arXiv:2304.01750v1 [math.GR] 4 Apr 2023

通过子因子求子群横截集及双陪集代表元的完备算法

M.H.HOOSHMAND

Abstract. 最近，我们引入并研究了群的子指标和子因子这一课题。在这些研究中，我们陈述并证明了一种求有限群子因子的算法，其中一个特殊情形可用于计算子群的横截集。本文首先证明，该算法是求所有横截集的完备算法。受此启发，我们陈述并证明了一种求子群的所有双陪集代表元及双陪集数目的完备通用算法（迄今为止尚无此类算法）。此外，我们引入了三个子集的中间直积这一概念，并给出了一个子集成为双陪集完备代表系的若干等价条件。最后，作为本课题的另一项重要成果，我们提供了一种确定相对于一对子群的群中间因子的方法。

1. Introduction and preliminaries

一系列研究带来了各种成果，其中之一是发现了一种完备算法，可以计算任意子群（不附加任何条件）的双陪集代表元，而这此前一直未能实现。下面简要介绍这些概念、思想和主题。在研究代数结构上的上周期子集和一些函数方程时，我们遇到了岩浆、半群和群的子集的直积（见 [7]）。由此引出了接下来这个颇具挑战性的猜想（见 [3], Kourovka笔记 [8], 第19期（2018年），问题19.35；第20期（2022年），问题20.37，以及 [6]）。

猜想。对于每个有限群 G 和每个因式分解 $|G| = ab$，都存在子集 A、$B \subseteq G$，满足 $|A| = a$ 和 $|B| = b$，使得 $G = AB$。
该猜想对所有有限可解群、所有满足以下条件的有限群（对于其阶的每个因子 d，都存在阶或指数为 d 的子群），以及阶为 ≤ 10000 的所有群均成立。此外，该猜想的推广形式（k-因式分解）对所有超可解群均成立（见 [6, 1]）。
值得注意的是，在上述猜想中，$G = A \cdot B$，其中 $A \cdot B$ 表示子集 A、B 的直积，这意味着 AB 中每个元素都能表示为 $x = ab$，且 $a \in A$、$b \in B$ 的表示唯一。因此，$G = A \cdot B$ 当且仅当 $G = AB$ 且乘积 AB 是直积（由两个子集对 G 进行因式分解，加法记号为 $G = A\dot{+}B$）。我们称 A 为 G 的左因子，当且仅当 $G = A \cdot B$ 对某个 $B \subseteq G$ 成立（等价地，存在相对于 A 的 G 的右因子 B）。例如，每个子群都是相对于其右（分别为左）陪集代表系的左（分别为右）因子，因此它是 G 的双侧因子。

由于对于所有 $b \in G$，乘积 $A\{b\}$ 都是直积，因此产生的问题是：我们能够将这个直积扩展到什么程度？如果 A 是 G 的左因子，又会发生什么？于是，我们得出了一个重要的

2000 *Mathematics Subject Classification.* 20F99,20D40.*Key words and phrases.* 陪集代表系，双陪集的完备代表系，因子子集，子因子，子指标。

概念，即群的因子的一种推广，也就是子因子。此外，我们还引入了任意群子集的子指标，这些子指标可以被视为子群指标的某种推广（见 [4, 5]）。这一主题有一些关于子群的结果，例如下面的引理。

引理 1.1. 设 G 是一个群，$H \leq G$ 和 $T \subseteq G$。那么，以下陈述是等价的：(a) T 是 G 中 H 的右横截集；(b) $G = H \cdot T$；(c) 直积 HT 是直积，并且相对于该直积，T 是极大的（即，T 是相对于 H [4]的 G 的右子因子，这意味着 $HT = H \cdot T$，并且如果 $T \subset S$，那么直积 HS 不】【。

t

直接）。

证明。由 [4], 的推论 3.9 取 $A := H \leq G$ 可立即得出。 □

一种寻找子群陪集代表系的完备算法。在 [5] 中，我们介绍了一种经证明的算法，用于求得群的任意子集的子因子。现在，我们可以据此得到求子群右横截集（左横截集同理）的完备算法，即“右横截集算法”（RTA）。

定理 1.2 (RTA)。设 G 是一个有限群，且 $H \leq G$。于是，令 $H^c := G \setminus H$, $\mathcal{C}^{(-1)}(H) := G$，固定 $g_0 \in G$，并按如下方式构造序列 $\{g_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{\mathcal{C}^{(n)}(H)\}_{n\geq -1}$：根据假设，$g_0, \cdots, g_n$ 和 $\mathcal{C}^{(-1)}(H)$ $\cdots, \mathcal{C}^{(n-1)}(H)$ 已定义，对于整数 $n \geq 0$，令

$$\mathcal{C}^{(n)}(H) := \mathcal{C}^{(n-1)}(H) \cap H^c g_n, \tag{1.1}$$

然后在 $\mathcal{C}^{(n)}(H)$ 非空时，选取其中一个元素 g_{n+1}，并令 $B_n := \{g_0, \cdots, g_{n+1}\}$（因此，对所有 $n \geq 0$，$B_{-1} = \{g_0\}, B_{n-1} \cup \{g_{n+1}\} = B_n$ 和 $\mathcal{C}^{(n)}(H) = \bigcap_{i=0}^{n} H^c g_i$）。

那么存在最小整数 $N \geq 0$ 使得 $\mathcal{C}^{(N)}(H) = \emptyset$，并且我们有 $|G : H| = N + 1, B := B_{N-1}$（含有 $N + 1$ 个元素）是 G 中 H 的右横截集。
此外，H 的每个右横截集都可以由此算法得到（即该算法是完备的）。

证明。证明的第一部分由 [5] 的定理 4.1 和引理 1.1 得出，取 $A := H \leq G$ 即可。

现在，设 X 是 G 中 H 的任意右横截集，并用 $X = \{x_0, \cdots, x_m\}$ 表示其中的元素，其中 $m = |X| - 1$（因此 $m \geq 0$）。在算法中选取 $g_0 := x_0$（因为 g_0 是任意的）。若 $H = G$，则 $|X| = 1$、$N = 0$ 且 $X = \{x_0\} = B = B_{-1}$，于是结论成立。否则，设对于 $n < m$，g_0、$\cdots$、g_n 分别取值为 x_0、$\cdots$、x_n。由于乘积 $H(\{x_0, \cdots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\})$ 是直积，对于所有 $h \in H$，都有 $x_{n+1} \neq hx_i$，且 $i = 0$、$\cdots$、n。因此

$$x_{n+1} \in \bigcap_{i=0}^{n} H^c x_i = \bigcap_{i=0}^{n} H^c g_i = \mathcal{C}^{(n)}(H)$$

因此，在算法过程中，g_{n+1} 可以取值为 x_{n+1}。因此，$X \subseteq B_{N-1}$ 和引理 1.1 要求 $X = B_{N-1}$（因此 $N = m$）。□

例 1.3。考虑 RTA 中的加法群 $G := \mathbb{Z}_{12}, H = \{0, 3, 6, 9\} \leq G$ 和 $g_0 := 0$。由于$g_1 \in H^c$，我们可以选择 $g_1 := 1$。于是

$$g_2 \in H^c \cap (H^c + 1) = \{2, 5, 8, 11\}.$$

若 $g_2 := 2$，则 $\mathcal{C}^{(2)}(H) = \{2,5,8,11\} \cap (H^c + 2) = \emptyset$。因此，$|G\colon H| = N+1 = 3$，且 $T = \{0,1,2\}$ 是 G 中 H 的陪集代表系。注意，通过对 g_n's（在 RTA 中）进行所有可能的选择，可以得到 H 的所有陪集代表系。

2. Complete algorithms for representatives of double cosets and middle factors

受 RTA 和引理 1.1 的启发，我们正在研究一个子集成为一对子群的双陪集的完备代表系所需满足的一些等价条件，以及一种能够使我们获得所有此类代表元的完备算法。为此，我们需要三个子集 AXB 的直积，记作 $A \cdot X \cdot B$，其定义类似于两个子集的直积（见 [5]）。但是，在近期的研究中，我们发现，存在另一个弱于 $A \cdot X \cdot B$ 的概念，它在双陪集代表元方面发挥着重要作用。

定义 2.1. 我们称乘积 AXB 中间直（或相对于 X 直），并将其记为AXB，如果等式 $axb = a'x'b'$ 对所有 a、$a' \in A$、x、$x' \in X$ 和 b、$b' \in B$ 都要求 $x = x'$。

若乘积 AXB 是直积，则它是中间直积，但反之不成立。例如，$A\{x\}B$ 总是中间直积（对所有 x 于 G均成立），但一般而言它不是直积（例如，考虑本文末尾例 2.14 中的 $x = a^2$、$A := H$ 和 $B := K$）。因此，我们令

$$\mathrm{Mid}_G(A,B) := \{g \in G : AgB = A \cdot \{g\} \cdot B\},$$

并称其为 G 中 (A,B) 的中间直。由于 $A \cdot X \cdot B$ 蕴含 $A \cdot x \cdot B$，对所有 $x \in X$ 均成立，并且乘积 $A\emptyset B$ 始终是直积（此处 X 为空），

$$\mathrm{Mid}_G(A,B) = \emptyset \Leftrightarrow AXB = A \cdot X \cdot B \text{ requires } X = \emptyset, \text{ for every subset } X \tag{2.1}$$

注意，当且仅当 $1 \in \mathrm{Mid}_G(A,B)$ 时，乘积 AB 是直积；若 $AB = A \cdot B$，则

$$\{x \in G : A \subseteq A^x\} \cup \{x \in G : B^x \subseteq B\} \subseteq \mathrm{Mid}_G(A,B),$$

其中 $A^x = xAx^{-1}$。因此，如果 A 或 B 是 G 的正规子集，那么

$$\mathrm{Mid}_G(A,B) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Mid}_G(A,B) = G \Leftrightarrow AB = A \cdot B \Leftrightarrow 1 \in \mathrm{Mid}_G(A,B)$$

因为如果 A 是 G 的正规子集，$x_0 \in \mathrm{Mid}_G(A,B) \neq \emptyset$ 且 $a_1xb_1 = a_2xb_2$ 对于 $a_1, a_2 \in A$, $x \in G$ 和 $b_1, b_2 \in B$ 成立，那么存在 $a_1', a_2' \in A$ 使得 $xa_1'b_1 = xa_2'b_2$，因此存在 $a_1'', a_2'' \in A$ 使得 $a_1''x_0b_1 = a_2''x_0b_2$，这意味着 $b_1 = b_2$。因此，乘积 AxB 是直积，故 $x \in \mathrm{Mid}_G(A,B)$。因此，在阿贝尔群中，$\mathrm{Mid}_G(A,B)$ 要么为空，要么是整个 G。不难验证，

$$AXB = A \cdot X \cdot B \Leftrightarrow AXB = A\dot{X}B \text{ and } X \subseteq \mathrm{Mid}_G(A,B) \tag{2.2}$$

对任意子集 A、B、X。
显然，如果 H、K 是 G 的子群，那么

$$H\{x\}K \text{ is direct } \Leftrightarrow x \in \mathrm{Mid}_G(H,K) \Leftrightarrow H \cap K^x = \{1\} \Leftrightarrow H^{x^{-1}} \cap K = \{1\} \Leftrightarrow Hx \cap xK = \{x\} \tag{2.3}$$

现在，我们证明任意群中的子集 X 成为双陪集完备代表系的一些（基本）等价条件。

引理 2.2. 设 H、$K \leq G$ 和 $X \subseteq G$。那么，以下陈述等价:
(a) X 是 G中 (H,K) 的双陪集的完备代表系；(b) $G = HXK$；(c) $HXK = HXK$ 和 X 相对于中间直积是极大的。

证明。首先注意，若 $HXK = HXK$，则

$$\big(\forall g \in X^c\big)\Big(H(X \cup \{g\})K \text{ is middle direct } \Leftrightarrow g \in (HXK)^c\Big) \tag{2.4}$$

因为若 $g \in HXK$ 且对所有 $x \in X$都有 $g \neq x$，则 $HgK = HxK$，因此 $H(X\cup\{g\})K$ 不是中间直积。反之，若乘积 $H(X \cup \{g\})K$ 不是中间直积，则假设 $HXK = HXK$要求 $h_1gk_1 = h_2xk_2$ 对某些 $h_1, h_2 \in H$, $x \in X$ 和 $k_1, k_2 \in K$ 成立，这意味着 $g \in HxK \subseteq HXK$。

现在，若 (a) 成立，且对于 $h_1, h_2 \in H$, $x_1, x_2 \in X$ 和 $k_1, k_2 \in K$有 $h_1x_1k_1 = h_2x_2k_2$，则 $x_1 \in Hx_2K_2$，因此 $x_1 = x_2$（根据 X 的定义）。由此得到 (b)。
此外，若满足 (b)，则由 (2.4) 可知，对于每个 $g \in X^c$， $H(X \cup \{g\})K$ 都不是中间直（因为 $(HXK)^c = \emptyset$）。因此得到 (c)。最后，若 (c) 成立，则族 $\{HxK : x \in X\}$ 中的所有成员两两不相交，且 $G = HXK$（因为若 $g \in (HXK)^c$，则由 (2.4) 可得矛盾），故证明完成。□

注 2.3. 鉴于群的子因子与子指标理论，以及上述定义和引理，我们提出使用“中间横截集”这一名称，而不是“双陪集的完备代表系”。因此，当且仅当 $G = HXK$ 时， X 是一对子群（H， K）的中间横截集（在另一篇论文中，我们作为群的子因子理论的延续，引入并研究了任意一对子集的中间子因子，见 [4, 5]）。这与左横截与右横截、子因子、因子以及相关的群的分解概念相一致（见 [4, 5]）。

现在，我们准备建立第一个无需任何条件、用于求取子群双陪集代表元完备集合的完备算法，即“中间横截算法”（MTA）。关于如何寻找双陪集代表元，可从 [2] （第 131 页）获取一些信息。

定理 2.4（MTA）。设 G 为有限群， H和 K 为 G的子群。令 $\mathcal{C}^{(-1)}(H,K) := G$，并固定 $g_0 \in \mathcal{C}^{(-1)}(H,K)$。然后按如下方式构造有限序列 $\{g_n\}_{n\geq 0}$和 $\{\mathcal{C}^{(n)}(H,K)\}_{n\geq -1}$：根据假设， g_0、$\cdots$、g_n和 $\mathcal{C}^{(-1)}(H,K)$ $\cdots$、$\mathcal{C}^{(n-1)}(H,K)$均有定义。对于整数 $n \geq 0$，令

$$\mathcal{C}^{(n)}(H,K) := \mathcal{C}^{(n-1)}(H,K) \cap (Hg_nK)^c, \tag{2.5}$$

然后，当 $\mathcal{C}^{(n)}(H,K)$非空时，从中选取一个元素 g_{n+1}，并令 $X_n := \{g_0, \cdots, g_{n+1}\}$（因此，对于所有 $n \geq 0$， $X_{-1} = \{g_0\}$、 $X_{n-1} \cup \{g_{n+1}\} = X_n$以及 $\mathcal{C}^{(n)}(H,K) = \bigcap_{i=0}^{n}(Hg_iK)^c$。）
那么存在最小整数 $N \geq 0$，使得 $\mathcal{C}^{(N)}(H,K) = \emptyset$（等价地， $HX_{N-1}K = G$），双陪集的数量为 $N+1$，并且 $X := X_{N-1}$（含有 $N+1$ 个元素）是 G 中 (H,K) 的一组完整双陪集代表元。此外，(H,K) 的每个中间横截集都可以通过该算法得到。

证明。如果 $Hg_0K = G$，则令 $N = 0$ 和 $X = X_{-1} = \{g_0\}$，条件成立。现在，令$Hg_0K \neq G$，则:

(a) 该算法中的所有元素 g 都是互不相同的，因为对于每个 $0 \leq i \leq n$，都有 $g_{n+1} \notin Hg_iK \supseteq \{g_i\}$。

(b) 若对于某个 $n \geq 0$, $\mathcal{C}^{(n)}(H,K) \neq \emptyset$, 则乘积 HX_nK 是中间直的。由于乘积 HX_0K 是中间直的，并且对于所有 $0 \leq i \leq n-1$，若 HX_iK 是中间直的，则利用 (2.4) 可得

$$HX_nK \text{是中间直} \Leftrightarrow H(X_{n-1} \cup \{g_{n+1}\})K \text{是中间直}$$

$$\Leftrightarrow g_{n+1} \notin HX_{n-1}K \Leftrightarrow g_{n+1} \in (HX_{n-1}K)^c = \mathcal{C}^{(n)}(H,K)$$

此外，由于下式成立，(2.5) 意味着 $\mathcal{C}^{(n)}(H,K) \subset \mathcal{C}^{(n-1)}(H,K)$:

$$g_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}(H,K) \neq \emptyset\ ,\ g_n \notin \bigcap_{i=0}^{n}(Hg_iK)^c = \mathcal{C}^{(n)}(H,K)$$

因此，我们得到以下严格递减的子集链

$$\mathcal{C}^{(-1)}(H,K) \supset \mathcal{C}^{(0)}(H,K) \supset \cdots$$

由于 G 是有限的，该链必然终止于空集。

(c) 存在最小的非负整数 N，使得 $\mathcal{C}^{(N)}(H,K) = \emptyset$。事实上

$$G = \mathcal{C}^{(-1)}(H,K) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^{(N)}(H,K) = \emptyset. \tag{2.6}$$

我们断言， $X := X_{N-1}$ 是(H,K)的双陪集代表元。由于乘积$HX_{N-1}K$ 是中间直积，根据(b)部分，且若$g \in X_{N-1}^c$，则

$$H(X_{N-1} \cup \{g\})K \text{ is middle direct } \Leftrightarrow g \in \bigcap_{x \in X_{N-1}} (HxK)^c = \bigcap_{i=0}^{N}(Hg_iK)^c = \mathcal{C}^{(N)}(H,K) = \emptyset$$

因此，由(2.4)和引理 2.2可知，该断言得证。

(d) 现在，考虑 G 相对于(H,K)的任意中间横截集，设其为 $\chi = \{x_0, \cdots, x_m\}$，其中 $m \geq 0$为某个整数。选取 $g_0 := x_0$ 于 MTA 中。假设 $g_0 := x_0, \cdots, g_n := x_n$，其中 $0 \leq n \leq m-1$（若 $m \geq 1$）。由于 $H(\{x_0, \cdots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\})K$ 是中间直积，且 $x_{n+1} \in \{x_0, \cdots, x_n\}^c$，我们有 $x_{n+1} \in \bigcap_{i=0}^{n}(Hx_iK)^c \neq \emptyset$（由(2.4)）。因此，可以在算法中选取 $g_{n+1} := x_{n+1}$。这表明 $m \leq N$。但 $\chi = \{x_0, \cdots, x_m\}$ 相对于中间直积的极大性要求 $\chi = X_{N-1}$ 和 $N = m$（由引理 2.2）。□

对于 MTA 的一个有用例子， G 应为非阿贝尔群，并且 H 和 K 都不应为正规子群。否则，这就相当于我们已经对 HK 和 $N+1 = |G$ 中的子群完成了 RTA： $HK|$。

例 2.5. 设

$$G := D_{12} \cong \langle a, b | a^6 = 1 = b^2, bab = a^{-1} \rangle = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4, ba^5\},$$

并考虑子群 $H = \{1, a^3, ba^3, b\}$ 和 $K = \{1, a^3, ba, ba^4\}$。在 MTA 中取 $g_0 = 1$，我们有 $Hg_0K = HK = \{1, a, a^2, a^3, a^4, b, ba, ba^3, ba^4\}$，因此 $g_1 \in \mathcal{C}^{(0)}(H,K) = (HK)^c = \{a^2, a^5, ba^2, ba^5\}$。若令 $g_1 = a^2$，则 $Hg_1K = \{a^2, a^5, ba^2, ba^5\} = (HK)^c$，从而 $\mathcal{C}^{(1)}(H,K) = (HK)^c \cap (Ha^2K)^c = \emptyset$。因此，双陪集的数量为 $N+1 = 2$，而 $X = X_0 = \{1, a^2\}$ 是 (H,K) 的一组完备双陪集代表元，并且我们有 D_{12} 的如下中间直（积）表示

$$D_{12} = \{1, a^3, ba^3, b\}\{1, a^2\}\{1, a^3, ba, ba^4\},$$

尽管该乘积不是直积（这也表明 $\mathrm{Mid}_G(H,K) \neq D_{12}$）。因此， $\{1, a^5\}$、 $\{1, ba^2\}$ 和 $\{1, ba^5\}$ 也是 D_{12} 中 $(\{1, a^3, ba^3, b\}, \{1, a^3, ba, ba^4\})$ 的中间横截集。

现在，为了计算 $\mathrm{Mid}_G(H,K)$，注意到 $H \cap K = \{1, a^3\} = Z(D_{12})$ 蕴含 $Hx \cap xK \supseteq \{x, a^3x = xa^3\}$，对所有 $x \in G$ 均成立。因此， $\mathrm{Mid}_G(H,K) = \emptyset$。

到目前为止，我们已经介绍了一些等价条件，以及一种用于寻找满足 $G = HXK$ 的 a subset X 的完备算法。现在，以下一些关键问题随之出现：（Q_1）是否存在某些关于这样的 X 成为相对于 (H, K) 的中间因子（即 $G = H \cdot X \cdot K$）的必要且充分条件？（Q_2）是否存在一种用于获取所有中间因子的完备算法？（Q_3）我们能否将每个中间因子扩展为一个中间横截集？首先，我们注意到，$\mathrm{Mid}_G(H, K)$ 在回答这些问题时发挥着基础作用。

Lem命题 2.6. 对任意群 G 的所有子群 H、K，以下各项等价：
(a) $\mathrm{Mid}_G(H, K) = G$；(b) 对 (H, K) 在 G 中的双陪集的每个完备代表系 X，都有 $G = H \cdot X \cdot K$；(c) 对 (H, K) 在 G 中的双陪集的某个完备代表系 X，有 $G = H \cdot X \cdot K$；(d) 存在某个 $X \subseteq G$（即相对于 (H, K)，G 存在一个中间因子），使得 $G = H \cdot X \cdot K$。

证明。由 (2.2) 和引理 2.2，(a) 蕴含 (b)，而 $(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ 是显然的。现设 (d) 成立且 $g \in G$，则 $G = HXK$ 要求对于某些 $h_g \in H$、$x_g \in X$ 和 $k_g \in K$ 有 $g = h_g x_g k_g$。若对于 h_1、$h_2 \in H$ 和 k_1、$k_2 \in K$ 有 $h_1 g k_1 = h_2 g k_2$，则 $(h_1 h_g)x_g(k_g k_1) = (h_2 h_g)x_g(k_g k_2)$，并且 $H \cdot X \cdot K$ 蕴含 $h_1 h_g = h_2 h_g$ 和 $k_g k_1 = k_g k_2$，这意味着 $g \in \mathrm{Mid}_G(H, K)$。证明完毕。□

注 2.7. 上述重要引理与 (2.1) 表明，$\mathrm{Mid}_G(H, K)$ 有以下三种主要情形：

(情形 1) $\mathrm{Mid}_G(H, K) = \emptyset$：我们没有任何非平凡的直积 $H \cdot X \cdot K$。
(情形 2) $\mathrm{Mid}_G(H, K) = G$：我们不仅有相对于 (H, K) 的 G 的中间因子 X（即 $G = H \cdot X \cdot K$；），而且下一个引理还刻画了所有此类子集 X。
(情形 3) $\emptyset \subset \mathrm{Mid}_G(H, K) \subset G$：群 G 必须是非阿贝尔的，H 和 K 都不是 G 的正规子群；若 G 是有限群，则 $\gcd(|H|, |K|) \neq 1$（见推论 2.9）。在此情形下，存在非空极大子集 X，使得 $HXK = H \cdot X \cdot K$ 但 $HXK \neq G$，因此 X 不一定是 (H, K) 在 G 中的双陪集的完备代表系。当然，我们希望将此类子集 X 扩展为一个具有 $G = HX_*K$ 的 X_*（见注 2.3）。

因此，我们首先应找出相对于性质 $HXK = H \cdot X \cdot K$ 的极大（非空）子集 X，然后讨论等式 $HXK = G$ 成立的充要条件。

下一个引理给出了一个子集相对于一对子群成为中间因子的若干等价条件。

引理 2.8. 设 H、$K \leq G$ 和 $X \subseteq G$。则，下列陈述等价：
(a) $G = H \cdot X \cdot K$；(b) X 是 G 中关于 (H, K) 的双陪集的完备代表系，且 $HXK = H \cdot X \cdot K$；(c) $G = HXK$ 且 $\mathrm{Mid}_G(H, K) = G$；(d) $HXK = H \cdot X \cdot K$、X 相对于直积是（非空且）极大的，并且 $X^c \subseteq \mathrm{Mid}_G(H, K)$；(e) $HXK = HXK$、X 相对于中间直积是极大的，并且 $\mathrm{Mid}_G(H, K) = G$。

证明。由引理 2.6 和引理 2.2 可直接得出，依据如下事实：若 $G = H \cdot X \cdot K$，则 X 是相对于直积 $H \cdot X \cdot K$ 的（非空且）极大子群。反之亦然

若 $X^c \subseteq \mathrm{Mid}_G(H,K)$（但当然并非一般情况下都成立；请注意， $HXK = H\cdot X\cdot K$ 意味着 $X \subseteq \mathrm{Mid}_G(H,K)$）。□

推论 2.9. 若 H、K 是有限群 G 的子群，且满足以下条件之一：
(i) 最大公约数$(|H|,|K|) = 1$；(ii)
$H\cap K=\{1\}$，且 $H\trianglelefteq G$ 或 $K\trianglelefteq G$,
则 $\mathrm{Mid}_G(H,K) = G$，因此

X 是一个余 $\dot{}$完备的双陪集 $(H,K) \Leftrightarrow G = H\cdot X\cdot K \Leftrightarrow G = HXK$ 的代表元集合

现在，我们准备介绍并证明一种完备算法，即“中间子因子算法（相对于子群）”（MSFA），用于求得以下所有项目：
(I) 相对于直积 $H\cdot X\cdot K$ 的所有非空极大子集 X，即相对于一对子群的 G 的中间子因子。

(II) 如果存在，则列出相对于一对子群的 G 的所有中间因子（即所有满足 $G = H\cdot X\cdot K$ 的子集 X）。

(III) 一对子群的所有双陪集的完备代表系（即所有中间横截集），这些代表系同时也是相对于一对子群的 G 的中间因子。
当然，由于 (2.1) 和注 2.7，此类子集 X 存在的必要条件是 $\mathrm{Mid}_G(H,K) \neq \emptyset$（如果 $\mathrm{Mid}_G(H,K) = \emptyset$，那么 $\emptyset$ 是相对于 (H,K) 的 G 的唯一中间子因子）。此外，我们在下述定理之后给出一个引理，其中提到了算法输出 $X = X_{N-1}$ 成为 G 的中间因子的若干必要和充分条件。

定理 2.10（MSFA）。设 G 是有限群， H 和 K 是 G 的子群，使得 $\mathrm{Mid}_G(H,K) \neq \emptyset$。令 $\mathcal{C}^{(-1)}(H,K) := \mathrm{Mid}_G(H,K)$，并固定 $g_0 \in \mathcal{C}^{(-1)}(H,K)$。然后，根据关系式 (2.5) 构造序列 $\{g_n\}_{n\geq 0}$,$\{\mathcal{C}^{(n)}(H,K)\}_{n\geq -1}$ 和 X_n。此时，存在最小整数 $N \geq 0$，使得$\mathcal{C}^{(N)}(H,K) = \emptyset$（等价地， $HX_{N-1}K = \mathrm{Mid}_G(H,K)$），并令 $X := X_{N-1}$。此外，乘积HXK 是直积，且 X 是关于 $H\cdot X\cdot K$ 的（非空且）极大子集。进一步地，每个关于直积 $H\cdot\chi\cdot K$ 的极大子集 χ 均可通过此算法得到。

证明。定理 2.4 (MTA) 保证了这样的数 N 存在，并要求乘积 HXK 为直积。因为此算法中的 $\mathcal{C}^{(n)}(H,K)$ 确实是 MTA 中的 $\mathcal{C}^{(n)}(H,K)$ 与 $\mathrm{Mid}_G(H,K)$ 的交集，并且 $X_n \subseteq \mathrm{Mid}_G(H,K)$（见 (2.2)）。现在，若 $X := X_{N-1}$ 相对于 $H\cdot X\cdot K$ 不是极大的，则存在 $g \in X^c$，使得乘积 $H(X\cup\{g\})K$ 为直积，因此 $g \in (HXK)^c$（由 (2.4) 和 (2.2)）。这意味着

$$g \in \bigcap_{x\in X}(HxK)^c = \bigcap_{i=0}^{N}(Hg_iK)^c = \mathcal{C}^{(N)}(H,K) = \emptyset$$

这与之矛盾。
现在，设对于某个整数 $m \geq 0$， $\chi = \{x_0,\cdots,x_m\}$ 相对于直积$H\cdot\chi\cdot K$是极大的。在算法中可以选取 $g_0 := x_0$，因为 $\chi \subseteq \mathrm{Mid}_G(H,K)$。假设$g_0 := x_0,\cdots,g_n := x_n$，其中 $0 \leq n \leq m-1$（若 $m \geq 1$）。由于 $H(\{x_0,\cdots,x_n\}\cup\{x_{n+1}\})K$ 是直积且 $x_{n+1} \in \{x_0,\cdots,x_n\}^c$，(2.4) 和 (2.2) 推出 $x_{n+1} \in \bigcap_{i=0}^{n}(Hx_iK)^c \neq \emptyset$。因此，在算法中可以选取$g_{n+1} := x_{n+1}$。这表明 $m \leq N$。但是，$\chi = \{x_0,\cdots,x_m\}$ 相对于直积的极大性要求 $\chi = X_{N-1}$ 和 $N = m$。□

下面的引理指出，如果 $\mathrm{Mid}_G(H,K) = G$，那么对于 (H,K)，MTA 和 MSFA 是相同的，也可以视为 MFA（即中间因子算法）。此外，$\mathrm{Mid}_G(H,K) = G$ 是 MSFA 之前说明中项目 (II)、(III) 存在的充要条件。

引理 2.11. 在 MSFA 的假设下，以下命题等价：
(a) $G = HX_{N-1}K$；(b) X_{N-1} 是 (H,K) 的双陪集的完备代表系；(c) X_{N-1} 是 G 相对于 (H,K) 的中间因子（即 $G = H \cdot X_{N-1} \cdot K$）；(d) $\mathrm{Mid}_G(H,K) = G$；(e) 存在一个 G 相对于 (H,K) 的中间因子，且每个中间因子都可以通过此算法得到；(f) (H,K) 的双陪集的每个完备代表系都可以通过此算法得到；(g) MTA 和 MSFA 的所有输出构成的集合相等。因此，若 $\gcd(|H|,|K|) = 1$（或满足推论 2.9 的条件），则以上所有性质均成立。

证明。这是关系式 (2.2)、引理 2.6、MTA 和 MSFA 的结果。 □

推论 2.12。如果 G 是阿贝尔的，那么对于任意子群 H、K，只有以下两种情况：(i) $H \cap K = \{1\}$：引理 2.6 的所有等价条件均得到满足。(ii) $H \cap K \neq \{1\}$：MSFA 不适用，不存在相对于 $(H$、$K)$ 的 G 的任何中间因子，且只有 MTA 适用。

下一条注记使用 MSFA 和 MTA 回答问题 (Q_3)（对于有限群，如果 G 是无限的，则可以使用 Zorn 引理）。

注记 2.13。考虑我们使用 MSFA，且 $X = X_{N-1}$ 是其输出。那么，我们会遇到两种可能的情况：

(1) $G = HXK$：引理 2.11 的所有等价条件均得到满足。
(2) $G \neq HXK$：我们声称，按照以下方式继续执行算法过程，可以得到一组完整的双陪集代表元 $X_* \supset X$：
令 $\mathcal{C}_*^{(N)}(H,K) := G \setminus HX_{N-1}K$（代替 $\mathcal{C}^{(N)}(H,K) = \emptyset$），并对所有 $n \geq N+1$ 按照关系 (2.5) 继续执行算法过程（当然，要用 $\mathcal{C}_*^{(n)}(H,K)$ 替换 $\mathcal{C}^{(n)}(H,K)$）。那么存在最小整数 $N_* \geq N+1$，使得 $\mathcal{C}^{(N_*)}(H,K) = \emptyset$（等价地，$HX_{N_*-1}K = G$），并且 $X_* := X_{N_*-1}$（含有 N_*+1 个元素）是 (H,K) 的一组完整双陪集代表元。因为 $G \setminus HX_{N-1}K = \bigcap_{i=0}^{N} (Hg_iK)^c$，这与 MTA 中的 $\mathcal{C}^{(N)}(H,K)$ 相同（尽管在 MSFA 中 $\mathcal{C}^{(N)}(H,K) = \emptyset$）。

例 2.14. 如果我们将例 2.5 中的 H、K 改为 $H = \{1, ab\}$ 和 $K = \{1, a^3, b, ba^3\}$，那么乘积 HK 是直积，$H \cdot K = \{1, a, a^3, a^4, b, ab, a^3b, a^4b\} \subseteq \mathrm{Mid}_G(H,K)$，因此 $(HK)^c = \{a^2, a^5, a^2b, a^5b\}$。有趣的是，对于所有 $x \in (HK)^c$，$Hx \subset xK$。因此，$\emptyset \neq \mathrm{Mid}_G(H,K) = HK \neq G$，在这种情况下可以使用 MSFA。注意

$$\mathcal{C}^{(0)}(H, g_0, K) = (Hg_0K)^c \cap \mathrm{Mid}_G(H,K) = \emptyset,$$

对于所有 $g_0 \in \mathcal{C}^{(-1)}(H,K) = \mathrm{Mid}_G(H,K)$。因此，乘积 $H\{x\}K$ 是极大直积（即，$\{x\}$ 是相对于 (H,K) 而言 D_{12} 的中间因子）当且仅当 $x \in \mathrm{Mid}_G(H,K) = HK$。现在，根据注记 2.13，我们可以将这样的单元素集 $\{x\}$ 扩展为双陪集的完备代表元集。

（中间横截集）。这里 $N=0$ 并考虑 $x=g_0=1$，我们有

$$\mathcal{C}_*^{(0)}(H,K):=G\setminus HX_{-1}K=(HK)^c=\{a^2,a^5,a^2b,a^5b\}.$$

现在，如果 $g_1:=a^2$，那么 $Ha^2K=(HK)^c$，因此

$$\mathcal{C}_*^{(1)}(H,K)=\mathcal{C}_*^{(0)}(H,K)\cap HK=\emptyset.$$

那里 因此 $N_*=1$、 $X_{N_*-1}=\{1,a^2\}$，并且我们有如下中间直接表示:

$$D_{12}=\{1,ab\}\{1,\dot{a^2}\}\{1,a^3,b,ba^3\}.$$

因此， $\{1,a^5\}$、 $\{1,a^2b\}$ 和 $\{1,a^5b\}$ 也是这对子群的中间横截集

$$(\{1,ab\},\{1,a^3,b,ba^3\}).$$

References

[1] R. Bildanov、V. Goryachenko、A.V. Vasilev、 *Factoring nonabelian finite groups into two subsets*，《西伯利亚电子数学通报》17(2020)，683-689。[2] D.F. Holt、B. Eick、E.A. ´OBrien，《横截集与双陪集代表的完备算法》，Chapman and Hall/CRC，纽约，2005年。[3] M.H. Hooshmand，《有限群的因子子集》，2014年，https://mathoverflow.net/questions/155986/ factor-subset-of- finite-group[4] M.H. Hooshmand， *Index, sub-index and sub-factor of groups with interactions to number theory*，《代数与应用杂志》19:6(2020)，1-23。[5] M.H. Hooshmand， *Subindices and subfactors of finite groups*，《代数通讯》51:6(2023)，2644-2657。[6] M.H. Hooshmand， *Basic results on an unsolved problem about factorization of finite groups*，《代数通讯》49:7(2021)，2927-2933。[7] M.H. Hooshmand， *Upper and Lower Periodic Subsets of Semigroups*，《代数学报》18:3(2011)，447-460。[8] E.I. Khukhro和V.D.Mazurov， *Unsolved Problems in Group Theory: The Kourovka Notebook*，第19和20号，索博列夫数学研究所，2018年和2022年。

Department of Mathematics, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran
Email address: hadi.hooshmand@gmail.com, MH.Hooshmand@iau.ac.ir