arXiv:2304.01742v1 [math.GT] 4 Apr 2023

实单极 Floer 同调与 skein 精确三角

JIAKAI LI

Abstract. 我们证明了实单极 Floer 同调的无向 skein 精确三角，并引入一种 Frøyshov 型不变量。

1. Introduction

在 [12], 中，作者为 3-球面中的链环构造了实单极 *Floer* 同调 $HMR^\circ(K)$。本文讨论无向 skein 三元组链环的实单极 Floer 同调（K_0、 K_1、 K_2）之间的关系。也就是说， K_i只在一个小 3-球内有所不同，如下图所示。

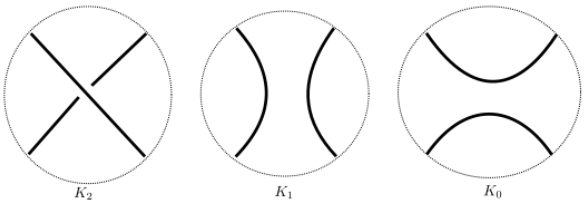

Figure 1. 无向 skein 三角中的局部图示。

HMR$^\circ$ 的构造基于 Kroheimer-Mrowka 的单极 Floer 同调 [9]。其思路是考虑沿 K 的双重分支覆盖，以及普通 Seiberg-Witten 构型空间在反线性对合下的不变子空间。该对合利用双重分支覆盖的覆盖对合 ι，以及旋量丛上 ι 的反线性提升 τ 来定义。实单极 Floer 同调有三种版本

$$\widehat{HMR}_*, \widehat{HMR}_*, \overline{HMR}_*.$$

为方便起见　　我们将它们记作 HMR$^\circ$，对应于 $\circ \in \{\vee, \wedge, -\}$。主要结果如下。

定理 1.1. 设 (K_0, K_1, K_2) 是一个无向 skein 三元组链环。那么存在一个精确三角

$$\begin{array}{ccc} HMR^\circ_*(K_2) & \longrightarrow & HMR^\circ_*(K_1) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & HMR^\circ_*(K_0) & \end{array}$$

对于每种类型的实单极 Floer 同调 $\circ \in \{\vee, \wedge, -\}$。

例如， [16, 10] 针对纽结和链环的各种 Floer 同调版本构造了无向 skein 三角。它们与通过分支双重覆盖得到的 3-流形 Floer 同调手术精确三角密切相关，例如 [2, 19, 8] 。例如， [20, 1, 21]探讨了将分支双重覆盖的 Floer 同调作为链环不变量的做法。我们的主定理是对这一思想的

Date: 2023年4月5日。

进一步完善。定理 1.1 证明背后的关键观察是，[8]中单极 Floer 同调手术精确三角证明所涉及的可约解，可以与实结构相容。

注 1.2。本文中，我们专门研究 S^3 中的经典链环，以尽量简化记号。然而，我们认为将定理 1.1 的证明（其本质上是局部的）推广到 3-流形中的更一般链环并无困难。由于实单极 Floer 同调已针对带有对合的流形定义，[12], HMR° 可以针对 3-流形 Y 中的链环 K 定义，使得

$$[K] = 0 \in H_1(Y, \mathbb{Z}/2).$$

这一假设保证沿 K存在双重分支覆盖，并且预期定理 1.1 对 3-流形中的这类链环成立。更多细节见注 2.4。

此外，我们为链环的实单极 Floer 同调定义绝对分次，并引入实版本的 Frøyshov 不变量 [3]。我们给出 Frøyshov 不等式的一个基本版本，并在一些简单示例中计算该不变量。此前已有研究通过分支覆盖上的 Frøyshov 型不变量构造纽结不变量，例如见 [20, 17]。文献 [7]利用 Seiberg-Witten-Floer 谱引入了我们这种实 Frøyshov 不变量的类似物。自然可以预期，[7]的实单极 Floer 同调与实 Seiberg-Witten-Floer 同调之间存在同构。

1.1. **各节的组织**。

我们在第 2 节回顾实单极 Floer 同调的基础知识。在第 3 节定义绝对 $\mathbb{Q}$ 分次和 Frøyshov 不变量。在第 4 节讨论 skein 三角形的拓扑方面，并在第 5 节给出主定理的证明。第 6 节讨论一些示例。

2. Real Monopole Floer Homologies for Links

我们从实单极 Floer 同调 $HMR^\circ(Y,\ \iota)$ 作为带有对合（$Y,\ \iota$）的三维流形不变量的一般设置开始。

2.1. **形式性质**。

设 Y是一个闭定向三维流形，且 $\iota\colon Y \to Y$是一个光滑的保定向对合。实单极 Floer 同调是 $\mathbb{F}_2$-向量空间

$$\widehat{HMR}_*(Y,\iota), \quad \widehat{\overline{HMR}}_*(Y,\iota), \quad \overline{HMR}_*(Y,\iota).$$

每个群都分解为关于实自旋^c 结构 $(\mathfrak{s},\ \tau)$的直和；这些结构在 HM 中扮演自旋^c 结构的角色：

$$HMR^\circ_*(Y,\iota) = \bigoplus_{\mathfrak{s}} HMR^\circ_*(Y,\iota;\mathfrak{s},\tau).$$

定义 2.1. 实 自旋^c 结构是一个二元组 $(\mathfrak{s},\ \tau)$，满足 $\mathfrak{s} = (S,\ \rho)$ 是Y上的自旋^c 结构，并且 $\tau\colon S \to S$ 是 ι的反线性对合提升，且其与 $\mathfrak{s}$ 相容，具体而言，$\langle \tau(s_1)\ \tau(s_2)\rangle_{\iota(y)} = \langle s_1, s_2\rangle_y$并且

$$\rho(\iota_*\xi)\tau(\Phi_{\iota(y)}) = \tau(\rho(\xi)\Phi_y),$$

对于任意 $y \in Y$、Y上的任意向量场 ξ，以及任意旋量 $\Phi \in \Gamma(S)$。一个覆盖 $Y \to Y$的反线性对合 $\tau\colon S \to S$，是 S 的实结构 。

设 $K \subset S^3$ 是一个链环，$\mathfrak{s}$ 是其分支双重覆盖 $\Sigma_2(S^3,K)$上的自旋^c 结构，该覆盖配备覆盖对合 ι_{deck}。尽管一般的带对合3-流形上并不总是存在相容实结构，但 $\Sigma_2(S^3,K)$上的任意自旋^c 结构都支持唯一的相容实结构（在等价意义下）。将HMR° 应用于 $(\Sigma_2(S^3,K)\ \iota_{deck})$，得到

$$\widehat{HMR}_*(K;\mathfrak{s}),\quad \widehat{HMR}_*(K;\mathfrak{s}),\quad \overline{HMR}_*(K;\mathfrak{s}),$$

它们是 K 的同痕不变量。

每个群都带有一个由集合 $\mathbb{J}(\mathfrak{s})$ 给出的分次“$*$”，并具有 $\mathbb{Z}$-作用。我们用“$\bullet$”表示分次“$*$”的完备化（将在第 2.2 节中定义）。于是 $HMR^\circ_\bullet(K;\mathfrak{s})$ 是一个 $\mathcal{R}_n$-模，其中 n 是 K 的分支数，$\mathcal{R}_n$ 是环

$$\mathcal{R}_n = \frac{\mathbb{F}_2[[v_1,\dots,v_n]]}{v_i^2 = v_j^2},$$

使得每个 v_i 的次数为（-1）。将平方 v_i^2 记为 U。环 $\mathcal{R}_n$ 与 Picard 环面的上同调有关。

设 K_-, K_+ 是两个链环。一个配边 $\Sigma\colon K_- \to K_+$ 是 $[0,1]\times S^3$ 中一个恰当嵌入的、可能不可定向的曲面，其边界由 $\{0\}\times K_-$ 和 $\{1\}\times K_+$组成。HMR° 的函子性表明，存在一个 $\mathbb{F}_2[[U]]$-模映射

$$HMR^\circ_\bullet(\Sigma) : HMR^\circ_\bullet(K_-) \to HMR^\circ_\bullet(K_+)$$

满足复合律。这是 HMR$^\circ$ 关于带对合的 3-流形的函子性的一个特例。

注 2.2. 我们只研究双重分支覆盖，因此“分支覆盖”始终指双重分支覆盖。

2.2. **规范理论构造**。
设 (Y,ι) 是带对合的 3-流形，$(\mathfrak{s},\tau)$ 是一个实自旋^c 结构。设 g 是一个 ι-不变黎曼度量。实 Seiberg-Witten 构型空间是由满足下列条件的配对 (A,Φ) 构成的空间：

- A 是 $\mathfrak{s}$ 上一个 τ-不变的 spin^c 联络，其含义是

$$\nabla_A = \tau\circ\nabla_A\circ\tau.$$

  由 τ-不变的 spin^c-联络构成的空间 $\mathcal{A}(Y,\mathfrak{s},\tau)$ 是以 $1_S\otimes\Omega^1(Y;i\,\mathbb{R})^{-\iota^*}$ 为仿射空间的，其中的元素为 ι^*-反不变的虚值 1-形式。

- Φ 是 τ不变的，含义是

$$\Phi_y = \tau(\Phi_{\iota(y)}).$$

  记 $\Gamma(S)^\tau$ 为 τ不变旋量的实子空间。

实*Seiberg-Witten* 构型空间是乘积空间

$$\mathcal{C}(Y,\mathfrak{s},\tau) = \mathcal{A}(Y,\mathfrak{s},\tau)\times\Gamma(S)^\tau.$$

规范群 $\mathcal{G}(Y,\ \iota)$ 是作用于 ι-不变自同构的子群

$$\mathcal{G}(Y,\iota) = \{\bar{u}(\iota(y)) = u(y)\},$$

作用于 $\mathcal{C}$，方式为

$$u \cdot (A, \Phi) = (A - u^{-1}du, u\Phi).$$

常值规范变换子群为 $\{\pm 1\}$。构型 (A, Φ) 在$\Phi = 0$时是可约的，可约构型空间恰好是 $\{\pm 1\}$-作用的不动点集。构型的等价类空间定义为商空间

$$\mathcal{B}(Y, \mathfrak{s}, \tau) = \mathcal{C}(Y, \mathfrak{s}, \tau)/\mathcal{G}(Y, \iota).$$

Chern-Simons-Dirac (CSD) 泛函是一个 τ-不变函数 $\mathcal{L}: \mathcal{C}(\mathfrak{s}) \to \mathbb{R}$，其形式上的$L^2$梯度向量场为

$$\left(\frac{1}{2} * F_{B^t} + \rho^{-1}(\Psi\Psi^*)_0, D_B\Psi\right) \in \Omega^1(Y; i\mathbb{R}) \oplus \Gamma(S),$$

其中 $(\Psi\Psi^*)_0 = \Psi\Psi^* - \frac{1}{2}|\Psi|^2$ 是旋量丛的无迹、自伴端同态，因此属于 $\rho(\Omega^1(Y; i\mathbb{R}))$ 的像。梯度流方程恰好是圆柱 $\mathbb{R} \times Y$ 上的 Seiberg-Witten 方程。

Floer同调的思想是研究向量场 $\operatorname{grad}\mathcal{L}$ 的莫尔斯理论。在我们的设定中，莫尔斯理论仅发生在通常 Seiberg-Witten 构型空间的不变（实）子空间上。为处理可约解，我们遵循 Kronheimer-Mrowka 的方法，沿可约解对构形空间进行爆破：令

$$\mathcal{C}^\sigma(Y, \mathfrak{s}, \tau) = \{(B, r, \psi) : r \in \mathbb{R}, (B, \psi) \in \mathcal{C}(Y, \mathfrak{s}, \tau), \text{ and } \|\psi\|_{L^2(Y)} = 1\}.$$

$\{\pm 1\}$ 规范变换在 $\mathcal{C}^\sigma(Y, \mathfrak{s}, \tau)$ 上自由作用；从拓扑上看，爆破过程将轨迹 $\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}, \tau) \times \{0\}$ 替换为 L^2-旋量的单位球面。规范等价类空间

$$\mathcal{B}^\sigma(Y, \mathfrak{s}, \tau) = \mathcal{C}^\sigma(Y, \mathfrak{s}, \tau)/\mathcal{G}(Y, \iota)$$

具有带边界流形 $\partial\mathcal{B}^\sigma(Y, \mathfrak{s}, \tau)$ 的结构。边界恰好是可约爆破构型空间，它与 $\mathbb{RP}^\infty$ 同伦等价。

我们研究形式 CSD 梯度 $(\operatorname{grad}\mathcal{L})^\sigma$ 的爆破版本；在不可约部分，它与形式 CSD 梯度 $\operatorname{grad}\mathcal{L}$ 在收缩映射 $\pi: (B, r, \psi) \mapsto (B, r\psi)$ 下的拉回相一致。尽管它并非关于任何自然度量的梯度，$(\operatorname{grad}\mathcal{L})^\sigma$ 仍保留了形式梯度的许多重要性质。$(\operatorname{grad}\mathcal{L})^\sigma$ 的临界点分为三类：

- 内部 临界点，即不可约解，
- 边界处 Hessian 沿法向方向为正的边界稳定可约解，以及
- 海森矩阵沿法向方向为负的边界不稳定 可约解。

事实上，我们对 $(\operatorname{grad}\mathcal{L})^\sigma$ 进行扰动，以实现轨迹模空间的横截性。当轨迹从边界稳定临界点流向边界不稳定临界点时，通常的横截性方法总是失效（在这种情况下，我们将该模空间称为边界阻碍）。这一现象早已出现在带边界流形的有限维莫尔斯理论中。

分别将由内部、边界稳定和边界不稳定临界点生成的 $\mathbb{F}_2$-向量空间记为 C^o，C^s，C^u。通过计数零维轨迹空间，我们定义线性映射

$$\partial_o^o : C^o \to C^o, \quad \partial_s^o : C^o \to C^s \quad \partial_o^u : C^u \to C^o \quad \partial_s^u : C^o \to C^o.$$

此外，通过计数可约轨迹的零维空间，我们定义映射

$$\bar{\partial}^s_s : C^s \to C^s, \quad \bar{\partial}^u_s : C^u \to C^s \quad \bar{\partial}^s_u : C^s \to C^u \quad \bar{\partial}^u_u : C^u \to C^u.$$

我们定义三个链复形

$$\bar{C}_k = C^s_k \oplus C^u_{k+1}, \quad \check{C}_k = C^o_k \oplus C^s_k \quad \hat{C}_k = C^o_k \oplus C^u_k,$$

由微分给出

$$\bar{\partial} = \begin{pmatrix} \bar{\partial}^s_s & \bar{\partial}^u_s \\ \bar{\partial}^s_u & \bar{\partial}^u_u \end{pmatrix}, \quad \check{\partial} = \begin{pmatrix} \partial^o_o & -\partial^u_o \bar{\partial}^s_u \\ \partial^o_s & \bar{\partial}^s_s - \partial^u_s \bar{\partial}^s_u \end{pmatrix}, \quad \hat{\partial} = \begin{pmatrix} \partial^o_o & \partial^u_o \\ -\bar{\partial}^s_u \bar{\partial}^o_s & -\bar{\partial}^u_u - \bar{\partial}^s_u \partial^u_s \end{pmatrix}$$

分别。我们定义

$$\widehat{HMR}_*(Y, \iota; \mathfrak{s}, g, \tau) = H_*(\check{C}, \check{\partial}), \quad \widehat{\overline{HMR}}_*(Y, \iota; \mathfrak{s}, g, \tau) = H_*(\hat{C}, \hat{\partial}), \quad \overline{\overline{HMR}}_*(Y, \iota; \mathfrak{s}, g, \tau) = H_*(\overline{C}, \bar{\partial}).$$

三个 Floer 同调群的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{i_*} \widehat{HMR}_*(Y, \iota; \mathfrak{s}, \tau) \xrightarrow{j_*} \widehat{\overline{HMR}}_*(Y, \iota; \mathfrak{s}, \tau) \xrightarrow{p_*} \overline{\overline{HMR}}_*(Y, \iota; \mathfrak{s}, \tau) \xrightarrow{i_*} \widehat{HMR}_*(Y, \iota; \mathfrak{s}, \tau) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

由（反）链映射定义。

$$i = \begin{pmatrix} 0 & \partial^u_o \\ 1 & -\partial^u_s \end{pmatrix} : \bar{C} \to \check{C}, \quad j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\bar{\partial}^u_s \end{pmatrix} : \check{C} \to \hat{C}, \quad p = \begin{pmatrix} \partial^o_s & \partial^u_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \check{C} \to \bar{C}.$$

$\mathbb{J}(Y, \mathfrak{s}, \tau)$ 是分次集合。存在一个 $\mathbb{Z}$作用，记作

$$j \mapsto j + n$$

对于 $j \in J(Y, \mathfrak{s}, \tau)$。我们用 $HMR^\circ_*(Y, \iota; \mathfrak{s}, g, \tau)$ 表示 $J(Y, \mathfrak{s}, \tau)$ 分次的实单极 Floer同调群。为了定义配边映射，我们按照以下过滤对 Floer同调群作完备化

$$HMR^\circ_\bullet(Y, \iota)[n] = \bigoplus_\alpha \bigoplus_{m \geq n} HMR^\circ_{j_\alpha - m}(Y, \iota),$$

其中 $\{j_\alpha : \alpha \in A\}$ 是自由 $\mathbb{Z}$轨道的一组代表元。

2.3. **配边映射**。
设 (X, ι) 是一个带边界的四维流形，配备了一个保持边界分支不变的对合 ι。

定义 2.3. 一个实 自旋^c 结构是一个有序对 $(\mathfrak{s}, \tau)$，其中 $\mathfrak{s} = (S^\pm, \rho)$ 是 X 上的自旋^c 结构，而 τ: $S^\pm \to S^\pm$ 是覆盖底空间上 ι 的反线性对合，并且与 $\mathfrak{s}$ 相容，具体而言，$\langle \tau(s_1)\ \tau(s_2) \rangle_{\iota(x)} = \langle s_1, s_2 \rangle_x$ 且

$$\rho(\iota_* \xi) \tau(\Phi_{\iota(x)}) = \tau(\rho(\xi) \Phi_x),$$

对于任意 $x \in X$、X 上的任意向量场 ξ，以及任意旋量 $\Phi \in \Gamma(S^+)$。

设 X^* 为通过在 X 上附加柱状端 $[0,\infty)\times\partial X$ 而得到的带柱状端流形，其中对合 $\iota_X: X^*\to X^*$ 在 $[0,\infty)$ 因子上平凡作用。我们在圆柱上的一个紧致部分对 Seiberg-Witten 方程进行扰动。扰动后的 Seiberg-Witten 解的模空间渐近于柱状点上的临界点向量 $[\mathfrak{b}]$

$$M(X^*,\mathfrak{s}_X,\tau_X;[\mathfrak{b}])$$

是正则的，并且可通过断裂轨迹进行紧化：

$$M^+(X^*,\mathfrak{s}_X,\tau_X;[\mathfrak{b}]) \text{ and } \bar{M}(X^*,\mathfrak{s}_X,\tau_X;[\mathfrak{b}]),$$

其中前一种紧化比后一种更精细（参见 [12,第 12] 节）。

我们还考虑 e 带参数的模空间。给定有限维流形 P，我们定义

$$M(X^*,\mathfrak{s}_X,\tau_X,[\mathfrak{b}])_P=\bigcup_{p\in P}\{p\}\times M(X^*,\mathfrak{s}_X,\tau_X,[\mathfrak{b}])_p.$$

设 z为 $M(X^*;\mathfrak{s}_X,\tau_X,[\mathfrak{b}])_P$ 的一个连通分支。我们将模空间的预期维数记为

$$\mathrm{gr}_z(X^*,\mathfrak{s}_X,\tau_X;[\mathfrak{b}])_P$$

与之前一样，我们逐纤维紧化模空间，从而得到

$$M^+(X^*,\mathfrak{s}_X,\tau_X;[\mathfrak{b}])_P \text{ and } \bar{M}(X^*,\mathfrak{s}_X,\tau_X;[\mathfrak{b}])_P.$$

接下来，假设 $(W,\iota_W):(Y_-,\iota_-)\to(Y_+,\iota_+)$ 是带有 involution 的 3-流形之间的配边。固定爆破后的构形空间在 W 上方的一个连通分支 z，我们将配边上的扰动后的 Seiberg-Witten 方程的（粗）紧化模空间记为

$$\bar{M}_z([\mathfrak{a}],W^*,\iota_W,[\mathfrak{b}]) \text{ and } \bar{M}_z^{\mathrm{red}}([\mathfrak{a}],W^*,\iota_W,[\mathfrak{b}])$$

其中 $[\mathfrak{a}]$ 是入射端 Y_- 上的一个临界点，$[\mathfrak{b}]$ 是出射端Y_+上的一个临界点。

配边映射包含以下矩阵元素

$$m_o^o,m_s^o,m_o^u,m_s^u,\bar{m}_s^s,\bar{m}_u^u,\bar{m}_u^s,\bar{m}_s^u,$$

其中加上横线的版本统计可约解“M^{red}”。例如，m_s^u：$C_\bullet^u(Y_-,\iota_-)\to C_\bullet^s(Y_+,\iota_+)$ 由零维模空间的计数给出：

$$\sum_{[\mathfrak{b}]\in\mathfrak{C}^s}\sum_z \#M_z([\mathfrak{a}],W^*,\iota_W,[\mathfrak{b}])\cdot[\mathfrak{b}].$$

这三个配边映射

$$\begin{aligned}\overline{HMR}(W,\iota_W):\overline{HMR}_\bullet(Y_-,\iota_-)&\to\overline{HMR}_\bullet(Y_+,\iota_+),\\ \widehat{HMR}(W,\iota_W):\widehat{HMR}_\bullet(Y_-,\iota_-)&\to\widehat{HMR}_\bullet(Y_+,\iota_+),\\ \widehat{\overline{HMR}}(W,\iota_W):\widehat{\overline{HMR}}_\bullet(Y_-,\iota_-)&\to\widehat{\overline{HMR}}_\bullet(Y_+,\iota_+),\end{aligned}$$

在链级由以下矩阵定义

$$\bar{m}=\begin{pmatrix}\bar{m}_s^s & \bar{m}_s^u\\ \bar{m}_u^s & \bar{m}_u^u\end{pmatrix},\quad \check{m}=\begin{pmatrix}m_o^o & -m_o^u\bar{\partial}_u^s(Y_-)-\partial_o^u(Y_+)\bar{m}_u^s\\ m_s^o & \bar{m}_s^s-m_s^u\bar{\partial}_u^s(Y_-,)-\partial_s^u(Y_+)\bar{m}_u^s\end{pmatrix},$$

and

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_o^o & m_o^u \\ \bar{m}_u^s \partial_s^o(Y_-)\sigma - \bar{\partial}_u^s(Y_+)m_s^o & \bar{m}_s^u\sigma + \bar{m}_u^s\partial_s^u(Y_-)\sigma - \bar{\partial}_u^s(Y_+)m_s^u \end{pmatrix}.$$

我们用括号（$Y_\pm$）来区分两个（带对合的）3-流形上的微分。 [12], 沿用 [9], 的方法，同时计算构形空间的一个上同调类 $\mathcal{B}^\sigma$（W^*， ι_W）。对于带有上同调类的圆柱，我们得到 HMR° 的模结构。

对于 $[0,1]\times S^3$ 和 B^4 的分支覆盖，相容实结构的选择没有歧义（见 [12, 第 3 节。1]）。因此，例如，我们将写作

$$M_z([\mathfrak{a}], \Sigma, [\mathfrak{b}]), \quad M_z(\Sigma, [\mathfrak{a}])$$

表示沿 Σ 的分支覆盖上的 Seiberg-Witten 模空间，其中 Σ 是 $[0,1]\times S^3$ 或 B^4 的子集。更一般地，Σ 可以是多重打孔 S^4中的适当嵌入曲面。

注 2.4。 三维流形中 2-可整除链环的 HMR° 的函子性需要额外数据。要定义HMR°，实提升和双重分支覆盖的选择都不一定唯一。流形 Y 中链环 K 的实单极 Floer 同调群定义为以下直和

$$HMR^\circ(K) = \bigoplus_{\mathbf{Y},\mathfrak{s},\tau} HMR^\circ(\mathbf{Y}, \mathfrak{s}, \tau),$$

其中 $\mathbf{Y}$ 是沿 K 对 Y 取的双重分支覆盖， $\mathfrak{s}$ 是一个自旋^c 结构， τ 是一个相容实结构。因此，配边映射必须配备分支覆盖、自旋^c 结构以及满足与边界数据自然相容条件的实提升。

2.4. $\boldsymbol{HMR^\circ(K)}$ 的示例。

为了后续关于精确三角的章节，我们回顾一些初等示例；这些示例都恰好存在（不变的）正标量曲率度量。一般而言情况并非如此，关于环面纽结和 Montesinos 纽结的讨论，请读者参阅 [12, 第 12] 节。

示例 2.5. 令 U_1 为平凡结。分支覆盖的一个具体模型是单位球面$S^3 \subset \mathbb{C}^2$，其中覆盖对合由共轭作用给出

$$\iota(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

于 $\mathbb{C}^2$ 上。诱导度量是 ι-不变的，且具有正标量曲率。令 $\mathfrak{s} = (S, \rho)$ 为 S^3 上唯一的自旋^c 结构，并令 $\tau: S \to S$ 为相容的实结构。由于正标量曲率，不存在不可约临界点；未扰动的 Chern-Simons-Dirac 泛函 $\mathcal{L}$ 只有一个唯一的临界点 $[B, 0]$ ，其中 B 是自旋^c 联络。我们对狄拉克算子 D_B 进行扰动，得到算子$D_{\mathfrak{q},B}$ 其谱是简单的，且不含零。

将特征值标记为 $\{\lambda_i : i \in \mathbb{Z}\}$ $D_{\mathfrak{q},\ B}$ ，并按递增顺序排列，使 λ_0 为最小的正特征值。令 $\{[\mathfrak{a}_i]\}$ 为 (grad $\not{\mathcal{L}}$)$^\sigma$ 的相应可约临界点。圆柱上不存在不可约轨线，且模空间

$$M_z([\mathfrak{a}_i], [\mathfrak{a}_j])$$

可以显式计算（见 [12, 命题 12.2] 和 [9, 命题 14.6.1]）。特别地，可以证明所有微分都为零。实单极 Floer 同调与相应的链复形同构，并且 υ 的作用方式为

$$\upsilon[\mathfrak{a}_i] = [\mathfrak{a}_{i-1}].$$

由此可得

$$\begin{aligned}\overline{HMR}_*(\mathrm{U}_1;\mathfrak{s}) &\cong \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon],\\ \widehat{HMR}_*(\mathrm{U}_1;\mathfrak{s}) &\cong \mathbb{F}_2[\upsilon],\\ \widehat{\overline{HMR}}_*(\mathrm{U}_1;\mathfrak{s}) &\cong \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon]/\mathbb{F}_2[\upsilon],\end{aligned}$$

例 2.6. 设 U_2 是 2 分量无结。其双重分支覆盖为 $S^1\times S^2$，覆盖对合 ι 由 $\iota_1\times\iota_2$ 给出，其中 ι_1：$S^1\to S^1$ 是反射圆并固定两个点，而ι_2： $S^2\to S^2$ 是一个反定向对合，它交换两个半球并固定一个大圆。可以选取一个在 ι作用下不变且具有正标量曲率的黎曼度量。考虑唯一的挠实自旋^{c} 结构 $\mathfrak{s}_0$。于是，CSD 泛函不存在不可约临界点，且在小扰动下仍然如此。我们利用一个定义在 $S^1\times S^2$ 上的 Morse 函数对 CSD 泛函进行扰动，其中 $S^1\times S^2$ 同胚于一个圆。假设该 Morse 函数有两个临界点 α^1 和 α^0，其指标分别为 1 和 0。扰动后的 CSD 临界点由两座塔组成:

$$\{e_i^1\},\{e_i^0\},$$

其中 $i\in\mathbb{Z}$和 $\mathrm{ind}(e_i^1)=\mathrm{ind}(e_i^0)+1$，它们位于未吹起的构形空间中的 $[\alpha^1,0]$和 $[\alpha^0,0]$之上。同一塔中元素的实指标满足 $\mathrm{ind}(e_{i+1}^\mu)=\mathrm{ind}(e_i^\mu)+1$，而$HM$中的指标之差为二。将同调中对应于 e_i^μ 的元素记为 $\mathfrak{a}_i^\mu$。可以证明，HMR° 中的微分全为零，且 $\upsilon\mathfrak{a}_i^\mu=a_{i-1}^\mu$。我们得出

$$\begin{aligned}\overline{HMR}_*(U_2;\mathfrak{s}_0,\tau_0) &\cong \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon]\oplus\mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon]\langle+1\rangle\\ \widehat{HMR}_*(U_2;\mathfrak{s}_0,\tau_0) &\cong \mathbb{F}_2[\upsilon]\oplus\mathbb{F}_2[\upsilon]\langle+1\rangle,\\ \widehat{\overline{HMR}}_*(U_2;\mathfrak{s}_0,\tau_0) &\cong \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon]/\mathbb{F}_2[\upsilon]\oplus\left(\mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon]/\mathbb{F}_2[\upsilon]\right)\langle+1\rangle.\end{aligned}$$

我们用尖括号表示分次的平移。更多细节见 [12,推论 14.4]。

例 2.7. 设 $K(p,q)$ 是一个 (p,q)-有理结，其中 $p>q$ 互素且 $p>2$。其分支覆盖为 $L(p,q)$，可视为单位球面 $S^3\subset\mathbb{C}^2$ 在.....作用下的商空间

$$(z_1,z_2)\mapsto(e^{2\pi i/p}z_1,e^{2\pi iq/p}z_2).$$

覆盖对合由上方的共轭作用（z_1， z_2）$\mapsto$（$\bar{z}_1$， $\bar{z}_2$）诱导。存在唯一的自旋结构和 p 自旋^{c} 结构。实 Floer 同调群与平凡结的实 Floer 同调群同构:

$$\begin{aligned}\overline{HMR}_*(K(p,q);\mathfrak{s}) &\cong \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon],\\ \widehat{HMR}_*(K(p,q);\mathfrak{s}) &\cong \mathbb{F}_2[\upsilon],\\ \widehat{\overline{HMR}}_*(K(p,q);\mathfrak{s}) &\cong \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon]/\mathbb{F}_2[\upsilon].\end{aligned}$$

特别地，Floer 同调群完全由其实 Frøyshov 不变量决定，该不变量将在第 3 节中定义。这个例子已在 [12,第 14 节2]中讨论。

3. Absolute $\mathbb{Q}$-grading and the Frøyshov invariant

设 K_- 和 K_+ 是 S^3 中的两个链环， $Y_\pm$ 是相应的分支覆盖。设 $\Sigma : K_- \to K_+$ 是一个链环余边， W 是 $[0,1]\times S^3$ 沿 Σ的分支覆盖。设 $\iota(\Sigma)$是满足以下条件的数： $-\iota(\Sigma)$是加权 Sobolev 空间上线性化阿贝尔 ASD 算子的指标：

$$d^*\oplus d^+ : e^{\delta w}L^2_1(W^*;\Lambda^1)^{-\iota^*} \to e^{\delta w}L^2_1(W^*;\Lambda^0\oplus\Lambda^+)^{-\iota^*},$$

其中 δ 是一个小的正权重，而 w 是一个在柱状端限制为坐标 t 的函数。

我们用熟悉的拓扑量来表示 $\iota(\Sigma)$。对于 $\ell\in\{0,1,+\}$， ℓ-形式的 Sobolev 空间可按算子 ι^* 的 (±1)-特征空间分解：

$$L^2_k(W^*;\Lambda^\ell) = L^2_k(W^*;\Lambda^\ell)^{\iota^*}\oplus L^2_k(W^*;\Lambda^\ell)^{-\iota^*}.$$

ι_W^*-不变 子空间自然同构于商空间 $\mathbb{R}\times S^3$ 上的 Sobolev 空间 ：

$$L^2_k(W^*;\Lambda^\ell)^{\iota_W^*} \cong L^2_k(W^*/\iota_W;\Lambda^\ell) \cong L^2_k(\mathbb{R}\times S^3;\Lambda^\ell).$$

ASD 算子 在带有关于 $\mathbb{R}\times S^3$ 的小正权的平凡丛上是可逆的。Thu s

$$\iota(\Sigma) = \frac{\chi(W)+\sigma(W)+b_1(Y_+)-b_1(Y_-)}{2}.$$

特别地，数值 $\iota(\Sigma)$ 与 [8, 第 24 节 1] 中定义的 $\iota(W)$ 一致。以下 W 的量可以由 Σ 计算得出： $K_-\to K_+$ （例如参见 [6]）

$$\begin{aligned}\sigma(W) &= \sigma(K_+)-\sigma(K_-)-\frac{\Sigma\cdot\Sigma}{2},\\ \chi(W) &= b_1(\Sigma)-b_0(\Sigma).\end{aligned}$$

自交数 $\Sigma\cdot\Sigma$ （或 Σ^2）即使对于不可定向曲面也定义良好。若 Σ 连通，则（参见 [11]）

$$\begin{aligned}b_1(W) &= 0,\\ b^+(W) &= \frac{1}{2}\left(b_1(\Sigma)+\sigma(K_+)-\sigma(K_-)-\frac{\Sigma\cdot\Sigma}{2}\right).\end{aligned}$$

假设 Σ 是更一般意义上的适当嵌入曲面，位于其中。

$$S^4 - \{\mathsf{Ball}_i : 1\le i\le n+m\},$$

一个有 $n+m$ 个穿孔的球面，具有 n 个入射端和 m 个出射端。令 W 为沿 Σ的分支覆盖，令 $-\iota(\Sigma)$ 为关于 $(-\iota^*)$-不变反自对偶复形的指标。接下来

$$-\iota(W) = \mathsf{ind}(d^*\oplus d^+) = \mathsf{ind}^{\iota^*}(d^*\oplus d^+) + \mathsf{ind}^{-\iota^*}(d^*\oplus d^+) = (n-1)-\iota(\Sigma),$$

与穿孔球面上的情形一样，我们有 $\mathsf{ind}(d^*\oplus d^+) = n-1$。

定义 3.1. 设 $\mathfrak{s}$ 是 $Y=\Sigma_2(S^3,\ K)$ 上的一个扭挠自旋^c 结构，并设 $[\mathfrak{a}]$ 是 Y 上的一个临界点。设 $\Sigma : \mathsf{U}_1\to K$ 是一个链环余边， $W\colon S^3\to Y$ 是对应的分支覆盖

$[0,1]\times S^3$ 的。设 z 是一条从 $[\mathfrak{a}_0]$ 到 $[\mathfrak{a}]$ 的 W-路径（按 [12, 定义 13.6] 的含义）。我们用公式定义有理数 $\mathrm{gr}^{\mathbb{Q}}([\mathfrak{a}])$:

$$\mathrm{gr}^{\mathbb{Q}}([\mathfrak{a}]) = -\mathrm{gr}_z([\mathfrak{a}_0],\Sigma,[\mathfrak{a}]) + \frac{1}{8}\Big(\langle c_1(\mathfrak{s}),c_1(\mathfrak{s})\rangle - \sigma(W)\Big) - \iota(\Sigma),$$

其中，$\mathfrak{s}$ 是对应于 z 的自旋^c 结构，而 $[\mathfrak{a}_0]$ 是由 $S^3=\Sigma_2$（S^3，$\mathbf{U}_1$）上扰动狄拉克算子的最低正特征值所表示的可约临界点。此外，gr_z（$[\mathfrak{a}_0]$，Σ，$[\mathfrak{a}]$）是渐近于 $[\mathfrak{a}_0]$ 和 $[\mathfrak{b}]$ 的扰动 Seiberg-Witten 算子的指标，见[12, 定义 12.7]。对于可约临界点，我们修改分次

$$\bar{\mathrm{gr}}^{\mathbb{Q}}([\mathfrak{a}]) = \begin{cases} \mathrm{gr}^{\mathbb{Q}}([\mathfrak{a}]), & [\mathfrak{a}] \text{ is boundary-stable,} \\ \mathrm{gr}^{\mathbb{Q}}([\mathfrak{a}])-1, & [\mathfrak{a}] \text{ is boundary-unstable.} \end{cases}$$

数值 $\langle c_1(\mathfrak{s})\ c_1(\mathfrak{s})\rangle = c_1(\mathfrak{s})^2$ 按定义是配对 $\langle c_1(\mathfrak{s})\ \alpha\rangle$，来自 $H^2(W;\mathbb{R})\times H^2(W,\partial W;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$，其中 α 是类 $H^2(W,\partial W;\mathbb{R})$ 的一个选取，其限制为 $c_1(\mathfrak{s})$。由于 $\langle c_1,c_1\rangle$、σ 和 ι 均具有可加性，且该表达式在闭四维流形上为零，因此有理分次 $\mathrm{gr}^{\mathbb{Q}}([\mathfrak{a}])$ 不依赖于配边 Σ 或同伦类 z 的选取。按照此约定，$\mathbf{U}_1$ 上的 $[\mathfrak{a}_0]$ 具有零绝对分次。

或者，也可以通过将圆盘粘到^^配边 Σ 的穿孔处，利用以 Y 为边界的四维流形上的塞伯格–维滕模空间的预期维数来表示绝对分次。设 Σ 为封口曲面，Σ 的双重分支覆盖为 X。

$$\mathrm{gr}^{\mathbb{Q}}([\mathfrak{a}]) = -\mathrm{gr}_z(\hat{\Sigma}^*,[\mathfrak{a}]) + \frac{1}{8}(c_1(\mathfrak{s}_X)^2-\sigma(X)) - \frac{1}{2}(\chi(X)+\sigma(X)-1+b_1(Y_+)-b_1(Y_-)).$$

对于链环余边 $\Sigma\colon K_-\to K_+$，以及 $W=\Sigma_2([0,1]\times S^3,\ \Sigma)$ 上的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，我们有配边映射

$$HMR^\circ_*(\Sigma,\mathfrak{s}) : HMR^\circ_*(K_-,\mathfrak{s}_-)\to HMR^\circ_*(K_+,\mathfrak{s}_+),$$

其中 $\mathfrak{s}_\pm$ 是 $\Sigma_2(S^3,\ K_\pm)$ 上 $\mathfrak{s}$ 的限制。若 $\mathfrak{s}_-$ 和 $\mathfrak{s}_+$ 均为挠元，则$HMR^\circ_*(\Sigma,\ \mathfrak{s})$ 有定义良好的次数

$$\frac{1}{8}\left(c_1(\mathfrak{s}_W)^2-\sigma(W)\right)-\iota(\Sigma). \tag{1}$$

该次数可改写为

$$\frac{1}{8}c_1(\mathfrak{s}_W)^2-\frac{1}{8}\left(\sigma(K_+)-\sigma(K_-)-\frac{\Sigma^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma(K_+)-\sigma(K_-)-\frac{\Sigma^2}{2}+b_1(\Sigma)-b_0(\Sigma)+\eta(K_+)-\eta(K_-)\right)$$

其中 $\eta(K)$ 是链环的零度（参见 [6]），它等于其分支双重覆盖的 b^1。

3.1. **Frøyshov 不变量**。

对于一个行列式为 K 的链环 $K\subset S^3$，其双重分支覆盖是一个有理同调球面。给定 $\Sigma_2(S^3,K)$ 上的挠自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，我们有一个同构 $HMR_\bullet(K,\mathfrak{s})\cong F_2[\upsilon^{-1},\upsilon]$.考虑同态

$$i_*:\overline{HMR}_\bullet(K,\mathfrak{s})\to\widehat{HMR}_\bullet(K,\mathfrak{s}).$$

定义 3.2. 设 K 是一个行列式非零的链环，$\mathfrak{s}$ 是一个挠自旋^c 结构。$h_R(K,\mathfrak{s})$ 的（实）弗罗伊绍夫不变量是满足以下性质的数：$\widehat{\ }$ 中绝对分次最低的元素

$$i_*(\overline{HMR}_\bullet(K,\mathfrak{s}))\subset HMR_\bullet(K,\mathfrak{s}_0)$$

具有 $\mathrm{gr}^{\mathbb{Q}}=-h_R(K,\ \mathfrak{s})$。

我们有如下实 Frøyshov 不变量的单调性。

命题 3.3. 设 K_-，K_+ 是两个行列式非零的链环，且 $\Sigma\colon K_- \to K_+$ 是一个连通余边界。设 $\mathfrak{s}$ 是 Σ 的分支覆盖上的一个实自旋^{c} 结构，其在 $K_\pm$ 的分支覆盖上的限制为实自旋^{c} 结构 $\mathfrak{s}_\pm$。假设沿 Σ 的双重分支覆盖是负定的，即

$$b_1(\Sigma) - b_0(\Sigma) + \sigma(K_+) - \sigma(K_-) - \frac{\Sigma\cdot\Sigma}{2} = 0.$$

Then

$$h_R(K_-,\mathfrak{s}_-) \geq h_R(K_+,\mathfrak{s}_+) + \frac{1}{8}\left(c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(K_-) + \sigma(K_+) + \frac{\Sigma\cdot\Sigma}{2}\right).$$

证明。对于固定的自旋^{c}结构，证明与通常的 Frøyshov 不等式（例如参见 [9, 13]）相同，这里我们简要概述证明。考虑如下交换方块

$$\begin{array}{ccc} \overline{HMR}_\bullet(K_-,\mathfrak{s}_-) & \longrightarrow & \overline{HMR}_\bullet(K_+,\mathfrak{s}_+) \\ \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ \widehat{HMR}_\bullet(K_-,\mathfrak{s}_-) & \longrightarrow & \widehat{HMR}_\bullet(K_+,\mathfrak{s}_+) \end{array}$$

其中水平映射由 $(\Sigma,\ \mathfrak{s})$ 的配边映射给出。顶行可识别为 $\upsilon^{-(c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(W))/8}$

$$\mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon]] \xrightarrow{\upsilon^{-(c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(W))/8}} \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1},\upsilon]],$$

其中 W 是 Σ 的分支覆盖。事实上，由于 W 是负定的，在带柱状端的流形 W^* 上存在唯一的 ASD 自旋^{c} 联络。对于任意 j_-，$j_+\in\mathbb{Z}$，紧化可约模空间

$$M_z^{\mathrm{red},+}(\mathfrak{a}_{j_-},\Sigma,\mathfrak{b}_{j_+})$$

从临界点 $\mathfrak{a}_{j_-}$ 到 $\mathfrak{b}_{j_+}$ 的空间要么为空，要么是一个实射影空间，因此得到的映射是 υ的幂。由公式 (1)，该幂为 $-(c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(W))/8$。若 x 是 $HMR_\bullet(K_+,\mathfrak{s}_+)$ 中的一个元素，且 $i_*(x)\neq 0$ 达到最小次数，则

在 i_* 作用下映射为 $\upsilon^{(c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(W))/8}x$，$\widehat{HMR}_\bullet(K_-,\mathfrak{s}_-)$ 中的一个非零元素，因此

$$-h_R(K_-,\mathfrak{s}_-) \leq -h_R(K_+,\mathfrak{s}_+) - \frac{1}{8}(c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(W)).$$ □

注 3.4. 更一般地，可以为实三维流形 (Y,ι) 定义绝对分次以及 Frøyshov 不变量 $h_R(Y,\iota,\mathfrak{s})$。实配边界 $(W,\iota_W)\colon(Y_-,\iota_-)\to(Y_+,\iota_+)$ 的负定性类比条件为

$$b^+_{-\iota^*}(W) = 0.$$

3.2. **一些计算**。
原则上，实绝对分次需要一个以等变方式界定 $\Sigma_2(S^3,\ K)$ 的四维流形。在某些情况下，实分次可以直接从通常的分次推导出来。沿用 [15], ，我们引入实极小 L-空间的概念。

定义 3.5。 带有对合 $(Y,\ \iota)$ 的有理同调三维球面称为实极小 L-空间，若对于某个 ι-不变黎曼度量，扰动后的 CSD 梯度不存在实不可约临界点。类似地，若链环 K 的分支双重覆盖是实极小L-空间，则称其为极小 L-链环。

极小 L-链环的示例包括二桥结和$(p,\ q)$-环面纽结，其中 $p,\ q \geq 3$互素。第一类纽结的分支覆盖是透镜空间，并且可以赋予不变的正标量曲率度量 [12, 第 14], 节，由此我们可以推出，对于小扰动，不存在不可约临界点。第二类纽结产生一族布里斯科恩球面 $\{\Sigma(2,\ p,\ q)\}$，作为分支双重覆盖；对于塞弗特度量 [12,第14节5]，可以直接论证不存在扰动后的塞伯格–维滕方程的不可约解。

设 K 是一个极小 L-链环，并令 $\mathfrak{s}$ 为一个实自旋^c 结构。那么 $j_* = 0$，长正合列变为短正合列

$$0 \longrightarrow \widehat{HMR}_\bullet(K,\mathfrak{s}) \xrightarrow{p_*} \overline{HMR}_\bullet(K,\mathfrak{s}) \xrightarrow{i_*} \widehat{HMR}_\bullet(K,\mathfrak{s}) \longrightarrow 0.$$

下面的命题适用于其分支覆盖在实意义和通常意义下均为极小 L-空间的链环。

命题 3.6。 假设 $\Sigma_2(S^3,K)$ 对同一个不变黎曼度量的选取而言，既是实极小 L-空间，也是普通极小 L-空间。那么 $h_R(K,\mathfrak{s}) = h(\Sigma_2(K,\mathfrak{s}))$

证明。 我们假设选取了一个足够小的实扰动，使得不存在不可约临界点，且狄拉克算子的谱是简单的。令 $[\mathfrak{b}_0]$ 为对应于扰动狄拉克算子的最小正特征值的边界稳定临界点。则 $[\mathfrak{b}_0]$ 在 $HMR_\bullet(K,\mathfrak{s})$ 中实现最低的有理绝对分次，其值为

$$-\mathsf{gr}(\hat{\Sigma},[\mathfrak{b}_0]) + \frac{1}{8}(c_1(\mathfrak{s}_X)^2 - \sigma(X)) - \frac{1}{2}(\chi(X)+\sigma(X)-1),$$

其中 $\hat{\Sigma}$ 是 B^4 中以 K 为边界的曲面，而 (X,ι_X) 是相应的分支双重覆盖。另一方面，预期维数可以用线性化塞伯格–维滕算子的实指标表示为

$$\mathsf{gr}(\hat{\Sigma},[\mathfrak{b}_0]) = \mathsf{ind}^{-\iota_X^*}_{L^2(X)}(d+d^*) + \mathsf{ind}_{\mathbb{C},L^2(X)}(D_A^+),$$

其中第一项是 L^2-指标的 $(-\iota_X^*)$-不变部分，第二项是扭曲狄拉克算子的非不变复指标。特别地，我们不需要狄拉克算子的等变指标，因为旋量丛上的 ι_X 的对合提升与乘以 $\sqrt{-1}$ 反交换。由于 X 是 B^4 的覆盖，我们得到

$$\mathsf{ind}^{-\iota_X^*}_{L^2(X,\iota_X)}(d+d^*) = \mathsf{ind}_{L^2(X)}(d+d^*) + 1 = -\frac{1}{2}(\chi(X)+\sigma(X)+1)+1,$$

因此

$$-h_R(K,\mathfrak{s}) = -\mathsf{ind}_{\mathbb{C},L^2(X)}(D_A^+) + \frac{1}{8}(c_1(\mathfrak{s}_X)^2 - \sigma(X)) \tag{2}$$

由于假设 $Y = \Sigma_2(S^3,\ K)$ 本身是一个极小的 L-空间，因此最低分次也由一个临界点取得，该临界点由扰动狄拉克算子的最小特征值表示（使用

不同的扰动）。绝对分次为（参见 [9, 第 39] 节，并参见 [14] 了解 Frøyshov 不变量的定义）

$$-2h(Y,\mathfrak{s}) = -\mathsf{gr}(X,[\mathfrak{b}_0]) + \frac{1}{4}(c_1(\mathfrak{s}_X)^2 - \sigma(X)) - \frac{1}{2}(\chi(X)+\sigma(X)+1) \tag{3}$$

$$= -2\,\mathsf{ind}_{\mathbb{C},L^2(X)}(D_A^+) + \frac{1}{4}(c_1(\mathfrak{s}_X)^2 - \sigma(X)). \tag{4}$$

由方程 2 和 4，我们得到 Frøyshov 不等式的等式。 □

推论 3.7。若 $K = K(p,q)$ 是一个由透镜空间$L(p,q)$ 分支覆盖的 (p,q) 有理结，则 $h_R(K,\mathfrak{s}) = h(L(p,q))$。

4. The Topology of Unoriented Skein Cobordisms

4.1. Skein 三角形。

我们先从文献 [10] 中描述的轨形图景开始。设 $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_i = S^3$，并设 $K_i \subset \mathbb{Y}_i$ 是一个无向 skein 三元组链环。三个链环 $\{K_2, K_1, K_0\}$ 在一个小 3-球 B^3 内不同。B^3 上存在一个三阶对称性，其中包含两条弧，可视为四面体，如图 2 所示。我们将 K_i 以三周期方式扩展到所有 $i \in \mathbb{Z}$。

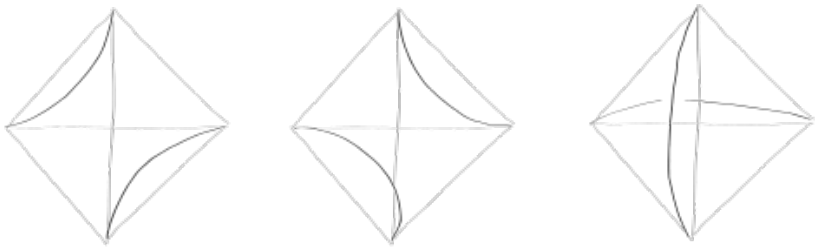

Figure 2. 四面体中的弧 B^3，具有 $\mathbb{Z}_3$-对称性。

为了得到从链环 K_i 到 K_{i-1} 的配边，我们将（$[0,1]\times B^3$、$T_{i,\,i-1}$）粘到乘积曲面$[0,1]\times(K_i - B^3)$ 上，其中 $T_{i,\,i-1}$ 是一个以 $B^3 \cap K_i$ 和 $B^3 \cap K_{i-1}$为边界的矩形。对于任意的 $j \le i$，我们通过复合 $\Sigma_{i,\,i-1}$、……、$\Sigma_{j+1,\,j}$来定义配边 Σ_{ij}。

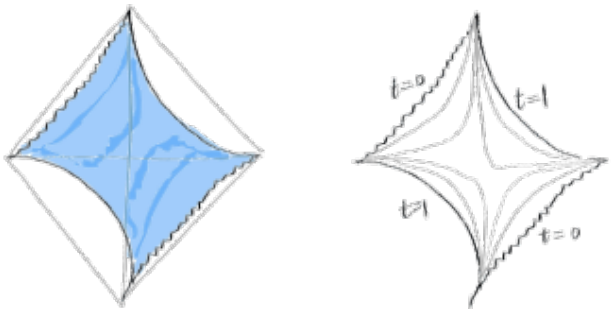

Figure 3. 矩形 $T_{i,\,i-1}$

我们将主定理重述如下。

定理 4.1. 对于 $\circ \in \{\vee, \wedge, -\}$，我们有一个实单极 Floer 同调群的同构 ps

$$HMR^{\circ}_{\bullet}(K_2) \cong H_{\bullet}(\mathrm{Cone}(HMR^{\circ}_{\bullet}(K_1) \to HMR^{\circ}_{\bullet}(K_0))),$$

其中右侧是$HMR^{\circ}(\Sigma_{10})$的映射锥。

有一条弧 $\delta_i \subset B^3$ 位于 $\Sigma_{i,\ i-1}$ 在时刻 $1\ 2$，连接了B^3中的链环的两个分支，见图 4。我们通过取以下部分的并集构造一个莫比¨乌斯带 $M_{i,\ i-2} \subset [0,2] \times \mathbb{Y}$：

- 在时刻 $1\ 2$ 和$3\ 2$时，分别取两条弧 δ_{i+1} 和 δ_i 的邻域（位于$\Sigma_{i,\ i-2}$）
- 由（$\delta \cap K_i$） $\subset K_i$的邻域在时刻 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$所得到的两个带。 – –

每条莫比乌斯带的自交数为（+2），根据 [10, 引理 7.2]。我们将这两条莫比乌斯带粘合起来

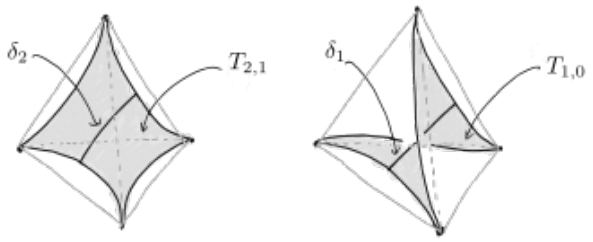

FIGURE 4. 弧 $\delta_i \subset \Sigma_{i,\ i-1}$。

$M_{i,\ i-2}$ 以及 $M_{i-1,\ i-3}$，以得到 $M_{i,\ i-3}$，其拓扑上是带两个穿孔的 $\mathbb{RP}^2$。

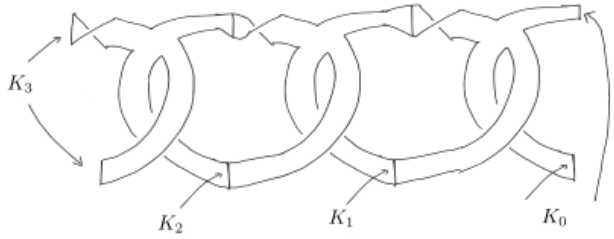

FIGURE 5. 粘合莫比乌斯带。

设 $\mathbb{B}_{i,\ i-2}$是 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times B^3$ 中$[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times \delta_{i,\ i-2}$ 的正则邻域（与四维球微分同胚）。设 $\mathbb{B}_{i,\ i-3}$ 是并集 $\mathbb{B}_{i,\ i-2} \cup \mathbb{B}_{i-1,\ i-3}$ 的正则邻域，它也是一个四维球，并包含 $M_{i,\ i-3}$。设 $\mathbb{S}_{31}$，$\mathbb{S}_{20}$，$\mathbb{S}_{30}$ 分别是 $\mathbb{B}_{31}$，$\mathbb{B}_{20}$、和 $\mathbb{B}_{30}$ 的边界三维球面。球面 $\mathbb{S}_{i,\ i-1}$ 与莫比乌斯带 $M_{i,\ i-1}$ 相交于一个平凡结，而 $\mathbb{S}_{30}$ 与带两个穿孔的$\mathbb{RP}^2$ 相交于一个 2 分量无结 $\mathbf{U}_2$。

4.2. **skein 三角形的双重分支覆盖**。

我们为上一小节中出现的对象的双重分支覆盖引入一些记号。令 Y_i 为（$\mathbb{Y}_i, K_i$）的分支覆盖，令 W_{ij}：$Y_i \to Y_j$ 为（$[0, j-i] \times \mathbb{Y}, \Sigma_{ij}$）的分支覆盖。令 U_{30} 为（$\mathbb{B}_{30}, M_{30}$）的分支覆盖。

令$S_{i,\ i-2}$ 为（$\mathbb{S}_{i,\ i-2}$，$\mathbb{S}_{i,\ i-2} \cap M_{i,\ i-2}$）的双重分支覆盖。回忆一下，$\mathbb{S}_{i,\ i-2} \cap M_{i,\ i-2}$ 是平凡结 $\mathbf{U}_1$，位于$\mathbb{S}_{i,\ i-2}$ 中，因此$S_{i,\ i-2}$ 与 3-球面微分同胚。令 S_{30} 为.....的分支覆盖

（$\mathbb{S}_{30}$，$\mathbb{S}_{30}\cap M_{30}$）$\cong$（$S^3$，$\mathbf{U}_2$），其中 $\mathbf{U}_2$ 是 2 分量无结。因此，超曲面 $S_{30}\subset W_{30}$与 $S^1\times S^2$微分同胚。

存在两个微分同胚

$$U_{30}\cong (S^2\times D^2)\#_{S_{i,i-2}}\overline{\mathbb{CP}}^2,$$

，对应于轨形分解的 $i=2,\ 3$

$$(\mathbb{B}_{30},M_{30})\cong(\mathbb{B}_{30},A_i)\#(S^4,\mathbb{RP}^2)$$

其中 A_i、$i=2,\ 3$ 是两个环带（参见 [10, 第 7.3] 节），它们属于不同的微分同胚同伦类。此外，$\mathbb{RP}^2\subset S^4$ 的自交数为 $+2$。这些记号可汇总如下表。

分支轨迹	基流形 分支覆盖	
K_i	$\mathbb{Y}_i$	Y_i
$\Sigma_{i,\ j}:\ K_i\to K_j$	$[0,i-j]\times\mathbb{Y}_i$	W_{ij}
$M_{i,i-2}$	$\mathbb{B}_{i,i-2}$	$N_{i,i-2}$
M_{30}	$\mathbb{B}_{30}$	N
$\mathbb{S}_{i,\ i-2}\cap M_{i,\ i-2}$	$\mathbb{S}_{i,i-2}$	$S_{i,i-2}$
$\mathbb{S}_{30}\cap M_{30}$	$\mathbb{S}_{30}$	S_{30}
	$[1/2,3/2]\times\delta_i$	E_{i-1}

配边 $W_{i,\ i-1}$ 可视为一个手术配边 $Y_i\to Y_{i-1}$。进行手术的纽结是 $\mathbb{Y}_i$ 中连接 $B^3\cap K_i$的两个分支的弧的原像。注意，$\Sigma_2(B^3,\ B^3\cap K_i)\cong S^1\times D^2$ 的核心正是这条弧的原像。（例如，[18] 中对该手术有更详细的说明。）

手术配边可以描述为：将不变的 2-柄粘到具有环面边界的流形 $\Sigma_2(\mathbb{Y}_i-B^3,\ K_i-B^3)$上。一个不变 2-柄的具体模型是 $D^2\times D^2\subset\mathbb{R}^4$，其上赋有对合

$$(x_1,x_2,y_1,y_2)\mapsto(x_1,-x_2,y_1,-y_2).$$

在底空间 $[0,1]\times\mathbb{Y}$中，2-柄的商空间仍是一个 2-柄。其核心为 $[0,1/2]\times\delta_{i+1}$，余核心为 $[1/2,1]\times\delta_i$。特别地，$[0,1]\times\mathbb{Y}$中的余核心与 $[1,2]\times\mathbb{Y}$ 中的核心之并的一个邻域恰为 $\mathbb{B}_{i,\ i-2}$。

在分支覆盖 $W_{i,i-1}$ 上，$W_{i,i-1}$ 中的余核与 $W_{i-1,i-2}$ 中的核在 Y_{i-1} 的手术结处相交。这两个 2-手柄的核与余核构成一个自交数为 (-1) 的二维球面 E_{i-1}。E_i 的正则邻域的边界为 $S_{i,i-2}$。

5. Proof of the Unoriented Skein Exact Triangle

我们的精确三角证明以 [8] 为模型，但我们将沿用[10]中的轨形记号。本节将证明“from”版本的定理。其余两种形式也可以类似地处理。

5.1. **同调代数**。
我们需要同调代数中的以下引理（参见 [20,引理 4.2]）。

引理 5.1（三角检测）。 假设对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，我们都有一个定义在$\mathbb{F}_2$ 上的链复形（C_i, d_i）以及链映射

$$f_i : C_i \to C_{i-1}.$$

假设复合链映射 $f_{i-1} \circ f_i$ 通过链同伦 H_i同伦于 0，使得

$$d_{i-1}H_i + H_i d_i + f_{i-1}f_i = 0, \tag{5}$$

对于所有 i都成立。此外，假设对于所有 i，映射

$$H_{i-1}f_i + f_{i-2}H_i : C_i \to C_{i-3},$$

在同调上诱导出一个同调同构。于是，诱导映射 $(f_i)_*$ 在同调中

$$(f_i)_* : H_*(C_i, d_i) \to H_*(C_{i-1}, d_{i-1})$$

构成一个正合列。对于每个 i 反链映射

$$\Phi : C_i \ni s \mapsto (f_i s, H_i s) \in \mathrm{Cone}(f_i).$$

在同调上诱导出同构。

为了应用三角检测引理，我们将作如下替换 .

- 令 $C_i =$ $\check{C}(K_i)$表示实单极 Floer 链群（遍历所有实自旋^c 结构）。
- 令 $\check{\partial}$： $C_i \to C_i$ 表示“from”微分，其中 i 不要与 Floer 同调的分次混淆。
- 令 F_i： $C_i \to C_{i-1}$ 为配边映射。

$$\check{m}(\Sigma_{i,i-1}) = \sum_{(\mathfrak{s},\tau)} \check{m}(\Sigma_{i,i-1}; \mathfrak{s}, \tau).$$

- $H_i : C_i \to C_{i-2}$ 将是一个链同伦映射，定义于第 5.2 小节。
- $G_i : C_i \to C_{i-3}$ 将是另一种链同伦，其定义见第 5.3 小节。

这些同伦应满足以下关系。

$$\check{\partial}H_{20} + H_{20}\check{\partial} + F_{10}F_{21} = 0 \tag{6}$$

and

$$\check{\partial}G_{30} + G_{30}\check{\partial} + F_{10}H_{31} + H_{20}F_{32} + \check{L} = 0, \tag{7}$$

其中， L 是一个与恒等映射同伦的链映射。每个链同伦都将通过对由度量族参数化的模空间计数而得到。

5.2. **第一个同伦** H。
我们考虑二重复合 Σ_{20} : $K_2 \to K_0$，因为一般 $\Sigma_{i,\ i-2}$ 的构造是相同的。沿着 ∂M_{20}对 Σ_{20} 进行分解

$$([0,2]\times\mathbb{Y},\Sigma_{20}) = ([0,2]\times\mathbb{Y}-\mathbb{B}_{20},\Sigma_{20}-M_{20})\cup_{(\partial\mathbb{B}_{20},\partial M_{20})}(\mathbb{B}_{20},M_{20}),$$

设 V_{20}: $K_2\to K_0$ 是将一个标准圆盘粘回 $\Sigma_{20}-M_{20}$后得到的配边。那么Σ_{20} 是 V_{20} 与一个 $\mathbb{RP}^2\subset S^4$ 的直和，其中 $\mathbb{RP}^2$ 的自交数为 $(+2)$:

$$([0,2]\times\mathbb{Y},\Sigma_{20}) = ([0,2]\times\mathbb{Y},V_{20})\#(S^4,\mathbb{RP}^2)$$

沿着 $(\mathbb{Y}_i,K_i)$还有另一种分解:

$$(\mathbb{Y}\times[0,2],\Sigma_{20}) = (\mathbb{Y}\times[0,1],\Sigma_{21})\cup_{(\mathbb{Y}_1,K_1)}(\mathbb{Y}\times[1,2],\Sigma_{10})$$

超曲面 $\mathbb{Y}_1$ 和 $\mathbb{S}_{20}$ 相交于一个二维球面，而奇异轨迹在该二维球面上有四个交点。

对于双重分支覆盖 W_{20}，存在相应的分解

$$W_{20} = (W_{20}-N_{20})\cup_{S_{20}} N_{20} = W_{20} = W_{21}\cup_{Y_1} W_{10}.$$

从微分同胚的角度看， $N_{20}\cong\mathbb{CP}^2$ 是沿着自交数为 $+2$的 $\mathbb{RP}^2$ 对 S^4 进行分支覆盖所得。交集 $Y_1\cap S_{20}$ 是一个二维环面。

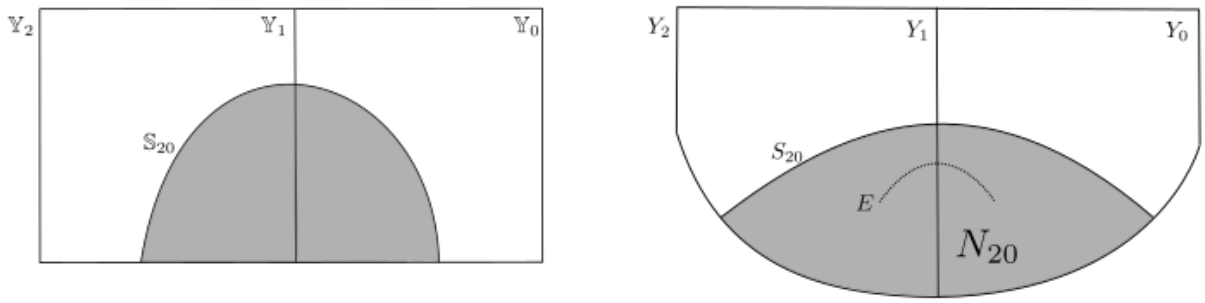

FIGURE 6. 双重复合配边中的超曲面。

设 $Q(\mathbb{S}_{20},\mathbb{Y}_1)$为一族轨形度量：当 T为负时，通过插入圆柱 $[T,-T]\times\mathbb{S}_{20}$得到；当 T为正时，通过插入圆柱 $[-T,T]\times\mathbb{Y}_1$ 得到。通过沿 $\mathbb{S}_{20}$ 在 $T=-\infty$ 处以及沿 $\mathbb{Y}_1$在 $T=+\infty$处添加断裂轨形度量，将度量延拓到 $Q = Q(\mathbb{S}_{20},\mathbb{Y}_1)\cong[-\infty,\infty]$。将上述轨形度量拉回，可在分支覆盖 W_{20} 上得到一族 Q不变的光滑黎曼度量。

我们可以安排 W_{20} 上的一参数度量族，使其在 S_{20} 上具有正标量曲率，并在环面 $Y_1\cap S_{20}$附近呈乘积形式。此外，还可以安排这些度量，使得在时刻 $T=-\infty$，带孔的 $\mathbb{CP}^2$ 部分也具有正标量曲率。这可由 [5, 第 1] 节推出，也可利用 [4]中的显式正标量曲率度量得到。（对于较小的参数 T，除超曲面邻域附近外，我们不对标量曲率作任何限制。）

考虑该族上的实 Seiberg-Witten 模空间 $\bar{Q}$

$$M_z(\mathfrak{a};\Sigma_{20}^*;\mathfrak{b})\to\bar{Q},$$

及其通过添加断裂轨迹得到的紧化 $M_z^+(\mathfrak{a},\ \Sigma_{20}^*,\ \mathfrak{b})_{\bar{Q}}$。将相应的可约 Seiberg-Witten 模空间记为 $M_z^{\mathrm{red}}(\mathfrak{a},\ \Sigma_{20}^*,\ \mathfrak{b})_{\bar{Q}}$。

计算零维分量后，我们得到映射 $H_o^o,\ H_o^u,\ H_s^u,\ \bar{H}_s^s, \bar{H}_u^s,\ \bar{}$

$$H_u^o : C^o(K_2) \to C^u(K_0).$$

相对于分解$C_i = C_i^o \oplus C_i^s$，同伦 H_{20} 可表示为如下矩阵形式。

$$H_{20} = \begin{pmatrix} H_o^o & H_o^u\bar{\partial}_u^s + m_o^u(\Sigma_{10})\bar{m}_u^s(\Sigma_{21}) + \partial_0^u\bar{H}_u^s \\ H_s^o & \bar{H}_s^s + H_s^u\bar{\partial}_u^s + m_u^s(\Sigma_{10})\bar{m}_u^s(\Sigma_{21}) + \partial_s^u\bar{H}_u^s \end{pmatrix}.$$

命题 5.2。对于 $(\mathbb{S}_{20},\ \mathbb{S}_{20}\cap M_{20})$ 上适当的小扰动，我们有

$$\check{\partial}\check{H}_{20} + H_{20}\check{\partial} + F_{10}F_{21} = 0.$$

证明。论证与 [8, 命题 5.2], 相同，但指标公式有所不同。思路是沿超曲面拉伸颈部，并考察一维模空间的边界。除了复合律证明中出现的边界点[12, 命题 13.3], 之外，$M_z^+(\mathfrak{a},\ W_{20}^*,\ \mathfrak{b})_{\bar{Q}}$ 在 $T=-\infty$上的纤维还会产生贡献。

$T=-\infty$ 纤维的一个典型元素具有如下形式

$$(\check{\gamma}_{K_2}, \check{\gamma}_{\mathbb{S}_{20}}, \check{\gamma}_{K_0}, \gamma_{V_{20}}, \gamma_{M_{20}})$$

其中，第一个和第三个分别是 $\Sigma_2(\mathbb{Y}_2,\ K_2)$和 $\Sigma_2(\mathbb{Y}_0,\ K_0)$上的实轨迹。元素$\gamma_{V_{20}}$ 和 $\gamma_{M_{20}}$ 是沿$(V_{20}-\Delta)$的分支覆盖以及 M_{20} 上的解，并附有柱状端。最后，$\check{}\gamma_{\mathbb{S}_{20}}$ 是$(S^3,\ \mathrm{U}_1)$分支覆盖上的一条轨迹。如例 2.5 中那样施加一个小扰动后，会出现一个由临界点构成的塔 $\{\mathfrak{a}_i\}$，且任意一对临界点之间模 2 的轨迹数为零。

证明的关键步骤是说明$\gamma_{M_{20}}$ 成对出现。为此，令 z_k 为对应于 $\mathfrak{t}_k$ 上的实自旋^c 结构的模空间分支

$$N_{20} = \Sigma_2(\mathbb{B}_{20}, M_{20}) \cong \overline{\mathbb{CP}}^2 \setminus \mathsf{Ball}$$

其中 $\langle c_1(\mathfrak{t}_k)\ [E]\rangle = 2k-1$ 对应于(-1)自交球面 E。对于 $\Sigma_2(\mathbb{B}_{20}, M_{20})$上的充分小扰动，有如下结论。

- $M_{z_k}(M_{20}, \mathfrak{a}_i)$的形式维数为

$$\mathsf{gr}_{z_k}(M_{20}, \mathfrak{a}_i) = \begin{cases} -k(k-1)/2 - i & i \geq 0 \\ -k(k-1)/2 - i - 1 & i < 0 \end{cases}.$$

- 模空间 $M_z(M_{20}, \mathfrak{a}_i)$不含不可约解，并且当 $i \geq 0$时为空 .
- 当 $i<0$时，模 空间 $M_{z_k}(M_{20}, \mathfrak{a}_i)$在维数为零时由单个点组成。
- 与共轭实自旋^c 结构 $M_{z_k}(M_{20},\ \mathfrak{a}_i)$ 和 $M_{z_{1-k}}(M_{20},\ \mathfrak{a}_i)$ 相关的模空间同构。

第一条项目使用 [8, 命题 5.2]中的维数公式。第二条项目由第一条得出，但 $i=0$ 和 $k \in \{0,-1\}$ 的情形除外。在这两种例外情形中，形式维数为零，但由于 N_{20}的正标量曲率假设，模空间为空。最后一条项目源于覆盖变换在N_{20} 上交换了 z_k 和 z_{-1-k}这一事实。关于边界贡献的公式可用与 [8, 引理 5.3]相同的方法证明。□

5.3. **第二个同伦** G。
G 的构造涉及一个以（$[0,3]\times\mathbb{Y}$， Σ_{30}）为参数的二维度量族。

超曲面与度量五边形。
在三重复合 $([0,3]\times\mathbb{Y},\Sigma_{30})$ 中，有五个超曲面

$$\mathbb{Y}_2,\mathbb{S}_{30},\mathbb{Y}_1,\mathbb{S}_{20},\mathbb{S}_{31},$$

其中，按上述顺序（循环地）排列时，只有相邻的两个成员才会相交。见图 7。对于任意一对 $(\mathbb{S},\mathbb{S}')$ 不相交的超曲面，我们定义一个 $[0,\infty)^2$-族度量 $P(\mathbb{S},\mathbb{S}')$

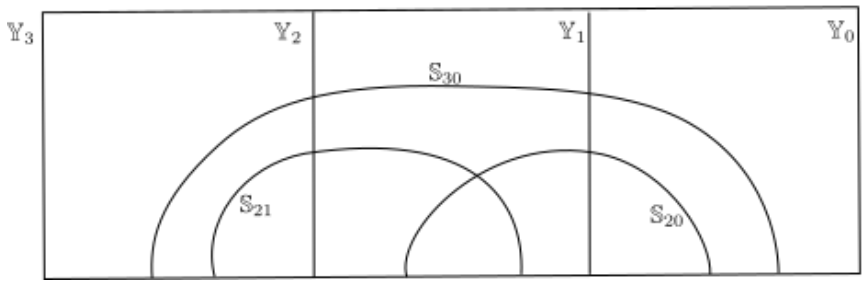

FIGURE 7. 三重复合配边中的五个超曲面。

通过沿这一对拉伸（T， T'）$\in[0,\infty)^2$，如构造 H 时所示。这族度量¯自然延伸到 $P(\mathbb{S},\ \mathbb{S}')$，方法是加入断裂度量。

有五对互不相交的对象，五个黎曼度量矩形沿着它们的¯ ¯公共边粘合成一个五边形 P。Q 的边界由断裂度量组成，我们将其记为

$$\partial\bar{P}=\bar{Q}(\mathbb{Y}_2)\cup\bar{Q}(\mathbb{S}_{30})\cup\bar{Q}(\mathbb{Y}_1)\cup\bar{Q}(\mathbb{S}_{20})\cup\bar{Q}(\mathbb{S}_{31}).$$

我们将度量拉回，得到 W_{30} 上的一族不变度量，它们沿着

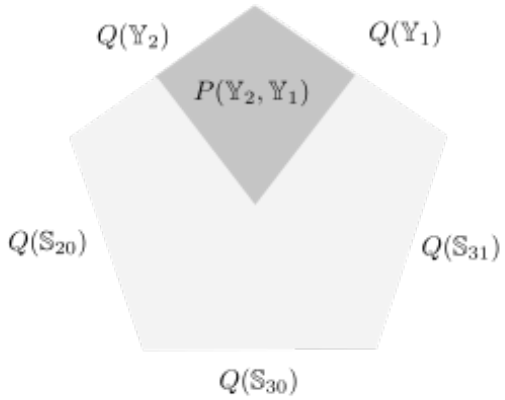

_FIGURE 8. 度量的五边形 P。

超曲面

$$Y_2,S_{30},Y_1,S_{20},S_{31}.$$

设 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{C}(K_0)$。对于零维模空间 $M_z^+(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b})$ 和可约 $M^{\mathrm{red}}{}_z^+(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b})$，我们定义模 2 计数

$$m_z(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b}), \quad \bar{m}_z(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b}),$$

分别如此。通过改变临界点的类型（即内部、边界稳定和边界-不稳定），m_z和 $\bar{m}_z$ 将定义矩阵元素 $\{G_o^o, G_s^o, G_0^u, G_s^s, G_u^s, G_s^u, G_u^u\}$。例如，$G_o^o$是一个映射

$$G_o^o : C_\bullet^o(K_3) \to C_\bullet^o(K_0).$$

为揭示恒等映射（7），我们还考虑一维模空间 $M_z^+(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b})$。设 A_o^o为该模空间的模 2 计数，其中 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 均为内部点。那么

$$A_o^o = 0.$$

对 A_o^o的贡献。

(a). $M_z^+(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b})$存在位于内部点 $P \subset \bar{P}$上方的端点。它们来自以下分层:

- $\check{M}_{z_1}(\mathfrak{a}, K_3, \mathfrak{a}_1) \times M_{z_2}(\mathfrak{a}_1, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b})_P$,
- $M_{z_1}(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b}_1)_P \times \check{M}_{z_2}(\mathfrak{b}_1, K_0, \mathfrak{b})$,
- $\check{M}_{z_1}(\mathfrak{a}, K_3, \mathfrak{a}_1) \times \check{M}_{z_2}(\mathfrak{a}_1, K_3, \mathfrak{a}_2) \times M_{z_3}(\mathfrak{a}_2, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b})_P$,
- $\check{M}_{z_1}(\mathfrak{a}, K_3, \mathfrak{a}_1) \times M_{z_2}(\mathfrak{a}_1, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b}_1)_P \times \check{M}_{z_3}(\mathfrak{b}_1, K_0, \mathfrak{b})$,
- $M_{z_1}(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b}_1)_P \times \check{M}_{z_2}(\mathfrak{b}_1, K_0, \mathfrak{b}_2) \times \check{M}_{z_3}(\mathfrak{b}_2, K_0, \mathfrak{b})$,

其中三重乘积中的中间项是边界受阻的。它们合起来贡献

$$G_o^o \partial_o^o + \partial_o^o G_o^o + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s G_s^o + \partial_o^u \bar{G}_u^s \partial_s^o + G_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o$$

到 A_o^o。

(b)。边 Q（$\mathbb{S}_{31}$）和 Q（$\mathbb{S}_{20}$）对边界 ∂P 的贡献为零。事实上，如果沿着一条 $\mathbb{S}_{31}$ 和 $\mathbb{S}_{20}$断开度量，则配边 Σ_{30} 会分裂出 S^4内部的一个标准 $\mathbb{RP}^2$ 作为连通和项，其自交数为 $+2$。命题 5.2 中的论证表明，边界点的个数为偶数。

(c)。边 Q（$\mathbb{Y}_1$）对应于分解

$$([0,3] \times \mathbb{Y}, \Sigma_{30}) = ([0,2] \times \mathbb{Y}, \Sigma_{31}) \cup_{\mathbb{Y}_1} ([0,1] \times \mathbb{Y}, \Sigma_{10}),$$

其中沿着 $\mathbb{Y}_2$和 $\mathbb{S}_{31}$拉伸度量，并且在（$[0,1] \times \mathbb{Y}$, Σ_{10}）上保持不变。端点要么来自两个形如以下形式的因子的乘积

$$M_{z_1}(\mathfrak{a}, \Sigma_{31}^*, \mathfrak{a}_1)_{\bar{Q}} \times M_{z_2}(\mathfrak{a}_1, \Sigma_{10}^*, \mathfrak{b}),$$

要么来自三个 个因子的乘积，如 **（a）**，其中包含一个边界阻碍因子。其贡献为

$$m_o^o(\Sigma_{10}) H_o^o(\Sigma_{31}) + m_o^u(\Sigma_{10}) \bar{H}_u^s(\Sigma_{31}) \partial_s^o + m_o^u(\Sigma_{10}) \bar{\partial}_u^s H_s^o(\Sigma_{31}) + \partial_o^u \bar{m}_u^s(\Sigma_{10}) H_s^o(\Sigma_{31}).$$

(d)。来自 $Q(\mathbb{Y}_2)$的贡献类似:

$$H_o^o(\Sigma_{20}) m_o^o(\Sigma_{32}) + H_u^s(\Sigma_{20}) \bar{m}_o^u(\Sigma_{32}) \partial_s^o + H_o^u(\Sigma_{20}) \bar{\partial}_u^s m_s^o(\Sigma_{32}) + \partial_o^u \bar{H}_u^s(\Sigma_{20}) m_s^o(\Sigma_{32}).$$

(e)。 在 $Q_{\mathbb{Y}_1}$ 与 $Q_{\mathbb{Y}_2}$ 相交的顶点处存在一个贡献，它来自模空间

$$M_{z_1}(\mathfrak{a}, \Sigma_{32}^*, \mathfrak{a}_1) \times M_{z_2}(\mathfrak{a}_1, \Sigma_{21}^*, \mathfrak{a}_2) \times M_{z_3}(\mathfrak{a}_2, \Sigma_{10}^*, \mathfrak{b}),$$

其中中间项受到边界阻碍。贡献

$$m_o^u(\Sigma_{10})\bar{m}_u^s(\Sigma_{21})m_s^o(\Sigma_{32})$$

到 $A_{o^\circ}^o$

(f). 最后一条边 $Q(\mathbb{S}_{30})$ 是最有趣的一条。从几何上看，我们有如下分解

$$([0,3]\times\mathbb{Y}, \Sigma_{30}) = ([0,3]\times\mathbb{Y} - B^4, [0,3]\times K_0 - \Delta) \cup_{(\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30})} (\mathbb{B}_{30}, M_{30}).$$

这里， Δ 是四维球 B^4 中两个标准二维圆盘的并；请回忆， $\partial M_{30} \cong \mathbf{U}_2$ 由两个彼此不相交的平凡结组成。换言之，若从 $([0,3]\times\mathbb{Y}, \Sigma_{30})$ 中切去 $(\mathbb{B}_{30}, M_{30})$，那么所得轨形就是从乘积余边界中移去四维球里的两个标准圆盘后得到的。令

$$\mathbb{U} = ([0,3]\times\mathbb{Y} - B^4, [0,3]\times K_0 - \Delta).$$

轨形 $\mathbb{U}^*$ 有三个柱状端

$$(\mathbb{Y}_3, K_3) \sqcup (\mathbb{Y}_0, K_0) \sqcup (\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30})$$

并且可以视为配边 $\mathbb{U}^* : (\mathbb{Y}_3, K_3) \sqcup (\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30}) \to (\mathbb{Y}_0, K_0)$。 第二个直和项 (B_{30}, M_{30}) 是一个具有定向边界 $(\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30})$ 的四维轨形。度量族 $Q(\mathbb{S}_{30}) \simeq [-\infty, +\infty]$ 在 $\mathbb{U}^*$ 上是常值的。另一方面，对于 $T \in Q = Q(\mathbb{S}_{30})$， $\mathbb{B}_{30}$ 上的度量沿着 $\mathbb{S}_{31}$ 拉伸，在 $(\mathbb{B}_{30}, M_{30})$ 上， $T < 0$ 对应 $\mathbb{S}_{20}$， $T > 0$ 对应。

在 $\Sigma_2(\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30})$ 上选取充分小的扰动，使得不存在不可约临界点，且在 $\mathbb{R}\times(\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30})$ 上不存在不可约轨线。令 $\mathfrak{a}'$ 为受扰动实 Seiberg–Witten 方程的一个临界点。我们使用零维参数化模空间 $M_z(\mathbb{B}_{30}^*, M_{30}^*, \mathfrak{a}')_{\bar{Q}}$ 和 $M_{\mathrm{red}z}(\mathbb{B}_{30}^*, M_{30}^*, \mathfrak{a}')_{\bar{Q}}$ 来定义这些元素

$$\begin{aligned} n_s &\in C_\bullet^s(\partial M_{30}), \\ n_o &\in C_\bullet^o(\partial M_{30}), \\ \bar{n}_s &\in C_\bullet^s(\partial M_{30}), \\ \bar{n}_u &\in C_\bullet^u(\partial M_{30}). \end{aligned}$$

我们将在推论 5.6 中证明 $\bar{n}_s$ 为零，目前暂且将其视为已知

设 $\mathfrak{a}$ 是 $(\mathbb{Y}_3, K_3)$ 上的一个临界点，$\mathfrak{a}'$ 是 $(\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30})$ 上的一个临界点，而 $\mathfrak{b}$ 是 $(\mathbb{Y}_0, K_0)$ 上的一个临界点。我们有如下模空间

$$M_z(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}, \mathbb{U}^*, \mathfrak{b}) \text{ and } M_z^{\mathrm{red}}(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}, \mathbb{U}^*, \mathfrak{b}).$$

我们计算上述零维模空间，以定义 ma 的矩阵元素

$$m_o^{uo} : C_\bullet^u(\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30}) \otimes C_\bullet^o(K_3) \to C_\bullet^o(K_3),$$

类似地

$$m_o^{uu}, m_s^{uo}, m_s^{uu}, \bar{m}_s^{ss}, \bar{m}_u^{ss}, \bar{m}_u^{su}, \bar{m}_u^{su}, \bar{m}_s^{us}, \bar{m}_u^{us}, \bar{m}_s^{uu}, \bar{m}_u^{uu}.$$

特别地，映射 $\bar{m}_s^{ss}$、 $\bar{m}_u^{su}$ 和 $\bar{m}_u^{us}$ 来自边界阻碍模空间。对 $\bar{m}_u^{ss}$ 有贡献的模空间 $M_z(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}, \mathbb{U}^*, \mathfrak{b})$ 是余秩为2的边界受阻模空间；也就是说，这些模空间的形式维数为 $\mathrm{gr}_z(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}, \mathbb{U}^*, \mathfrak{b}) = -2$。

属于 $\bar{Q}_{\mathbf{S}_{30}}$ 的一维模空间 $M_z^+(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b})_{\bar{P}}$ 的端点分为四类。

- 两个因子：
$$M_{z_1}(B_{30}^*, M_{30}^*, \mathfrak{a}') \times M_{z_2}(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}, \mathbb{U}^*, \mathfrak{b}),$$
其中， $\mathfrak{a}'$ 必然是边界不稳定的；
- 三个因子：这是不可能存在的，因为 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是不可约的；
- 四个因子：其中一个因子必然是双重边界阻碍的
$$M_{z_1}(B_{30}^*, M_{30}^*, \mathfrak{a}')_{\bar{Q}} \times M_{z_2}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1) \times M_{z_3}(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_1, \mathbb{U}^*, \mathfrak{b}_1) \times M_{z_4}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}),$$
其中， $\mathfrak{a}'$ 是边界稳定的， $\mathfrak{a}_1$ 是边界稳定的， $\mathfrak{b}_1$是不稳定的。

我们得到各项
$$m_o^{uo}(\bar{n}_u \otimes \cdot) + \partial_o^u \bar{m}_u^{ss}(n_s \otimes \partial_s^o(\cdot)).$$

(g). 最后，我们对迄今讨论的从 **(a)** 到 **(f)** 的一维模空间 $M_z^+(\mathfrak{a}, \Sigma_{30}^*, \mathfrak{b})_{\bar{P}}$的所有边界端点和内部端点贡献求和：

$$\begin{aligned}
A_o^{oo} &= G_o^o \partial_o^o + \partial_o^o G_o^o + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s G_s^o + \partial_o^u \bar{G}_u^s \partial_s^o + G_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o \\
&+ m_o^o(\Sigma_{10}) H_o^o(\Sigma_{31}) + m_o^u(\Sigma_{10}) \bar{H}_u^s(\Sigma_{31}) \partial_s^o \\
&+ m_o^u(\Sigma_{10}) \bar{\partial}_u^s H_s^o(\Sigma_{31}) + \partial_o^u \bar{m}_u^s(\Sigma_{10}) H_s^o(\Sigma_{31}) \\
&+ H_o^o(\Sigma_{20}) m_o^o(\Sigma_{32}) + H_u^s(\Sigma_{20}) \bar{m}_o^u(\Sigma_{32}) \partial_s^o \\
&+ H_o^u(\Sigma_{20}) \bar{\partial}_u^s m_s^o(\Sigma_{32}) + \partial_o^u \bar{H}_u^s(\Sigma_{20}) m_s^o(\Sigma_{32}) \\
&+ m_o^u(\Sigma_{10}) \bar{m}_u^s(\Sigma_{21}) m_s^o(\Sigma_{32}) \\
&+ m_o^{uo}(\bar{n}_u \otimes \cdot) + \partial_o^u \bar{m}_u^{ss}(n_s \otimes \partial_s^o(\cdot)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

其余端点。
如上文针对 A_o^o 所示，普通情形下的计算同样适用于实情形。¯关于 A_*^{**} 和 A_*^{**} 的公式，请参见 [8, 第 5] 节。

5.4. 关键恒等式。 本小节旨在验证恒等式 **(7)** 以及 L的拟-ˇ 同构假设。我们定义映射

$$\check{L} : \check{C}_\bullet(K_3) \to \check{C}_\bullet(K_3) = \check{C}_\bullet(K_0)$$

by
$$\check{L} = \begin{bmatrix} L_o^o & L_o^u \bar{\partial}_u^s + \partial_o^u \bar{L}_u^s \\ L_s^o & \bar{L}_s^s + L_s^u \bar{\partial}_u^s + \partial_s^u \bar{L}_u^s \end{bmatrix},$$
其中，我们将 $\bar{n}_u$ 插入配边 $\mathbb{U}$ 的 $(\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30})$ 端，即
$$L_o^o = m_o^{uo}(\bar{n}_u \otimes \cdot),$$
其余条目也以类似方式定义。此外，我们通过公式定义 ˇ*G*: ˇ $C_\bullet(K_3) \to \check{C}_\bullet(K_3)$】【。
$$\check{G} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
a &= G_o^o \\
b &= \partial_o^u \bar{G}_u^s + G_o^u \bar{\partial}_u^s + m_o^u \bar{H}_u^s + H_s^u \bar{m}_u^s + \partial_o^u(\bar{m}_u^{ss}(n_s \otimes \cdot)) \\
c &= G_s^o \\
d &= \bar{G}_s^s + \partial_s^u \bar{G}_u^s + G_s^u \bar{\partial}_u^s + m_s^u \bar{H}_u^s + H_s^u \bar{m}_u^s + \partial_s^u \bar{m}_u^{ss}(n_s \otimes \cdot) + \bar{m}_s^{ss}(n_s \otimes \cdot),
\end{aligned}$$

以及其中 ¯例如，我们将 $m_s^u H_u^s$简写为 $m_o^u(\Sigma_{10})H_u^s(\Sigma_{31})$.

命题 5.3. 我们有恒等映射：

$$\check{\partial}\check{G} + \check{G}\check{\partial} = \check{m}(\Sigma_{10})\check{H}_{31} + \check{H}_{20}\check{m}(\Sigma_{32}) + \check{L}, \tag{8}$$

ˇ其中 $H_{i,i-2}$ 是为二重复合 $W_{i,i-}$定义的同伦映射 2·

证明。 证明与 [8,命题 5.5],相同，来自模空间在.....上的端点

$$\mathbb{U}^*, (\mathbb{R}\times\mathbb{Y}, \Sigma_{i,i-2}^*), (\mathbb{R}\times\mathbb{Y}, \Sigma_{i,i-1}^*), \text{ and } (\mathbb{R}\times\mathbb{Y}_i, \mathbb{R}\times K_i). \qquad \square$$

最后一步是下面的命题，其证明将在下一小节给出。

ˇ命题 5.4。 </style}映射 L 诱导出同调同构。

5.5. **命题 5.4 的证明**。
让我们仔细考察第 (f) 部分中的双重分支覆盖图景。配边 W_{30}分解为两部分

$$W_{30} = U \cup_{S_{30}} N,$$

其中 U和 N分别是 $\mathbb{U}$和 $(\mathbb{B}_{30},\ M_{30})$ 的分支覆盖，并且 $S_{30} = \Sigma_2(\mathbb{S}_{30},\ \mathsf{U}_2)$ 与 $S^1 \times S^2$微分同胚。

流形 N 包含两个二维球面 E_2 和 E_3，它们的自交数分别为 (-1) 和 $E_2 \cdot E_3 = 1$。回想一下，N 有两种表示为爆破的方式

$$N \cong (S^2 \times D^2)\#_{S_{i,i-2}} \overline{\mathbb{CP}}^2$$

对于 $i = 2$ 或 3。球面 $S_{i,\ i-2}$ 可以视为E_i的正则邻域的边界。

¯不变黎曼度量的 Q-参数族在 U上为常值。在 N 部分， Q 沿球面 S_{31}为 $[-\infty, 0)$拉伸颈部，并沿 S_{20}为 $(0,\ +\infty]$拉伸颈部。我们安排度量，使其在边界 S_{30}附近呈柱状且具有正标量曲率，并且在 $T = \pm\infty$ 处，在去心的 $\mathbb{CP}^2$-分支上具有正标量曲率。

自旋^c 结构由其在除子 E_2上的第一陈类取值唯一确定。我们将满足以下性质的 $\mathfrak{t}_k$ 自旋^c 结构记为

$$\langle c_1(\mathfrak{t}_k), E_2\rangle = 2k+1.$$

由于 N 是四维球 $\mathbb{B}_{30}$的分支覆盖，任何自旋^c 结构都唯一地容许一个相容的实结构。按照惯例，我们在记号中继续省略实结构的选择。依照此惯例， $\mathfrak{t}_k$ 的共轭实自旋^c 结构为 $\mathfrak{t}_{-1-k}$。

回顾一下 Example 2.6 中，在 $S^1 \times S^2$ 上取正标量曲率度量并施加一个小的正则扰动时，$HMR^\circ(\mathsf{U}_2)$ 的链复形：其中有两座临界点塔

$$\{\mathfrak{a}_i^1\}, \{\mathfrak{a}_i^0\} : i \in \mathbb{Z},$$

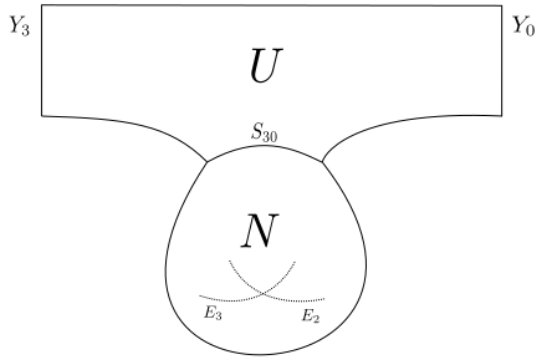

FIGURE 9. 沿 S_{30}对 W_{30} 进行分解。

且所有微分均为零。

下一个引理由 [8, 引理 5.7], 得出，其中 (1/2) 中的因子来自 Dirac 算子指标的实部。

引理 5.5. 实模空间 $M_k(M_{30}^*,\ \mathfrak{a}_i^\mu)_{\bar{Q}}$ 的维数为

$$\mathrm{gr}_k(M_{30}^*, \mathfrak{a}_i^\mu)_{\bar{Q}} = \begin{cases} -\mu - k(k+1)/2 - i + 1, & i \geq 0, \\ -\mu - k(k+1)/2 - i, & i < 0, \end{cases}$$

对于 $\mu = 0,\ 1$。

关于渐近于边界稳定临界点的模空间的下一个推论与 [8, 推论 5.7]类似，但稍微更微妙一些。

推论 5.6. 若 $\mathfrak{a}'$是一个边界稳定临界点，且相应的 $M_k(M_{30}^*, \mathfrak{a}')_{\bar{Q}}$非空，则以下情形之一必然成立。

(1) $k \in \{0, -1\}$和 $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_0^0$，其中 $\mathrm{gr}_k(M_{30}^*, \mathfrak{a}')_{\bar{Q}} = 1$. (2) $k \in \{1, -2\}$和 $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_0^0$，其中 $\mathrm{gr}_k(M_{30}^*, \mathfrak{a}')_{\bar{Q}} = 0$. (3) $k \in \{0, -1\}$和 $\mathfrak{a}' \in \{\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_0^1\}$，其中 $\mathrm{gr}_k(M_{30}^*, \mathfrak{a}')_{\bar{Q}} = 0$

.

只要 $\mathfrak{a}'$是边界稳定的，可约模空间 $M_k^{\mathrm{red}}(M_{30}^*, \mathfrak{a}')_{\bar{Q}}$就为空；但上述情形 (1) 除外。若 $k \in \{0, -1\}$和 $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_0^0$，则

$$\# M_k^{\mathrm{red}}(M_{30}^*, \mathfrak{a}_0^0)_{\bar{Q}} = 0.$$

因此，元素 $\bar{n}_s$ 为零。

推论 *5.6* 的证明。 根据引理 5.5，只要不属于情形 (1)， $M_k^{\mathrm{red}}(M_{30}^*,\ \mathfrak{a}')_{\bar{Q}}$的维数就是负数。假设 $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_0^0$ 和 M_k^{red}是零维且非空。于是，紧化 $M_k^+(M_{30}^*,\ \mathfrak{a}')_{\bar{Q}}$是一个一维带边流形，其端点由以下部分组成。

(i) $M_{z_0}(M_{30}^*, \mathfrak{b})_Q \times M_{z_1}(\mathfrak{b}, \partial M_{30}, \mathfrak{a}_0^0)$, where $\mathfrak{b} \in \{\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_0^1\}$.

(ii) $M_{z_0}(M_{30}^*,\ \mathfrak{b}_1)_Q \times M_{z_1}(\mathfrak{b}_1,\ \partial M_{30},\ \mathfrak{b}_2) \times M_{z_2}(\mathfrak{b}_2,\ \partial M_{30},\ \mathfrak{a}_0^0)$，其中中间项是边界受阻的。

(iii) $M_k^{\mathrm{red}}(M_{30}^*,\ \mathfrak{a}_0^0)_{\bar{Q}}$

(iv) $M_k(M_{30}^*,\ \mathfrak{a}_0^0)_{\pm\infty} \cong M_{z_0}(\mathbb{CP}^2 \setminus \text{球})^*,\ \mathfrak{b}) \times M_{z_1}(\mathfrak{b},\ (S^2 \times D^2 \setminus \text{球})^*,\ \mathfrak{a}_0^0)$，其中右侧由不交并上的不可约实解组成 不交并 .

由于在 S_{30} =$\Sigma_2(S^3,\ \mathrm{U}_2)$ 上微分是平凡的，类型 (i) 和 (ii) 的端点在模 2 意义下贡献为零。类型 (iv) 的端点为空，因为假设 $\pm\infty$ 上的度量在 $\mathbb{CP}^2$上具有正标量曲率。□

在通常的单极 Floer 同调 [8], 中，出于奇偶性原因，临界点 $\mathfrak{a}_j^0$ 绝不会出现在零维模空间中。在实情形下， $S^1 \times S^2$ 上的两座可约解塔都会作出贡献，正如以下推论 5.8] 的对应版本所示。

推论 5.7. 渐近于边界不稳定临界点的零维模空间有两种类型：

$$M_k(M_{30}^*, \mathfrak{a}_{i_k}^1)_{\bar{Q}} \quad \text{and} \quad M_k(M_{30}^*, \mathfrak{a}_{i_k-1}^0)_{\bar{Q}}, \tag{9}$$

其中 $i_k = -1 - k(k+1)/2$。这些模空间完全由可约解组成 s.

元素 $\bar{n}_u \in C_\bullet^u(\partial M_{30})$ 可写成两个级数之和

$$\begin{aligned}\bar{n}_u &= \sum_k a_k^1 e_{i_k}^1 + \sum_k a_k^0 e_{i_k-1}^0 \\ &= (a_0 + a_{-1})e_{-1}^1 + \sum_{j=2}^{\infty}(a_{-j}^1 + a_{-1+j}^1)e_{-j}^1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_{-j}^0 + a_{-1+j}^0)e_{-j}^0,\end{aligned}$$

其中 a_k^μ 统计式 (9) 中模空间的点数。在上述表达式中，我们将最高次数项单独列出，并将属于共轭自旋^c 结构的各项配对。我们将映射 $\check{}\ L_i^\mu$ 记作协边诱导映射，其中只插入 e_i^μ 。那么 $\check{}L$ 可写成以下各项之和

$$\check{L} = (a_0 + a_{-1})\check{L}_{-1}^1 + \sum_{j=2}^{\infty}(a_{-j}^1 + a_{-1+j}^1)\check{L}_{-j}^1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_{-j}^0 + a_{-1+j}^0)\check{L}_{-j}^0,$$

其中 $(a_0 + a_{-1})\ \check{}L_{-1}^1$ 是 $\check{}L$ 的最低阶项。

只需证明 $(a_0 + a_{-1})\check{}L_{-1}^1$ 是同构，这可由以下两个引理推出。

引理 5.8. 对于任意 k，总和 $a_k^1 + a_{-1-k}^1$ 模 2 等于 1。

引理 5.9. 映射 $\check{}\ L_{-1}^1$ 是恒等映射。

引理 *5.8* 的证明。证明是引理 5.10], 的实版本，基于对（扰动）阿贝尔反自对偶方程的分析。设 g 是 N^* 上的一个不变黎曼度量，且在端部呈柱状。设 $\mathfrak{t}_k$ 是一个实自旋^c 结构。由于 N^* 上没有第一同调，也没有自对偶平方可积调和 2-形式，因此存在唯一的自旋^c 联络 $A(k,g)$，满足曲率为 L^2 的阿贝尔反自对偶方程。由唯一性可知， $A(k,g)$ 在实结构下保持不变。模去规范变换后的实平坦自旋^c 联络构成一个圆 $\mathcal{S}$，与普通情形一样，即

普通情形。因此，通过考察 $A(k,g)$ 的极限（它是渐近平坦的），我们得到一个映射 $\theta_k(g) \in \mathcal{S}$。通过在 S_{30} 上选取一个自旋结构及一个相容的实结构，我们在圆 σ 上得到一个对合： $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$，其不动点为 $\mathfrak{s}_+$ 和 $\mathfrak{s}_-$。实自旋结构¯的选择在 $\mathfrak{t}_k$ 和 $\mathfrak{t}_{-1-k}$ 之间提供了一个识别。我们有

$$\theta_{-1-k}(g) = \sigma\theta_k(g).$$

映射 θ 可延拓到断裂度量

$$\theta_k : \bar{Q} \to \mathcal{S}.$$

延拓后的映射满足 $\theta_k(\pm\infty) \in \{s_+, s_-\}$ 和 $\theta_k(+\infty) = \theta_{-1-k}(+\infty)$。通过粘合 θ_k， θ_{-1-k}，我们在 $\mathcal{S}$中得到一个模2循环： $[-\infty,+\infty] \to \mathcal{S}$。关键事实是，循环 $\theta_k \cup \theta_{1-k}$在模2意义下非零。这可通过考虑映射 θ_k 的一个显式模型来证明，如引理 5.10]所示。

我们的引理由非零模2度推出。事实上，对于 $x \in \mathcal{S}$一般的情形，存在一个配边，从

$$\{x\} \times_{\mathcal{S}} (M_k^{ab}(M_{30}^*, \mathcal{S}) \cup M_{-1-k}^{ab}(M_{30}^*, \mathcal{S})$$

其计数等于该循环的度，到

$$(M_k^{ab}(M_{20}, \mathfrak{a}^1)_{\bar{Q}} \cup M_{-1-k}^{ab}(M_{20}, \mathfrak{a}^1)_{\bar{Q}}) \times M^{ab}(\mathfrak{a}^1, ([0,1] \times (\mathbb{S}_{30} \cap M_{30})^*, \mathcal{S}) \times_{\mathcal{S}} \{x\}.$$

上标“ab”表示扰动阿贝尔反自对偶方程的模空间。中间项 $M^{ab}(\mathfrak{a}^1, ([0,1] \times (\mathbb{S}_{30} \cap M_{30})^*, \mathcal{S})$由扰动反自对偶方程的解构成，其中我们在 $t = \infty$处不施加扰动，而在 $t = -\infty$处施加扰动。纤维积通过取 $t \to \infty$时的极限得到。由于 $M_k(M_{30}^*, \mathfrak{a}_{i_k}^1)_{\bar{Q}}$仅包含可约解，因此我们有 $M_k^{ab}(M_{20}, \mathfrak{a}^1)_{\bar{Q}}$与 $M_k(M_{30}^*, \mathfrak{a}_{i_k}^1)_{\bar{Q}}$的一个同一识别。□

引理 *5.9* 的证明。回顾我们之前的观察:

$$([0,3] \times \mathbb{Y}, \Sigma_{30}) = ([0,3] \times \mathbb{Y} - \mathbb{B}_{30}, [0,3] \times K_0 - \Delta) \cup_{(\mathbb{S}_{30}, \partial M_{30})} (\mathbb{B}_{30}, M_{30}).$$

也就是说，若从（$\mathbb{B}_{30}$， M_{30}）中切除（$[0,3] \times \mathbb{Y}$， Σ_{30}），则得到的轨形是从一个四维球中去掉两个标准圆盘后的乘积余边界。在双重分支覆盖层面，若从 W_{30} 中移除 N，再粘回一个 $S^1 \times B^3$，则得到圆柱 $[0,3] \times Y$。证明的核心是将 W_{30} 与恒等余边界进行比较。在沿着 Δ 对 B^4 作出的分支覆盖 $S^1 \times B^3$ 上选取一个不变黎曼度量，使其具有正标量曲率。假设该度量在边界 S_{30} 附近是圆柱形且标准的。我们通过插入圆柱 $[-T,T] \times S_{30}$，并在插入的圆柱上支撑扰动，来考虑一个单参数度量族。这为我们提供了一个链同伦，其起点映射为

$$\check{m}([0,3] \times K_3) : \check{C}_\bullet(K_3) \to C_\bullet(K_0)$$

到映射

$$\sum_{j<0} b_j^0 \check{L}_j^0 + \sum_{j<0} b_j^1 \check{L}_j^1$$

其中

$$\bar{n}_u(\Delta) = \sum_{j<0} b_j^0 \check{e}_j^0 + \sum_{j<0} b_j^1 \check{e}_j^1.$$

and

$$b_j^\mu = \#M(\Delta, \mathfrak{a}_j^\mu).$$

但只有当 $j = -1$ 和 $\mu = 1$ 时，模空间才是零维的。特别是，计数b_{-1}^1 为 1，这个值来自扰动后的 Seiberg-Witten 方程的唯一可约解。 □

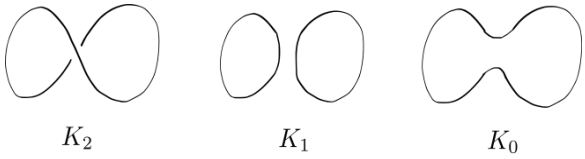

FIGURE 10. $\mathbf{U}_1 \to \mathbf{U}_2 \to \mathbf{U}_1$

6. EXAMPLES

6.1. $\mathbf{U}_1 \to \mathbf{U}_2 \to \mathbf{U}_1$。

设 $K_2 = K_0 = \mathbf{U}_1$ 和 $K_1 = \mathbf{U}_1$。下面描述"bar"版本的精确三角。设 $\mathfrak{s}_0$ 是 $\mathbf{U}_2$ 上唯一的挠实自旋^c 结构。其实单极 Floer 同调为

$$\overline{HMR}_\bullet(\mathbf{U}_2) = \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1}, \upsilon]] \oplus \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1}, \upsilon]]\langle -1\rangle.$$

第二个塔由临界点 $\mathfrak{a}_0^0$ 作为 $\mathbb{F}[[\upsilon]]$-模生成，其绝对分次为 (-1)。配边 Σ_{21} 的分支覆盖是一个带孔的 $S^2 \times D^2$，且只有自旋结构与配边映射相关。特别地，

$$\overline{HMR}(\Sigma_{21}) : \overline{HMR}_\bullet(\mathbf{U}_1) \to \overline{HMR}_\bullet(\mathbf{U}_2)$$

将 $\overline{HMR}_\bullet(\mathbf{U}_1) \cong \mathbb{F}_2[\upsilon^{-1}, \upsilon]]$ 同构映射到塔 $\mathbb{F}_2[\upsilon^{-1}, \upsilon]]\langle -1\rangle$，因为 W_{21} 上唯一的可约、未爆破 Seiberg-Witten 解，在 Morse 函数的极小值处限制为 $S^1 \times S^2$ 上的平坦自旋^c 联络。另一方面，该映射

$$\overline{HMR}(\Sigma_{10}) : \overline{HMR}_\bullet(\mathbf{U}_2) \to \overline{HMR}_\bullet(\mathbf{U}_1)$$

将第一个 $\mathbb{F}_2[\upsilon^{-1}, \upsilon]]$塔同构地映射到$\overline{HMR}_\bullet(\mathbf{U}_1)$，其余部分则映射为零。由精确三角可知，该映射

$$\overline{HMR}(\Sigma_{0,-1}) : \overline{HMR}_\bullet(\mathbf{U}_1) \to \overline{HMR}_\bullet(\mathbf{U}_1)$$

必为零。直接观察即可得出这一点：配边$W_{0,-1}$ 是一个打了两个孔的 $\mathbb{CP}^2$，而$W_{0,-1}$ 上共轭自旋^c 结构对应的分量模二相消。

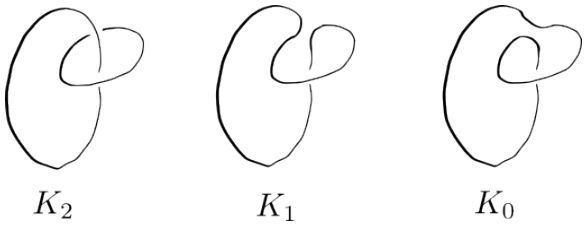

FIGURE 11. **霍普夫** $\to \mathbf{U}_1 \to \mathbf{U}_1$

6.2. **Hopf** $\to \mathbf{U}_1 \to \mathbf{U}_1$

设 K_2 为 Hopf 链环，$K_1 = K_0$ 为平凡结。K_2 的双重分支覆盖是 $\mathbb{RP}^3$，它支持两个自共轭自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_\pm$。配边 W_{21} 是自旋且负定的。设 $\mathfrak{t}_0$为 W_{21} 上的自旋结构，并假设 $\mathfrak{s}_+$ 是 $\mathfrak{t}_0$的限制。那么$HMR(\Sigma_{21},\ \mathfrak{t}_0)$ 是级数$\overline{HMR}(\Sigma_{21})$的首项，且是一个同构。因此，$\overline{HMR}(\Sigma_{21})$ 将$\overline{HMR}_\bullet(K_2,\ \mathfrak{s}_+)$

同构地映射到$\overline{HMR_\bullet(K_0)}$。事实上，作用于$HMR(\Sigma_{21},\ \mathfrak{t})$上的共轭对称性 $\overline{\mathfrak{t}\mapsto\bar{\mathfrak{t}}}$ 以及所有涉及的自旋^c 结构均为自共轭这一事实，意味着$HMR(\Sigma_{21},\ \mathfrak{t}_0)$是唯一的非零项，其余项则两两抵消。分量$HMR_\bullet(K_2,\ \mathfrak{s}_-)$属于$HMR(\Sigma_{21})$的核。类似地，配边 W_{32} 也是自旋的，且配边映射有唯一一个分项，将$HMR_\bullet(K_3)$同构地映射到$HMR_\bullet(K_2,\ \mathfrak{s}_+)$。

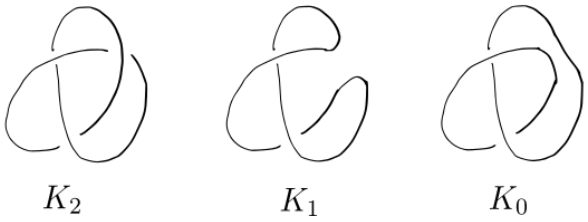

FIGURE 12. 右手三叶结 $\to$ 平凡结 $\to$ Hopf 链环

6.3. **右手三叶结 $\to$ 平凡结 $\to$ Hopf 链环**。
令 K_2 为右手三叶结，K_1 为平凡结，且 K_0 为 Hopf 链环。它们都是最小的L-链环，因此只需描述精确三角的HMR版本。K_2 和 K_0 都支持多个挠自旋^c 结构。令 $\mathfrak{s}_0$ 为 K_2上的自共轭实自旋^c 结构，并令 $\mathfrak{s}_1,\mathfrak{s}_2$为另外两个自旋^c 结构。按照例 2.7 中的约定，将K_2 上的临界点标记为 $\{\mathfrak{a}_i^\mu\}$（对应 $i\in\mathbb{Z}$）以及 $\mu=0,1,2$。同样，将 K_0 上的临界点标记为 $\{\mathfrak{a}_j^\pm\}$，其中$j\in\mathbb{Z}$；并将 K_1 上的临界点标记为 $\{\mathfrak{a}_j\}$。

配边 W_{21} 由 2-柄附着和 $H_2(W_{21},\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$构成。$H_2$ 的一个生成元的自交数为（-3），因此共轭作用在 W_{21}上的自旋^c 结构上是自由的。根据共轭自旋^c 对称性，对于任意自旋^c 结构 $\mathfrak{t}$,

$$\overline{HMR}(\Sigma_{21},\bar{\mathfrak{t}})(\mathfrak{a}_i^1)=\overline{HMR}(\Sigma_{21},\mathfrak{t})(\mathfrak{a}_i^2),\quad \overline{HMR}(\Sigma_{21},\bar{\mathfrak{t}})(\mathfrak{a}_i^0)=\overline{HMR}(\Sigma_{21},\mathfrak{t})(\mathfrak{a}_i^0)$$

由此我们推得 $HMR(\Sigma_{21})(\mathfrak{a}_j^0)=0$。此外，

$$\overline{HMR}(\Sigma_{21}):\overline{HMR}_\bullet(K_2)\to\overline{HMR}_\bullet(K_1)$$

将每个 $\{\mathfrak{a}_i^1\},\{\mathfrak{a}_i^2\}$ 塔同构地映射到 $HMR_\bullet(K_1)$ 中的 $\{\mathfrak{a}_i\}$ 塔。（这可以直接根据 [8, 第 4 节14]中的讨论得出。）精确三角意味着 $HMR(\Sigma_{10})=0$；或者也可以由 $b^+(W_{10})>0$ 推出。

该配边 W_{32} 是自旋的。假设 $\mathfrak{s}_+$ 是唯一的自旋^c 结构，它是 W_{32} 上唯一的自旋结构 $\mathfrak{t}_0$ 在 K_2 上唯一自旋结构的延拓下的限制。那么，配边映射的 $\mathfrak{t}_0$ 分量同构地映到 $HMR_\bullet(K_2)$ 的 $\mathfrak{s}_0$ 分量上，且具有最低的绝对分次。此外，共轭对称性意味着，元素 $HMR_\bullet(K_3)$ 在 $HMR(\Sigma_{32})$ 下的像，在 $HMR_\bullet(K_2)$ 的 $\mathfrak{s}_1$ 和 $\mathfrak{s}_2$ 分量中是对称的。因此，$HMR(\Sigma_{32})$ 嵌入 $HMR(\Sigma_{21})$ 的核中，这正如预期。

ACKNOWLEDGMENT

我谨向我的导师 Peter Kronheimer 致谢，感谢他的指导与支持。我还要感谢 Hokuto Konno、Jin Miyazawa 和 Masaki Taniguchi 与我进行的多次讨论，并分享他们的草稿。

References

[1] Jonathan M. Bloom。单极 Floer 同调中的链环手术谱序列。 *Adv. Math.*，226(4):3216– 3281，2011。[2] A. Floer。瞬子同调与 Dehn 手术。载于 *The Floer memorial volume*，第 *Progr. Math.* 卷，77–97 页。Birkh¨ auser，巴塞尔，1995。[3] Kim A. Frø yshov。 *Duke Math. J.*，（3 576，2010 155 3 519 -球面：–。[4] Sherry Gong。 *Results on Spectral Sequences for Monopole and Singular Instanton Floer Homologies*。ProQuest LLC，安娜堡，MI，2018。博士论文（Ph.D.）——麻省理工学院。[5] Mikhael Gromov 和 H. Blaine Lawson, Jr. 正标量曲率单连通流形的分类。 *Ann. of Math. (2)*，111(3):423–434，1980。[6] Louis H. Kauffman 和 Laurence R. Taylor。链环的签名。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，216:351–365，1976。[7] Hokuto Konno、Jin Miyazawa 和 Masaki Taniguchi。对合、纽结与 Floer 上同调。 *arXiv Preprint 2304.01115* 2023 ，。

[8] P. Kronheimer、T. Mrowka、P. Ozsv´ath 和 Z. Szab´o。单极子与透镜空间手术。 *Ann. of Math. (2)*，165 2 457 546，2007 ( ): –。[9] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka。 *Monopoles and three-manifolds* 10 *New Mathematical Mono-* ，第 *graphs* 2007 卷，。剑桥大学出版社，剑桥，。[10] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka。Khovanov 同调是平凡结探测器。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études* , *Sci.* 113 97 208, 2011

（）：–。[11] Ronnie Lee 和 Steven H. Weintraub。双重分支覆盖的同调。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，123 4 1263 1266，1995 ( ): –。[12] Jiakai Li。单极 Floer 同调与实结构。 *arXiv Preprint, https://arxiv.org/abs/2211.10768*，2022。[13] Francesco Lin。单极 Floer 同调与三角剖分猜想的 Morse-Bott 方法。 *Mem.* , *Amer. Math. Soc.* 255 1221 +162 2018

（）：v，。[14] Francesco Lin 和 Michael Lipnowski。单极 Floer 同调、特征形式重数与 Seifert-Weber 十二面体空间。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(9):6540–6560，2022。[15] Francesco Lin 和 Michael Lipnowski。Seiberg-Witten 方程与双曲三维流形的长度谱。 *J. Amer. Math. Soc.*，35(1):233–293，2022。[16] Ciprian Manolescu。纽结 Floer 同调的无向 skein 精确三角。 *Math. Res. Lett.*，14 852，2007 5 839( ): –。[17] Ciprian Manolescu 和 Brendan Owens。由双重分支覆盖的 Floer 同调得到的同痕不变量。 *International Mathematics Research Notices*，2007，01 2007。rnm077。[18] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。带边界四维流形的绝对分次 Floer 同调与交形式。 *Adv. Math.*，173(2):179–261，2003。[19] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。全纯圆盘与三维流形不变量：性质及应用。*Ann. of Math. (2)*，159(3):1159–1245，2004。[20] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。分支双重覆盖的 Heegaard Floer 同调。 *Adv. Math.*，194 1 1 33，2005 ( ): –。[21] Christopher W. Scaduto。瞬子与奇 Khovanov 同调。 *J. Topol.*，8(3):744–810，2015。

Dept. of Math., Harvard Univ., Cambridge MA, United States 02138
Email address: jiakaili@math.harvard.edu