1-Whitney 延拓定理，得到存在 $\phi_\theta\in C^1(\mathbf{R}^{n+1})$，使得在 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 上 $(\phi_\theta,\nabla\phi_\theta)=(\delta_\theta,N_\theta)$。此外，由（3.8）可知 $N_\theta(y)\neq 0$，因此我们可以对 ϕ_θ 使用 C^1-隐函数定理，从而得到：对每个 $y\in\Gamma^t_{s;\theta}$，都存在一个开集 $U\subset\mathbf{R}^n$，以及一个 C^1-函数 $\psi\colon U\to\mathbf{R}^1$,，使得在 U 上 $\Gamma^t_{s;\theta}\subset(x',\psi(x'))$，即 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 属于由 $\Psi(x')=(x',\psi(x'))$ 给出的 C^1-像 $\Psi\colon U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n+1}$。另一方面，利用余面积公式并应用（3.2），我们得到

$$\frac{|\Omega|}{1-|\cos\theta|}\geq\int_\Omega|\nabla\delta_\theta|\mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1}=\int_0^\infty\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s)\mathrm{d}s, \tag{3.15}$$

由于 Ω 有界，这意味着，对于几乎处处的 $s>0$、$\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega s)<\infty$，可得 $\mathcal{H}^n(\Gamma^t_{s;\theta})<\infty$ 对几乎处处的 $s>0$成立。特别地，这些事实推出了 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 的 $\mathcal{H}^n$-可求 rectifiability。

步骤 2。 N_θ 沿着 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 在 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $y\in\Gamma^t_{s;\theta}$处具有切向可微性。

如 [DM19], 中所述，本步骤的关键在于证明 N_θ 在$\Gamma^t_{s;\theta}$上是局部利普希茨的。事实上，我们将证明，对于任意具有有限 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 的 $\mathcal{H}^n$-测度的集合，它都可以除去一个 $\mathcal{H}^n$-零集后，由若干紧集 $\{\mathcal{U}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$覆盖，并且满足 $N_\theta|_{\mathcal{U}_j}$ 是利普希茨的。

我们首先构造 $\{\mathcal{U}_j\}$，令 $\mathcal{C}(N,\rho)=\{z+hN:\ z\in N^\perp,\ |z|<\rho,\ |h|<\rho\}$ 表示 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中以原点为中心、轴线沿 $\mathbf{S}^n$、半径为 $\rho>0$ 、高度为 2ρ 的开圆柱体。根据 命题 3.6 以及 C^1的 $\Gamma^t_{s;\theta}$可求 rectifiability}，我们知道 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 具有近似

在其几乎处处的点处的切平面，而该平面恰好是 $\left\{\hat{N}_\theta(y)\right\}^\perp$，这是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的一个 n 维仿射平面，即

$$T_y\Gamma^t_{s;\theta}=\left\{\hat{N}_\theta(y)\right\}^\perp\quad\text{for }\mathcal{H}^n\text{-a.e. }y\in\Gamma^t_{s;\theta}.$$

根据 [Mag12，定理 10。2] 并注意到，对于任意固定的 ρ，存在 $0<\rho_1<\rho_2$ 使得 $\hat{}B_{\rho_1}\subset\mathcal{C}(N_\theta(y)\ \rho)\subset B_{\rho_2}$，我们有

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\mathcal{H}^n\left(\Gamma^t_{s;\theta}\cap\left(y+\mathcal{C}\left(\hat{N}_\theta\left(y\right),\rho\right)\right)\right)}{\omega_n\rho^n}=1,\quad \text{for } \mathcal{H}^n\text{-a.e. } y\in\Gamma^t_{s;\theta}.$$

对于满足 $\rho_j\to 0$ （当 $j\to\infty$ 时）的序列 $\{\rho_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，我们定义

$$f_j(y):=\frac{\mathcal{H}^n\left(\Gamma^t_{s;\theta}\cap\left(y+\mathcal{C}\left(\hat{N}_\theta\left(y\right),\rho_j\right)\right)\right)}{\omega_n\rho_j^n},$$

于是，对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的点， $f_j\to 1$ $y\in\Gamma^t_{s;\theta}$。由 Egoroff 定理和 [EG15，引理 1.1], ，存在一个紧集 $\mathcal{U}_1\subset\Gamma^t_{s;\theta}$，使得 $f_j\to 1$ 在 $\mathcal{U}_1$ 上一致收敛，且 $\mathcal{H}^n(\Gamma^t_{s;\theta}\setminus\mathcal{U}_1)<\frac{1}{2}\mathcal{H}^n(\Gamma^t_{s;\theta})$。对于 $\Gamma^t_{s;\theta}\setminus\mathcal{U}_1$，我们可以再次使用 Egoroff 定理，找到一个紧集 $\mathcal{U}_2\subset\Gamma^t_{s;\theta}\setminus\mathcal{U}_1$，使得$f_j\to 1$ 在 $\mathcal{U}_2$ 上一致收敛，且 $\mathcal{H}^n\left(\Gamma^t_{s;\theta}\setminus(\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2)\right)<\frac{1}{2^2}\mathcal{H}^n(\Gamma^t_{s;\theta})$。通过归纳论证，我们得到一列紧集 $\{\mathcal{U}_j\}_{j=1}^\infty$，使得 $\mathcal{H}^n(\Gamma^t_{s;\theta}\setminus\bigcup_{j=1}^\infty\mathcal{U}_j)=0$，且 $f_j\to 1$在每个 $\mathcal{U}_j$上一致收敛。因此，我们有

$$\mu_j^*(\rho):=\sup_{y\in\mathcal{U}_j}\left|1-\frac{\mathcal{H}^n\left(\Gamma^t_{s;\theta}\cap(y+\mathcal{C}(\hat{N}_\theta(y),\rho)\right)}{\omega_n\rho^n}\right|\to 0\quad\text{as } \rho\to 0^+. \tag{3.16}$$

这表明 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 除去一个 $\mathcal{H}^n$-可忽略集外，可被可数并个紧集覆盖。

固定任意的 $y\in\mathcal{U}_j\subset\Gamma^t_{s;\theta}$，由 C^1-隐函数定理可知， $\mathcal{U}_j\subset\Gamma^t_{s;\theta}$ 在 y 的某个邻域内是一个 C^1-函数 $\psi_j(\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$ 的图。因此，经过对 $\mathcal{U}_j$ 进一步细分后，我们可以假设每个 $\mathcal{U}_j$ 都满足：对于每个 $y\in\mathcal{U}_j$，存在

$$\psi_j\in C^1(\{\hat{N}_\theta(y)\}^\perp),\quad \psi_j(0)=0,\quad \nabla\psi_j(0)=0,\quad ||\nabla\psi_j||_{C^0(\{\hat{N}_\theta(y)\}^\perp)}\le 1, \tag{3.17}$$

使得，若 $\mathcal{U}_j'$ 表示 $\mathcal{U}_j$ 在 $\{\hat{}N_\theta(y)\}^\perp\cap\{|z|<\rho_j\}$上的投影，则

$$\mathcal{U}_j\cap(y+\mathcal{C}(\hat{N}_\theta(y),\rho_j))=\Gamma^t_{s;\theta}\cap(y+\mathcal{C}(\hat{N}_\theta(y),\rho_j))=y+\{z+\psi_j(z)\hat{N}_\theta(y):z\in\mathcal{U}_j'\}, \tag{3.18}$$

这里 ρ_j、 ψ_j 取决于点 $y\in\mathcal{U}_j$ 的选取。此外，如果我们令

$$\mu_j(\rho):=\max\left\{\mu_j^*(\rho),\max_{|z|\le\rho}|\nabla\psi_j(z)|\right\},\quad \rho\in(0,\rho_j], \tag{3.19}$$

然后 $\mu_j(\rho)\to 0$ 作为 $\rho\to 0^+$ 由（3.16）以及 $\nabla\psi_j$的连续性可得。这完成了覆盖 $\{\mathcal{U}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$。

接下来，我们需要证明 N_θ 在每个 $\mathcal{U}_j$上都是利普希茨的，也就是说，对于任意 y_1， $y_2\in\mathcal{U}_j$，都存在 $C_j>0$，使得对每个 j，

$$|N_\theta(y_1)-N_\theta(y_2)|\le C_j|y_1-y_2|. \tag{3.20}$$

由于 $\mathcal{U}_j$ 可以表示为一个 C^1-图，且 命题 3.6(3)、(3.13)、引理 3.4(3) 和(3.19) 均成立，我们可以在 [DM19,(3-16)]中采用完全相同的方法，得到

$$|\hat{N}_\theta(y_1)-\hat{N}_\theta(y_2)|\le\tilde{C}_j|y_1-y_2|. \tag{3.21}$$

为证明（3.20）成立，我们利用三角不等式得到

$$|N_\theta(y_1)-N_\theta(y_2)|\le|N_\theta(y_1)\Big||\hat{N}_\theta(y_1)-\hat{N}_\theta(y_2)\Big|+\Big||N_\theta(y_1)|-|N_\theta(y_2)|\Big|,$$

利用（3.5），可得

$$\begin{aligned}\left|\,|N_\theta(y_1)|-|N_\theta(y_2)|\,\right| =& \frac{\left|\cos\theta\left(\hat{N}_\theta(y_2)-\hat{N}_\theta(y_1)\right)\cdot E_{n+1}\right|}{\left(1+\cos\theta\hat{N}_\theta(y_1)\cdot E_{n+1}\right)\left(1+\cos\theta\hat{N}_\theta(y_2)\cdot E_{n+1}\right)}\\ \leq& \frac{|\cos\theta|}{(1-|\cos\theta|)^2}\left|\hat{N}_\theta(y_1)-\hat{N}_\theta(y_2)\right|.\end{aligned}$$

这一点与估计（3.2）以及（3.21）结合，恰好得到（3.20）。

回想一下，$\Gamma^t_{s;\theta}$ 可以被 $\{\mathcal{U}_j\}$覆盖，除去一个 $\mathcal{H}^n$-零测集，因此，根据 Rademacher 定理，N_θ 在 $\mathcal{H}^n$- $y\in\Gamma^t_{s;\theta}$几乎处处沿着 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 切向可微。

证明的结论。 $C^{1,1}$**-可求 rectifiability 的**$\Gamma^+_{s\,\theta;}$。

由 (3.13) 和 (3.20)，在每个 $\mathcal{U}_j$ 上，我们可以使用 Whitney-Glaser 延拓定理，得到存在 $\phi_\theta\in C^1$,1(R^{n+1})，使得 $(\delta_\theta,N_\theta)=(\phi_\theta,\nabla\phi_\theta)$ 于 $\mathcal{U}_j$。接着，由 C^1,1-隐函数定理，对于每个 $y\in\mathcal{U}_j$，存在 $\psi_j\in C^{1,1}(\left\{\hat{}N_\theta(y)\right\}^\perp)$，满足 (3.18)，由此完成证明。 (3.17)

□

命题 3.7。 给定 $\theta\in(0,\pi)$，设 Ω 是 $\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中一个非空、有界的相对开集，且具有有限周长；对于每个 $0<t<\infty$，以及几乎处处的 $0<s<t$，有

(1) N_θ 沿 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 在 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $y\in\Gamma^t_{s;\theta}$处切向可微，且

$$\begin{cases}\nabla^{\Gamma^t_{s;\theta}}\hat{N}_\theta(y)=-\sum_{i=1}^n(\kappa^t_{s;\theta})_i(y)\tau_i(y)\otimes\tau_i(y),\\ -1/s\leq(\kappa^t_{s;\theta})_i(y)\leq 1/(t-s),\end{cases} \tag{3.22}$$

其中，$\left\{\left(\kappa^t_{s;\theta}\right)_i(y)\right\}_{i=1}^n$ 表示 $\hat{}N_\theta$ 沿 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 在 y 处的主曲率，按递增顺序排列。

(2) 令 $\Omega^\star_\theta:=\bigcup_{s>0}\Gamma^+_{s\,\theta;}$，则 $|\Omega\Delta\Omega^\star_\theta|=0$.

(3) 对每个 $r<s<t$，映射 $g_{r;\theta}$： $\Gamma^t_{s;\theta}\to\Gamma^t_{s-r;\theta}$，定义为 $g_{r;\theta}(y)=y-r(\hat{}N_\theta(y)+$余弦 $\theta E_{n+1})$（$y\in\Gamma^t_{s;\theta}$时），是从 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 到 $\Gamma^t_{s-r;\theta}$ 的双射，并且限制在每个 $\mathcal{U}_j$上时是利普希茨的，其中

$$J^{\Gamma^t_{s;\theta}}g_{r;\theta}(y)=\prod_{i=1}^n\left(1+r(\kappa_{s;\theta})_i(y)\right),\quad (\kappa^t_{s-r;\theta})_i(g_{r;\theta}(y))=\frac{(\kappa^t_{s;\theta})_i(y)}{1+r(\kappa^t_{s;\theta})_i(y)}, \tag{3.23}$$

对 $\mathcal{H}^n$ 几乎处处的 $y\in\Gamma^t_{s}$。

证明。 **(1)** 考虑以下由 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 根据定理 3.1 的结论得到的对象。回顾一下，我们已经证明：N_θ 沿着 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 在 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $y\in\Gamma^t_{s;\theta}$ 可切向微分 定理 3.1中，这是通过构造一列紧集 $\mathcal{U}_j$完成的，使得 $\mathcal{H}^n(\Gamma^t_s\setminus\bigcup_{j=1}^\infty\mathcal{U}_j)=0$，其中每个 $\mathcal{U}_j$ 都被证明包含在某个 C^1-1 函数的图像中，在该图像上 N_θ 是利普希茨连续的，见式（3.20）。

根据 引理 2.2，为了研究 $\hat{}N_\theta$ 沿着 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 的切向梯度，只需在每个 $\mathcal{U}_j$ 上进行研究（3.17）和（3.18 中给出了 $\mathcal{U}_j$ 的构造）。

$\hat{}$ 为继续进行，对于任意 $y \in \mathcal{U}_j$，我们考虑 N_θ 的一种自然 Lipschitz 延拓，从 $\mathcal{U}_j \cap \Big(y + \mathcal{C}(\hat{}N_\theta(y),\ \rho)\Big)$ 到 $y + \mathcal{C}(\hat{}N_\theta(y),\ \rho)$，记作 $\hat{}N_{\theta *}$，其定义为

$$\hat{N}_{\theta *}(y + z + h\hat{N}_\theta(y)) = \hat{N}_\theta(y + z), \quad \forall z \in \{\hat{N}_\theta(y)\}^\perp, |z|, h < \rho_j, \tag{3.24}$$

其中 $\hat{}N_\theta(y+z)$ 只是图形 $(x', \psi_j(x'))$ 在 $y + z \in \mathcal{U}_j'$ 处朝上的单位法向量。利用这样的 Lipschitz 延拓，并回顾 命题 3.6(3)，我们可以沿用 [DM19，定理 1，步骤1] 中的经典论证，得出 **(1)**。

(2) 我们将证明分为两步。

步骤 1。 对于每个 $0 < s < t < \infty$，均有

$$\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_t) \le (t/s)^n \mathcal{H}^n(\Gamma^t_{s;\theta}). \tag{3.25}$$

事实上，对于 $r \in [-s, t-s]$，我们考虑映射

$$f_{r;\theta} : \Gamma^t_{s;\theta} \to \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_{s+r}, \quad f_{r;\theta}(y) = y + r(\hat{N}_\theta(y) + \cos\theta E_{n+1}). \tag{3.26}$$

为了证明 $f_{r;\theta}(y) \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_{s+r}$，我们利用 (3.10)。注意，根据 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 的定义，映射 $f_{t-s;\theta}$ 是满射；也就是说，$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_t = f_{t-s;\theta}(\Gamma^t_{s;\theta})$。因此，我们可以使用面积公式 (2.1) 得到

$$\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_t) = \mathcal{H}^n(f_{t-s;\theta}(\Gamma^t_{s;\theta})) \le \int_{f_{t-s;\theta}(\Gamma^t_{s;\theta})} \mathcal{H}^0(f^{-1}_{t-s;\theta}(z))\mathrm{d}\mathcal{H}^n(z) = \int_{\Gamma^t_{s;\theta}} \mathrm{J}^{\Gamma^t_{s;\theta}} f_{t-s}\mathrm{d}\mathcal{H}^n, \tag{3.27}$$

其中，$\mathrm{J}^{\Gamma^t_{s;\theta}} f_{t-s;\theta}$ 表示 $\Gamma^t_{s;\theta}$上的 $f_{t-s;\theta}$ 的切向雅可比。根据**(1)**，经过简单计算可得

$$\mathrm{J}^{\Gamma^t_{s;\theta}} f_{t-s;\theta} = \prod_{i=1}^n (1 - (t-s)(\kappa^t_{s;\theta})_i) \le (1 + \frac{t-s}{s})^n = (\frac{t}{s})^n \quad \mathcal{H}^n\text{-}a.e.\ \text{on}\ \Gamma^t_{s;\theta},$$

这里我们在不等式中用到了（3.22）。特别地，至此完成了该步骤。**步骤 2**。 $|\Omega \Delta \Omega^\star_\theta| = 0$。

我们首先应用余面积公式，得到

$$\frac{|\Omega\Delta\Omega^\star_\theta|}{1 + |\cos\theta|} \le \int_{\Omega\Delta\Omega^\star_\theta} |\nabla\delta_\theta| \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} = \int_0^\infty \mathcal{H}^n\left((\Omega\Delta\Omega^\star_\theta) \cap \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s\right) \mathrm{d}s = \int_0^\infty \mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s \setminus \Gamma^+_{s;\theta})\mathrm{d}s, \tag{3.28}$$

其中，第一个不等式用到了（3.2）；最后一个等式则利用了$\Gamma^+_{s;\theta} \subset \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s$ 这一事实。

断言。 对于几乎处处的 $s > 0$，有

$$\mathcal{H}^n(\Gamma^+_{s;\theta}) = \mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s). \tag{3.29}$$

若该断言成立，我们立即由 $|\Omega\Delta\Omega^\star_\theta| = 0$ 根据（3.28），推出 **（2）**。现在我们来证明该断言。再次利用余面积公式和估计（3.2），可得：对于每个 $0 < s < t < \infty$,

$$\int_s^t \mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_r)\mathrm{d}r = \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} |\nabla\delta_\theta| \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} \le \frac{|\Omega_s \setminus \Omega_t|}{1 - |\cos\theta|} \le \frac{|\Omega|}{1 - |\cos\theta|} < \infty,$$

这意味着函数 $\mathcal{H}^n(\partial\Omega_r)$ 在任意 $[s,t] \subset \mathbf{R}^+$ 上都是可积的。因此，我们可以利用勒贝格-贝西科维奇微分定理（例如参见 [EG15，定理 1。32]）来

得到

$$\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_{s+r})\mathrm{d}r \quad \text{for a.e. } s>0, \tag{3.30}$$

由此 (3.25) 和 命题 3.6(1),

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\mathcal{H}^n(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_{s+r})\mathrm{d}r \le \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(1+r/s)^n\mathcal{H}^n(\Gamma^{s+r}_{s;\theta})\mathrm{d}r \le (1+\epsilon/s)^n\mathcal{H}^n(\Gamma^{+}_{s;\theta}).$$

由于 $\Gamma^{+}_{s;\theta}\subset\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s$，这证明了（3.29），从而得到 **(2)**。

(3) 根据（3.10），$g_{r;\theta}$ 是 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 与 $\Gamma^t_{s-r;\theta}$ 之间的一个双射，对每个 $r\in(0,s)$以及 $t>0$均成立。我们注意到，如果 y 是 N_θ 沿着 $\Gamma^t_{s;\theta}$的一个切向可微点，那么$g_{r;\theta}(y$是 N_θ 沿着 $\Gamma^t_{s-r;\theta}$的一个切向可微点。事实上，根据**断言 1** 的证明中引理 3.4(3)，我们有

$$\hat{N}_\theta(y)=\hat{N}_\theta(g_{r;\theta}(y))=\hat{N}_\theta\left(y-r(\hat{N}_\theta(y)+\cos\theta E_{n+1})\right) \quad \text{for all } y\in\Gamma^t_{s;\theta}, \tag{3.31}$$

因此，若 y 是 N_θ 沿 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 和 $\tau\in T_y\Gamma^t_{s;\theta}$ 切向可微的点，则 $\tau\in T_{g_{r;\theta}(y)}\Gamma^t_{s-r;\theta}$ 且

$$(\nabla^{\Gamma^t_{s;\theta}}\hat{N}_\theta)_y[\tau]=(\nabla^{\Gamma^t_{s-r;\theta}}\hat{N}_\theta)_{g_{r;\theta}(y)}\left[\tau-r(\nabla^{\Gamma^t_{s;\theta}}\hat{N}_\theta)_y[\tau]\right].$$

˄ 考虑 $\{\tau_i(y)\}_{i=1}^n$ 在 N_θ 中的特征向量（3.22），可得

$$-(\kappa^t_{s;\theta})_i(y)\tau_i(y)=(1+r(\kappa^t_{s;\theta})_i(y))(\nabla^{\Gamma^t_{s-r;\theta}}\hat{N}_\theta)_{g_{r;\theta}(y)}[\tau_i(y)],$$

这意味着，$\{\tau_i(y)\}_{i=1}^n$ 也是$T_{g_{r;\theta}(y)}\Gamma^t_{s-r;\theta}$的一组标准正交基，因此

$$(\kappa^t_{s-r;\theta})_i(g_{r;\theta}(y))=\frac{(\kappa^t_{s;\theta})_i(y)}{1+r(\kappa^t_{s;\theta})_i(y)}.$$

沿$g_{r;\theta}$ 的切向雅可比 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 可直接计算，由此完成（3.23）的证明。□

4. Proof of the Alexandrov-type theorem

本节证明定理 1.3。为简单起见，注意到经过重新缩放后，我们可以假设 $H^0_{\Omega;\theta}=n$ 在（2.15）中。

命题 4.1。在定理 *1.3*的假设下，有

$$|\Omega^\star_\theta\setminus\zeta_\theta(Z)|=0, \tag{4.1}$$

其中

$$Z=\left\{(x,t)\in\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\times\mathbf{R}:0<t\le\frac{1}{\kappa_n(x)}\right\}, \tag{4.2}$$

且 ζ_θ通过 ζ_θ： $Z\to\mathbf{R}^{n+1}$; $(x,t)\mapsto x-t(\nu_\Omega(x)$ $-$余弦$\theta E_{n+1})$定义。

证明。 如引言中所述，我们首先关注 $g^{-1}_{s\theta}(x)$ 对于$x\in$reg$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的计数测度。

步骤 1. 我们证明，对于所有 $x\in\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，均有

$$\mathcal{H}^0(g^{-1}_{s;\theta}(x))\le 2. \tag{4.3}$$

反设存在某个 $x \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，使得 $\mathcal{H}^0(g_{s\theta}^{-1}(x)) \geq 3$。

如果 x 位于 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的内部，考虑到 $\mathrm{var}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$ 具有常数广义平均曲率，并且根据单调性公式 [Sim83, 定理 17.6]，，任意 $C \in \mathrm{VarTan}(\mathrm{var}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega), x)$ 都将是一个非平凡的平稳 varifold，满足 $\Theta^n(\|C\|, q) \geq 1$ 对所有 $q \in \mathrm{spt}\|C\|$，其支集包含于两个非相对的半空间的交集中。得益于一致密度下界，C 根据可求 rectifiability 定理[Sim83, 定理 42.4], 是可求 rectifiability 的，并且由 [Sim83, 定理 19.3] 可知 C 是一个可求 rectifiable 锥。根据构造，$\|C\|$ 支撑于两个非相对的半空间中，因此我们可以使用内部强最大值原理Lemma 2.14 导出矛盾。

如果 x 是 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的边界点，即 $x \in \Gamma \subset \partial\mathbf{R}^{n+1}_+$，我们有以下关键观察。

[1]**断言**。对于所有 $x \in \Gamma$，不可能存在某个 $y \in \Omega \cap \mathbf{R}^{n+1}_+$ 使得 $x = g_{s;\theta}(y)$（也就是说，y 不可能是 Ω 中位于开上半空间的那些点）。

反之，假设存在某个 $s > 0$ 和某个 $y \in \Omega \cap \mathbf{R}^{n+1}_+$，使得 $x = g_{s;\theta}(y)$，我们的目标是证明这种情况不可能。事实上，令 $\nu := \frac{y - s\cos\theta E_{n+1} - x}{|y - s\cos\theta E_{n+1} - x|}$；由于 y 位于 Ω 的内部，并且回忆 ~~$\delta_\theta(y) = s$~~，我们知道 that

$$\nu \cdot (-E_{n+1}) = -\frac{y \cdot E_{n+1}}{s} + \cos\theta < \cos\theta,$$

这意味着 $\alpha := \arccos(\nu \cdot -E_{n+1}) > \theta$ 严格递增。

y 在 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$上的投影必须位于 T中，这是我们的第一个观察；否则，使 y 取得其平移距离的点不可能位于 Γ中，这与$x = g_{s;\theta}(y)$矛盾。

接着我们注意到，由于 Γ 是 $\partial\mathbf{R}^{n+1}$中的光滑（$n-1$）流形，放大极限 $\tilde{T}$ 是 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$中的一个 n-半平面，而 $\tilde{\Gamma}$ 是 $\tilde{T}$ 在 $\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$中的相对边界（当然也是一个~（$n-1$）平面）。由于 $x = g_{s;\theta}(y)$且 $H^- = \{z \cdot \nu \leq 0\}$，我们知道（$n-1$）平面 Γ必与（$n-1$）平面 $\partial H^- \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}_+$重合；否则存在某个 $x' \neq x \in \Gamma$ 使得 $\mathrm{dist}(y - s\cos\theta E_{n+1}, x') < s = \mathrm{dist}(y - s\cos\theta E_{n+1}, x)$，这再次与$x = g_{s;\theta}(y)$这一事实矛盾。

根据第二个观察，我们知道 $\tilde{T}$ 必须是 $H^+ \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 或 $H^- \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}$，而 $\tilde{T} = H^- \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}_+$ 的可能性则由第一个观察排除。根据第 2.7 节中的论证，在 x 处存在一个放大极限，它是由可求 rectifiable 锥组成的三元组，例如 $\left(\mathrm{var}(\tilde{M}, \psi_1), \mathrm{var}(\tilde{T}), \mathrm{var}(\tilde{\Gamma})\right)$，且为 θ-驻定。此外，根据构造，$\mathrm{var}(\tilde{M}, \psi_1)$ 的支集包含于闭半空间 $H^- = \{z \in \mathbf{R}^{n+1} : z \cdot \nu \leq 0\}$。因此，我们可以对 θ-驻定三元组$\left(\mathrm{var}(\tilde{M}, \psi_1), \mathrm{var}(\tilde{T}), \mathrm{var}(\tilde{\Gamma})\right)$ 应用边界最大值原理引理 2.17，从而与 $\pi > \alpha > \theta > 0$ 这一事实矛盾，由此证明该断言。

由该断言可知，当 $x \in \Gamma$ 时，必有 $x = g_{s;\theta}(y)$，其中某个 $y \in \Omega \cap \partial\mathbf{R}^{n+1}_+ \subset \overline{T}$。在这种情况下，按照该断言的证明，并注意到 $\alpha = \theta$ 因为 $y \in \partial\mathbf{R}^{n+1}_+$，我们可以再次运用边界最大值原理引理 2.16、引理 2.17，得出当 $\theta \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ 时，H^- 由满足 $x = g_{s;\theta}(y)$ 的点 $y \in T$ 唯一确定，因此至多存在一个 $y \in T$ 满足 $x = g_{s;\theta}(y)$。至此，(4.3) 得证。

步骤 2. 我们证明（4.1）。

[1]如果 x 是正则点，则该断言已在 [Jia+22，定理 1.1 的证明，情形 2]。

利用余面积公式，我们得到

$$\frac{|\Omega_\theta^\star \setminus \zeta_\theta(Z)|}{1+|\cos\theta|} \le \int_{\Omega_\theta^\star\setminus\zeta_\theta(Z)} |\nabla\delta_\theta| \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} = \int_0^\infty \mathcal{H}^n\left((\Omega_\theta^\star \setminus \zeta_\theta(Z)) \cap \Gamma^+_{s;\theta}\right) \mathrm{d}s = \int_0^\infty \mathcal{H}^n\left(\Gamma^+_{s;\theta} \setminus \zeta_\theta(Z)\right) \mathrm{d}s,$$

此处我们在不等式中使用了估计式（3.2），在最后一个等式中使用了（3.29）。

由于 $x \in \mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 和 $y \in \Gamma^+_{s;\theta}$ 满足 $y = x - s(\nu_\Omega(x) - \cos\theta E_{n+1})$ 当且仅当 $x = y - s(N_\theta(y) + \cos\theta E_{n+1}) = g_{s;\theta}(y)$，其中 $g_{s;\theta}$ 如 命题 3.7(3)所述。特别地，我们有[2]

$$\zeta_\theta(Z) \cap \Gamma^+_{s;\theta} = g_{s;\theta}^{-1}\left(\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\right) \quad \text{for all } s > 0.$$

考虑到 $g_{s;\theta}^{-1}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) \subset \Gamma^+_{s;\theta}$，为证明（4.1），我们只需证明对几乎处处的 $s > 0$，有

$$\mathcal{H}^n\left(g_{s;\theta}^{-1}\left(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\right)\right) = 0. \tag{4.4}$$

换言之，$\Gamma^+_{s;\theta}$ 中投影到 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 后落在奇异集 $\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 上的点，其 $\mathcal{H}^n$-测度为零。事实上，我们将证明对每个满足（4.4）的 $s > 0$，（3.29）也成立；接着我们将用反证法进行证明。具体而言，假设 $\mathcal{H}^n(\Gamma^+_{s;\theta}) = \mathcal{H}^n(\partial\Omega_s)$，且

$$\mathcal{H}^n\left(g_{s;\theta}^{-1}\left(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\right)\right) > 0. \tag{4.5}$$

特别地，存在某个 $t > s$，使得 $\mathcal{H}^n\left(\Gamma^t_{s;\theta} \cap g_{s;\theta}^{-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)\right) > 0$

I .

现在我们调用关键假设 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 0$，利用面积公式 (2.1) 和 (4.3)，可得

$$0 = 2\mathcal{H}^n\left(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\right) \ge \int_{\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \mathcal{H}^0(g_{s;\theta}^{-1}(x)) \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) = \int_{g_{s;\theta}^{-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)} \mathrm{J}^{\Gamma^t_{s;\theta}} g_{s;\theta} \mathrm{d}\mathcal{H}^n,$$

其中 $\mathrm{J}^{\Gamma^t_{s;\theta}} g_{s;\theta} = \prod_{i=1}^n (1 + s(\kappa^t_{s;\theta})_i) \ge 0$ 沿着 $\Gamma^t_{s;\theta}$，根据 命题 3.7(1) 和 (3.22)。假设 (4.5) 成立，且由于 $\{(\kappa^t_{s;\theta})_i\}_{i=1}^n$ 按递增顺序排列，我们推得

$$\mathcal{H}^n\left(\left\{y \in \Gamma^t_{s;\theta} : (\kappa^t_{s;\theta})_1(y) = -1/s\right\}\right) \ge \mathcal{H}^n\left(\Gamma^t_{s;\theta} \cap g_{s;\theta}^{-1}\left(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\right)\right) > 0. \tag{4.6}$$

由 (3.23)，可得

$$\Lambda^t_{s-r} := \left\{\tilde{y} \in \Gamma^t_{s-r;\theta} : (\kappa^t_{s-r;\theta})_1(\tilde{y}) = -1/(s-r)\right\} = g_{r;\theta}\left(\left\{y \in \Gamma^t_{s;\theta} : (\kappa^t_{s;\theta})_1(y) = -1/s\right\}\right).$$

回想一下，$g_{r;\theta} : \Gamma^t_{s;\theta} \to \Gamma^t_{s-r;\theta}$ 是单射，因此面积公式 (2.1) 给出

$$\mathcal{H}^n\left(\Lambda^t_{s-r}\right) = \int_{\left\{y \in \Gamma^t_{s;\theta} : (\kappa^t_{s;\theta})_1(y) = -1/s\right\}} \mathrm{J}^{\Gamma^t_{s;\theta}} g_{r;\theta} \mathrm{d}\mathcal{H}^n.$$

再次利用（3.22），我们有：对于每个 $r \in (0, s)$，$\mathrm{J}^{\Gamma^t_{s;\theta}} g_{r;\theta} = \prod_{i=1}^n (1 + r(\kappa^t_{s;\theta})_i)$ 沿 $\ge (1 - r/s)^n > 0$，因此（4.6）意味着：对于每个 $r \in (0, s)$，有

$$\mathcal{H}^n(\Lambda^t_{s-r;\theta}) > 0. \tag{4.7}$$

[2]这里我们作如下说明：**1.** 回顾 $\Gamma^t_{s;\theta}$ 的定义，我们知道，对于任意满足 $B_s(y - \cos\theta E_{n+1})$ 从内部在某个 $x \in \mathrm{reg}(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$ 处与 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 相切的 $y \in \Gamma^+_{s;\theta}$，都有 $1/\kappa_n(x) \ge s$，参见 [Jia+22 中定理 1 的证明。1]。因此，根据上述“当且仅当”的观察，我们知道 $y \in \zeta_\theta(Z)$；**2.** $g_{s;\theta}^{-1}$指的是那些经映射 $g_{s;\theta}$ 从 $\Gamma^+_{s;\theta}$ 映到 $x \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的点的原像。

注意到映射 $a \mapsto a/(1+ra)$ 在 $a \geq 0$上是递增的，利用（3.23），我们得到：对于每个 $\tilde{y} \in \Lambda^t_{s-r;\theta}$ 满足 $\tilde{y} = g_{r;\theta}(y)$ 且对某个 $y \in \Gamma^t_{s;\theta}$，有

$$\sum_{i=1}^{n}(\kappa^t_{s-r;\theta})_i(\tilde{y}) = -\frac{1}{s-r} + \sum_{i=2}^{n}\frac{(\kappa^t_{s;\theta})_i(y)}{1+r(\kappa^t_{s;\theta})_i(y)} \leq -\frac{1}{s-r} + (n-1)\frac{1/(t-s)}{1+(r/(t-s))} \leq 0, \quad (4.8)$$

满足 $r \in (r_0, s)$，其中 r_0 取决于 s，t，且足够接近 s。

让我们考虑集合

$$\Lambda_\theta := \bigcup_{r_0<r<s} \Lambda^t_{s-r;\theta}.$$

根据余面积公式、估计式（3.2）和（4.7），我们得到

$$\frac{|\Lambda_\theta|}{1-|\cos\theta|} \geq \int_{\Lambda_\theta} |\nabla\delta_\theta| \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} = \int_{r_0}^{s} \mathcal{H}^n(\Lambda_\theta \cap \partial\Omega_{s-r})\mathrm{d}r = \int_{r_0}^{s} \mathcal{H}^n(\Lambda^t_{s-r;\theta})\mathrm{d}r > 0.$$

回顾一下，我们使用隐函数定理得到 $C^{1,1}$ 函数 ψ_j，使得每个 $\mathcal{U}_j$ 确实都是 ψ_j 的图像（见 (3.18)）。由 ψ_j 在 $\mathcal{U}_j$ 中几乎处处的 $\mathcal{H}^n$ 点具有二阶微分 $\nabla^2\psi_j$ 这一事实，结合 (4.7) 以及 $|\Lambda_\theta| > 0$ 这一事实，我们得到：存在某个 $r \in (r_0, s)$ 和某个 $y_0 \in \Lambda^t_{s-r;\theta} \cap \mathrm{R}^{n+1}_+ \subset \Gamma^t_{s-r;\theta} \cap \mathrm{R}^{n+1}_+$，在该处 ψ_j 二阶可微，并且 $\hat{} N_\theta$ 在 y_0 处沿 $\Gamma^t_{s-r;\theta}$ 切向可微，其中 $x_0 := \xi_\theta(y_0)$ 位于 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的内部（这要归功于 (4.3) 证明中的断言），当然

$$\nabla^{\Gamma^t_{s-r;\theta}}\hat{N}_\theta(y_0) = \left(-\sum_{i=1}^{n}(\kappa^t_{s-r;\theta})_i(y_0)\right)\tau_i(y_0)\otimes\tau_i(y_0) \quad (4.9)$$

由（3.22）可知。此外，根据（4.8），我们还有

$$\sum_{i=1}^{n}(\kappa^t_{s-r;\theta})_i(y_0) \leq 0. \quad (4.10)$$

$\hat{}$ 现在我们设 $\nu = -N_\theta(y_0)$，并且

$$\mathbf{D}_\rho := \{z \in \nu^\perp : |z| < \rho\}, \quad \mathbf{C}_\rho := \{z + h\nu : z \in \mathbf{D}_\rho, |h| < \rho\}, \quad \text{for } \rho > 0.$$

利用 ψ_j 在 y_0处的二阶可微性，由（3.18），并注意到对于水平集$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s = \{\delta_\theta = s\}$，$\nu$ 是其在 y_0 处的单位法向量，且 y_0 处的平均曲率由下式给出

$$|\nabla\delta_\theta(y_0)|H_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega_s}(y_0) = \Delta\delta_\theta(y_0) - \nabla^2\delta_\theta(\nu,\nu) = \sum_{i=1}^{n}\nabla^2\delta_\theta(\tau_i(y_0),\tau_i(y_0)),$$

同时考虑（4.9）和（4.10），对于每个 $\epsilon > 0$，都有：存在某个 $\rho > 0$ 以及一个二阶多项式 $\eta : \nu^\perp \cong \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$，使得 $\eta(0) = 0$，$\nabla\eta(0) = 0$，并且

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}\right)(z) &\leq -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}\right)(0) + \epsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(\kappa^t_{s-r;\theta})_i(y_0) + 2\epsilon \leq 2\epsilon \end{aligned} \quad (4.11)$$

对每个 $z \in \mathbf{D}\rho$ 和

$$y_0 + \{z + h\nu : z \in \mathbf{D}_\rho, -\rho < h < \eta(z)\} \subset (y_0 + \mathbf{C}_\rho) \cap \Omega_{s-r}. \quad (4.12)$$

ˆ 现在我们将 Ω 平移 $(s-r)(N_\theta(y_0) + \cos\theta E_{n+1})$，回想一下， $x_0 = \xi_\theta(y_0)$ 位于 Ω 的内部∂_{rel}，因此我们得到：存在一个足够小的 $\rho_1 > 0$，使得

$$\Omega_{s-r} \cap (y_0 + \mathbf{C}_{\rho_1}) \subset (\Omega + (s-r)(\hat{N}_\theta(y_0) + \cos\theta E_{n+1})) \cap (y_0 + \mathbf{C}_{\rho_1}),$$

with

$$y_0 \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega_{s-r} \cap \partial\left(\Omega + (s-r)(\hat{N}_\theta(y_0) + \cos\theta E_{n+1})\right) \cap (y_0 + \mathbf{C}_{\rho_1}).$$

我们处于 p彩在线 利用 Sch¨atzle 的强极大值原理 定理 2.18，其中

$$M = \partial\left(\Omega + (s-r)(\hat{N}_\theta(y_0) + \cos\theta E_{n+1})\right),$$

ˆ$\nu = -N(y_0)$, $U = \mathbf{D}\rho_1$, $z_0 = 0$, $h_0 = \nu \cdot y_0 - \rho_1$ 和 η 如上所述。注意，如果我们令

$$\varphi(z) = \inf\{h \in (h_0, \infty) : z + h\nu \in M\}, \quad z \in \mathbf{D}_{\rho_1},$$

那么我们有 $h_0 < \eta \le \varphi < \infty$ 在 $\mathbf{D}\rho_1$，当然 $\varphi(0) = \eta(0) = 0$。按照 [DM19，步骤 4]，通过比较平均曲率，我们根据 Sch¨atzle 的强极大值原理定理 2.18得出矛盾。特别地，这证明了（4.1）。

□

定理 *1.3* 的证明定理 *1.3*。由（4.1），我们现在可以应用 [Jia+22]中的经典流方法。

步骤 1. 应用流方法。

由 命题 3.7**(2)** 和 **(4.1)**，利用面积公式，我们得到

$$|\Omega| = |\Omega_\theta^\star| \le |\zeta_\theta(Z)| \le \int_Z \mathcal{H}^0(\zeta_\theta^{-1}(y))\mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1}(y) = \int_Z \mathrm{J}^Z\zeta_\theta \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1},$$

经过经典计算可得

$$\mathrm{J}^Z\zeta_\theta(x,t) = (1 - \cos\theta\nu_\Omega(x) \cdot E_{n+1}) \prod_{i=1}^n (1 - t\kappa_i(x)),$$

因此我们得到

$$|\Omega| \le \int_Z \mathrm{J}^Z\zeta_\theta \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} = \int_{\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) \int_0^{\frac{1}{\max\{\kappa_i(x)\}}} (1 - \cos\theta\nu_\Omega \cdot E_{n+1}) \prod_{i=1}^n (1 - t\kappa_i(x))\mathrm{d}t.$$

由算术—几何平均不等式，以及 $\max\{\kappa_i(x)\} \ge H^0_{\Omega;\theta}/n$ 这一事实，我们得出 fin d

$$\begin{aligned}
|\Omega| &\le \int_{\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) \int_0^{\frac{1}{\max\{\kappa_i(x)\}}} (1 - \cos\theta\nu_\Omega \cdot E_{n+1}) \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (1 - t\kappa_i(x))\right)^n \mathrm{d}t \\
&\le \int_{\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} (1 - \cos\theta\nu_\Omega \cdot E_{n+1})\, \mathrm{d}\mathcal{H}^n \int_0^{\frac{n}{H^0_{\Omega;\theta}}} \left(1 - t\frac{H^0_{\Omega;\theta}}{n}\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{n+1} \int_{\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \frac{(1 - \cos\theta\nu_\Omega \cdot E_{n+1})}{H^0_{\Omega;\theta}} \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x).
\end{aligned}$$

根据 $H^0_{\Omega;\theta}$ 在（2.15）中的定义，我们看到整个论证中的等式均成立。特别地，我们有

$$|\zeta_\theta(Z)\setminus\Omega|=0, \tag{4.13}$$

$$\mathcal{H}^0(\zeta_\theta^{-1}(y))=1 \quad \text{for a.e. } y\in\Omega, \tag{4.14}$$

$$\kappa_i(x)=\frac{H^0_{\Omega;\theta}}{n} \quad \text{for every } x\in \mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega,\ \mathrm{i}=1,\dots,n. \tag{4.15}$$

步骤 2. 奇异点分析。

我们已经证明， $\partial\Omega$ 的正则部分必为球面。现在我们将再次借助 Sch¨atzle 的强极大值原理来分析奇异点。

事实上，回想一下，我们已经对 Ω 进行了重新缩放，使得 $H^0_{\Omega;\theta}=n$。根据 (4.15) 和杨氏定律，由于 $\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 在 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 中是相对开集，因此我们可以找到一族 $\{S_{\theta,i}\}_{i\in I}$, $I\subset\mathbb{N}$，它们是 $\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 中两两不相交的子集，其中 $S_{\theta,i}\subset\partial B_1(x_i-\cos\theta E_{n+1})\cap\mathbf{R}^{n+1}_+$，对于点 $x_i\in\partial\mathbf{R}^{n+1}_+$或$x_i\in\mathbf{R}^{n+1}_+$，满足 $(x_i-\cos\theta E_{n+1})\cdot E_{n+1}\geq 1$，其中 $\partial B_1(x_i-\cos\theta E_{n+1})\cap\mathbf{R}^{n+1}_+$或者是一个 θ-帽，或者是一个完全包含在 $\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中的球面，使得

$$\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega=\bigcup_{i\in I}S_{\theta,i},\quad S_{\theta,i}\text{ is relatively open in }\partial_{\mathrm{rel}}\Omega\text{ and is connected.} \tag{4.16}$$

由于 $S_{i;\theta}\subset\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，我们知道 $\delta_\theta(x_i)\leq 1$.

断言。 对于每个 $i\in I$, $\delta_\theta(x_i)=1$。

否则，存在某个常数 $\delta>0$，使得 $\delta_\theta(x_i)=1-4\delta$。注意到 $(B_{(1-|\cos\theta|)\delta}(x_i)\cap\mathbf{R}^{n+1}_+)\cap A_i\subset\Omega$ 非空，其中 $A_i=\zeta_\theta(S_i\times(0,1))$ 是 Ω 的一个开子集。对于任意 $y\in B_{(1-|\cos\theta|)\delta}(x_i)\cap\mathbf{R}^{n+1}_+\cap A_i$，我们有以下观察：

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}\,(y-(1-3\delta)\cos\theta E_{n+1},x_i-(1-4\delta)\cos\theta E_{n+1})\\ =&|y-x_i-\delta\cos\theta E_{n+1}|\leq|y-x_i|+\delta|\cos\theta|<\delta,\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了 $y\in B_{(1-|\cos\theta|)\delta}(x_i)$ 这一事实。再次利用三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\text{距离}\,(y-(1-3\delta)\cos\theta E_{n+1},\partial_{\mathrm{rel}}\Omega)\leq\text{距离}\,(y-(1-3\delta)\cos\theta E_{n+1},\xi_\theta(x_i))\leq\text{距离}\,(y-(1-3\delta)\cos\theta E_{n+1},x_i-(1-4\delta)\cos\theta E_{n+1})+\text{距离}\,(x_i-(1-4\delta)\cos\theta E_{n+1},\xi_\theta(x_i))\\ <&\delta+1-4\delta=1-3\delta,\end{aligned}$$

由（1.4）和（1.5）可知， $\delta_\theta(y)\geq 1-3\delta$ 不可能成立，这意味着 $\delta_\theta(y)<1-3\delta$。另一方面，对于任意 $x\in S_{\theta,i}\subset\partial B_1(x_i-\cos\theta E_{n+1})\cap\mathbf{R}^{n+1}_+$，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}\,(y-(1-\delta)\cos\theta E_{n+1},x)=|y-(1-\delta)\cos\theta E_{n+1}-x|\\ =&|\,(y-(1-\delta)\cos\theta E_{n+1}-(x_i-\cos\theta E_{n+1}))+(x_i-\cos\theta E_{n+1}-x)|\\ \geq&|x_i-\cos\theta E_{n+1}-x|-|y-x_i+\delta\cos\theta E_{n+1}|\\ =&1-|y-x_i+\delta\cos\theta E_{n+1}|\geq 1-(|y-x_i|+\delta|\cos\theta|)\\ >&1-\delta|\cos\theta|-\delta(1-|\cos\theta|)=1-\delta,\end{aligned}$$

其中第一和第二个不等式用到了三角不等式；最后一个不等式则用到了$y\in B_{(1-|\cos\theta|)\delta}(x_i)$这一事实。根据 (1.5)，我们知道，将其限制在$S_\theta$上时，$i$, $\delta_\theta(y)>1-\delta$。特别地，结合上述观察可得：对于任意 $y\in B_{(1-|\cos\theta|)\delta}(x_i)\cap\mathbf{R}^{n+1}_+\cap A_i$，必有 $\xi_\theta(y)\notin S_{\theta,i}$。由于命题 3.7(2) 和 (4.1) 表明，对于几乎处处的 $y\in\Omega$，存在 $x\in\mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，使得 $\xi_\theta(y)=x$，因此我们从

(4.16) 得出，对于几乎处处的$y \in B_{(1-|\cos\theta|)\delta}(x_i) \cap \mathbf{R}^{n+1}_+ \cap A_i$，存在 $j \neq i \in I$和 $x \in S_j$，使得 $\xi_\theta(y) = x$。特别地，$B_{(1-|\cos\theta|)\delta}(x_i) \cap \mathbf{R}^{n+1}_+ \cap A_i \cap A_j$是$\mathbf{R}^{n+1}_+$中的一个非空相对开集，因此我们必然有

$$0 < |B_{(1-|\cos\theta|)\delta}(x_i) \cap \mathbf{R}^{n+1}_+ \cap A_i \cap A_j|,$$

其中 $A_i \cap A_j \subset \{y \in \Omega\colon\ \mathcal{H}^0(\xi_\theta^{-1}(y)) \geq 2\}$。然而，这与（4.14）矛盾，从而证明了该断言。

为完成证明，我们还需说明，对于每个 i，S_i 的闭包（记作 T_i）要么是一个完整的 θ-帽，要么是一个完整球面，即 $T_i = \partial B_1(x_i - \cos\theta E_{n+1}) \cap \mathbf{R}^{n+1}_+$。为此，由于对每个 $i \in I$[3] 都有 $\delta_\theta(x_i) = 1$，我们可以在 $\mathbf{R}^{n+1}_+$ 中每个位于 $x \in T_i$ 的点处，将 $M = \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 与 $\partial B_1(x_i - \cos\theta E_{n+1})$ 在 x 附近进行比较，并应用强极大值原理定理 2.18，从而得到某个 $\rho_x > 0$，使得

$$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \cap B_{\rho_x}(x) \cap \partial B_1(x_i - \cos\theta E_{n+1}) = \partial B_1(x_i - \cos\theta E_{n+1}) \cap B_{\rho_x}(x).$$

这尤其意味着，在开半空间中，我们有 $\partial B_1(x_i - \cos\theta E_{n+1}) \cap \mathbf{R}^{n+1}_+ \subseteq \partial_{\mathrm{rel}}\Omega \cap \mathbf{R}^{n+1}_+$，因此整个 θ-帽 $\partial B_1(x_i - \cos\theta E_{n+1}) \cap \mathbf{R}^{n+1}_+ \subseteq \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$。

最后，由于 Ω 是一个有限周长集，因此 $I \subset \mathbb{N}$ 确实有限；由此可知，$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 是有限多个 θ 帽和等半径球面的并，从而完成证明。□

Appendix A. Cut-off functions near singularities

我们首先构造奇异点附近的实用截断函数$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$。该技术是标准的，这些截断函数对研究带奇异点的曲面非常有用，参见例如 [SS81；Ilm96；Wic14；DM17；Zhu18]。

引理 A.1. 设Ω 是 $\mathbf{R}^{n+1}_+$中的非空有界相对开集，且具有有限周长，并满足 $\mathcal{H}^{n-1}$(奇异点$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$) $= 0$。若 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 具有欧几里得体积增长，则对任意 $\epsilon > 0$，存在开集 $S'_\epsilon \subset S_\epsilon \subset \mathbf{R}^{n+1}$，满足 奇异点$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \subset S'_\epsilon$ 且 $S_\epsilon \subset \{x$：距离 $(x,$ 奇异点 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) < \epsilon\}$；并且存在一个光滑截断函数 $\varphi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$，使得 $0 \leq \varphi_\epsilon(x) \leq 1$，其中

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \in S'_\epsilon, \\ 1 & x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus S_\epsilon. \end{cases} \tag{A.1}$$

此外，φ_ϵ 满足以下性质：

$$\varphi_\epsilon(x) \to 1 \ \textit{pointwisely for}\ x \in \mathrm{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega, \tag{A.2}$$

$$\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} |\nabla^{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}\varphi_\epsilon(x)| \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) \leq C\epsilon, \tag{A.3}$$

其中，$\nabla^{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}$ 表示 φ_ϵ 相对于切空间 $T_x\partial\Omega$的切向梯度。由于条件 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 0$成立，它沿 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 几乎处处存在。这里以及下文中，C 均表示与 ϵ无关的正常数。

证明。我们首先注意到，sing$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$是紧集，因为它是闭且有界的

对于任意 $\epsilon > 0$，由于 $\mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 0$，我们可以用有限个球 $\mathcal{G} := \{B_{r_i}(z_i)\}_{i=1}^{N_1}$ 覆盖奇异集 sing$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，其中 $z_i \in \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$，$\sum_{i=1}^{N_1} r_i^{n-1} < \epsilon$，并且不失一般性地假设

[3]根据定义，我们有：dist$(x_i - \cos\theta E_{n+1}, \partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 1$，换言之，$\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$中不属于 T_i的部分（若存在）必定位于 $B_1(x_i - \cos\theta E_{n+1}) \cap \mathbf{R}^{n+1}_+$ 之外。

对每个 $r_i <$, diam(Ω) i, 从而欧几里得体积增长条件（2.10）对 z_i成立，参见命题 2.6的证明。

对于每个 i, 令 $\varphi_i \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ 满足 $0 \le \varphi_i \le 1$，其中

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in B_{r_i}(z_i), \\ 1 & \forall x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus B_{2r_i}(z_i), \end{cases}$$

并且对于所有 $x \in \mathbf{R}^{n+1}$, 都有 $|\nabla\varphi_i(x)| \le \frac{2}{r_i}$。

定义 $\tilde{\varphi}_\epsilon$ 如下:

$$\tilde{\varphi}_\epsilon(x) := \min_i \varphi_i(x).$$

由此可知, $\tilde{\varphi}_\epsilon$ 是分段光滑的，且 $0 \le \tilde{\varphi}_\epsilon \le 1$, 并且

$$\tilde{\varphi}_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{on} \quad \bigcup_i B_{r_i}(z_i) \supseteq \operatorname{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega, \\ 1 & \text{on} \quad \mathbf{R}^{n+1} \setminus \bigcup_i B_{2r_i}(z_i). \end{cases} \tag{A.4}$$

根据 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 的欧几里得体积增长条件以及 $\sum_{i=1}^{N_1} r_i^{n-1} < \epsilon$, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} |\nabla^{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}\tilde{\varphi}_\epsilon(x)| \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) &\le \sum_{i=1}^{N_1} \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \cap \left(B_{2r_i}(z_i) \setminus B_{r_i}(z_i)\right)} |\nabla\varphi_i(x)| \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) \\ &\le \sum_{i=1}^{N_1} \frac{2}{r_i} \mathcal{H}^n\left(\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \cap B_{2r_i}(z_i)\right) \\ &\le 2^{n+1} C_1 \sum_{i}^{N_1} r_i^{n-1} \le 2^{n+1} C_1 \epsilon. \end{aligned} \tag{A.5}$$

我们对 $\tilde{\varphi}_\epsilon$ 进行光滑化，得到光滑函数 φ_ϵ, 它仍满足形式为 (A.5) 的估计，其中常数 C 与 ϵ的选取无关。由于 $\tilde{\varphi}_\epsilon$ 满足 (A.4), 我们可以令 S'_ϵ, S_ϵ 表示满足以下条件的集合

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \in S'_\epsilon, \\ 1 & x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus S_\epsilon. \end{cases}$$

显然, (A.1) 成立，因此 (A.2) 也成立。我们看到 φ_ϵ 就是所需的光滑截断函数，证明至此完成。□

利用这些截断函数，我们可以证明 $\mathcal{A}$-驻定集的切向散度定理。

引理 *2.8* 的证明。 首先注意到，由于 (2.7)、Ω 的 $\mathcal{A}$-平稳性以及备注 2.7，对于任意 $X \in \mathfrak{X}_c(\mathbf{R}^{n+1}_+)$, 有

$$\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \operatorname{div}_{\partial\Omega} X \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} X \cdot (c\nu_\Omega) \mathrm{d}\mathcal{H}^n.$$

由于 $\mathcal{H}^{n-1}(\operatorname{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega) = 0$, 我们可以应用 Allard 正则性定理 [Sim83，定理 24。2] 对 var($\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$) 应用该定理，可知 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \cap \mathbf{R}^{n+1}_+$是一个具有常平均曲率的解析超曲面 c，并且在每个 $x \in \operatorname{reg}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \cap \mathbf{R}^{n+1}_+$的邻域内成立。

另一方面，注意到引理 A.1在此处适用，这是由于命题 2.6，因此对于任意 $\epsilon > 0$，我们有 φ_ϵ， S'_ϵ 并且 S_ϵ 根据引理 A.1，对于任意 $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^{n+1}_+)$，令 X_ϵ 为下式给出的向量场：

$$X_\epsilon := \varphi_\epsilon X,$$

由于 $\varphi_\epsilon \equiv 0$ 在 $S'_\epsilon \supset \mathrm{sing}\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 上，我们很容易看出，

$$X_\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{on } S'_\epsilon, \\ \varphi_\epsilon X & \text{on } S_\epsilon \setminus S'_\epsilon, \\ X & \text{on } \partial_{\mathrm{rel}}\Omega \setminus S_\epsilon. \end{cases}$$

在 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \setminus S'_\epsilon$上对 $\mathrm{div}_{\partial\Omega}(X_\epsilon)$ 积分，由于 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega \setminus S'_\epsilon$ 具有足够的正则性，我们可以应用经典切向散度定理，得到

$$\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \mathrm{div}_{\partial\Omega} X_\epsilon \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} X_\epsilon \cdot (c\nu_\Omega)\mathrm{d}\mathcal{H}^n + \int_\Gamma X_\epsilon \cdot \mu \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

进一步计算可得，

$$\int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \varphi_\epsilon \mathrm{div}_{\partial\Omega} X \mathrm{d}\mathcal{H}^n + \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \nabla^{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega}\varphi_\epsilon \cdot X \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_{\partial_{\mathrm{rel}}\Omega} \varphi_\epsilon X \cdot (c\nu_\Omega)\mathrm{d}\mathcal{H}^n + \int_\Gamma \varphi_\epsilon X \cdot \mu \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

由于 $X \in \overline{\mathfrak{X}(\mathbf{R}^{n+1}_+)}$ 且 $\partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 有界，因此 $\mathrm{div}_{\partial\Omega} X = (\mathrm{div} X - \nabla_{\nu_\Omega} X \cdot \nu_\Omega)$ 和 $|X|$ 均有界（上界与 ϵ无关）。由 引理 A.1中的 (A.2) 和 (A.3)，我们可以令 $\epsilon \searrow 0$ 并利用控制收敛定理得出 (2.11)。

另一方面，由于 $\partial\Omega \setminus \partial_{\mathrm{rel}}\Omega$ 是光滑的，且 $T = \mathrm{cl}^{\partial\mathbf{R}^{n+1}_+}(\partial\Omega \setminus \partial_{\mathrm{rel}}\Omega)$ 的奇异点位于 Γ，我们可以仿照式（2.11）的证明得出（2.12）。至此，证明完成。□

References

[Ale62] A. D. Aleksandrov. “大范围曲面的唯一性定理 I、II”。载于：《美国数学会译丛》第2辑，第21卷（1962），第341–354、354–388页。 ISSN：0065-9290。 DOI：10.1090/trans2/021/09。MR：0150706。Zbl：0122.39601。[All72] William K. Allard. “关于变分流形的一阶变分”。英文。载于：《数学年刊》（第2辑）第95卷（1972），第417–491页。 ISSN：0003-486X。 DOI：10.2307/1970868。MR：307015。Zbl：0252.49028。[All75] William K. Allard. “关于变分流形的一阶变分：边界行为”。英文。载于：《数学年刊》（第2辑）第101卷（1975），第418–446页。 ISSN：0003-486X。 DOI：10.2307/1970934。MR：397520。Zbl：0319.49026。[AS16] Abdelhamid Ainouz 和 Rabah Souam。“半空间或薄层中的稳定毛细超曲面”。英文。载于：《印第安纳大学数学杂志》第65卷第3期（2016），第813–831页。 ISSN：0022-2518。 DOI：10.1512/iumj.2016.65.5839。MR：3528820。Zbl：1347.53009。[Bre13] Simon Brendle。“扭曲积流形中的常平均曲率曲面”。英文。载于：《高等科学研究所数学出版物》第117卷（2013），第247–269页。 ISSN：0073-8301。 DOI：10.1007/s10240-012-0047-5。MR：3090261。Zbl：1273.53052。[CM07a] Luis A. Caffarelli 和 Antoine Mellet。“非均匀表面上的毛细液滴”。载于：《非线性偏微分方程展望》，第446卷，《当代数学》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007，第175–201页。 DOI：10.1090/conm/446/08631。MR：2373730。Zbl：1200.76053。

[CM07b] Luis A. Caffarelli 和 Antoine Mellet。“毛细液滴：接触角滞后与黏附液滴”。载于：《变分法与偏微分方程》第29卷第2期（2007），第141–160页。 ISSN：0944-2669。 DOI：10.1007/s00526-006-0036-y。MR：2307770。Zbl：1168.76007。[DD21] Luigi De Masi 和 Guido De Philippis。具有固定边界角的极小曲面的极小极大构造。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2111.09913。2021年。[De 21] Luigi De Masi。“变分流形自由边界的可求 rectifiability”。载于：《印第安纳大学数学杂志》第70卷第6期（2021），第2603–2651页。 ISSN：0022-2518。 DOI：10.1512/iumj.2021.70.9401。MR：4359920。Zbl：1494.49029。[De 58] Ennio De Giorgi。“关于具有有限测度定向边界的集合类中超球面的等周性质”。载于：意大利林琴国家科学院《数学、物理与自然科学回忆录》第1类第8辑第5卷（1958年），第33–44页。 ISSN：0365-0286。MR：98331。Zbl：0116.07901。[DKS20] Antonio De Rosa、Slawomir Kolasi´nski 和 Mario Santilli。“有限周长集的各向异性等周问题临界点的唯一性”。载于：《理性力学与分析档案》第238卷第3期（2020），第1157–1198页。 ISSN：0003-9527。 DOI：10.1007/s00205-020-01562-y。MR：4160798。Zbl：1454.49041。[DM15] Guido De Philippis 和 Francesco Maggi。“各向异性毛细问题中自由边界的正则性及杨氏定律的有效性”。英文。载于：《理性力学与分析档案》第216卷第2期（2015），第473–568页。 ISSN：0003-9527。 DOI：10.1007/s00205-014-0813-2。MR：3317808。Zbl：1321.35158。[DM17] Guido De Philippis 和 Francesco Maggi。“具有自由边界的几何变分问题中奇异集的维数估计”。英文。载于：《纯粹与应用数学杂志》第725卷（2017），第217–234页。 ISSN：0075-4102。 DOI：10.1515/crelle-2014-0100。MR：3630122。Zbl：1366.49057。[DM19] Matias Gonzalo Delgadino 和 Francesco Maggi。“重探 Alexandrov 定理”。英文。载于：《分析与偏微分方程》第12卷第6期（2019），第1613–1642页。 ISSN：2157-5045。 DOI：10.2140/apde.2019.12.1613。MR：3921314。Zbl：1418.35205。[DW 22] Matias G. Delgadino 和 Daniel Weser。具有自由边界的 Heintze–Karcher不等式及其在毛细理论中的应用。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2210.16376。2022年。[EG15] Lawrence Craig Evans 和 Ronald F. Gariepy。《测度论与函数的精细性质》。英文。佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社，2015，第xiv页。 + 299。MR：3409135。Zbl：1310.28001。[Fed59] Herbert Federer。“曲率测度”。英文。载于：《美国数学会汇刊》第93卷（1959），第418–491页。 ISSN：0002-9947。 DOI：10.2307/1993504。MR：110078。Zbl：0089.38402。[GJ86] Michael Gr¨uter 和 J¨urgen Jost。“具有自由边界的变分流形的 Allard型正则性结果”。英文。载于：《比萨高等师范学校科学年刊》第4辑第13卷（1986），第129–169页。 ISSN：0391-173X。MR：863638。Zbl：0615.49018。[Gon76] Eduardo H. A. Gonzalez。“关于放置液滴问题”。载于：《帕多瓦大学数学研讨会报告》第55卷（1976），第289–302页。 ISSN：0041-8994。MR：493670。Zbl：0361.49027。 URL：http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__289_0。[HHW20] Robert Haslhofer、Or Hershkovits 和 Brian White。变分流形的移动平面法及其应用。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2003.01505。2020年。

[Ilm96] Tom Ilmanen. “奇异极小超曲面的强最大值原理”。载于：《变分法与偏微分方程》4.5（1996），第443–467页。 ISSN：0944-2669。DOI：10.1007/BF01246151。MR：1402732。Zbl：0863.49030。[Jia+22] Xiaohan Jia、Guofang Wang、Chao Xia 和 Xuwen Zhang。楔形区域中的 Heintze–Karcher 不等式与毛细超曲面。预印本，https://arxiv.org/abs/ 2209.13839。2022年。[Jia+23] Xiaohan Jia、Guofang Wang、Chao Xia 和 Xuwen Zhang。“半空间中各向异性毛细超曲面的 Alexandrov定理”。载于：Arch. Ration. Mech. Anal. 247.2（2023），第25页。 ISSN：0003-9527。 DOI：10.1007/s00205- 023- 01861- 0。MR：4562813。[KT17] Takashi Kagaya 和 Yoshihiro Tonegawa。“变分流形的固定接触角条件”。英文。载于：Hiroshima Math. J. 47.2（2017年），第139–153页。 ISSN：0018-2079。MR：3679887。Zbl：1405.49033。[LZ21] Martin Man-Chun Li 和 Xin Zhou。“自由边界极小超曲面的极小极大理论。I：正则性理论”。英文。载于：J. Differ. Geom. 118.3（2021年），第487–553页。 ISSN：0022-040X。 DOI：10.4310/jdg/1625860624。Zbl：1480.53074。[LZZ21] Chao Li、Xin Zhou 和 Jonathan J. Zhu。毛细曲面的极小极大理论。预印本，https://arxiv.org/abs/2111.09924。2021年。[Mag12] Francesco Maggi。《有限周长集与几何变分问题：几何测度论导论》。英文。第135卷。剑桥：剑桥大学出版社，2012年，第xix + 454页。 DOI：10 . 1017 / CBO9781139108133。MR：2976521。Zbl：1255.49074。[MM16] Francesco Maggi 和 Cornelia Mihaila。“容器中毛细液滴的形状”。载于：《变分法与偏微分方程》55.5（2016），第122号文章，共42页。ISSN：0944-2669。 DOI：10. 1007 / s00526- 016- 1056 - x。MR：3551302。Zbl：1356. 49077。[MR91] Sebasti´an Montiel 和 Antonio Ros。“紧致超曲面：高阶平均曲率的 Alexandrov 定理”。英文。载于：（1991）。MR：1173047。Zbl：0723.53032。[MS23] Francesco Maggi 和 Mario Santilli。扭曲积流形中的常平均曲率刚性与紧致性。预印本，https://arxiv.org/abs/2303. 03499。2023年。[Ros87] Antonio Ros。“具有常高阶平均曲率的紧致超曲面”。英文。载于：Rev. Mat. Iberoam. 3.3-4（1987），第447–453页。 ISSN：0213-2230。 DOI：10.4171/RMI/58。MR：996826。Zbl：0673.53003。[Sch04] Reiner Sch¨atzle。“变分流形的二次倾斜超额衰减与强最大值原理”。英文。载于：Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5) 3.1（2004），第171–231页。ISSN：0391-173X。MR：2064971。Zbl：1096.49023。[Sim83] Leon Simon。《几何测度论讲义》。英文。第3卷。澳大利亚国立大学数学分析中心，堪培拉，1983年。MR：756417。Zbl：0546.49019。[SS81] Richard Schoen 和 Leon Simon。“稳定极小超曲面的正则性”。载于：Comm. Pure Appl. Math. 34.6（1981），第741–797页。 ISSN：0010-3640。 DOI：10.1002/cpa.3160340603。MR：634285。Zbl：0497.49034。[SZ98] Peter Sternberg 和 Kevin Zumbrun。“应用于体积约束下面积极小曲面的 Poincar´é 不等式”。英文。载于：J. Reine Angew. Math. 503（1998），第63–85页。 ISSN：0075-4102。MR：1650327。Zbl：0967.53006。

[Wen80] Henry C. Wente。“静置液滴与悬垂液滴的对称性”。英文。载于：Pac. J. Math. 88（1980），第387–397页。 ISSN：1945-5844。 DOI：10.2140/pjm.1980.88.387。MR：607986。Zbl：0473.76086。[Wic14] Neshan Wickramasekera。“奇异极小超曲面的尖锐强最大值原理与尖锐唯一延拓定理”。载于：《变分法与偏微分方程》51.3-4（2014），第799–812页。 ISSN：0944-2669。 DOI：10.1007/ s00526-013-0695-4。MR：3268871。Zbl：1320.35109。[XZ21] Chao Xia 和 Xuwen Zhang。半空间或球中的体积约束局部能量极小集的唯一性。预印本，https://arxiv.org/abs/2106.14780v3。2021年。[Zhu18] Jonathan J. Zhu。“球面中奇异极小超曲面的第一稳定性特征值”。载于：《变分法与偏微分方程》57.5（2018），第130号论文，共13页。 ISSN：0944-2669。 DOI：10.1007/s00526-018-1417-8。MR：3844511。Zbl：1400. 53049。[ZZ19] Xin Zhou 和 Jonathan J. Zhu。“常平均曲率超曲面的极小极大理论”。载于：Invent. Math. 218.2（2019年），第441–490页。 ISSN：0020-9910。 DOI：10.1007/s00222-019-00886-1。MR：4011704。Zbl：1432.53086。[ZZ20] Xin Zhou 和 Jonathan J. Zhu。“ 具有预设平均曲率的超曲面的存在性 I—— 一般极小极大理论 ”。载于：Camb. J. Math. 8.2（2020年），第311–362页。 ISSN：2168-0930。 DOI：10.4310/CJM.2020.v8.n2.a2。MR：4091027。Zbl：1446.35272。

（Chao Xia）
School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 361005, Xiamen, P.R. China
Email address: chaoxia@xmu.edu.cn

(Xuwen Zhang) School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 361005, Xiamen, P.R. China&Institut für Mathematik, Goethe-Universität, 60325, Frankfurt, Germany*Email address*: xuwenzhang@stu.xmu.edu.cn