量子速度极限下平面量子计算平台的比较

Daniel Basilewitsch[1], * Clemens Dlaska, [1] 和 Wolfgang Lechner[1,2]
[1] *Institute for Theoretical Physics, University of Innsbruck, A-6020 Innsbruck, Austria* [2] *Parity Quantum Computing GmbH, A-6020 Innsbruck, Austria*（日期：2023年4月5日）

量子电路实验可行性的一个重要影响因素是量子门时间与典型误差时间尺度之比。电路深度远超误差时间尺度的算法会导致量子态出错，因此量子纠错不可避免。我们比较了中性原子和超导量子比特中现实可行的双量子比特门和多量子比特门实现方案的理论最短门时间，即量子速度极限（QSL）。在利用最优控制理论求得各个量子门的量子速度极限后，我们用它们量化量子傅里叶变换和量子近似优化算法的电路量子速度极限。具体而言，我们从标准门模型和奇偶映射两种角度，分析这些量子算法的电路运行时间和门数量。我们发现，就系统规模而言，中性原子和超导量子比特平台的加权电路量子速度极限相近。

arXiv:2304.01756v1 [quant-ph] 4 Apr 2023

I. 引言

量子计算机有望解决那些被认为对经典计算机而言十分困难甚至无法求解的计算问题。其潜在应用包括大整数的整数分解 [1], 量子模拟 [2], 量子化学 [3], 组合优化 [4], 甚至金融领域的问题 [5]。目前，量子计算正处于所谓的含噪中等规模量子（NISQ）时代 [6], ，其特点是量子比特控制不完善，且量子比特数量不足以针对相关规模的问题实现量子纠错 [7]。尽管如此，近期的原理验证实验 [8–11] 表明，即便使用NISQ硬件，也已能够实现相较于经典计算机的计算量子优势。然而，如何超越原理验证阶段，亦即如何在资源有限的当今设备上，针对实际相关的计算任务展现量子优势，仍是一项关键挑战。

为了在含噪声中等规模量子（NISQ）时代的数字量子计算中实现实用的量子优势， [2]尽可能高效地执行量子算法至关重要，以最大限度地缩短噪声机制损害量子信息处理的时间。这实际上意味着，尽可能缩短量子算法的运行时间并减少门数量是值得追求的目标，而这一任务可以通过多种方式实现。一种方法是寻找算法的最优电路表示，即在给定可用量子门集合的情况下，构建具有最小电路深度和最少门数量的电路。例如，量子电路优化可以通过启发式方法 [12, 13]或机器学习技术 [14, 15]实现，并且目前已有多种现成的开源软件包可供使用 [16–18]。

另一种缩短算法运行时间的方法是缩短给定量子电路中每个基本量子门的执行时间。如今，各大主流量子计算平台都已常规提供并实现快速、高保真度的量子门方案，包括中性原子 [19, 20], 、超导电路 [8, 21] 和囚禁离子 [22, 23], 。理想情况下，每个量子门都应在其量子速度极限（QSL）下执行。一般而言，量子速度极限指完成给定任务所需的最短时间 [24]。它构成了时间上的一个基本极限，取决于所研究的系统，即其哈密顿量以及可用于控制其动力学的控制参数。

此处，我们确定了两种支持二维（2D）量子比特排列的主要量子计算平台——中性原子和超导电路 [25]——上量子门的量子速度极限。我们的研究揭示了当前实验门协议与其量子速度极限之间的差距，从而展示了通过进一步加快门协议，理论上仍能获得多少提升。此外，假设每个量子门都能在实验中以量子速度极限实现，我们的分析估算了在退相干占据主导地位、使更长的量子电路在实践中变得不可行之前，实际可执行的量子门数量。为此，我们考察了两种典型的量子计算算法：（i）量子傅里叶变换（QFT），这是用于整数因数分解的 Shor 算法所必需的 [1], ；（ii）量子近似优化算法（QAOA），用于求解组合优化问题 [4]。对于中性原子和超导电路，我们均考虑标准含噪声中等规模量子设备，其中量子比特排列在具有最近邻连接的二维网格架构上，并计算了两种算法在量子速度极限下的量子电路运行时间。这使我们能够直接比较两个平台，评估目前在其含噪声中等规模量子代表设备上有望实现的最大问题规模。

在具有最近邻连接的二维平台中，一个常见的挑战是必须在非邻近量子比特之间执-

* daniel.basilewitsch@uibk.ac.at

行量子门。在标准量子门模型（SGM）中，这类量子门可以利用现有的局域连接，替换为通用单量子比特门和双量子比特门构成的序列。不过，这会增加电路深度和门数量。作为 SGM 的替代方案，我们还研究了采用所谓奇偶映射（PM）的电路表示。简而言之，量子计算中的 PM [26] 以及量子优化 [27, 28]是一种与具体问题无关的硬件蓝图，只需要最近邻连接，但代价是需要更多量子比特。由于在 PM 中，QAOA 电路采用局域三量子比特门和四量子比特门会更有利 [29, 30]，因此我们也测定了两个平台上的量子速度极限。

需要指出的是，本工作完全聚焦于确定各种量子门的量子速度极限，以及如何将其转化为对不同平台上的电路运行时间进行公平比较的方法。关于特定量子门或平台的门协议，更详细的讨论可参见文献 [31–33]（针对中性原子）或文献 [34–36] （针对超导电路）。此外，需要指出的是，我们仅将门时间（分别为电路运行时间）以及量子门数量作为衡量量子电路可行性的指标。尽管这两个量无疑很重要，但它们绝非影响电路可行性的唯一因素。全面评估电路可行性的品质因数还需要考虑态制备和测量误差，以及各种其他误差来源。

本文结构如下。在第II节中，我们介绍主要结果，即使用文献中的门时间和量子速度极限下的门时间时的电路运行时间概览；评估对象包括中性原子和超导电路，以及 SGM 和 PM 中的电路。在第III 节中，我们介绍数值模型的详细内容。第IV节介绍量子速度极限的基本概念，以及如何利用量子最优控制理论（OCT）确定量子速度极限。第V节详细讨论量子速度极限，以及哪些可用控制场组合能够达到量子速度极限。第VI 节作总结。

II. 主要结果：量子速度极限下的量子算法

本节中，我们比较采用中性原子和超导电路硬件上可用的门集实现时，QFT 和 QAOA 量子电路的运行时间。为此，我们考虑两种情形。第一种情形中，我们采用文献中最先进的最小通用门集门实现的门时间数值（下文称为“标准门集”（SGS）），这些门集是各平台的原生门集，因此代表了将量子算法转换为可执行量子电路的典型方式。第二种情形中，我们采用各平台上可用、门时间达到量子速度极限的扩展门集（下文称为“量子速度极限门集”（QGS）），由此得出电路运行时间当前的基本极限。我们在第IIA 节介绍这两种门集，并用它们分析第IIB 节中采用 SGM、以及第IIC节中采用 PM 的 QFT 和 QAOA 量子电路运行时间。附录A中简要回顾了 SGM 和 PM 中 QFT 及单个 QAOA 步骤的基本概念与量子电路。

		中性原子		超导电路
标准门集（SGS）	gate	时间（纳秒）	gate	时间（纳秒）
	局域	~ 1000 [20]	局域	25 [37]
	CZ	350 [20]	Sycamore	12 [37]
QSL 门集（QGS）	gate	时间（纳秒）	gate	时间（纳秒）
	局域	~ 1000 [20]	局域	25 [37]
	CNOT[a]	300	CNOT	14
	CZ	350	CZ	10
	SWAP	400	SWAP	12
	ZZZ	600	ZZZ	24
	ZZZZ	600	ZZZZ	80

[a] 此处列出 CNOT门 以确保内容完整，但中性原子 的任何电路中均未使用该门，详情请参见第 V 节。

表 I。中性原子和超导电路上不同门集及其对应门时间的概览。虽然“标准门集”（SGS）行表示各自平台上使用的典型量子门和门时间，但名为“QSL 门集”（QGS）的行中的多量子比特门对应于一个在量子速度极限下具有门时间的扩展门集。

A. 标准门集和量子速度极限门集

在 SGM 中，每个量子算法都会使用通用量子门集中的量子门转换为量子电路。这样的通用门集通常包含所有单量子比特门以及至少一种纠缠双量子比特门，例如 CNOT门 [38]。表 I 中名为“标准门集”的行，总结了两个平台在门保真度相近时采用的原生通用门集及其典型门时间。对于中性原子，我们将受控 Z 门 CZ = $\mathrm{diag}\{1,1,1,-1\}$作为典型的纠缠双量子比特门。这是中性原子的一种常见选择 [20]，因为它已成功用于实现量子算法 [39, 40]。对于超导电路，我们选择类似 iSWAP 的 Sycamore门作为纠缠双量子比特门，原因是其门时间短，并且近期基于可调耦合器的量子处理器已成功将其用于量子优势实验 [8, 9]。

此外，我们还考虑了一组扩展的、独立于平台的量子门，这些量子门以 QSL 运行（参见表 I 中的“QSL 门集”）。该门集包括所有单量子比特门，以及可在两个平台上实现的若干多量子比特门：CZ门、CNOT、SWAP、ZZZ 和 ZZZZ。更丰富的量子门选择可

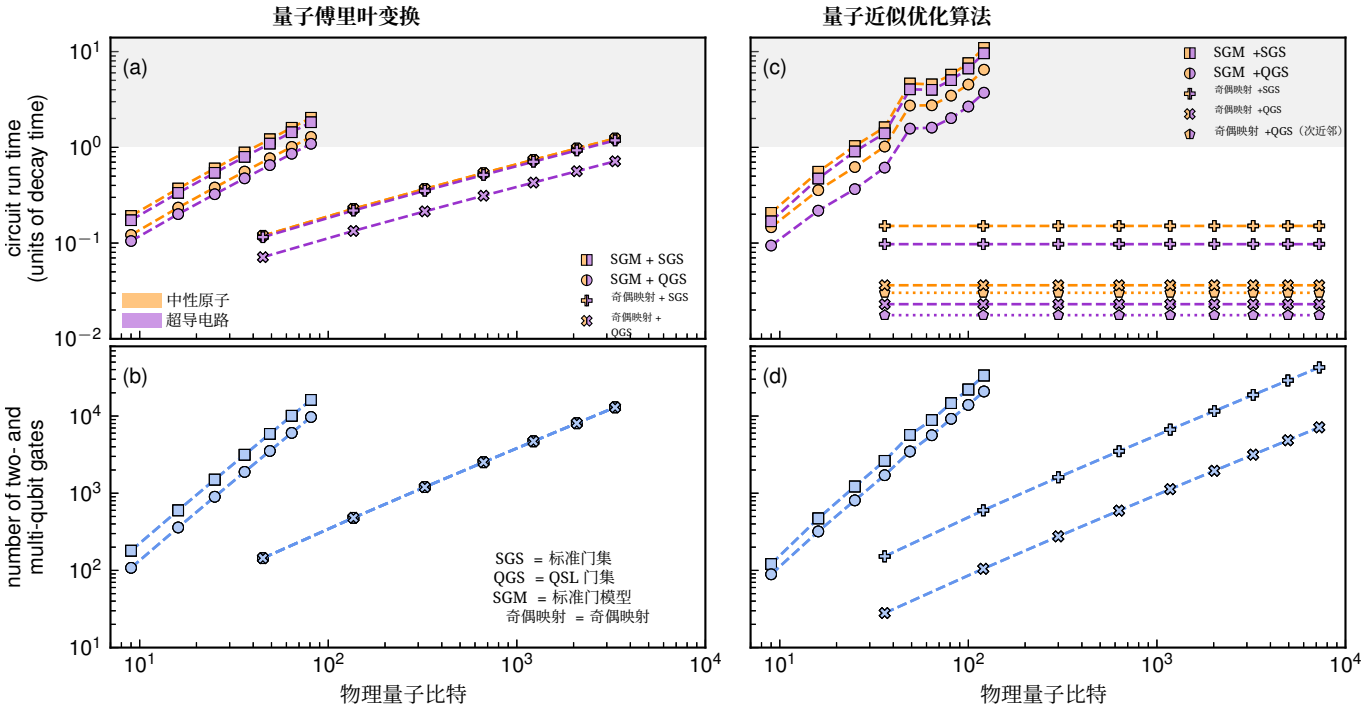


图 1. 中性原子与超导电路在量子傅里叶变换（QFT）和量子近似优化算法（QAOA）的电路运行时间和门数量方面的比较。左列（右列）对应 QFT（QAOA），橙色（紫色）标记对应中性原子（超导电路）。两种算法在不同规模问题实例下的电路运行时间，$N = 9,\ 16$、.....、QFT 的 81 个量子比特，以及 $N = 9,\ 16$、.....、QAOA 的 121 个量子比特，分别显示于面板 (a) 和 (c) 中。相应电路中的双量子比特门和多量子比特门数量分别显示于面板 (b) 和 (d) 中。方形标记 [圆形标记] 的数据采用标准门模型（SGM），并使用标准门集（SGS） [QSL 门集（QGS）], 中的量子门和时间计算得出，参见表 I。相比之下，加号标记 [叉号标记] 表示使用 SGS [QGS]在奇偶映射（PM）中实现相同算法时的结果。五边形标记对应经过调整的二维架构，该架构允许量子比特之间进行次近邻（NNN）耦合。每个电路的运行时间以平台特定的典型误差时间为单位。面板 (a) 和 (c) 中的灰色区域表示电路运行时间超过误差时间的范围。

以便更灵活地寻找量子门更少、量子电路运行时间更短的电路表示。此外，我们还假设该门集中的每个量子门都以 QSL 执行，从而进一步缩短电路运行时间。因此，QGS 的运行时间应视为电路本身 QSL 的估计值，即电路量子速度极限——前提是不存在其他可能更快和/或更适用的量子门 [41]。请注意，确定量子速度极限的方法详情及其结果见第 IV 节和第 V节。表 I 中的“QSL 门集”一行总结了扩展门集中的量子门，并列出了两个平台的 QSL 时间。

表 I 显示，中性原子的绝对电路运行时间会长于超导电路，因为两者的基本量子门时间相差一个数量级以上。然而，为了公平比较电路运行时间，需要根据参与量子门机制的量子比特及其他能级的有限相干时间和寿命，对绝对量子门时间进行加权。

对于中性原子，我们同时考虑相干时间 量子比特态的退相位时间 T_2^* =4 ms [39], 以及里德堡态的寿命 T_{Ryd} =150 µs [39], ，我们将其作为典型误差时间尺度，并据此比较电路运行时间。对于单量子比特门，我们以退相位时间为基准，因为它们不占据里德堡能级 [42],；对于双量子比特门，我们以寿命为基准，因为经由里德堡能级的受控跃迁是其主要量子门机制 [43]。对于超导电路，我们将其本征 T_1 时间 T_1 = 15 µs [8], 作为典型误差时间尺度，因为它适用于单量子比特门和双量子比特门。不过请注意，这些选择相当保守。对于中性原子，任何双量子比特门动力学也自然会涉及量子比特能级，而这些能级的相干时间要长得多。因此，仅依据里德堡寿命衡量双量子比特门，会高估寿命引起的误差概率。对于超导电路，已有报告称其 T_1 时间最长可达 500 µs [44]。

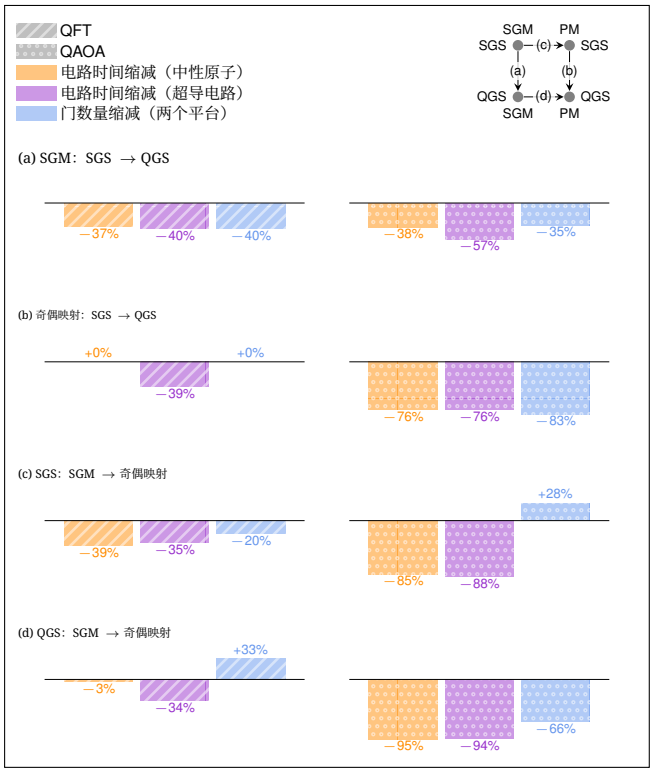


图 2. 图中所示各场景和数据下，加权电路运行时间及（双量子比特和多量子比特）门数量的减少情况。1. 在面板 (a) 和 (b) 中，对比使用“QSL 门集”(QGS) 而非“标准门集”(SGS) 时，标准门模型 (SGM) 和奇偶映射 (PM) 中的电路。在面板 (c) 和 (d) 中，对比使用 PM 而非 SGM 时，采用 SGS 和 QGS 的电路。所有给出的数值均为不同规模问题实例的平均值，即具有不同数量量子比特的问题实例的平均值。

B. 标准量子门模型中的电路时间 del

下文将计算在 SGM 中使用 SGS 和 QGS 的量子傅里叶变换以及单个量子近似优化算法步骤的电路运行时间。如上所述，我们假设这两种硬件平台都由排列成二维阵列、且仅具有最近邻连接的量子比特构成（见第III节，了解该模型的详细信息）。这要求将所有连接非相邻量子比特的量子门替换为作用于物理相连量子比特的量子门序列。

1. *Standard gate set circuits*

使用 SGS 中的量子门，电路的量子门序列由单量子比特门加 CZ门组成（适用于中性原子），以及单量子比特门加 Sycamore门组成（适用于超导电路）（参见表 I）。由于量子傅里叶变换电路在构造上不需要在非相邻量子比特之间使用任何量子门 [45], 因此，我们只需替换受控相位门和 SWAP门通过 SGS 中的量子门序列实现。对于 QAOA 电路，情况则有所不同，因为它假设采用全连接架构，而在仅要求最近邻连接的情况下，寻找具有最小电路深度的电路表示很可能是 NP-hard [46]。为解决这一问题，我们使用开源*pytket* 编译器 [16]，将 QAOA 的原始量子电路转换为符合硬件最近邻连接和 SGS 要求的可执行量子电路。此外，我们还利用该编译器的量子电路优化功能对电路进行优化，以尽可能减少门数量和电路深度。

图中的方块1 （a）和（c）分别显示了在中性原子（橙色）和超导电路（紫色）上运行量子傅里叶变换和量子近似优化算法步骤对应的量子电路所需的运行时间。每条线中，问题实例的规模从左下角向右上角递增。请注意，为了公平比较不同平台，所有量子门时间均按照前文所述，根据各平台固有的误差时间尺度进行了加权。运行时间显著超过平台固有的、依赖于能级的误差时间尺度的电路（在图中灰色区域突出显示）1 （a）和（c）很可能会产生不可靠的结果。我们观察到，尽管量子门的时间尺度各不相同，但对于两个平台以及量子傅里叶变换和量子近似优化算法而言，加权后的电路运行时间几乎相同，分别见图1 （a）和（c）中的方块。不过，目前看来，只有量子比特数量相对较少的问题实例才能在两个平台上实现。

电路运行时间是判断其在当前 NISQ硬件上是否可行的一个决定因素，但这一指标忽略了每个量子门都具有固有误差概率这一事实。假设量子门误差约为 $0.1-1$ %，这一数值对于中性原子 [20, 40] 和超导电路 [37], 都很现实。显然，量子门数量也会限制量子电路的可行性，因此量子门数量越少越好。为此，图 1 （b）和（d）中的方块分别表示 QFT 和单步量子近似优化算法电路所需的双量子比特门数量。请注意，采用 SGS 的电路表示在中性原子硬件和超导量子比特硬件上所需的双量子比特门数量相同。因此，图 1（b）和（d）中分别只用一条线表示这两种情况。

2. *QSL gate set circuits*

图中圆圈1 （a）和（c）展示了与方块所用相同量子算法和复杂度级别下的电路运行时间，但此时采用 QGS 生成电路表示。相应的双量子比特门数量由图中圆圈表示。1（b）和（d）。我们观察到，对于两个平台、两种算法以及所考虑的任何问题

实例而言，电路运行时间和门数量总体上均有所减少。这种改进是结合使用量子速度极限下运行的最快量子门，并利用扩展量子门集合所带来的更大灵活性的共同结果。尤其需要强调 SWAP门的可用性，因为它能直接减少门数量，从而缩短电路运行时间，即使门时间没有进一步加速也是如此。为了量化通过 QGS 可实现的改进，图2 （a）列出了每种算法和平台的电路运行时间及门数量的平均降幅。

我们的分析表明，从理论角度来看，如果用门时间达到量子速度极限（QSL）的扩展门集取代标准门，电路运行时间和门数量仍能在多大程度上得到改善。然而，即使采用改进后的门集，并因此减少运行时间和门数量，大多数量子电路（即图1中的圆圈）在当前含噪声中等规模量子硬件上仍很可能无法实现。原则上，量子纠错码可以解决电路运行时间和门数量超出有限寿命及量子门误差所设定限制的问题。尽管如此，由于相干时间 [44, 47]和量子比特数量 [48] 都在持续增加，更复杂的量子电路很可能在不久的将来进入可实现的范围。

C. 奇偶映射中的电路时间

除了使用 SGM 表示量子算法外，我们现在还考虑在 PM 中表示相同的算法。虽然 PM 最初是为通过量子退火解决组合优化问题而设计的 [27], 但它也可用于数字量子优化算法，例如 QAOA [30] 以及实现通用量子计算 [26]。PM 的核心是避免量子比特之间的长程相互作用，从而不再需要在非相邻量子比特之间使用量子门。然而，这需要更多的物理量子比特，并要求在 2×2 量子比特构成的格元上施加多体约束，具体说明见附录 A2。与我们对 SGM 的分析类似（见第 IIB节），下文将使用 SGS 或 QGS 中的量子门。

1. *Standard gate set circuits*

图 1 (a) [(b)] 中的加号表示 [双量子比特门数量]，即与 SGM（方块）所用相同问题实例的奇偶映射中量子傅里叶变换的电路运行时间。在两种情况下、两个平台上，SGS 的量子门和运行时间均被采用。我们观察到，与 SGM 的数值相比，两个平台的电路运行时间和门数量均有所减少 [另见图 2(c)]。对量子近似优化算法步骤也可以进行相同的比较，其电路运行时间和门数量分别由图 1 (c) 和 (d) 中的加号表示。关于单步量子近似优化算法的资源需求，我们观察到电路运行时间显著缩短 [另见图 2 (c)]，这是由于奇偶映射中的电路深度恒定 [29, 30]。不过请注意，由于耦合机制不同，中性原子与超导电路的电路深度也不同；中性原子所需的电路更深，参见附录 A2。与 SGM 相比，电路运行时间的缩短伴随着双量子比特门数量的增加，我们认为这是由于约束门被分解为各个平台原生可用的量子门，参见公式（A6）。

2. *QSL gate set circuits*

图 1 中的十字标记展示了在奇偶映射中采用 QGS 的量子门和门时间时，各种电路表示的结果。对于中性原子上的量子傅里叶变换，与采用 SGS 的表示相比，我们没有观察到电路时间或门数量进一步减少。这是因为中性原子的电路表示 [49] 仅包含单量子比特门和 CZ门——这些量子门在 SGS 和 QGS 中的门时间相同。相反，对于超导电路，我们仍然观察到电路时间有所改善，因为 CZ门在 QGS 中可直接使用，无需再用 Sycamore 和单量子比特门来替代。不过，SGS 和 QGS 中的表示仅在单量子比特门方面有所不同，因此它们的双量子比特门数量相同，也与中性原子的表示相同。这一点在图 1 (c) 中体现为一条由重叠的加号和十字标记组成的单线。

对于奇偶映射中的单步 QAOA 电路，使用 QGS 而非 SGS 时，我们观察到两个平台的电路运行时间和门数量均显著减少。这是因为 QGS 可提供多量子比特门 ZZZ(γ)和 ZZZZ(γ)，参见公式 (A6)；门数量的减少源于无需再进行单量子比特门和双体门分解。此外，使用可直接实现这些多量子比特门的控制脉冲，比依次施加控制脉冲来实现所需的单量子比特门和双量子比特门快得多。图 2 (b) 总结了在奇偶映射中以 QGS 替换 SGS 后，平均运行时间和门数量（按双量子比特门和多量子比特门计）的减少情况。

与图2的 (a) 和 (b) 面板形成对比的是，在这些面板中，门集发生变化，而电路保持在 SGM 或 PM 中；(c) 和 (d) 面板考察的是相反情形，即门集保持不变，但电路模型发生变化。具体而言，图2 (c) 和 (d) 分别展示了在门集为 SGS 和 QGS 时，将 SGM 替换为 PM 后的平均电路运行时间及门数量缩减。尤其需要强调图2 (d)，因为它揭示了与 SGM 中对同一电路的表示相比，PM 在多大程度上能够缩短电路运行时间并减少门数量。如上所述，且附录A2中有详细说明，

PM 特有的改进所付出的唯一代价是需要更多量子比特。就当前 NISQ硬件的发展阶段而言，无论采用何种平台，我们认为 SGM 更适用于量子傅里叶变换，因为从电路运行时间和所需量子比特来看，似乎有更多问题实例能够实现。相比之下，对于采用 QGS 的量子近似优化算法，我们发现，所述电路奇偶表示尽管因开销导致成功概率低于直接 SGM-QAOA [50]，但仍是一种有利的选择，因为与 SGM 相比，每个量子近似优化算法步骤的运行时间和门数量都大幅减少。尤其是，PM-QAOA步骤的需求量多于 SGM-QAOA步骤这一点，或许可以由每个 PM-QAOA步骤带来的资源缩减予以弥补。鉴于量子计算机的量子比特数量仍在持续增加，例如可参见 IBM 的量子路线图 [48]，PM 似乎是量子近似优化算法的一种可行选择。

最后需要指出的是，我们仅讨论了具有全对全连接的优化问题，参见公式（A1）。然而，许多现实的优化问题具有相当稀疏的连接，这将显著减少所需的量子比特数量 [28] 同时保持其恒定电路深度的优势。

III. 中性原子和超导电路平台建模

在第 II 节中，我们介绍了这项工作的主要结果——即使用中性原子和超导电路作为量子计算平台，对电路运行时间和门数量进行计算与比较。在本节中，我们将介绍用于两个平台的详细物理模型。由于我们关注的是动力学描述，因此我们重点讨论各自的哈密顿量，其中包括通常可用于操控系统和实现量子门的各种控制参数。

A. 中性原子

激光耦合至高激发里德堡态的囚禁中性原子阵列，是量子计算 [51, 52] 和量子模拟 [53]的一种很有前景的平台，因为量子比特例如可以编码在寿命较长的超精细基态中。通过微波场 [54], 、双光子拉曼跃迁 [55], , 或结合微波与梯度场实现单量子比特寻址 [56–58]，可以实现高保真度的单量子比特门。相比之下，原子间的纠缠操作，即多体门，通常通过强相互作用的里德堡能级 [59, 60]实现，而用于双量子比特门和多量子比特门的各种控制方案也已通过实验得到验证 [20, 61–64]。

此类量子门已用于近期实验中 [39,40] ，其中多达数百个原子以平面几何结构排列。若考虑此类二维阵列中最小的构建模块，它由 $N = 4$ 个原子组成每个原子由三个相关能级描述。在旋转参考系中，其哈密顿量为（$\hbar = 1$）

$$\mathsf{H}(t) = -\sum_{n=1}^{N} \Delta_n(t) \left|r_n\right\rangle \left\langle r_n\right| + \sum_{\substack{n,m=1 \\ n<m}}^{N} V_{nm} \left|r_n r_m\right\rangle \left\langle r_n r_m\right| + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{l=\uparrow,\downarrow} \left[\Omega_{l,n}(t) e^{\mathrm{i}\varphi_{l,n}} \left|r_n\right\rangle \left\langle l_n\right| + \mathrm{H.c.}\right], \tag{1}$$

其中， $|\downarrow_n$ 和 $|\uparrow_n$ 表示第 n 个原子的量子比特能级， $|r_n$ 表示其里德堡能级。将第 n 个原子的 $|\downarrow_n$ 和 $|\uparrow_n$ 态耦合到各自里德堡能级 $|r_n$ 的两个激光场的拉比频率分别记为 $\Omega_{\downarrow,n}(t)$ 和 $\Omega_{\uparrow,n}(t)$ [65]。相应激光场的相位分别为 $\varphi_{\downarrow,n}(t)$ 和 $\varphi_{\uparrow,n}(t)$，而 $\Delta_n(t)$ 表示激光场相对于精确跃迁频率的失谐。我们假设两个场的 $\Delta_n(t)$ 相同。原子 n 和 m 之间的范德华（ vdW ）相互作用记为 V_{nm}。请注意，在哈密顿量 (1) 中，我们省略了负责单量子比特门的场，即耦合两个量子比特能级的场，因为我们关注的是多量子比特门，其中里德堡能级及其相互作用是主要的量子门机制。

若无另行说明，我们假设激光场对所有原子的作用完全相同，即 $\Omega_{\downarrow,n}(t) = \Omega_{\downarrow}(t)$、$\Omega_{\uparrow,n}(t) = \Omega_{\uparrow}(t)$ 和 $\varphi_{\downarrow,n}(t) = \varphi_{\downarrow}(t)$、$\varphi_{\uparrow,n}(t) = \varphi_{\uparrow}(t)$ 以及 $\Delta_n(t) = \Delta(t)$ 对所有 n 均成立。下文中，我们还默认假设采用伪二维架构，其中 $V_{nm} = V$，详见参考文献 [66]。实际上，这相当于一种最近邻（NN）与次近邻（NNN）耦合强度相同的架构。不过需要指出的是，我们在第 II 节构造量子电路时并未利用 NNN 耦合。因此，这不会影响表 I 中给出的任何单量子比特门或双量子比特门时间，因为对于实际的平面二维架构，这些时间也完全相同；在该架构中， V 只是最近邻之间的耦合强度。伪二维架构的假设仅影响多量子比特约束门 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ)，参见式 (A6)；在我们的研究中，这些约束门仅与使用 QGS 的奇偶映射（PM）有关，参见图 1(c) 中的叉号。

B. 超导电路

编码在超导电路最低能级中的量子比特，是另一种很有前景的量子计算平台 [67]。由于其参数在制造过程中可以在一定程度上进行选择，超导电路因而具有多种变体和参数范围，其中跨蒙量子比特 [68]目前是量子计算领域最受瞩目的类型。它们的量子比特能级可通过微波场操控，从而以高保真度实现单量子比特门 [69, 70] 或双量子比特门 [71, 72] 。相比之下

中性原子量子比特可通过其里德堡能级直接相互作用，而编码在超导电路中的量子比特通常通过中间耦合元件间接相互作用 [73]。在一种将此类耦合器设计为可调的架构中 [74]，，量子比特之间的有效相互作用强度也变得可调。这类量子比特架构已成功应用于近期的量子优势实验 [8, 9]，因此是典型的含噪声中等规模量子计算平台。

这种可调耦合器架构中的量子比特排列在具有最近邻耦合的二维晶格上。下文中，我们以文献 [8]中的架构为参考。此类系统中最小的构建模块由 $N = 4$ 个量子比特组成。该子系统的哈密顿量为 [8]

$$\begin{aligned}\mathsf{H}(t) = &\sum_{n=1}^{N}\left[\omega_n(t)\mathsf{b}_n^\dagger\mathsf{b}_n - \frac{\alpha_n}{2}\mathsf{b}_n^\dagger\mathsf{b}_n^\dagger\mathsf{b}_n\mathsf{b}_n\right]\\ &+\sum_{n=1}^{N}\left(\mathsf{b}_n+\mathsf{b}_n^\dagger\right)\Omega_n(t)\cos(\bar{\omega}_n(t)t)+\mathsf{H}_{\rm int}(t)\end{aligned} \tag{2}$$

with

$$\begin{aligned}\mathsf{H}_{\rm int}(t) = &\, g_{12}(t)\left(\mathsf{b}_1^\dagger\mathsf{b}_2+\mathsf{b}_1\mathsf{b}_2^\dagger\right)+\frac{g_{12}^2(t)}{|\eta|}\mathsf{b}_1^\dagger\mathsf{b}_1\mathsf{b}_2^\dagger\mathsf{b}_2\\ &+g_{23}(t)\left(\mathsf{b}_2^\dagger\mathsf{b}_3+\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3^\dagger\right)+\frac{g_{23}^2(t)}{|\eta|}\mathsf{b}_2^\dagger\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3^\dagger\mathsf{b}_3\\ &+g_{34}(t)\left(\mathsf{b}_3^\dagger\mathsf{b}_4+\mathsf{b}_3\mathsf{b}_4^\dagger\right)+\frac{g_{34}^2(t)}{|\eta|}\mathsf{b}_3^\dagger\mathsf{b}_3\mathsf{b}_4^\dagger\mathsf{b}_4\\ &+g_{41}(t)\left(\mathsf{b}_4^\dagger\mathsf{b}_1+\mathsf{b}_4\mathsf{b}_1^\dagger\right)+\frac{g_{41}^2(t)}{|\eta|}\mathsf{b}_4^\dagger\mathsf{b}_4\mathsf{b}_1^\dagger\mathsf{b}_1,\end{aligned} \tag{3}$$

其中，$\omega_n(t)$ 是电荷量子比特 n 的频率可调能级劈裂，α_n 是其非谐性，b_n 是其湮灭算符。电荷量子比特 n 和 m 之间的可调耦合记为 $g_{nm}(t)$，η 是相关电荷量子比特的非线性，对所有 n 而言大致为常数 $\alpha_n \approx \eta$。施加于电荷量子比特 n 的局域 X型控制场（例如某种微波场）的时变振幅和频率分别记为 $\Omega_n(t)$ 和 $\bar{\omega}_n(t)$。出于数值计算的考虑，采用旋转参考系更为有利。我们通过以下变换，转到频率为 $\omega_{\rm rot}$ 的旋转参考系。

$$\mathsf{H}'(t) = \mathsf{O}^\dagger(t)\mathsf{H}(t)\mathsf{O}(t) - \mathrm{i}\mathsf{O}^\dagger(t)\frac{\mathrm{d}\mathsf{O}(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{4a}$$

$$\mathsf{O}(t) = \exp\left\{-\mathrm{i}\omega_{\rm rot}\left(\sum_{n=1}^{N}\mathsf{b}_n^\dagger\mathsf{b}_n\right)t\right\} \tag{4b}$$

并求得

$$\begin{aligned}\mathsf{H}'(t) = &\sum_{n=1}^{N}\left[\left(\omega_n(t)-\omega_{\rm rot}\right)\mathsf{b}_n^\dagger\mathsf{b}_n - \frac{\alpha_n}{2}\mathsf{b}_n^\dagger\mathsf{b}_n^\dagger\mathsf{b}_n\mathsf{b}_n\right]\\ &+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left[\mathsf{b}_n\left(\bar{\Omega}_{n,\rm re}(t)+\mathrm{i}\bar{\Omega}_{n,\rm im}(t)\right)\right.\\ &\left.+\mathsf{b}_n^\dagger\left(\bar{\Omega}_{n,\rm re}(t)-\mathrm{i}\bar{\Omega}_{n,\rm im}(t)\right)\right]+\mathsf{H}_{\rm int}(t),\end{aligned} \tag{5}$$

其中我们引入了辅助控制场

$$\bar{\Omega}_{n,\rm re}(t) = \mathfrak{Re}\left\{\Omega_n(t)e^{-\mathrm{i}(\omega_{\rm rot}-\bar{\omega}_n(t))t}\right\}, \tag{6a}$$

$$\bar{\Omega}_{n,\rm im}(t) = \mathfrak{Im}\left\{\Omega_n(t)e^{-\mathrm{i}(\omega_{\rm rot}-\bar{\omega}_n(t))t}\right\}. \tag{6b}$$

虽然 $\Omega_n(t)$ 和 $\bar{\omega}_n(t)$ 是实际的物理控制场，但我们可以将 $\Omega_{n,\,\rm re}(t)$ 和 $\Omega_{n,\,\rm im}(t)$ 视为辅助控制场，用于描述旋转参考系中 $\Omega_n(t)$ 和 $\bar{\omega}_n(t)$ 的时间依赖性，而后者可以由 $\Omega_{n,\,\rm re}(t)$ 和 $\Omega_{n,\,\rm im}(t)$ 重新获得。

IV. 通过量子最优控制确定量子速度极限

在第III节介绍了中性原子和超导电路的物理模型之后，我们现在将在第IVA 节回顾量子速度极限的基本概念，并在第IVB 节回顾量子最优控制理论，因为二者分别构成了本文所述结果的理论基础和方法基础。我们的方法将在第IVC节进行描述。

A. 量子速度极限

量子速度极限（QSL）的概念自然产生于量子控制问题的语境中。为此，考虑一个由哈密顿量$\mathsf{H}(t) = \mathsf{H}(\{\mathcal{E}_k(t)\})$描述的量子系统，该哈密顿量依赖于一组可通过外部调节的控制场，$\{\mathcal{E}_k(t)\}$，例如可通过方程（1）或（5）中的时间依赖振幅、相位或失谐进行调节。量子控制问题由一组初始态$\{|\psi_l^{\rm in}\rangle\}$定义，这些初始态应被转移到一组目标态$\{|\psi_l^{\rm trgt}\rangle\}$，

$$\left|\psi_l^{\rm trgt}\right\rangle = \mathsf{U}(T,0;\{\mathcal{E}_k(t)\})\left|\psi_l^{\rm in}\right\rangle, \quad \forall l, \tag{7}$$

其中 $\mathsf{U}(T,0;\{\mathcal{E}_k(t)\})$ 是系统的时间演化算符，T 是总时间。任何满足方程（$\{\mathcal{E}_k(t)\}$ （7）的选择都被视为控制问题的一个解。需要注意的是，量子控制问题的解通常并不唯一。即使协议时长固定为 T，通常也存在许多个、甚至无穷多个解。

给定控制问题的量子速度极限（QSL）定义为最短协议时长 $T_{\rm QSL}$，在该时长下至少存在一个解，即至少存在一组控制场 $\{\mathcal{E}_k(t)\}$ 满足方程（7）。在量子计算和NISQ时代，由于退相干，时间是一种有限资源，因此理想情况下应在量子速度极限处实现量子门。为了对$T_{\rm QSL}$进行解析计算，$\mathsf{U}(T,0;\{\mathcal{E}_k(t)\})$必须能够针对任意一组$\{\mathcal{E}_k(t)\}$可设想的控制场进行解析计算——这一要求通常将 $T_{\rm QSL}$ 的解析计算限制在简单系统 [75]。

除了通过解析方法确定 $T_{\rm QSL}$，还有多种近似方法。其中一种常用方法

是计算下界 $T_{\mathrm{bound}} \le T_{\mathrm{QSL}}$，以估算 T_{QSL} 本身。对于最简单的态到态控制问题，可以通过解析方法计算下界 [24]。相比之下，对于描述量子门实现过程的多对初态和末态，下界仅存在于非常简单的系统中 [76]。在大多数情况下，需要借助数值工具来估算 T_{QSL}。在此背景下，量子最优控制理论已证明非常有用 [77]，因为它不仅能相当准确地估算 T_{QSL}，还能给出实现期望动力学的控制场，即实现从初态到目标态的跃迁，参见式（7）。由于这是我们选择采用的方法，下面将对其作更详细的介绍。

B. 量子最优控制理论

量子最优控制理论（OCT） [78] 是一套工具，提供解析和数值工具，用于推导优化后的控制场，以解决给定的控制问题，例如在最短时间内完成，或将误差降至最低。数学上，最优控制问题通过引入代价泛函来表述。

$$J\left[\{\psi_l\},\{\mathcal{E}_k\},T\right] = \varepsilon_T\left[\{\psi_l(T)\}\right] + \int_0^T J_t\left[\{\psi_l(t)\},\{\mathcal{E}_k(t)\},t\right]\mathrm{d}t, \tag{8}$$

其中 $\{\psi_l(t)\}$ 是一组时间演化态，$\{\mathrm{E}_k(t)\}$ 是一组待优化的控制场。误差度量 ε_T 量化了时间演化态 $|\psi_l(T)\rangle = \mathrm{U}(T, 0; \{\mathrm{E}_k(t)\})\,|\psi_l^{\mathrm{in}}\rangle$ 与期望目标态 $|\psi_l^{\mathrm{trgt}}\rangle$ 在协议终止时间 T 的距离，参见公式（7）。公式（8）中的项 J_t 则刻画随时间变化的运行代价。在大多数情况下，误差度量 ε_T 是关键的品质因数。为了优化量子门，我们使用误差度量 [79]

$$\varepsilon_T\left[\{\psi_l(T)\}\right] = 1 - \frac{1}{N_{\mathrm{trgt}}}\sum_{l=1}^{N_{\mathrm{trgt}}} \mathfrak{Re}\left\{\left\langle\psi_l^{\mathrm{trgt}}\middle|\psi_l(T)\right\rangle\right\} \tag{9}$$

并将 $|\psi_l^{\mathrm{trgt}}\rangle = \mathrm{O}\,|\psi_l^{\mathrm{in}}\rangle$ 作为目标门 O 的目标态。集合 $\{\psi_l^{\mathrm{in}}\}$ 遍历受 O 影响的逻辑基态，其中 $N_{\mathrm{trgt}} = 4$，8，16 分别对应二体门、三体门或四体门。

由于代价泛函 J 的构造方式使得数值越小对应于控制问题的解越优，因此，求解最优控制问题本质上就成为一个最小化任务，即寻找一组控制场 $\{\mathrm{E}_k^{\mathrm{opt}}(t)\}$，使 J 最小，分别为ε_T。这是一个优化问题，针对该问题已经开发出了多种数值算法 [80–84]。其中许多算法都可以直接在开源软件包 [85–89] 中获得。

C. 优化过程与方法

在通过最优控制理论确定 T_{QSL} 时，我们在数值上寻找最短的协议时长 T，使得误差度量 ε_T（参见公式（9））仍然足够小。用数学术语来说，我们因此定义一个误差阈值 $\varepsilon_{\max}$，并寻找满足以下条件的最短时间 T:

$$\min_{\{\mathcal{E}_k\}}\left[\varepsilon_T\left[\{\psi_l(T)\}\right]\right] \le \varepsilon_{\max} \tag{10}$$

有解。然而，无法对所有可能的控制场进行数值最小化。由于需要检查的控制场有无穷多个，因此在实践中必须用有限个控制场的采样来替代。为了通过有限采样高效地探索函数空间，可以使用第 IV B 节 所述的优化算法。由于我们关注的是基本的量子速度极限，除对振幅施加基于物理原理的限制外，我们对每个控制场 $\mathcal{E}_k(t)$的形式仅施加最低限度的限制。因此，我们需要一种能够探索几乎任意场形状的函数空间的优化算法。

我们选择 Krotov 方法 [90]，这是一种用于连续时间控制场的基于梯度的优化算法。附录 B对 Krotov 方法作了更详细的说明，下面概述其基本工作原理。该方法通过迭代更新控制场 $\{\mathcal{E}_k(t)\}$。从一组初始猜测场 $\{\mathcal{E}_k^0(t)\}$开始，Krotov 方法会持续更新这些场，直到满足 $\varepsilon_T \le \varepsilon_{\max}$ 或达到最大迭代次数。该过程可视为在所有可能的控制场集合构成的空间——即所谓的控制景观——中进行的一种局域但结构化的搜索。局域搜索的区域由初始猜测场$\{\mathcal{E}_k^0(t)\}$的选择决定，它们设定了搜索的初始起点。虽然这种搜索的局域性质似乎与评估式（10）所需的全局搜索相矛盾，但通过使用多组随机初始猜测场，可以将其转化为近似的全局搜索。所有这些局域搜索的综合效果是“覆盖”控制景观的更大区域。因此，使用该方法近似 T_{QSL} 的完整过程是：从一个协议时长 T 开始，此时优化算法能够找到解，即产生 $\varepsilon_T \le \varepsilon_{\max}$的优化场；然后逐步缩短 T，直到多组随机初始猜测场均无法再找到解为止。附录 C总结了随机初始猜测场的生成细节，以及 Krotov 方法中每个场的参数化方式。

此前，数值最优控制技术的类似应用已显示出与可通过解析方法证明的量子速度极限高度一致 [91, 92]。最坏情况下，这种方法可能会高估实际的量子速度极限；在这种情况下，实际的量子速度极限会更小，而第II 节中使用 QGS 的电路和量子门时间将会

甚至更好。

V. 二维架构上的量子门时间基准测试

在本节最后，我们将展示通过第IV 节所述方法获得的、针对表I 中所列各种量子门的量子速度极限的详细结果；这些结果已用于计算第II节中的电路运行时间。

A. 中性原子

在本节中，我们利用哈密顿量（1）中的控制参数，确定中性原子上不同量子门的量子速度极限。为此，我们将里德堡能级之间的范德华相互作用强度设为$V/2\pi = 40$MHz，并假设 $\Omega_{\max}/2\pi = 0.1V = 4$MHz 是 $\Omega_\downarrow(t)$ 和 $\Omega_\uparrow(t)$ 可达到的最大拉比频率，同时设 $\Delta_{\max}/2\pi = 0.3V = 12$MHz 为 $|\Delta(t)|$。这些参数与近期实验报告的范围相同 [20, 39, 93]。

图 3（左列）展示了中性原子上各种量子门在不同门时间 ε_T下可实现的量子门误差 T，参见公式（9）。每个标记均表示一次使用 Krotov 方法进行优化的结果 [，参见附录（B）]，即从通过公式（ε_T C1）生成的随机初始猜测场开始，经过 1500 次迭代后得到的最终误差 $\varepsilon_{\max} = 10^{-3}$。下文中，我们对所有量子门均设定此阈值，并在达到该阈值时立即停止优化。

1. *Two-qubit gates*

图 3(a) 展示了采用三种典型控制场配置实现 CZ门的结果。圆圈对应“并行”配置，即对所有五个可能的控制场 $\Omega_\downarrow(t)$、$\Omega_\uparrow(t)$ $\varphi_\downarrow(t)$ $\varphi_\uparrow(t)$ 和 $\Delta(t)$ 进行了优化。相反，叉号对应“相位”配置，此时仅优化了 $\varphi_\uparrow(t)$，而 $\Omega_\uparrow(t) = \Omega_{\max}$，$\Delta(t) = \Delta_{\max}$ 和 $\Omega_\downarrow(t) = \varphi_\downarrow(t) = 0$ 保持固定。两种情况下，我们得到的量子速度极限均为$T^{\mathrm{CZ}}_{\mathrm{QSL}} = 350$ ns。第三种控制场配置称为“顺序”配置（菱形），由 $\Omega_\downarrow(t)$ $\varphi_\downarrow(t)$ 和 $\Omega_\uparrow(t)$ $\varphi_\uparrow(t)$ 顺序作用构成；也就是说，在方案的前半段使用 $\Omega_\uparrow(t) = \varphi_\uparrow(t) = 0$，后半段使用 $\Omega_\downarrow(t) = \varphi_\downarrow(t) = 0$。这种配置的灵感来自一种用于实现 ZZZZ($\gamma$) 量子门的绝热方案，参见式 (A6) 和文献 [66]。其量子速度极限为$T^{\mathrm{CZ}}_{\mathrm{QSL}} = 700$ ns，是另外两种配置的两倍。

为了比较三种配置在优化过程中寻找解的成功程度，右侧的直方图图3 (a)的侧面给出了在特定范围内获得最终误差的概率密度 ε_T。对于获得误差为 $\varepsilon_T \le \varepsilon_{\max}$的解，我们发现“顺序”配置（菱形）的概率最低——这与其最高的量子速度极限相吻合——而另外两种配置的概率最高且几乎相同。在这两种配置中，尤其值得强调的是“相位”配置（叉号）。从物理角度来看，将 $\Omega_\downarrow(t)$ 和 $\varphi_\downarrow(t)$ 设为零，会自动确保 $|\downarrow\downarrow\rangle$ 映射到自身——这是受控-Z门所要求的。另两种配置并不能自动保证这一点，因此优化必须明确确保这一点，从而需要求解稍复杂的优化问题。然而，自动正确映射一个基态这一优势，并未转化为在 $T^{\mathrm{CZ}}_{\mathrm{QSL}} = 350$ 纳秒的量子速度极限或一般可达误差方面的优势。有趣的是，对于每个门时间 T，“并行”配置和“相位”配置所能达到的最低误差相同。图中通过连接每个T 对应最低误差的线直观地突显了这一点，见图3(a)。此外，值得强调的是，这些误差 ε_T 几乎对每一组初始猜测场都能达到，即与问题控制景观中的初始起点无关，并且两种配置均可独立达到。这支持了 $T^{\mathrm{CZ}}_{\mathrm{QSL}} = 350$ 纳秒是CZ门实际量子速度极限这一猜想，并总体验证了我们确定量子速度极限的方法。从最优控制的角度来看，有趣的是，与“相位”配置相比，“并行”配置中可用控制场集合扩展所带来的灵活性，并不能转化为误差或时间上的优势。从实际角度来看，后者更有利于实验实现，因为它所需的物理资源更少。

虽然迄今讨论的三种配置应仅视为示例，但我们没有发现任何配置能够实现更快的 CZ门。因此，我们认为 $T^{\mathrm{CZ}}_{\mathrm{QSL}} = 350$ ns 是所有配置下的基本量子速度极限。将 $T^{\mathrm{CZ}}_{\mathrm{QSL}}$ 与文献中的数值进行比较时，一个自然的选择是参考文献 [20], 所提出的解析协议中的量子门时间，尤其是因为该协议使用与“相位”配置相同的控制场来实现量子门。对于我们的参数，我们得到$T^{\mathrm{CZ}}_{\mathrm{lit}} \approx 340$ ns 的解析量子门时间；考虑到图 $T^{\mathrm{CZ}}_{\mathrm{QSL}} = 350$ 3 中量子门时间的采样相当粗略，我们认为它与我们的量子速度极限 T ns 相同。需要注意的是，参考文献 [20]中的解析协议实现的仅是一个相差局部操作的 CZ门——而这些操作已包含在我们在量子速度极限下的优化门协议中。不过，为了公平比较解析量子门时间与量子速度极限下的量子门时间（如第 II节所需），也为了简便起见，我们在表 I中将两种时间都设为 350 ns。

图 3 左列中其余的面板 (b)-(e) 展示了表I所列 QGS 中其他量子门的结果。CNOT门的结果见面板

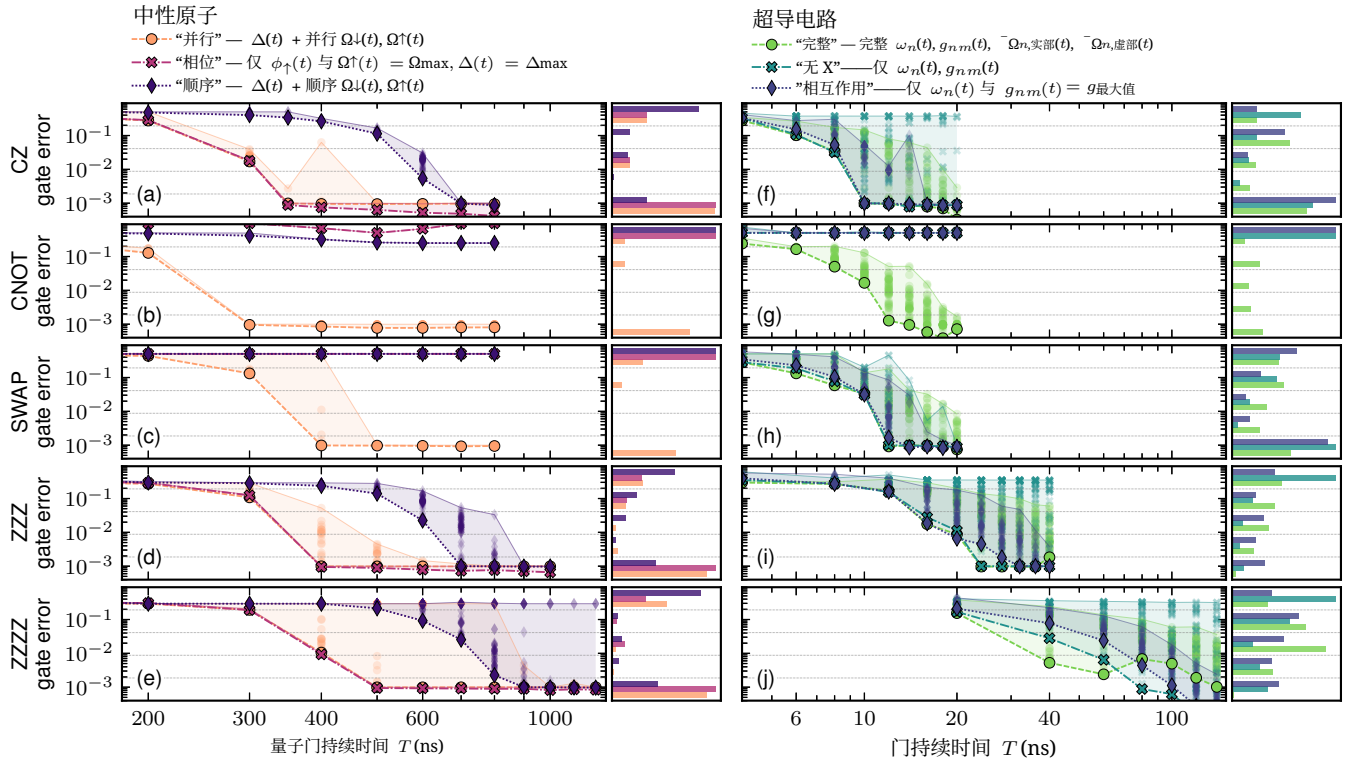


图3. 表 I 中“QSL 门集”（QGS）所含各种量子门的量子速度极限概览。左列（右列）分别展示了三种不同控制场配置（正文中有说明）下中性原子（超导电路）的结果。每个标记表示通过公式（C1）生成的一组随机初始猜测场开始后，在达到 $\varepsilon_T \le \varepsilon_{\max} = 10^{-3}$ 或经过 1500 次 Krotov 方法迭代后得到的量子门误差 ε_T，参见公式（9）和附录 B。连线表示给定控制场配置下每个门时间 T所达到的最低误差，阴影背景色则表示最低误差与最高误差之间的范围。每个面板右侧以直方图形式显示标记密度。中性原子的参数为 $V/2\pi = 40$MHz、 $0 \le \Omega_\downarrow(t)$、$\Omega_\uparrow(t) \le \Omega_{\max} = 0.1V$和 $|\Delta(t)| \le \Delta_{\max} = 0.3V$。超导电路的参数为 -40MHz $\le g_{nm}(t)/2\pi \le 5$MHz、6700 MHz $\lesssim \omega_n(t) \lesssim 7100$MHz（具体数值取决于 n，并取自参考文献 [8]）以及 -50MHz $\le \bar{\Omega}_{n,\mathrm{re}}(t)$、$\bar{\Omega}_{n,\mathrm{im}}(t) \le 50$MHz。每个电荷量子比特的非简谐能级梯在五个能级后截断，并在优化过程中抑制最高能级中的布居。ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ) 的优化结果，参见公式（A6），是在 $\gamma = \pi/4$ 处的最大纠缠量子门上获得的。中性原子上的 CNOT门结果采用了针对每个原子的依赖位置的控制场。

(b)。在我们考虑的中性原子量子门中，它是唯一需要单独控制场而非全局场的量子门。也就是说，只有对这种量子门，我们没有假设 $\Omega_{\downarrow,n}(t) = \Omega_\downarrow(t)$，$\Omega_{\uparrow,n}(t) = \Omega_\uparrow(t)\varphi_{\downarrow,n}(t) = \varphi_\downarrow(t)$ $\varphi_{\uparrow,n}(t) = \varphi_\uparrow(t)$ 和 $\Delta_n(t) = \Delta(t)$ 对所有 n 均成立，而是实际假设使用指向每个原子的独立控制场，且各自具有独特的场形状。尽管如此，我们仍考虑与面板 (a) 中 CZ门相同的三种控制场配置，但现在将其应用于独立控制场 $\Omega_{\downarrow,n}(t)$，$\Omega_{\uparrow,n}(t)\varphi_{\downarrow,n}(t)$ $\varphi_{\uparrow,n}(t)$ 和 $\Delta_n(t)$，而不是对应的全局场版本。即使在这种更一般的控制场设置下，我们发现只有“并行”配置（圆圈）能够实现量子速度极限为 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{CNOT}} = 300\,\mathrm{ns}$ 的 CNOT门。相比之下，“相位”和“顺序”配置根本无法实现 CNOT门。这些结果表明，只需使用量子比特能级与里德堡能级之间依赖于位点的激光耦合，无需用于单量子比特门的控制参数，即可实现受控非门。不过，在实验上更方便的操制，无需对耦合量子比特到里德堡态进行完整的、依赖于位置的控制，即可通过全局激光脉冲实现CZ门，并通过局域操作将其转换为CNOT门。尽管如此，为了在分析中以及表 I 中的QGS里保持完整，我们仍将CNOT门及其QSL纳入考量，但出于上述原因，不将其用于第 II 节中的任何中性原子量子电路。

图 3 (c) 展示了 SWAP 门的结果。与 CNOT 门一样，我们发现，假设每个原子的全局场均相同，只有“并行”配置能够实现 SWAP 门。我们得到 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{SWAP}} = 400\,\mathrm{ns}$ 作为其量子速度极限。其他两种配置都无法实现 SWAP 门。然而，与 CNOT 门不同，SWAP 门可以通过全局控制场实现，因此我们认为它在实验上可行，并将其作为一种可行的量子门纳入表 I 中的 QGS。

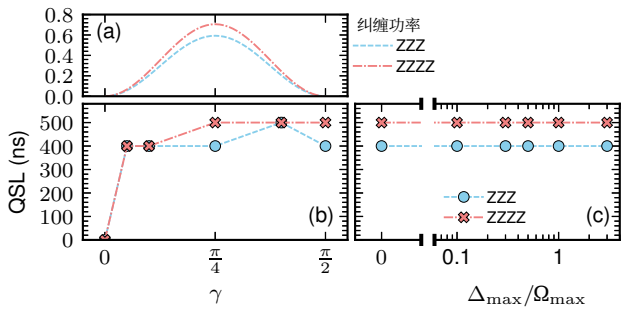


图 4. 面板 (a) 展示了 [94] 三量子比特和四量子比特约束门 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ)的纠缠功率，参见公式 (A6)，其随 γ变化。相比之下，面板 (b) 和 (c) 考察了在中性原子的各种条件下，这些量子门的量子速度极限。在面板 (b) 中，展示了量子速度极限对参数 γ 的依赖关系。在面板 (c) 中，展示了 $\Delta_{\max}/\Omega_{\max}$ 的影响。在后一种情况下，我们取 $\gamma = \pi/4$，并固定 $\Omega_{\max}$，同时改变 $\Delta_{\max}$。面板 (b) 和 (c) 中的量子速度极限，是使用图 3中描述的参数和“相位”配置确定的。

2. *Three- and four-qubit constraint gates*

到目前为止，我们已经讨论了图 3 (a)-(c) 中双量子比特门的结果。这些门及其各自的量子速度极限已用于确定量子电路，并计算第 II 节中相应的电路运行时间，尤其是第 IIB 节讨论的 SGM 中的电路。相比之下，对于奇偶映射中的量子近似优化算法电路 [29], ，存在不包含双量子比特门的电路表示，例如，当所需的三量子比特和四量子比特约束门 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ)（参见式（A6））可以原生实现时，就无需将它们分解为单量子比特门和双量子比特门。接下来，我们将确定并讨论它们的量子速度极限。

首先应当指出，从算法角度来看，在实验中实现的是 ZZZ(γ) 还是 $e^{i\alpha}$ZZZ(γ)（其中 α 是任意相位）并不重要。后者只会改变电路执行过程中量子态的全局相位。ZZZZ(γ) 量子门也同样如此。在这两种情况下，我们都可以任意选择 α ，但出于实际考虑，选择使态 $|\downarrow\downarrow\downarrow$ 和 $|\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$ 不会因相应的约束门而获得相位的取值。因此，接下来我们考虑相移约束门

$$e^{i\gamma}\mathrm{ZZZ}(\gamma), \qquad e^{-i\gamma}\mathrm{ZZZZ}(\gamma), \tag{11}$$

而非使用公式（A6）中的那些项。

在奇偶映射中的 QAOA 电路中，对于各种 γ，都需要实现这些约束门，参见方程（A3）。然而，由于我们无法确定每个 γ值对应的量子速度极限，我们首先分析量子门的纠缠能力 [94]随 γ 变化的情况，如图4 （a）所示。我们观察到，当 $\gamma = \pi/4$ 时，ZZZ（γ）和 ZZZZ（γ）的纠缠能力均达到最大值，因此决定先针对这一特定值对它们的量子速度极限进行基准测试，因为我们预计此时的约束问题最难求解，因而其量子速度极限也会最大。

图 3 (d) 和 (e) 展示了相移约束门 ZZZ(γ)和 ZZZZ(γ)的优化结果，参见公式 (11)，对应于 $\gamma = \pi/4$。我们使用与面板 (a)–(c) 中双量子比特门相同的三种控制场配置，发现所有配置都能实现约束门，但“并行”和“相位”配置表现最佳。虽然两种配置对于 ZZZ(γ)和 ZZZZ(γ)分别都得到相同的量子速度极限，即 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{ZZZ}} = 400$ 纳秒和 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{ZZZZ}} = 500$ 纳秒，但“相位”配置展现出更好的收敛行为。与图 3 (a) 中的 CZ门类似，我们观察到，对于该配置，每组初始猜测场都能可靠地收敛至相同的最终误差 ε_T ，且对每个 T都如此。由于“并行”配置在门时间 T 变化时能达到相同的误差，并且按定义采用了与“相位”配置不同的控制策略，我们认为已可靠地确定了约束门的量子速度极限。就实验可行性而言，“相位”配置更具优势，因为它所需的硬件和控制资源更少。

仅使用 $\varphi_\uparrow(t)$ 作为时变控制场，就足以实现 ZZZ(γ) 或 ZZZZ(γ)，这一事实源于对式（11）中量子门相位偏移版本的考量。具体而言，在 ZZZ(γ) 或 ZZZZ(γ) 的 8 个或 16 个基态中，只有状态 $|\downarrow\downarrow\downarrow$ 和 $|\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$ 在技术上需要非零的 $\Omega_\downarrow(t)$ 和 $\varphi_\downarrow(t)$ 才能实现相位配置；因此，我们只需考虑量子门的相位偏移版本，即可避免这一要求。对于其余 7 个或 15 个基态，它们最初都至少有一个原子处于 $|\uparrow$ 状态，只需利用相位 $\varphi_\uparrow(t)$ 和恒定的 $\Omega_\uparrow(t) = \Omega_{\max}$，就足以正确调整所有相位。因此，“相位”配置是一种硬件高效控制方案，可用于实现快速 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ) 量子门。

我们的结果进一步表明，最近在文献 [66]中提出、旨在实现高保真度 ZZZZ(γ) 量子门的“顺序”配置，在门时间方面似乎并不理想，因为其特定于配置的量子速度极限约为其他配置的两倍。不过需要指出的是，将文献 [66]中的方案与处于量子速度极限的方案进行比较并不公平。一方面，文献 [66] 中的控制方案基于绝热性，而我们的数值计算远未处于这一状态。另一方面，尽管参数 γ 在绝热控制方案中是一个可调变量，但图3 (d) 和 (e) 中的结果仅适用于 $\gamma = \pi/4$。若需要具有不同 γ 的量子门，就必须专门针对这一目的优化控制场。尽管分析是否存在一种能在量子速度极限下灵活配置 γ 的解析控制方案超出了本文范围，接下来我们仍将分析超出 $\gamma = \pi/4$ 时 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ) 的量子速度极限。具体而言，在将“相位”配置确定为最可靠的量子门量子速度极限判定方式后，我们将给出其他参数下的量子速度极限.....

确定“相位”配置是判定量子门量子速度极限最可靠的方式后，我们在图 γ 中给出了其他参数值对应的量子速度极限。我们发现，当 $\gamma > 0$ 时，量子速度极限几乎保持不变；而当 $\gamma = 0$时，量子速度极限为零，此时 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ) 都与恒等操作重合。有趣的是，当 $\gamma = \pi/2$ 时，我们并未观察到量子速度极限降低；此时约束门不再具有纠缠能力，参见图4 (a)，因此理论上仅通过局部操作即可实现。我们推测，量子速度极限没有降低，是因为我们未在哈密顿量（1）中考虑用于局部操作的任何控制场，因此必须借助里德堡能级来实现局部量子门。

此外，我们还分析了图中量子速度极限对比值的依赖关系 $\Delta_{\max}/\Omega_{\max}$ 。令人惊讶的是，在图4(c) 中，我们发现 ZZZ 的量子速度极限(γ) 和 ZZZZ(γ) 均与该比值无关，并发现 $\Delta_{\max} = 0$ 是一个可行的选择。

总的来说，我们观察到 ZZZ 的量子速度极限(γ) 和 ZZZZ 的量子速度极限(γ) 仅略大于双量子比特门的量子速度极限。鉴于奇偶映射量子近似优化算法（PM-QAOA）的量子电路需要这类约束门，因此原生提供这些量子门更有优势，因为通过单量子比特门和双量子比特门实现它们 [29] 会耗费显著更多的时间。这一效应可见于图 1 (c)，其中加号表示将约束门展开为单量子比特门和双量子比特门的数据，叉号则表示使用原生约束门的数据。与双量子比特门相比，ZZZ(γ)和 ZZZZ(γ) 的量子速度极限较短，一种可能的解释是，伪二维架构中原子 [66], 即 $V_{nm} = V$的置换对称性与量子门操作本身的置换对称性相匹配。

最后，我们因此考察伪二维架构对约束门 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ) 的影响。对于三量子比特和四量子比特约束门，改用实际的平面二维架构意味着：最近邻之间的耦合仍为 V，而对角耦合，即次近邻之间的耦合，换言之，2×2 方形晶格单元相对两边上量子比特之间的耦合，则被替换为 $V/8$。图 5 (a) 和 (b) 中的星号分别表示 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ) 量子门在 $\gamma = \pi/4$ 下的相应结果。在伪二维架构中，它们的量子速度极限分别为 $T^{\mathrm{ZZZ}}_{\mathrm{QSL}} = 400\,\mathrm{ns}$ 和 $T_{\mathrm{ZZZZQSL}} = 500\,\mathrm{ns}$；而在实际的平面二维架构中，则变为 $T^{\mathrm{ZZZ}}_{\mathrm{QSL,2D}} = T^{\mathrm{ZZZZ}}_{\mathrm{QSL}}{}_{,\mathrm{2D}} = 600\,\mathrm{ns}$。有趣的是，对于这两种量子门，量子速度极限仅有相对较小的增幅。一种可能的解释是，中性原子的量子门速度主要由最大拉比频率 $\Omega_{\max}$ 决定，该频率在两个示例中相同；原子间相互作用强度虽然因架构而异，但影响并不那么显著。

尽管我们认为，由于能够非常灵活地排列中性原子，伪二维架构在实验中是可行的， [95], 但我们仍将实际平面二维架构的量子速度极限视为表 I 和第 II 节中 QGS 的参考门时间。 和第 II 节。然而，请注意，在我们的研究中，约束门仅与 PM 中的量子近似优化算法电路相关，参见图 1 （c）。不过，为了能够比较实际平面二维架构（橙色叉号）的运行时间与采用伪二维架构时的运行时间，我们将后者以橙色五边形的形式添加到图 1 （c）中。

B. 超导电路

与第五节 A 中的中性原子类似，我们现在确定并分析相同量子门在超导电路中的量子速度极限。实现这些量子门的可用控制参数包括可调量子比特频率 $\omega_n(t)$、量子比特之间的可调耦合强度 $g_{nm}(t)$，以及哈密顿量 (5) 中的（辅助）X型局域控制场 $\Omega_{n,\mathrm{re}}(t)$ 和 $\Omega_{n,\mathrm{im}}(t)$。为了符合实验实际，我们采用参考文献 [8] 中的参数。为此，我们从通常规模更大的二维架构中选取一个由四个量子比特组成的 2×2 方形单元。量子比特频率及其可调范围取为 $6700\,\mathrm{MHz} \lesssim \omega_n(t) \lesssim 7100\,\mathrm{MHz}$，非谐性取为 $\alpha_n \approx 200\mathrm{MHz}$，具体数值取决于 n。如参考文献 [8] 所述，可调耦合强度为 $-40\mathrm{MHz} \le g_{nm}(t) \le 5\mathrm{MHz}$。此外，我们假设（辅助）X型控制场 $\Omega_{n,\mathrm{re}}(t)$ 和 $\Omega_{n,\mathrm{im}}(t)$（它们编码了物理 X型控制场 $\Omega_n(t)$ 及其可调驱动频率 $\bar{\omega}_n(t)$）满足 $-50\mathrm{MHz} \le \Omega_{n,\mathrm{re}}(t),\ \Omega_{n,\mathrm{im}}(t) \le 50\mathrm{MHz}$。

1. *Two-qubit gates*

图3 (f)展示了超导电路上 CZ 门的结果，采用了三种不同的控制场配置——当然，这些配置不同于用于中性原子的配置。在“完整”配置（圆圈）中，所有可用的控制场，$\bar{}(t)$ $g_{nm}(t)$、$\Omega_{n,\mathrm{re}}(t)$ $\bar{}$以及 $\Omega_{n,\mathrm{im}}(t)$，都随时间变化并进行优化。在“无 X”配置（叉号）中，仅优化 $\omega_n(t)$ 和$g_{nm}(t)$，而 X 型控制场 $\bar{}$ $\bar{}$设为零，$\Omega_{n,\mathrm{re}}(t) = \Omega_{n,\mathrm{im}}(t) = 0$。最后，在“相互作用”配置中，仅 $\omega_n(t)$随时间变化并进行优化，而 $g_{nm}(t) = -40\mathrm{MHz} = g_{\max}$ 设为其 $\bar{}$ $\bar{}$最大幅值，且 $\Omega_{n,\mathrm{re}}(t) = \Omega_{n,\mathrm{im}}(t) = 0$。对于图3 (f)中的 CZ 门，我们观察到这三种配置均指向相同的量子速度极限 $T^{\mathrm{CZ}}_{\mathrm{QSL}} = 10\,\mathrm{ns}$。就收敛行为而言，右侧图3 (f)中的概率密度表明，“相互作用”配置表现最佳。总体而言，这三种配置的收敛行为略逊于中性原子的三种配置，参见图3 (a)。尽管如此，由于这三种配置均指向相同的量子速度极限，并且通常会得到相同的可实现误差 ε_T （取决于 T），我们认为，我们确定量子速度极限的方法在超导电路中也能给出可靠结果

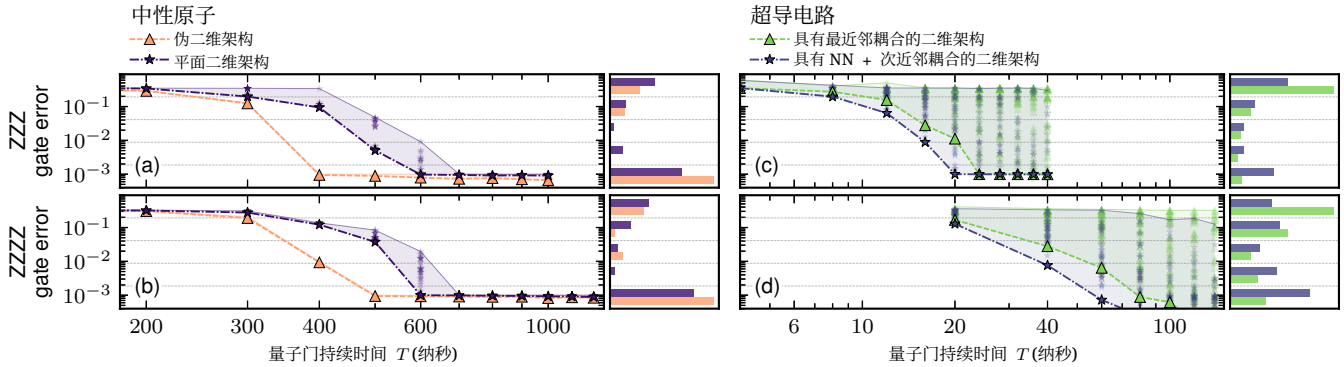


图 5. 不同量子速度极限的概述，与图 3 类似，但仅针对三量子比特和四量子比特约束门 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ)，参见公式 (A6)。左列展示了中性原子的结果，采用图 3中的“相位”配置，分别对应伪二维架构（三角形）和实际的平面二维架构（星形）。右列比较了超导电路采用图 3中的“无 X”配置时的结果。数据对应于参考文献 [8] 中的物理架构，其中仅存在量子比特之间的最近邻（NN）耦合（三角形），以及添加了对角耦合，即次近邻（NNN）耦合的情况（星形）。

并推测 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{CZ}} = 10\,\mathrm{ns}$是 CZ 门的基本量子速度极限。虽然已有采用可调耦合器、在类似架构上实现 CZ 门的参考实现，[72, 74, 96, 97]，但这些架构都与我们的架构和参数范围不同。因此，我们将量子速度极限与文献 [8]报道的最快双量子比特门 Sycamore 门的门时间进行比较。我们发现，$T_{\mathrm{CZQSL}} = 10\,\mathrm{ns}$ 略快于 $T^{\mathrm{Syc.\,lit}} = 12\,\mathrm{ns}$ [37]。

在图3 （g）中，展示了使用与 CZ 门相同的三种配置实现 CNOT 门的结果。我们发现只有“完整”配置能够实现 CNOT 门，其量子速度极限为 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{CNOT}} = 14\,\mathrm{ns}$，而另外两种配置则无法实现。在可用的控制参数中，X 型控制场 $\Omega_{n,\,\mathrm{re}}(t)$ 和 $\Omega_{n,\,\mathrm{im}}(t)$ 对于实现 CNOT 门至关重要。对于 SWAP 门，我们再次发现三种配置均能收敛，参见图3 （h）；其中“无 X”和“相互作用”配置表现出最佳的收敛行为。我们得到的量子速度极限为 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{SWAP}} = 12$ ns。

2. *Three- and four-qubit constraint gates*

现在我们转向三量子比特和四量子比特约束量子门 ZZZ(γ) 以及 ZZZZ(γ)。不过请注意，以下内容与中性原子不同，我们不考虑它们的相移版本，参见式（11），而考虑其原始版本，参见式（A6）。

图 3(i) 和 (j) 分别展示了约束门 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ)的结果。我们使用与面板 (f)-(h) 中双量子比特量子门相同的三种控制场配置。我们观察到，“相互作用”配置的收敛表现最佳，而“无 X”配置在两种情况下都产生了最短的量子速度极限，分别为 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{ZZZ}} = 24$ 纳秒和 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{ZZZZ}} = 80$ 纳秒分别对应 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ)。两个量子速度极限均已确定为 $\gamma = \pi/4$。因此，ZZZ(γ) 的量子速度极限已通过“完整”和“无 X”两种配置得到独立验证，因为两者在量子门时间 T 的变化过程中均产生了几乎相同的可实现误差 ε_T。因此，我们认为量子速度极限 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{ZZZ}} = 24\,\mathrm{ns}$ 已得到了充分验证。对于 ZZZZ(γ），情况则有所不同，我们观察到三种配置表现出截然不同的收敛行为，参见图3 (j)。“无 X”配置得到了最短的量子速度极限 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{ZZZZ}} = 80\,\mathrm{ns}$，而“完整”配置在 $T < T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{ZZZZ}}$ 方面表现略好，这可能表明 ZZZZ(γ) 还存在更短的量子门协议，但由于用于探索控制景观的初始猜测场数量有限等原因，我们的方法未能找到这些协议。在下文中，以及在第II节计算电路运行时间时，我们仍将 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{ZZZZ}} = 80\,\mathrm{ns}$ 视为 ZZZZ(γ) 量子门的量子速度极限，因为在三种控制场配置中，这是 Krotov 方法能够找到满足 $\varepsilon_T \le \varepsilon_{\max}$ 的解的最快量子门时间 T。

有趣的是，对于中性原子，我们观察到 ZZZ(γ)和 ZZZZ(γ) 的量子速度极限几乎相同，且仅略长于双量子比特门的量子速度极限；而对于超导电路，我们只观察到 ZZZ(γ) 量子门存在相同情况。与该平台上的其他量子速度极限相比，ZZZZ(γ) 量子门的量子速度极限要长得多。严格判定这是由于图 3(j) 中观察到的非理想收敛行为所致，还是存在更深层的物理起源，超出了本研究的范围。尽管如此，为了尝试探究这一问题，我们考虑在超导电路架构中的传输子之间加入额外对角耦合，即次近邻耦合的情形。对于哈密顿量（3），这意味着以与现有耦合相同的形式，增加两行耦合项 $g_{13}(t)$ 和$g_{24}(t)$。

$g_{12}(t)$ $g_{23}(t)$ $g_{34}(t)$ 和 $g_{41}(t)$。这一情形的灵感来自中性原子的伪二维架构；该架构同样具有相同的最近邻（NN）和次近邻（NNN）耦合，且这些耦合有利于系统运行。图 5(c) 和 (d) 展示了仅包含 NN 耦合（三角形）以及同时包含 NN 和 NNN 耦合（星形）的两种情形的结果。除了观察到后一种情形的收敛性质显著改善外，我们还分别为 ZZZ(γ) 和 ZZZZ(γ) 量子门获得了更优的量子速度极限：$T_{\mathrm{ZZZQSL,NNN}} = 20\,\mathrm{ns}$ 和 $T_{\mathrm{QSL}}^{\mathrm{ZZZZ}}$，$_{\mathrm{NNN}} = 60\,\mathrm{ns}$。尽管这种情形有所改善，ZZZZ($\gamma$) 量子门的量子速度极限仍未接近 ZZZ($\gamma$) 量子门的量子速度极限，而中性原子平台上的情况则是如此。因此，存在 NNN 耦合或许只能部分解释中性原子与超导电路之间约束门量子速度极限的差异。尽管包含 NNN 耦合的情形并不反映超导电路的实际架构，我们仍将采用这些更快约束门的奇偶映射（PM）中 QAOA 电路的电路运行时间作为参考，以紫色五边形标记添加到图 1(c) 中。

VI. 结论

在本研究中，我们确定了两种前景广阔的量子计算平台——中性原子和超导电路——上若干种常见的双量子比特量子门以及两种特定的多量子比特量子门的量子速度极限。这两种平台均支持量子比特的二维排列。我们采用最优控制理论确定量子速度极限，因为它提供了一种普遍适用的工具，可确保对这两种平台进行公平比较。

在单个量子门的层面上，我们的研究有助于评估文献中的门协议与其基本量子速度极限相差多远；换言之，如果用数值优化的协议替代已知门协议，理论上还可以节省多少时间。我们发现，在每个平台内，所有研究的双量子比特门（包括 CNOT、CZ门和 SWAP）的量子速度极限都非常相近，并且接近参考门时间：中性原子平台的 aCZ 门和超导电路平台的 Sycamore门 [20] [8]

在量子算法层面，我们的研究还使我们能够确定整个量子电路的“量子速度极限”。为此，我们假设两个平台都采用二维网格架构，且量子比特的连接方式只允许在相邻量子比特之间执行物理量子门。不过，我们假设这些量子门可在量子速度极限下执行。这使我们能够计算两种典型量子算法——量子傅里叶变换和量子近似优化算法的单步——在“量子速度极限”下的电路运行时间。我们发现，相应的加权电路运行时间随系统规模的增长呈相近的标度关系。此外，我们观察到这一结果与所选用的门集无关，该门集用于将.....翻译成彩票娱乐

将量子算法转换为可执行量子电路，即无论使用 SGS 还是 QGS。我们观察到，无论平台为何，QGS 的电路运行时间和门数量大约只有 SGS 的一半。一方面，这表明在理论上，两个平台的电路运行时间都还有进一步缩短的空间。另一方面，这也说明，在典型的当今 NISQ硬件上运行原型量子电路时，两个平台的表现同样出色。

除了在 SGM 中表示量子电路之外，我们还探索了在 PM 中表示相同量子算法的方法 [26, 27, 29]。我们观察到，在大多数情况下，电路运行时间和门数量均有所减少。这种减少是以需要更多物理量子比特为代价的，但无需改变几何布局或控制硬件。在此背景下，我们希望特别强调 PM 中单个 QAOA 步骤的电路运行时间。与其在 SGM 中的表示相比，PM 中的表示具有恒定的电路深度，不受问题复杂度的影响，但需要实现局域三量子比特和四量子比特约束门 [29]。对于超导电路，我们发现，在量子速度极限下，这些量子门的门时间与其分解为单量子比特门和双量子比特门后的运行时间大致相当。相比之下，对于中性原子，我们发现，直接实现约束门仅比任意单个双量子比特门稍慢，尤其是远快于将其分解为单量子比特门和双量子比特门的实现方式。尽管如此，我们仍然观察到，对于两个平台，单个 QAOA 步骤的运行时间均约为各自平台固有相干时间的 $2-4\%$。对于包含 $N = 9$ 个逻辑量子比特的问题规模，这相当于一个数量级的改进；而对于 $N = 121$，改进幅度则增至三个数量级。由于采用约束门的原生实现时，PM 中的门数量也少于 SGM，因此我们认为，就单个 QAOA 步骤所需的上述资源而言，PM 具有优势。它能够最大限度地减少有限相干时间导致的误差，并支持大深度 QAOA。然而，我们希望强调的是，与较低深度的 SGM-QAOA 实现相比，PM-QAOA 电路通常需要更深的电路才能达到相近的成功概率。

虽然我们想强调，量子电路的可行性不仅取决于运行时间和门数量，但我们的基准测试研究表明，至少这两个因素在理论上都可以通过优化门协议进一步改进。这一点对中性原子和超导电路均成立。

致谢

我们感谢 Hannes Pichler 和 Kilian En- der 的有益讨论，并感谢 Michael Fellner 在奇偶校验量子傅里叶变换电路方面提供的帮助。本研究获得了

奥地利科学基金（FWF）通过 START 资助项目 Y1067-N27 和 I 6011 的支持。本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF）SFB BeyondC 项目 F7108-N38 资助。为实现开放获取，作者已对因本次投稿产生的任何作者接收稿版本申请采用 CC BY 公共版权许可。本项目在 Quan- tERA II 计划框架内获得资助，该计划获得了欧盟“地平线 2020”研究与创新计划的资助，资助协议编号为 101017733。

附录 A：量子傅里叶变换和量子近似优化算法的量子电路

1. 标准门模型

量子傅里叶变换（QFT）是 Shor 整数分解算法中的关键组成部分 [1]，因此也是量子计算机的典型应用。虽然 QFT 的典型电路表示仅包含哈达玛门、 H和受控相位门， $R_n = \mathrm{diag}\{1,1,1,\exp\{2\pi \mathrm{i}/2^n\}\}$但也可以利用 SWAP 门构造一种更高效的表示方式，从而减少量子门数量并降低电路深度 [45]。

量子近似优化算法（QAOA）旨在为组合优化问题 [4] 寻找近似解。例如，我们考虑寻找 N 量子比特自旋玻璃哈密顿量的基态这一任务

$$\mathsf{H}_\mathrm{z} = \sum_{\substack{n,m=1\\ n<m}}^{N} J_{nm}\sigma_\mathrm{z}^{(n)}\sigma_\mathrm{z}^{(m)}, \tag{A1}$$

其中 J_{nm} 表示量子比特之间的相互作用强度 n， m 和 $\sigma_\mathrm{z}^{(i)}$分别表示量子比特上的泡利 Z 算符 i。通过应用以下过程，QAOA 可以为哈密顿量（A1）找到一个近似解，即近似基态

$$|\psi_\mathrm{out}\rangle = \prod_{k=1}^{p} e^{-\mathrm{i}\alpha_k \mathsf{H}_\mathrm{x}} e^{-\mathrm{i}\beta_k \mathsf{H}_\mathrm{z}} |\psi_\mathrm{in}\rangle, \qquad \mathsf{H}_\mathrm{x} = \sum_{n=1}^{N} \sigma_\mathrm{x}^{(n)}, \tag{A2}$$

其中， $|\psi_\mathrm{in}$ 是所谓混合哈密顿量 H_x 的基态，而 α_k, $\beta_k \in [0, 2\pi)$ 是角度——物理上对应于演化时间——通过经典闭环反馈优化迭代优化得到，且 $|\psi_\mathrm{out}$ 的能量期望值是需要最小化的目标。步骤数记为 p。因此，QAOA 中的单个步骤是先施加自旋玻璃或问题哈密顿量 H_z ，再施加混合哈密顿量 H_x。后者对应于并行施加一组依赖于 α_k 的单量子比特 X 旋转 R_x^k，在相应的量子电路中几乎不占用时间；而前者的电路实现则需要多个受控非门以及单量子比特相位门，R_z^{nm} =exp{–i $\beta_k J_{nm}\sigma_\mathrm{z}$}，其中包含关于$J_{nm}$ 和 β_k的信息。

2. 奇偶映射

在 SGM 中，如附录 A1所述，每个逻辑量子比特都恰好对应一个物理量子比特，逻辑量子比特上的量子门等同于物理量子比特上的量子门。PM 则不同，其中 $K > N$ 对于一个包含 N 个逻辑量子比特的问题，需要使用物理量子比特；逻辑量子比特上的量子门会变成物理量子比特上的不同量子门，甚至量子门序列。然而，由于 PM 中物理量子比特的排列方式，物理量子比特之间的所有量子门都严格局域，因此只需要最近邻连接。

对于量子傅里叶变换，奇偶映射中需要 $K = N(N+1)/2$ 个物理量子比特。我们发现，逻辑量子比特上的哈达玛门 H 等价于相邻物理量子比特上的若干个单量子比特门和双量子比特门。相比之下，任意一对逻辑量子比特之间的逻辑双量子比特受控相位门 R_n，恰好由物理量子比特 [26, 49] 上三个并行的单量子比特门实现。因此，虽然奇偶映射中的逻辑哈达玛门需要更多资源，但逻辑受控相位门所需的资源显著更少——尤其是对于逻辑量子比特彼此相距较远的那些门。

对于量子近似优化算法，我们需要 $K = N(N-1)/2$ 个奇偶映射中的物理量子比特，且公式 (A2) 变为 [29]

$$|\psi_\mathrm{out}\rangle = \prod_{k=1}^{p} e^{-\mathrm{i}\alpha_k \mathsf{H}_\mathrm{x}^\mathrm{phys}} e^{-\mathrm{i}\beta_k \mathsf{H}_\mathrm{z}^\mathrm{phys}} e^{-\mathrm{i}\gamma_k \mathsf{H}_\mathrm{c}} |\psi_\mathrm{in}\rangle, \tag{A3}$$

其中

$$\mathsf{H}_\mathrm{x}^\mathrm{phys} = \sum_{k=1}^{K} \tilde{\sigma}_\mathrm{x}^{(k)}, \qquad \mathsf{H}_\mathrm{z}^\mathrm{phys} = \sum_{k=1}^{K} \tilde{J}_k \tilde{\sigma}_\mathrm{z}^{(k)} \tag{A4}$$

分别是奇偶映射中的修正混合哈密顿量和自旋玻璃哈密顿量~。局域场强 J_k 遍历 $N(N-1)/2$ 相互作用 J_{nm}，参见公式（A1），而$\tilde{\sigma}_\mathrm{z}^{(k)}$则编码了相应双量子比特相互作用的奇偶性 $\sigma_\mathrm{z}^{(n)}\sigma_\mathrm{z}^{(m)}$ [27]。为了使用奇偶映射求解优化问题，我们还需要将动力学约束在 2^{N-1} 维数子空间内，该子空间位于 2^K 维物理希尔伯特空间中，对应于公式（A1）中具有非简并本征值的 [98]本征态$_\mathrm{z}^\mathrm{phys}$。因此，由于并非$\mathsf{H}_\mathrm{z}^\mathrm{phys}$的每个本征态$\mathsf{H}_\mathrm{z}$在 $C = K - N + 1$ 中都有逻辑对应态，因此必须对这些状态施加能量惩罚，因为它们并非优化问题的有效解。这通过实现局域三量子比特和四量子比特约束来完成，具体方式是利用 [27]

$$\mathsf{H}_\mathrm{c} = \sum_{c=1}^{C} \tilde{\sigma}_\mathrm{z}^{(k_1)}\tilde{\sigma}_\mathrm{z}^{(k_2)}\tilde{\sigma}_\mathrm{z}^{(k_3)}\left(\tilde{\sigma}_\mathrm{z}^{(k_4)}\right), \tag{A5}$$

其中“局域”是指 k_1、……、 k_4 为最近邻物理量子比特。对于式（A3）中的每个量子近似优化算法步骤，这要求使用 C 形式的约束门（忽略波浪号和下标）

$$\mathrm{ZZZ}(\gamma) = \exp\{-\mathrm{i}\gamma\sigma_\mathrm{z}\sigma_\mathrm{z}\sigma_\mathrm{z}\}, \tag{A6a}$$
$$\mathrm{ZZZZ}(\gamma) = \exp\{-\mathrm{i}\gamma\sigma_\mathrm{z}\sigma_\mathrm{z}\sigma_\mathrm{z}\sigma_\mathrm{z}\} \tag{A6b}$$

其中 γ 为有效约束强度；与式（A2）中的原始量子近似优化算法方案一样，它们通过经典闭环反馈优化进行优化。式（A6）中的量子门既可以直接实现 [66]，也可以将其分解为单量子比特门和双量子比特门，例如，对于 ZZZ，可使用四个或六个 CNOT 门，再加上一个依赖于 γ的单量子比特相位门（γ），或对于 ZZZZ，（γ），分别如此实现 [29]。

需要注意的是，约束门是式（A3）中唯一的多量子比特门。无论 N 如何，对于中性原子或超导电路，其实现都可以分别并行化为至多九 [66] 层或四 [29] 个连续的约束门层。不过，请注意，目前或许已经可以实现更浅的电路 [99]。这两个平台之间的差异源于量子比特之间不同的耦合机制。超导电路的可调耦合器架构 [8]允许关闭任意一对量子比特之间的耦合。因此，所有不共享同一个量子比特的约束晶格面（即次近邻晶格面）都可以并行实现。因而，单个量子近似优化算法步骤至多需要四层约束门，即可实现所有这些晶格面。相比之下，中性原子通过其里德堡能级相互作用，因此需要在处于里德堡能级但不应相互作用的原子之间留出额外的空间分离，以抑制不必要的相互作用。假设一行处于非里德堡能级的原子足以作为并行实现的晶格面之间的缓冲区，这就相当于将小方格作为缓冲区，沿每个空间方向设置为两行。这使约束门的最大层数达到九层。尽管平台之间存在差异，所有与式（A3）对应的量子电路都具有恒定的电路深度。

附录 B：用于量子最优控制的 Krotov 方法

Krotov 方法 [90] 是一种针对连续时间控制场的迭代式基于梯度的优化算法，具有内置的单调收敛特性 [82]。为实现这一特性，Krotov 方法要求对总优化泛函 J作出特定选择，参见式（8）。具体而言，尽管终止时刻的误差度量 ε_T 仍然是我们希望最小化的相关品质因数，T Krotov 方法仅通过最小化总泛函间接实现其最小化 J，其中随时间变化的运行代价 J_t 由以下公式给出 [79]

$$J_t\left[\{\psi_l(t)\},\{\mathcal{E}_k(t)\},t\right]=\sum_k \frac{\lambda_k}{S_k(t)}\left(\mathcal{E}_k(t)-\mathcal{E}_k^{\mathrm{ref}}(t)\right)^2, \tag{B1}$$

其中 $\mathcal{E}_k^{\mathrm{ref}}(t)$ 是待优化控制场$\mathcal{E}_k(t)$的参考场，$S_k(t)\in(0,1]$ 是形状函数，$\lambda_k>0$ 是一个数值参数。采用式（B1）后，场 $\mathcal{E}_k(t)$ 的更新方程 [82]

$$\mathcal{E}_k^{(i+1)}(t)=\mathcal{E}_k^{\mathrm{ref}}(t)+\frac{S_k(t)}{\lambda_k}\mathfrak{Im}\left\{\sum_l\left\langle\chi_l^{(i)}(t)\middle|\frac{\partial \mathsf{H}\left[\{\mathcal{E}_{k'}\}\right]}{\partial\mathcal{E}_k}\Big|_{\{\mathcal{E}_{k'}^{(i+1)}(t)\}}\middle|\psi_l^{(i+1)}(t)\right\rangle\right\}, \tag{B2}$$

其中，$|\psi_l^{(i+1)}(t)\rangle$ 是向前传播的态，也是薛定谔方程的解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi_l^{(i+1)}\right\rangle(t)=-\mathrm{i}\mathsf{H}^{(i+1)}(t)\left|\psi_l^{(i+1)}(t)\right\rangle \tag{B3a}$$

其边界条件由初始态给出

$$\left|\psi_l^{(i+1)}(0)\right\rangle=|\psi_l(0)\rangle\,. \tag{B3b}$$

相比之下，$|\chi_l^{(i)}(t)\rangle$ 是向后传播的伴随态，也是方程的解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\chi_l^{(i)}(t)\right\rangle=\mathrm{i}\mathsf{H}^{(i)}(t)\left|\chi_l^{(i)}(t)\right\rangle \tag{B4a}$$

具有边界条件

$$\left|\chi_l^{(i)}(T)\right\rangle=-\frac{\partial\varepsilon_T}{\partial\langle\psi_l|}\Big|_{\left\{\Psi_l^{(i)}(T)\right\}}. \tag{B4b}$$

上标 i 和 $i+1$ 在方程（B2）-（B4）中表示相应的量是分别使用第 i 次迭代的“旧”场还是第 $i+1$次迭代的更新场计算的。

为了将方程（B2）转化为恰当的更新方程，参考场 $\mathcal{E}_k^{\mathrm{ref}}(t)$ 取为$\mathcal{E}_k^{(i)}(t)$ 在前一次迭代中的场，此时方程（B2）左侧的第二项即成为其更新量。这一选择使得随着迭代过程收敛，时变代价 J_t（参见方程（B1））逐渐趋于零。因此，终止时刻的误差度量 ε_T 在最终时刻T 成为总优化泛函中的主导项 J（参见方程（8）），因而主要被最小化。方程（B2）还表明，虽然 λ_k 可用于控制更新量的总体大小，$S_k(t)$则可用于抑制特定时刻的更新。

关于 Krotov 方法的详细介绍，请参阅参考文献 [82]；关于其数值实现的详细讨论，请参阅参考文献 [85]。

附录 C：场生成与参数化

在本附录中，我们说明了第 IVC 节所述方法的一些技术细节。

我们通过公式 [100]生成随机但平滑的初始猜测场

$$f(t) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{m}\left[a_j \cos\left(\frac{2\pi jt}{t_1 - t_0}\right) + b_j \sin\left(\frac{2\pi jt}{t_1 - t_0}\right)\right] \tag{C1}$$

其中， a_0， a_j， b_j 从正态分布 $N(\mu, \sigma)$ 中随机选取，其中心为 $\mu = 0$，方差为 $\sigma = 1/(2m+1)$。因此，整数 m 不仅决定了 $f(t)$ 中频率分量的数量，也决定了各分量的频率。由于我们认为与哈密顿量中包含的频率处于相同时间尺度的频率更有助于找到解，因此我们从与各哈密顿量频率相匹配的区间中随机选取 m 。

除了生成随机初始猜测场之外，我们还指定场的内部参数化。为此，请注意，方程 (1) 或 (5) 中的某些物理或辅助控制场在实验上受到范围限制，即存在优化算法不得违反的上下限。令 $\mathcal{E}_{\min} \le \mathcal{E}(t) \le \mathcal{E}_{\max}$ 有界。为了将 $\mathcal{E}(t)$ 限制在其界限内，并避免违反界限时进行手动截断，我们在内部通过以下方式对$\mathcal{E}(t)$进行参数化

$$u(t) = \operatorname{arctanh}\left(\frac{2\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}\right), \tag{C2a}$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{2}\tanh\left(u(t)\right) + \frac{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}}{2}. \tag{C2b}$$

辅助场 $-\infty < u(t) < \infty$ 是实际优化过程中所优化的场，并且可以进行无限制优化，因为根据构造方式，它永远不会违反其所编码的实际场 $E(t)$ 的边界。

[1] P. W. Shor，量子计算机上的素数因数分解和离散对数的多项式时间算法，SIAM J. Comput. 26, 1484（1997年）。[2] A. J. Daley、I. Bloch、C. Kokail、S. Flannigan、N. Pearson、M. Troyer 和 P. Zoller，量子模拟中的实用量子优势，Nature 607, 667（2022年）。[3] Y. Cao、J. Romero、J. P. Olson、M. Degroote、P. D. Johnson、M. Kieferov´a、I. D. Kivlichan、T. Menke、B. Peropadre、N. P. D. Sawaya、S. Sim、L. Veis 和 A. Aspuru-Guzik，量子计算时代的量子化学，Chem. Rev. 119, 10856（2019年）。[4] E. Farhi、J. Goldstone 和 S. Gutmann，一种量子近似优化算法，arXiv:1411.4028（2014年）。[5] R. Or´us、S. Mugel 和 E. Lizaso，面向金融的量子计算：概述与展望，Rev. Phys. 4, 100028 2019( )。[6] J. Preskill，含噪声中等规模量子时代及其未来的量子计算，Quantum 2, 79（2018年）。[7] B. M. Terhal，量子存储器的量子纠错，Rev. Mod. Phys. 87, 307（2015年）。[8] F. Arute *et al.*，利用可编程超导处理器实现量子霸权，Nature 574, 505（2019年）。[9] Y. Wu *et al.*，利用超导量子处理器实现强量子计算优势，Phys. Rev. Lett. 127, 180501（2021年）。[10] H.-S. Zhong、Y.-H. Deng、M.-C. Chen、L.-C. Peng、Y.-H. Luo、J. Qin、D. Wu、X. Ding、Y. Hu、P. Hu、X.-Y. Yang、W.-J. Zhang、H. Li、Y. Li、X. Jiang、L. Gan、G. Yang、L. You、Z. Wang、L. Li、N.-L. Liu、C.-Y. Lu 和 J.-W. Pan，利用光子实现量子计算优势，Science 370, 1460（2020年）。[11] H.-S. Zhong、Y.-H. Deng、J. Qin、H. Wang、M.-C. Chen、L.-C. Peng、Y.-H. Luo、D. Wu、S.-Q. Gong、H. Su、Y. Hu、P. Hu、X.-Y. Yang、W.-J. Zhang、H. Li、Y. Li、X. Jiang、L. Gan、G. Yang、L. You、Z. Wang、L. Li、N.-L. Liu、J. J. Renema、C.-Y. Lu 和 J.-W. Pan，《使用受激压缩光的相位可编程高斯玻色采样》，Phys. Rev. Lett. 127, 180502 (2021)。[12] M. Amy、D. Maslov 和 M. Mosca，《通过拟阵划分实现 Clifford+t 电路的多项式时间 t 深度优化》，IEEE TCAD 33, 1476 (2014)。[13] L. E. Heyfron 和 E. T. Campbell，《一种可减少 t 计数的高效量子编译器》，量子科学与技术 4, 015004 (2018)。[14] K. Mitarai、M. Negoro、M. Kitagawa 和 K. Fujii，《量子电路学习》，物理评论 A 98, 032309 (2018)。[15] T. F¨osel、M. Y. Niu、F. Marquardt 和 L. Li，《基于深度强化学习的量子电路优化》，arXiv:2103.07585 (2021)。[16] S. Sivarajah、S. Dilkes、A. Cowtan、W. Simmons、A. Edgington 和 R. Duncan，t|ket：面向含噪声中等规模量子设备的可重定向编译器，量子科学与技术 6, 014003 2020( )。[17] A. Kissinger 和 J. van de Wetering，《减少量子电路中的非 Clifford 门数量》，物理评论 A 102, 022406 (2020)。[18] H. Nagarajan、O. Lockwood 和 C. Coffrin，《Quantum-circuitopt：用于可证明最优量子电路设计的开源框架》，arXiv:2111.11674 (2021)。[19] D. Jaksch、J. I. Cirac、P. Zoller、S. L. Rolston、R. Cˆot´e 和 M. D. Lukin，《中性原子的快速量子门》，Phys. Rev. Lett. 85, 2208 (2000)。[20] H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、A. Omran、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、M. Greiner、V. Vuleti´c、H. Pichler 和 M. D. Lukin，《中性原子高保真多量子比特门的并行实现》，Phys. Rev. Lett. 123, 170503 (2019)。[21] F. Motzoi、J. M. Gambetta、P. Rebentrost 和 F. K. Wilhelm，《用于抑制弱非线性量子比特泄漏的简单脉冲》，Phys. Rev. Lett. 103, 110501

(2009)。[22]J. J. Garc´ıa-Ripoll、P. Zoller 和 J. I. Cirac, 《面向离子阱量子计算的激光相干控制技术与速度优化双量子比特门》, Phys. Rev. Lett. 91, 157901 (2003)。[23] V. M. Sch¨afer、C. J. Ballance、K. Thirumalai、L. J. Stephenson、T. G. Ballance、A. M. Steane 和 D. M. Lucas, 《囚禁离子量子比特的快速量子逻辑门》, Nature 555, 75 (2018)。[24] S. Deffner 和 S. Campbell, 《量子速度极限：从海森堡不确定性原理到量子最优控制》, 《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》 50, 453001 (2017)。[25] 由于二维架构的限制，本研究不考虑囚禁离子平台。[26] M. Fellner、A. Messinger、K. Ender 和 W. Lechner, 《通用奇偶量子计算》, Phys. Rev. Lett. 129, 180503 (2022)。[27] W. Lechner、P. Hauke 和 P. Zoller, 《一种通过局域相互作用实现全对全连接的量子退火架构》, Sci. Adv. 1, e1500838 (2015)。[28] K. Ender、R. ter Hoeven、B. E. Niehoff、M. Drieb-Sch¨on 和 W. Lechner, 《奇偶量子优化：编译器》, Quantum 7, 950 (2023)。[29] W. Lechner, 《利用可并行化门进行量子近似优化》, IEEE Trans. Quantum Eng. 1, 1 (2020)。[30] K. Ender、A. Messinger、M. Fellner、C. Dlaska 和 W. Lechner, 《模块化奇偶量子近似优化》, PRX Quantum 3, 030304 (2022)。[31] A. Pagano、S. Weber、D. Jaschke、T. Pfau、F. Meinert、S. Montangero 和 H. P. B¨uchler, 《锶-88里德堡原子受控相位门的误差预算》, 《Physical Review Research》4, 033019 (2022)。[32] G. Pelegr´ı、A. J. Daley 和 J. D. Pritchard, 《通过双光子绝热快速通过实现高保真度里德堡多量子比特门》, 量子科学与技术 7, 045020 (2022)。[33] S. Jandura 和 G. Pupillo, 《里德堡原子的时间最优双量子比特门和三量子比特门》, Quantum 6, 712 (2022)。[34] J. Kelly、R. Barends、B. Campbell、Y. Chen、Z. Chen、B. Chiaro、A. Dunsworth、A. G. Fowler、I.-C. Hoi、E. Jeffrey、A. Megrant、J. Mutus、C. Neill、P. J. J. O'Malley、C. Quintana、P. Roushan、D. Sank、A. Vainsencher、J. Wenner、T. C. White、A. N. Cleland 和 J. M. Martinis, 《使用随机化基准测试进行量子最优控制》, Phys. Rev. Lett. 112, 240504 (2014)。[35] M. H. Goerz、F. Motzoi、K. B. Whaley 和 C. P. Koch, 《利用最优控制理论描绘电路量子电动力学设计空间》, npj Quantum Inf. 3, 37 (2017)。[36] M. Werninghaus、D. J. Egger、F. Roy、S. Machnes、F. K. Wilhelm 和 S. Filipp, 《通过量子最优控制抑制快速超导量子比特门中的泄漏》, npj Quan- tum Inf. 7, 14 (2021)。[37]Google Quantum AI, 《量子计算机数据表》, www.quantumai.google/hardware/datasheet/weber.pdf (2021), 访问时间：2022年11月。[38] A. Barenco、C. H. Bennett、R. Cleve、D. P. DiVincenzo、N. Margolus、P. Shor、T. Sleator、J. A. Smolin 和 H. Weinfurter, 《量子计算的基本门》, 物理评论 A 52, 3457 (1995)。[39] D. Bluvstein、H. Levine、G. Semeghini、T. T. Wang, S. Ebadi、M. Kalinowski、A. Keesling、N. Maskara、H. Pichler、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin, 《基于纠缠原子阵列相干输运的量子处理器》, Nature 604, 451（2022年）。[40] T. M. Graham、Y. Song、J. Scott、C. Poole、L. Phut- titarn、K. Jooya、P. Eichler、X. Jiang、A. Marra、B. Grinkemeyer、M. Kwon、M. Ebert、J. Cherek、M. T. Lichtman、M. Gillette、J. Gilbert、D. Bowman、T. Ballance、C. Campbell、E. D. Dahl、O. Crawford、N. S. Blunt、B. Rogers、T. Noel 和 M. Saffman, 《中性原子量子计算机上的多量子比特纠缠与算法》, Nature 604, 457（2022年）。[41] 请注意，实际应用中，门集通常会针对相应的量子算法进行调整。不过，这超出了本研究的范围。[42] 假设量子比特编码在原子基态流形中，例如超精细态。[43] 请注意，我们未考虑量子比特态与里德堡态之间中间能级的寿命。[44] C. Wang、X. Li、H. Xu、Z. Li、J. Wang、Z. Yang、Z. Mi、X. Liang、T. Su、C. Yang、G. Wang、W. Wang、Y. Li、M. Chen、C. Li、K. Linghu、J. Han、Y. Zhang、Y. Feng、Y. Song、T. Ma、J. Zhang、R. Wang、P. Zhao、W. Liu、G. Xue、Y. Jin 和 H. Yu, 《迈向实用量子计算机：寿命接近 0.5 毫秒的跨蒙量子比特》, npj Quantum Inf. 8, 3（2022年）。[45] A. Holmes、S. Johri、G. G. Guerreschi、J. S. Clarke 和 A. Y. Matsuura, 《量子比特连通性对量子算法性能的影响》, 量子科学与技术 5, 025009（2020年）。[46] M. P. Harrigan *et al.*, 《在平面超导处理器上对非平面图问题进行量子近似优化》, Nat. Phys. 17, 332（2021年）。[47] K. Barnes、P. Battaglino、B. J. Bloom、K. Cassella、R. Coxe、N. Crisosto、J. P. King、S. S. Kondov、K. Kotru、S. C. Larsen、J. Lauigan、B. J. Lester、M. McDonald、E. Megidish、S. Narayanaswami、C. Nishiguchi、R. Notermans、L. S. Peng、A. Ryou、T.-Y. Wu 和 M. Yarwood, 《核自旋量子比特寄存器的组装与相干控制》, Nat. Commun. 13, 2779（2022年）。[48] IBM Quantum, 《IBM量子路线图》, www.ibm.com/ quantum/roadmap（2022年）, 访问时间：2022年11月。[49] M. Fellner、A. Messinger、K. Ender 和 W. Lechner, 《通用奇偶量子计算的应用》, 物理评论 A 106, 042442（2022年）。[50]请注意，此处的说法未涵盖文献 [101]所述的其他提升 PM-QAOA 性能的策略。[51] M. Saffman, 《利用原子量子比特和里德伯相互作用进行量子计算：进展与挑战》, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 49, 202001（2016年）。[52] L. Henriet、L. Beguin、A. Signoles、T. Lahaye、A. Browaeys、G.-O. Reymond 和 C. Jurczak, 《利用中性原子进行量子计算》, Quantum 4, 327（2020年）。[53] A. Browaeys 和 T. Lahaye, 《利用单独操控的里德堡原子研究多体物理》, Nat. Phys. 16, 132（2020年）。[54] D. Schrader、I. Dotsenko、M. Khudaverdyan、Y. Miroshnychenko、A. Rauschenbeutel 和 D. Meschede, 《中性原子量子寄存器》, Phys. Rev. Lett. 93, 150501（2004年）。[55] D. D. Yavuz、P. B. Kulatunga、E. Urban、T. A. Johnson,

N. Proite、T. Henage、T. G. Walker 和 M. Saffman，《微观光阱中中性原子的快速基态操控》，Phys. Rev. Lett. 96，063001（2006年）。[56] T. Xia、M. Lichtman、K. Maller、A. W. Carr、M. J. Piotrowicz、L. Isenhower 和 M. Saffman，《中性原子量子比特二维阵列中单量子比特门的随机基准测试》，Phys. Rev. Lett. 114，100503（2015年）。[57] Y. Wang、X. Zhang、T. A. Corcovilos、A. Kumar 和 D. S. Weiss，《三维中性原子光晶格中对单个中性原子的相干寻址》，Phys. Rev. Lett. 115，043003（2015年）。[58] Y. Wang、A. Kumar、T.-Y. Wu 和 D. S. Weiss，《基于定向相移的三维中性原子阵列单量子比特门》，Science 352，1562（2016年）。[59] D. Jaksch、J. I. Cirac、P. Zoller、S. L. Rolston、R. Cˆot´e 和 M. D. Lukin，《中性原子的快速量子门》，Phys. Rev. Lett. 85，2208（2000年）。[60] M. D. Lukin、M. Fleischhauer、R. Cote、L. M. Duan、D. Jaksch、J. I. Cirac 和 P. Zoller，《介观原子系综中的偶极阻塞与量子信息处理》，Phys. Rev. Lett. 87，037901（2001年）。[61] K. M. Maller、M. T. Lichtman、T. Xia、Y. Sun、M. J. Piotrowicz、A. W. Carr、L. Isenhower 和 M. Saffman，《中性原子量子比特二维阵列中的里德堡阻塞受控非门与纠缠》，Phys. Rev. A 92，022336（2015年）。[62] Y.-Y. Jau、A. M. Hankin、T. Keating、I. H. Deutsch 和 G. W. Biedermann，《利用里德堡缀饰自旋翻转阻塞纠缠原子自旋》，Nat. Phys. 12，71（2015年）。[63] H. Levine、A. Keesling、A. Omran、H. Bernien、S. Schwartz、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《里德堡原子量子比特的高保真控制与纠缠》，Phys. Rev. Lett. 121，123603（2018年）。[64] T. M. Graham、M. Kwon、B. Grinkemeyer、Z. Marra、X. Jiang、M. T. Lichtman、Y. Sun、M. Ebert 和 M. Saffman，《二维中性原子量子比特阵列中的里德堡介导纠缠》，Phys. Rev. Lett. 123，230501（2019年）。[65] 实际应用中，量子比特态与里德堡能级之间的耦合通常通过双光子过程和一个中间能级实现，[93]，为简化起见，我们忽略该中间能级。[66] C. Dlaska、K. Ender、G. B. Mbeng、A. Kruckenhauser、W. Lechner 和 R. van Bijnen，《通过四体里德堡门实现量子优化》，Phys. Rev. Lett. 128，120503（2022年）。[67] M. Kjaergaard、M. E. Schwartz、J. Braum¨uller、P. Krantz、J. I.-J. Wang、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver，《超导量子比特：现状》，Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 11，369（2020年）。[68] J. Koch、T. M. Yu、J. Gambetta、A. A. Houck、D. I. Schuster、J. Majer、A. Blais、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf，《源自库珀对盒的电荷不敏感量子比特设计》，Phys. Rev. A 76，042319（2007年）。[69] S. Gustavsson、O. Zwier、J. Bylander、F. Yan、F. Yoshi- hara、Y. Nakamura、T. P. Orlando 和 W. D. Oliver，《利用量子比特测量微波脉冲失真以提高量子门保真度》，Phys. Rev. Lett. 110，040502（2013年）。[70] M. A. Rol、C. C. Bultink、T. E. O'Brien、S. R. de Jong、L. S. Theis、X. Fu、F. Luthi、R. F. L. Vermeulen、J. C. de Sterke、A. Bruno、D. Deurloo、R. N. Schouten、F. K. Wilhelm 和 L. DiCarlo，《高保真量子比特门的连续调校》，《Physical Review Applied》7，041001（2017年）。[71] R. Barends、J. Kelly、A. Megrant、A. Veitia、D. Sank、E. Jeffrey、T. C. White、J. Mutus、A. G. Fowler、B. Ca mpbell、Y. Chen、Z. Chen、B. Chiaro、A. Dunsworth、C. Neill、P. O'Malley、P. Roushan、A. Vainsencher、J. Wenner、A. N. Korotkov、A. N. Cleland 和 J. M. Martinis，《在表面码容错阈值下实现超导量子电路》，Nature 508，500（2014年）。[72] Y. Sung、L. Ding、J. Braum¨uller、A. Veps¨al¨ainen、B. Kannan、M. Kjaergaard、A. Greene、G. O. Samach、C. McNally、D. Kim、A. Melville、B. M. Niedzielski、M. E. Schwartz、J. L. Yoder、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver，《利用可调耦合器实现高保真 CZ 门和 zz自由 iSWAP 门》，Physical Review X 11，021058（2021年）。[73] J. Majer、J. M. Chow、J. M. Gambetta、J. Koch、B. R. Johnson、J. A. Schreier、L. Frunzio、D. I. Schuster、A. A. Houck、A. Wallraff、A. Blais、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf，《通过腔总线耦合超导量子比特》，Nature 449，443（2007年）。[74] Y. Chen、C. Neill、P. Roushan、N. Leung、M. Fang、R. Barends、J. Kelly、B. Campbell、Z. Chen、B. Chiaro、A. Dunsworth、E. Jeffrey、A. Megrant、J. Y. Mutus、P. J. J. O'Malley、C. M. Quintana、D. Sank、A. Vainsencher、J. Wenner、T. C. White、M. R. Geller、A. N. Cleland 和 J. M. Martinis，《兼具高相干性和快速可调耦合的量子比特架构》，Phys. Rev. Lett. 113，220502（2014年）。[75] U. Boscain、M. Sigalotti 和 D. Sugny，《量子最优控制的庞特里亚金极大值原理导论》，PRX Quantum 2，030203（2021年）。[76] K. Svozil、L. B. Levitin、T. Toffoli 和 Z. Walton，《量子门操作的最大速度》，Int. J. Theor. Phys. 44，965（2005年）。[77] T. Caneva、M. Murphy、T. Calarco、R. Fazio、S. Montangero、V. Giovannetti 和 G. E. Santoro，《在量子速度极限下进行最优控制》，Phys. Rev. Lett. 103，240501（2009年）。[78] C. P. Koch、U. Boscain、T. Calarco、G. Dirr、S. Filipp、S. J. Glaser、R. Kosloff、S. Montangero、T. Schulte-Herbr¨uggen、D. Sugny 和 F. K. Wilhelm，《量子技术中的量子最优控制：关于欧洲研究现状、愿景和目标的战略报告》，EPJ Quantum Technology 9，19（2022年）。[79] J. P. Palao 和 R. Kosloff，《幺正变换的最优控制理论》，物理评论 A 68，062308（2003年）。[80] N. Khaneja、T. Reiss、C. Kehlet、T. Schulte-Herbr¨uggen 和 S. J. Glaser，《耦合自旋动力学的最优控制：利用梯度上升算法设计核磁共振脉冲序列》，Journal of Magnetic Resonance 172，296（2005年）。[81] T. Caneva、T. Calarco 和 S. Montangero，《分段随机基量子优化》，物理评论 A 84，022326 2011（）。[82] D. M. Reich、M. Ndong 和 C. P. Koch，《利用 Krotov 方法实现量子控制中的单调收敛优化》，The Journal of Chemical Physics 136，104103（2012年）。

[83] J. J. W. H. Sørensen、M. O. Aranburu、T. Heinzel 和 J. F. Sherson，《截断基中的量子最优控制：在玻色–爱因斯坦凝聚体控制中的应用》，物理评论 A 98，022119（2018年）。[84] S. Machnes、E. Ass´emat、D. Tannor 和 F. K. Wilhelm，《面向实用量子比特的可调、灵活且高效的控制脉冲优化》，Phys. Rev. Lett. 120，150401（2018年）。[85] M. H. Goerz、D. Basilewitsch、F. Gago-Encinas、M. G. Krauss、K. P. Horn、D. M. Reich 和 C. P. Koch，《Krotov：一种用于量子最优控制的 Krotov 方法 Python 实现》，SciPost Phys. 7，80（2019年）。[86] N. Wittler、F. Roy、K. Pack、M. Werninghaus、A. S. Roy、D. J. Egger、S. Filipp、F. K. Wilhelm 和 S. Machnes，《用于量子器件控制、校准和表征的一体化工具集及其在超导量子比特中的应用》，《Physical Review Applied》15，034080（2021年）。[87] M. H. Goerz、S. C. Carrasco 和 V. S. Malinovsky，《通过半自动微分实现量子最优控制》，Quantum 6，871（2022年）。[88] J. D. Teske、P. Cerfontaine 和 H. Bluhm，《qopt：一种面向实验的量子比特模拟与量子最优控制软件包》，《Physical Revie w Applied》17，034036 2022（）。[89] M. Rossignolo、T. Reisser、A. Marshall、P. Rembold、A. Pagano、P. J. Vetter、R. S. Said、M. M. M¨uller、F. Motzoi、T. Calarco、F. Jelezko 和 S. Montangero，《QuOCS：量子最优控制套件》，arXiv:2212.11144（2022年）。[90] A. I. Konnov 和 V. F. Krotov，《受控过程逐步改进的全局方法》，Autom. Rem. Contr. 60，1427（1999年）。[91] I. Brouzos、A. I. Streltsov、A. Negretti、R. S. Said、T. Caneva、S. Montangero 和 T. Calarco，《多玻色子动力学的量子速度极限与最优控制》，物理评论 A 92，062110（2015年）。[92] D. Basilewitsch、J. Fischer、D. M. Reich、D. Sugny 和 C. P. Koch，《量子比特重置的基本界限》，《Physical Review Research》3, 013110（2021年）。[93] H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Om- ran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuleti´c, and M. D. Lukin，《在51原子量子模拟器上探测多体动力学》，Nature 551, 579（2017年）。[94] T. Linowski, G. Rajchel-Mieldzio´c, and K. ˙Zyczkowski，《多体酉门的纠缠能力》，《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》53, 125303（2020年）。[95] D. Barredo, V. Lienhard, S. de L´es´eleuc, T. Lahaye, and A. Browaeys，《逐个原子组装的合成三维原子结构》，Nature 561, 79（2018年）。[96] Y. Xu, J. Chu, J. Yuan, J. Qiu, Y. Zhou, L. Zhang, X. Tan, Y. Yu, S. Liu, J. Li, F. Yan, and D. Yu，《面向超导量子比特的高保真度、高可扩展性双量子比特门方案》，Phys. Rev. Lett. 125, 240503（2020年）。[97] X. Li, T. Cai, H. Yan, Z. Wang, X. Pan, Y. Ma, W. Cai, J. Han, Z. Hua, X. Han, Y. Wu, H. Zhang, H. Wang, Y. Song, L. Duan, and L. Sun，《用于在超导电路中实现具有动态解耦工作模式的受控相位门的可调耦合器》，《Physical Review Applied》14, 024070（2020年）。[98] 注意，由于全局自旋翻转对称性，式（A1）的每个本征态至少出现两次。[99] J. Unger, A. Messinger, B. E. Niehoff, M. Fellner, and W. Lechner，《量子优化中奇偶约束的低深度电路实现》，arXiv:2211.11287（2022年）。[100] S. Filip, A. Javeed, and L. N. Trefethen，《光滑随机函数、随机常微分方程与高斯过程》，《SIAM Review》61, 185（2019年）。[101] A. Weidinger, G. B. Mbeng, and W. Lechner，《量子近似优化的误差缓解》，arXiv:2301.05042（2023年）。