arXiv:2304.01758v1 [physics.comp-ph] 4 Apr 2023

基于φ-散度的三维辐射传输方程矩方法

M.R.A. Abdelmalik*、Z. Cai† 和 T. Pichard‡

2023年4月5日

摘要

矩方法广泛用于将动力学方程约化为流体模型。该方法通过对速度变量取动力学方程的矩来实现，但所得方程组先验欠定，因此需要闭合关系。本文将近期为稀薄气体提出的基于 φ-散度的闭合方法应用于辐射传输方程；在前者中，速度变量描述 $\mathbb{R}^d$，而在辐射传输方程中，速度描述单位球面 $\mathbb{S}^2$。本文对这种闭合方法进行了分析，并提出了一种计算该闭合的方法。最终，该方法使所得矩方程组具备若干理想性质：与熵最小化闭合(M_N)类似，它能够耗散熵，并精确捕捉平衡分布。然而，与 M_N不同的是，即使在高阶情形下，该方法在计算上仍然易于处理，并且依赖一种精确的求积公式，可精确保留对称性，因此不会引发射线效应。纯各向异性状态（束流）无法被精确捕捉，但可以任意逼近；即使在这一极限下，闭合方法仍然易于计算。

关键词：辐射传输方程、矩方法、 φ-散度

1 引言

本文旨在构造并分析一种定义在球面上的新型矩闭合关系。该关系用于求解所谓的辐射传输方程（RTE）。这是一种关于辐射强度的动力学方程，常用于描述辐射在介质中的传播。该方程描述的是在速度模固定（即光速）的条件下，沿各个方向进行的输运。方程中还包含一个线性的吸收-发射项，这与玻尔兹曼碰撞项不同。近年来，求解定速输运方程的数值方法不断发展，并已应用于天体物理学（例如 [32, 6]）、放射治疗（例如 [37, 24, 36]）、高温等离子体物理学（例如 [14, 13]）和中子输运等领域。

直接求解此类动力学方程的方法，要么计算成本高昂，例如收敛缓慢的统计方法（直接模拟蒙特卡罗方法；DSMC），或需要大量数据存储的确定性直接方法（离散纵标法； S_N）；要么依赖仅在特定条件下有效的近似，例如基于射线建模（笔形束或光线追踪）或扩散理论的方法。

由于线性，矩方法特别适合用于约化辐射传输方程。它对应于 Petrov-Galerkin近似，即将方程与多项式基函数相乘后积分，并用这些基函数的线性组合函数来近似未知函数。这种技术广泛应用于稀薄气体动力学方程。最常见的矩方法包括

*机械工程系，埃因霍温理工大学，Groene Loper 3，5612 AE 埃因霍温，荷兰

†数学系，新加坡国立大学，10 Lower Kent Ridge Road，新加坡 119076。

‡CMAP，法国国家科学研究中心， ´巴黎综合理工学院，巴黎理工学院，91120，帕莱索，法国

• 离散纵标 S_N 方法可以解释为一种矩方法，其近似函数是在固定位置处的狄拉克 δ 函数之和。为了在所有状态下达到预期精度，通常需要大量位置，也就是说，需要大量自由度。此外，这种技术无法保留解中可能存在的对称性（通常无法捕捉各向同性解），并会产生称为射线效应的伪影。

• 多项式近似 P_N 是指将近似函数选为基函数张成空间中的函数，这是一种常见的伽辽金方法。该技术会得到一个矩方程线性系统，对于这一应用而言，它可能是最容易构造的矩方法。它确实保留了解的对称性（以及各向同性状态），但对纯各向异性状态（即束流）的近似效果较差，而束流在许多应用中都很常见。要在这种状态下获得足够好的近似，唯一的替代方案仍是使用大量的矩，从而抵消计算成本方面的优势。

• 基于熵的矩方法 M_N ([34, 13])是指在可容许解中选取使某种熵最小的解。这种构造方式与稀薄气体领域所采用的方法类似（[30, 21, 44, 19]），并为近似提供了若干理想的数学性质，例如熵耗散和对称双曲结构。然而，使用这种方法需要求解大量无法解析求解的优化问题。即使精确的 M_N近似确实保留了解的对称性，数值计算通常仍需要对其进行近似（高效技术通常见 [18, 4, 3] ），而这最终会破坏对称性。这种闭合也可以在一阶时解析计算（[13]），或近似到二阶（[29, 39, 31, 41]），但高阶多维模型仍无法实现。

• 近期还提出了其他替代方法，且显示出良好的前景，但它们主要是一维方法，几乎无法扩展到多维问题中（[35, 43, 38]）。

构造数值方法时所追求的性质包括较低的计算成本、能够捕捉纯各向异性状态和各向同性状态，尤其是精确保留对称性以及熵耗散。据作者所知，目前尚无一种技术具备所有这些性质。为此，本文设计了一种基于 φ-散度的矩方法（[1, 2]），该方法能够耗散给定的熵，求解所需的计算成本相对较低，并能精确保留解的对称性。它能够精确捕捉纯各向同性状态，并正确近似纯各向异性状态。

下一节将回顾辐射传输方程及其解的一些性质。随后，我们将在一个新的框架下构建矩方法，并构造矩闭合。第4节介绍计算该闭合并求解矩系统的数值方法，接着给出一些数值算例。最后一节总结全文并提出结论。

2 辐射传输方程

本节回顾文献中关于辐射传输方程（RTE）及其解的一些性质。完成矩提取后，下一节也将研究这些性质。RTE 可表示为

$$\partial_t I + \Omega \cdot \nabla_x I = LI := \sigma \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} I \, \mathrm{d}\Omega - I \right) \tag{1a}$$

其中 $\Omega \in \mathbb{S}^2$、$x \in \mathbb{R}^3$ 和 $t \in]0, T[$。未知量 I 为辐射强度，对应于相空间 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$中的能量分布函数。时空经过无量纲化处理，使传播速度为 1；在物理解释中，通常将其设为 c 光速。

由于我们只考虑辐射与背景之间的相互作用，源项是线性的，并选用线性玻尔兹曼算子作为源项，其中截面 $\sigma > 0$ 为简化起见假设为常数。这相当于向各向同性分布弛豫。

系统 (1a) 补充了一个初始

$$I(t=0) = I_0. \tag{1b}$$

动理学层次的边值问题已有充分记载（参见例如 [11]），但将其推广到矩层次仍是一个开放问题，因此本研究将留待未来工作。

首先可以观察到，我们想要求解的问题（1a）是线性的。接着回顾如下结果，例如可见于 [11]。

命题 1. 假设 $\tau > 0$，且初始条件和边界条件

$$I_0 \in L^p(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2) \quad for \quad 1 \le p < \infty$$

为非负数。那么存在唯一的 $I \in C([0,T];\ L^p(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2))$，使其在弱意义下满足（1）。此外，该解为非负数。

[11] 中建议的证明依赖于通过提升来纳入非齐次边界条件的半群理论。下一节中，我们将重点介绍一种更适用于矩方法的变分方法。

我们说明满足方程 (1a) 的解所具备的性质，这些性质将在下一节的矩闭合中加以考虑：

- 能量守恒：与 I 的零阶矩对应的辐射强度随时间保持不变

  $$\partial_t \left(\int_{\mathbb{S}^2} I(\Omega)\, \Omega \right) + \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{S}^2} \Omega I(\Omega)\, \mathrm{d}\Omega \right) = 0.$$

  这是当前情形下唯一的碰撞不变量。

- **En**熵耗散：考虑任意凸标量函数 η，形式上可计算得

  $$\partial_t \left(\int_{\mathbb{S}^2} \eta(I(\Omega))\, \mathrm{d}\Omega \right) + \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{S}^2} \Omega \eta(I(\Omega))\, \mathrm{d}\Omega \right) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} [\eta'(I(\Omega')) - \eta'(I(\Omega))] I(\Omega)\, \mathrm{d}\Omega'\, \mathrm{d}\Omega, \tag{2}$$

  右端项非正，因为利用 η的凸性，我们有

  $$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} [\eta'(I(\Omega')) - \eta'(I(\Omega))] I(\Omega)\, \mathrm{d}\Omega'\, \mathrm{d}\Omega &= - \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} [\eta'(I(\Omega')) - \eta'(I(\Omega))] I(\Omega')\, \mathrm{d}\Omega'\, \mathrm{d}\Omega \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} [\eta'(I(\Omega')) - \eta'(I(\Omega))](I(\Omega') - I(\Omega))\, \mathrm{d}\Omega'\, \mathrm{d}\Omega \le 0. \end{aligned}$$

  此外，对于所有凸函数 η，右端项为零，当且仅当分布 I 是各向同性的；等价地说，式 (1a) 的右端项为零。下文中，我们记

  $$C = \left\{ I \,:\, I(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} I(\Omega')\, \mathrm{d}\Omega' \right\},$$

  各向同性分布的集合。特别是，数值方法需要捕捉或良好逼近这类解。其他类型的分布在许多应用中也备受关注，典型的例子是狄拉克分布 $I(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega_0)$，它们代表束流，常用于物理应用。

- 旋转　　不变性：考虑一个正交矩阵 $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^3$ 和方程 (1a) 的一个解 I，则

  $$(\partial_t I)(\mathcal{O}\Omega) = \partial_t (I(\mathcal{O}\Omega)), \qquad (\Omega \cdot \nabla_x I)(\mathcal{O}\Omega) = (\mathcal{O}\Omega) \cdot \nabla_x (I(\mathcal{O}\Omega)), \qquad (LI)(\mathcal{O}\Omega) = L(I(\mathcal{O}\Omega)).$$

  平移不变性的定义存在争议，因为在这里可以采用伽利略不变性（更常用）或洛伦兹不变性（在物理上更为相关）（参见例如 [17]）。我们不讨论这一问题，在下文中仅考虑旋转不变性。

总而言之，我们目前希望在矩层次研究的辐射传输方程的主要性质包括：(1) 的线性、适定性、解的正性、能量守恒、熵耗散、解的各向同性和狄拉克状态，以及旋转不变性。

3 矩系统层级

本节从满足 (1b) 的 (1a) 推导出一系列闭合的矩方程组。我们的推导基于对 (1a) 和 (1b) 中速度变量进行 Galerkin近似，并采用重新归一化形式。选择这种重新归一化映射，是为了使某个选定的熵函数 $\eta(\cdot)$ 所对应的熵不等式 (2) 得以保留。本文重点关注与 φ–散度[10], 相对应的熵函数，即。

$$\eta(I) = \mathcal{E}(\Omega)\varphi\left(\frac{I(\Omega)}{\mathcal{E}(\Omega)}\right) \tag{3}$$

其中， $\mathcal{E}(\Omega)$ 是某个已知的先验分布，与 t 和 x 无关； $\varphi(\cdot)$ 是某个凸函数。我们选择函数 $\varphi(\cdot)$，是受一系列相应矩闭合模型启发，这些模型衔接了 P_N 闭合（参见例如 [40, 33]）和 M_N 闭合（[34, 13]）。

为推导基于 $\varphi-$ 散度的矩系统，我们首先在第 3.1 节对满足 (1b) 的 (1a) 建立弱形式，然后在第 3.2 节推导闭合的矩系统。

3.1 弱形式

为近似辐射传输方程的弱解，我们考虑关于 Ω 变量、满足 (1b) 的 (1a) 的弱形式。根据命题 1，我们寻求满足以下条件的 $I \in D(L) = L^1(\mathbb{S}^2)$: 对于所有来自 $V = L^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的标量值检验函数 m

$$\int_{\mathbb{S}^2} m(\Omega)\left[\ \big(\partial_t + \Omega\cdot\nabla_x\big)I(t,x,\Omega) - L\big(I(t,x,\cdot)\big)(\Omega)\right]\,\mathrm{d}\Omega = 0, \quad \forall t \in]0,T[,\ \forall x \in \mathbb{R}^3, \tag{4a}$$

满足

$$\int_{\mathbb{S}^2} m(\Omega)\left[I(0,x,\Omega) - I_0(x,\Omega)\right]\,\mathrm{d}\Omega = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{4b}$$

(4)中的系统可以被视为一个方程组，即对(4)中的 Ω 积分后，会得到一个偏微分方程，并为每个 $m \in V$ 配有相应的初边值数据。在这种情况下，我们将检验函数限制为有限维子空间 M of V 的基函数。若将 M 选为多项式空间，则(4)对应于一个由有限个偏微分矩方程构成的系统。然而，这样的矩系统并未闭合，因为 $D(L)$ 是无限维的。我们的目标是推导闭合的矩模型，同时保留(1a)的显著性质，即旋转对称性、能量守恒和熵耗散。推导这样的闭合偏微分矩方程系统，需要刻画检验空间 M，并指定矩闭合关系。

为了 推导关于 M 的条件，我们考察散射算子的弱形式 r,

$$q : \begin{cases} D(L)\times V & \to \mathbb{R}, \\ (I,m) & \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} m(\Omega)L(I)(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

L 的守恒性质可表示为

$$q(I,m) = 0, \quad \forall I \in C, \tag{6}$$

其中 C 是 $\mathbb{S}^2$上的各向同性函数集合，并且 L 的旋转对称性等价于

$$q(\mathcal{T}_{\mathcal{O}}I, \mathcal{T}_{\mathcal{O}}m) = q(I,m), \tag{7}$$

f或 $I \in D(L)$， $m \in V$，且对于正交矩阵 $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{3\times3}$，有 $(\mathcal{T}_{\mathcal{O}}f)(\Omega) = f(\mathcal{O}\Omega)$.

将检验空间限制为 M，意味着我们将 q 的区域限制为 $D(L) \times M$。由此得到一个受限碰撞算子，

$$\pi L : \begin{cases} D(L) & \to M', \\ I & \mapsto \big(m \mapsto q(I,m)\big). \end{cases} \tag{8}$$

因此， M' 的选择决定了 πL 是否继承 L 的显著性质。首先注意，要使 πL 守恒总能量， M 必须包含所有各向同性函数构成的空间：

$$C \subset M. \tag{9}$$

此外，为保持旋转对称性 (7)，任何对检验函数M 施加 $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 旋转后得到的函数都必须仍属于 M，

$$\mathcal{T}_{\mathcal{O}} M \subset M. \tag{10}$$

在本文余下部分，我们考虑由不超过某一特定次数$N \geq 1$的多项式张成的空间 M。这类空间满足条件 (9) 和 (10)。下一节中，我们将讨论能够保持熵耗散的闭合关系。

3.2 φ–基于散度的闭合

为了以保持熵耗散性质的方式闭合矩系统 (4)，可以选取特定的熵函数 $\eta(\cdot)$（在本例中，它可以是任意光滑凸函数），并考虑重整化映射

$$I(t,x,\Omega) = \beta(g(t,x,\Omega)) := (\eta')^{-1}(g(t,x,\Omega)). \tag{11}$$

然后，我们可以研究矩系统 (4) 中 $g \in M$ 的如下 Galerkin近似 [30, 12]：求满足以下条件的 $g \in M$，对所有 $m \in M$

$$\int_{\mathbb{S}^2} m(\Omega)\left[\big(\partial_t + \Omega\cdot\nabla_x\big)\beta(g(t,x,\Omega)) - L\big(\beta(g(t,x,\cdot))\big)(\Omega)\right]\,\mathrm{d}\Omega = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3; \tag{12a}$$

满足

$$\int_{\mathbb{S}^2} m(\Omega)\left[\beta(g(0,x,\Omega)) - I_0(x,\Omega)\right]\,\mathrm{d}\Omega = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{12b}$$

注意，这里需要 $M \subset \beta^{-1}(D(L))$，以确保 (12a) 定义良好。I
n the 保持不变 在本文的其余部分，我们考虑一系列基于 φ–散度的熵函数（[2]）

$$\eta_K(I) = \beta_K^{-1}(I) = KI\left(\frac{K}{K+1}I^{1/K} - 1\right), \quad K = 1,3,5,\ldots$$

它们与相应的一系列重整化映射相关联

$$I = \beta_K(g) = \left(1 + \frac{g}{K}\right)^K, \quad K = 1,3,5,\ldots \tag{13}$$

为简便起见，给定 N 和 K，我们将这种新方法命名为“$\beta_{N,\ K}$ 模型”。

对于此类熵函数，式 (2) 中提出的凸性要求源于其二阶导数的正性：

$$\eta_K''(I) = I^{\frac{1-K}{K}} \geq 0 \quad \forall I \in \mathbb{R}.$$

为了阐明 φ–散度型闭合之间的关系，式 (13) 对应于 M_N 闭合（[30, 13]）的一种 Galerkin 公式，它涵盖了 P_N 闭合（例如参见 [20, 9]）。我们注意到，令 $K = 1$ 并在次数为 N 的多项式空间中近似 g，可得

$$\beta_1(g) = 1 + g \tag{14}$$

这对应于 P_N 闭合，且在极限 $K \to \infty$ 下

$$\beta_\infty = \exp(g), \tag{15}$$

这对应于 M_N 具有玻尔兹曼-香农熵（$\eta(I) = I\log\ I - I$）的情形。所有 K 的选择都能保证能量守恒、旋转不变性以及其自身熵 η_K的耗散。然而，它们

表现各异：具有玻尔兹曼熵（$\beta_{N,\,\infty}$ 方法）的 M_N 能够保证强度函数的正性，而 P_N 方法（$\beta_{N,\,1}$ 方法）可视为球面上的多项式谱方法，可能会产生非正结果。尽管如此，由于其固有的线性，它更易于实现且应用更广泛，因为矩反演问题是平凡的。

对于 $1 < K < \infty$ 的中间取值，我们预期会得到一种"中间"模型，其中强度函数在 $\mathbb{S}^2$ 的更大范围内可能具有正性，这比 P_N 表示法覆盖的范围更广；而且矩反演问题也会比 M_N 方法中的问题刚性更弱。

选取 M 的一组基 $\boldsymbol{m}$ 和重整化映射 (13)，系统 (12) 可改写为守恒的双曲形式

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \operatorname{div}_x \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\rho}) \tag{16a}$$

wh其中 $\boldsymbol{\rho}$、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\rho})$ 和 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\rho})$ 通过形如 (13) 的分布相关，具体关系由公式 la

$$\boldsymbol{\rho} = \int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{m}(\Omega) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{m}(\Omega)}{K}\right)^K \mathrm{d}\Omega, \tag{16b}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\mathbb{S}^2} \Omega \boldsymbol{m}(\Omega) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{m}(\Omega)}{K}\right)^K \mathrm{d}\Omega, \tag{16c}$$

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\rho}) = \sigma\left(\frac{\rho_0}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{m}(\Omega) d\Omega - \boldsymbol{\rho}\right), \tag{16d}$$

且 ρ_0 是强度函数的零阶矩。在通量函数的定义中，算子 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\rho})$ 可视为"矩反演算子"，其由 (16b) 隐式定义。在下一节中，我们将证明该算子定义良好。

注 1. 我们指出，(13) 中的重整化映射也可以视为以下优化问题的最优解：

$$\begin{aligned} &\operatorname*{argmin}_I \eta(I) \\ &\textit{subject to } \langle \boldsymbol{m} I \rangle = \boldsymbol{\rho}. \end{aligned}$$

该优化问题的解选为 I^*，它完全由 $\boldsymbol{\rho}$ 确定，因此得到矩闭合。当 η 为凸函数时，使 η 最小的最优 I 具有如下形式

$$I^*(\boldsymbol{\rho}; \Omega) = \beta(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{m}),$$

其中，$\beta(\cdot)$ 是 $\eta'(\cdot)$ 的反函数，$\boldsymbol{\lambda}$ 是待由矩约束确定的拉格朗日乘子：

$$\int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{m} \beta(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{m}) \,\mathrm{d}\Omega = \boldsymbol{\rho}. \tag{17}$$

本节余下部分将建立基于 $\varphi-$ 散度的矩系统（12）的适定性。

3.3 矩反演问题的适定性

本小节将证明，问题（16b）定义了一个微分同胚，其定义域是形如（13）的分布对应的矩向量集合（亦称可实现域），值域则是相应的拉格朗日乘子集合。特别地，我们将证明这两个集合都是 $\mathbb{R}^r$，其中 $r = (N+1)^2$ 是所考虑矩的数量。

设 $\{m_1(\Omega) \cdots、 m_r(\Omega)\}$ 是次数不超过 N 的多项式空间的一组基，并定义 $\boldsymbol{m}(\Omega) = (m_1(\Omega) \cdots, m_r(\Omega))^\top$ 和

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{m}(\Omega) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{m}(\Omega)}{K}\right)^K \mathrm{d}\Omega.$$

这里我们始终假设 K 为奇数且为正数。矩反演问题可以表述为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\rho}$$

对于给定的 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^r$。

引理 1. 设 $\{\boldsymbol{\lambda}_k\} \subset \mathbb{R}^r$ 是满足 $\|\boldsymbol{\lambda}_k\| \to +\infty$ 的向量序列。则向量 $\boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\lambda}_k)$ 满足 $\|\boldsymbol{\rho}_k\| \to +\infty$。

证明。设 $g'_k(\Omega) = 1 + K^{-1}\boldsymbol{\lambda}_k \cdot \boldsymbol{m}_k(\Omega)$。显然，$\|g'_k\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \to +\infty$，且对于每个 k，都可以找到一个向量 $\boldsymbol{\lambda}'_k$ 使得 $\boldsymbol{\lambda}'_k \cdot \boldsymbol{m}(\Omega) = g'_k(\Omega)$。因此，

$$\boldsymbol{\lambda}'_k \cdot \boldsymbol{\rho}_k = \int_{\mathbb{S}^2} [g'_k(\Omega)]^{K+1} \,\mathrm{d}\Omega = \|g'_k\|^{K+1}_{L^{K+1}(\mathbb{S}^2)},$$

这里用到了 K 是奇函数这一事实。由于所有次数不超过 N 的多项式构成的线性空间是有限维的，存在仅依赖于 N 和 K 的常数 C_1 和 C_2，使得

$$\|\boldsymbol{\lambda}'_k\| \le C_1 \|\boldsymbol{\lambda}'_k \cdot \boldsymbol{m}\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} = C_1 \|g'_k\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}, \qquad \|g'_k\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \le C_2 \|g'_k\|_{L^{K+1}(\mathbb{S}^2)}.$$

因此，

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}'_k}{\|\boldsymbol{\lambda}'_k\|} \cdot \boldsymbol{\rho}_k = \frac{\|g'_k\|^{K+1}_{L^{K+1}(\mathbb{S}^2)}}{\|\boldsymbol{\lambda}'_k\|} \ge \frac{\|g'_k\|^K_{L^2(\mathbb{S}^2)}}{C_1 C_2^{K+1}} \to +\infty.$$

同时，我们有

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}'_k}{\|\boldsymbol{\lambda}'_k\|} \cdot \boldsymbol{\rho}_k \le \|\boldsymbol{\rho}_k\|.$$

因此，$\|\boldsymbol{\rho}_k\| \to +\infty$。 □

命题 2. 对于任意 $\boldsymbol{\rho}^* \in \mathbb{R}^r$，存在唯一的向量 $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^r$，使得 $\boldsymbol{\rho}^* = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\lambda}^*)$。

证明。我们首先证明唯一性。假设存在向量 $\boldsymbol{\lambda}_1^*$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_2^*$ 满足

$$\boldsymbol{\rho}^* = \int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{m}(\Omega) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\lambda}_1^* \cdot \boldsymbol{m}(\Omega)}{K}\right)^K \mathrm{d}\Omega, \qquad \boldsymbol{\rho}^* = \int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{m}(\Omega) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\lambda}_2^* \cdot \boldsymbol{m}(\Omega)}{K}\right)^K \mathrm{d}\Omega.$$

将这两个方程相减并应用中值定理可得 ld

$$\left[\int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{m}(\Omega)[\boldsymbol{m}(\Omega)]^\top \left(1 + \frac{[\xi\boldsymbol{\lambda}_1^* + (1-\xi)\boldsymbol{\lambda}_2^*] \cdot \boldsymbol{m}(\Omega)}{K}\right)^{K-1} \mathrm{d}\Omega\right] (\boldsymbol{\lambda}_2^* - \boldsymbol{\lambda}_1^*) = 0,$$

其中 $\xi \in (0,1)$。由于 K 是奇函数，且 $\boldsymbol{m}(\Omega)$中的多项式线性无关，方括号内的矩阵是对称正定的。因此，$\boldsymbol{\lambda}_2^* - \boldsymbol{\lambda}_1^*$ 为零，从而证明了解的唯一性。

现在证明存在性。根据上一段证明的唯一性，映射 $\boldsymbol{M}: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$是单射。显然，$\boldsymbol{M}$ 是连续映射。因此，根据区域不变性定理，$\boldsymbol{M}$ 的值域（下文记为 $\mathcal{R}$）是开集。如果 $\mathcal{R} \neq \mathbb{R}^r$，则可以找到 $\boldsymbol{\rho}_\infty \in \partial\mathcal{R}$ 和一个序列$\{\boldsymbol{\rho}_k\} \subset \mathcal{R}$，使得 $\boldsymbol{\rho}_k \to \boldsymbol{\rho}_\infty$。对于每个 k，由于 $\boldsymbol{\rho}_k \in \mathcal{R}$，我们可以找到 $\boldsymbol{\lambda}_k \in \mathbb{R}^r$，使得 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\lambda}_k) = \boldsymbol{\rho}_k$。现在分两种情况讨论：

1. 如果序列 $\{\boldsymbol{\lambda}_k\}$ 有界，则它存在一个收敛子序列 $\{\boldsymbol{\lambda}_{k_j}\}$。设其极限为 $\boldsymbol{\lambda}_\infty$。那么由 $\boldsymbol{M}$的连续性可得 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\lambda}_\infty) = \boldsymbol{\rho}_\infty$ 这与我们的假设 $\boldsymbol{\rho}_\infty \notin \mathcal{R}$矛盾。
2. 如果序列 $\{\boldsymbol{\lambda}_k\}$无界，则它存在一个子序列 $\{\boldsymbol{\lambda}_{k_j}\}$，使得 $\|\boldsymbol{\lambda}_{k_j}\| \to +\infty$。由引理 1可得 $\|\boldsymbol{\rho}_{k_j}\| \to +\infty$。这与我们的假设 $\boldsymbol{\rho}_k \to \boldsymbol{\rho}_\infty$矛盾。

因此，$\boldsymbol{\rho}$ 的值域必须是 $\mathcal{R}$，由此完成存在性证明。 □

3.4 对称耗散双曲性

由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 与 $\boldsymbol{\rho}$ 之间的映射可逆，矩方程（16）也可以表述为关于 $\boldsymbol{\lambda}$的方程。这一点可由（16）直接看出，结果如下:

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\lambda})\partial_t\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{\lambda})\partial_{x_i}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\lambda}), \tag{18a}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{A}_0, \ldots, \boldsymbol{A}_3$ 由下式给出

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\mathbb{S}^2} \beta_K'(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m}(\Omega))\boldsymbol{m}(\Omega)[\boldsymbol{m}(\Omega)]^\top \,\mathrm{d}\Omega, \tag{18b}$$

$$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\mathbb{S}^2} \Omega_i\beta_K'(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m}(\Omega))\boldsymbol{m}(\Omega)[\boldsymbol{m}(\Omega)]^\top \,\mathrm{d}\Omega, \quad i = 1,2,3. \tag{18c}$$

对于光滑解，这些方程与式 (16) 等价。

为证明柯西初值问题 (18) 在 [22]，意义下的适定性，我们将说明 (18) 符合如下定义的所谓对称耗散双曲系统:

定义 1. 一阶偏微分方程组 $r \in \mathbb{N}$

$$\partial_t\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}) + \partial_{x_i}\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{u})\partial_t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{u})\partial_{x_i}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u})) \tag{19}$$

定义在值域为开凸集 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^r$ 的函数 u 上，且

$$\mathcal{M} = \left\{\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^r : \boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u})) = 0,\, \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}\right\} \tag{20}$$

称为对称耗散的，如果

1. $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{u})$ 是对称正定的;
2. $\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{u})$、 $i = 1$、2、3 均为对称的;
3. $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u})) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{M}$ 时成立；并且
4. $\boldsymbol{u} \in \mathcal{M}$ 中的线性化 $\boldsymbol{\nabla s}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}))$ 是对称且负半定的，其零空间等于$\mathcal{M}$。

通过证明 (18) 符合对称耗散双曲系统，我们说明了其线性适定性；此外，在初始数据满足适当条件时，可证明解的局部时间存在性，即下述定理（归功于 [22]）。

定理 1. 假设平衡律 (19) 是对称耗散双曲型的。设 $\bar{\boldsymbol{w}} \in \mathcal{W}$，其中 $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^r$ 是开且凸的，并且 $\boldsymbol{s}(\bar{\boldsymbol{w}}) = 0$ 是一个常状态。若初始数据 $\boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{x})$ 满足 $\boldsymbol{w}_0(x) - \bar{\boldsymbol{w}} \in H^s(\mathbb{R}^r)$，其中 $s \geq [d/2] + 2$ 是整数，且取值于 $\mathcal{W}$ 的一个紧子集内，则存在 $T > 0$，使得 (19) 对应的柯西问题存在唯一解 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(t, \boldsymbol{x})$，并满足 $\boldsymbol{w} - \bar{\boldsymbol{w}} \in C([0,T];\, H^s(\mathbb{R}^r))$。

对于由耗散动理学理论导出的矩方程，对称耗散性是一种自然结构；当解接近流形 $\mathcal{M}$ 时，它能保持趋于平衡和熵耗散等基本性质。从数值上看，这意味着采用适当构造的数值格式可以进行稳定模拟。对于我们的 $\beta_{N,K}$ 模型，我们设

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}^r \quad \text{and} \quad \mathcal{M} = \{\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^r : \boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{m} \in C\}. \tag{21}$$

我们注意到， 对称耗散双曲性定义中出现的各项符合 t o

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{s}$$

命题 3. 系统 (18a) 是对称耗散的。

证明。可以观察到，$\mathcal{U}$ 确实是开且凸的，并且对于所有 $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{M}$，$\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ 。

为满足条件 1. 和 2.，我们注意到，$\boldsymbol{A}_0$ 和 $\boldsymbol{A}_i$ 的对称性是显然的，而 $\boldsymbol{A}_0$ 的正定性由以下事实可得：

$$\beta_K'(g) = M\left(1 + \frac{g}{K}\right)^{K-1} \tag{22}$$

由于 K 是奇函数，因此其为非负的，所以对于所有 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^r$，

$$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{b} = \int_{\mathbb{S}^2} \beta_K'(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m})\big(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{m}\big)^2 \,\mathrm{d}\Omega \geq 0 \tag{23}$$

当且仅当被积函数处处为零时，等号成立。

条件 3. 改写为：$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\lambda})) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m} \in C$。根据 $\boldsymbol{L}$ 的定义以及 σ的正性，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\rho}) = 0$ 等价于要求 $\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho_0} = 4\pi\int_{\mathbb{S}^2}\boldsymbol{m}$。随后，根据矩反演的唯一性，可得 $\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho_0}$ 的唯一表示。由于不变空间 C 仅由各向同性函数组成，因此满足 $\boldsymbol{\rho} = \int \boldsymbol{m}\beta_K(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m})$ 的该表示 $\beta_K(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m})$ 是各向同性的，从而 $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m} \in C$ 和 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}$。

对于条件4，计算可得

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\sigma}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2} (\boldsymbol{m}(\Omega') - \boldsymbol{m}(\Omega))\beta_K(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m}(\Omega))\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\Omega'$$

由此可得

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{\sigma}{8\pi}\int_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2} (\boldsymbol{m}(\Omega') - \boldsymbol{m}(\Omega))(\boldsymbol{m}(\Omega') - \boldsymbol{m}(\Omega))^\top \beta_K'(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m}(\Omega))\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\Omega',$$

其非正性源于 β_K' 的非正性，且其核恰好是满足 $\boldsymbol{V}$ 的集合，其中 at

$$\int_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2} \left((\boldsymbol{m}(\Omega') - \boldsymbol{m}(\Omega))\cdot\boldsymbol{V}\right)^2 \beta_K'(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m}(\Omega))d\Omega d\Omega' = 0.$$

由于 $\beta_K'(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m}(\Omega))$严格为正，因此这要求$(\boldsymbol{m}(\Omega') - \boldsymbol{m}(\Omega))\cdot\boldsymbol{V}$恒为零。只有当 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{V}$为各向同性时，这才可能成立，因此 $\boldsymbol{V} \in C$。 □

命题4。（16）的特征速度有界于1。

证明。利用矩方程（18）的等价形式，矩系统在方向 $n \in \mathbb{S}^2$ 上的特征速度是以下广义特征值问题的解：

$$\lambda\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^3 n_i\boldsymbol{A}_i.$$

根据定义矩阵 $\boldsymbol{A}_i$，该方程仅当以下矩阵为奇异矩阵时成立 ：

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\lambda - \Omega\cdot n)\boldsymbol{m}(\Omega)[\boldsymbol{m}(\Omega)]^\top \left(1 + \frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\rho})\cdot\boldsymbol{m}(\Omega)}{K}\right)^{K-1} \mathrm{d}\Omega.$$

对于 $\Omega \in \mathbb{S}^2$，几乎处处有 $|\Omega\cdot n| < 1$。因此，若 K 为奇数且 $\lambda \geq 1$ $(\lambda \leq -1)$，则上述矩阵为对称正定（负定）矩阵。因此，我们知道矩方程的所有特征速度都位于开区间（$-1, 1$）内。 □

这使我们能够方便地为数值格式选择合适的时间步长。值得注意的是，通过该证明可以更准确地计算特征速度。

3.5 φ–散度型矩系统的性质

Co回到矩模型所关注的性质，$\beta_{N,\ K}$ 闭合满足：

- 定义良好性：对于所有向量 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R} = \mathbb{R}^r$，都可以通过多项式矩反演算子（13）良好地定义 β_K 重构。尽管原始偏微分方程（1a）是线性的，但当前的重构对应于一种非线性近似（除非在 $K = 1$ 的情况下）。

- 可实现性：不强制要求底层分布函数 β_K 具有正性。这就得到一个可实现域 $\mathcal{R} = \mathbb{R}^r$，即由能够表示为 β_K 形式的 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^r$ 所构成的集合。已知，强制要求这种表示具有正性会使可实现域缩小为 $\mathbb{R}^m$ 的真子集（参见例如 [23, 26, 42]），并导致矩反演问题在该受限可实现域的边界处变为奇异，在其附近则条件不良。

- 初值问题的适定性：矩系统的对称耗散结构保证了初值问题解的存在性和唯一性。该理论不涵盖带边界的情形，其研究留待未来工作。

- 趋于平衡：同样，对称耗散结构也确保凸熵 η_K耗散，其最小值所在集合与各向同性分布的集合重合C。

- 特征速度：由于雅可比矩阵 A_0 和 A_i 定义为多项式函数的矩，因此可以准确计算特征速度，且它们都不超过 1。

- 物理状态的近似：由于各向同性函数集合 C 是近似空间的一部分，因此这类函数能够被 $\beta_{N,K}$ 闭合精确表示。考虑 Ω 中由狄拉克测度表示的纯各向异性状态，在固定 K时，即使取极限 $|\boldsymbol{\lambda}| \to +\infty$，也无法用形式为 β_K 的表示精确表示这些状态。不过，狄拉克测度与这类函数集合之间的距离（其具体含义将在后续章节中定义）可以通过参数 K加以控制。特别是，在极限 $\lim_{K\to\infty} \beta_K$下可以恢复狄拉克测度。

- 能量守恒和旋转不变性：它们在 $\beta_{N,K}$ 闭合下也成立。

现在，将这一构造与最先进的模型进行比较：随着 K 从 1 增加到 $+\infty$，我们的 $\beta_{N,K}$模型通过一个矩系统序列，将经典的 P_N 方法和 M_N 方法联系起来。当 $K = 1$时，我们有 $\beta_K(x) = 1 + x$，因此强度函数的假设形式是一个 N 次多项式，这与 P_N 方法相吻合。当 $K \to +\infty$时， $\beta_K(x)$ 的极限是 $\exp(x)$，这与基于玻尔兹曼熵的 M_N 方法中的假设一致。这一整套模型兼具 P_N 模型和 M_N 模型的许多优良性质，例如守恒定律、旋转不变性和熵耗散。另一种称为离散纵标法的经典模型不在这一系列之中，但当通过数值积分对矩反演问题中的积分进行近似计算时，$\beta_{N,K}$ 模型可能会表现出一些与 S_N 模型相似的特性。下文将简要比较我们的模型与这些经典方法。

- $\boldsymbol{\beta_{N,\ K}}$ 与 $\boldsymbol{P_N}$：由于这两种模型允许强度函数中存在负值部分，因此它们的可实现域无界。实践中这更为便利，因为计算过程中无需保证矩的可实现性。对于正可实现的矩，由于 $\beta_{N,\ K}$ 模型与 M_N 模型更为相似，因此与 P_N相比，$\beta_{N,\ K}$ 模型更有可能在 $\mathbb{S}^2$ 上生成正值范围更大的强度函数。这有助于在逼近奇异强度函数时减少伪振荡。不过，与 P_N方法相比，$\beta_{N,\ K}$ 模型的非线性在逼近光滑强度函数时可能导致精度较低。我们将在第5节展示这类示例。

- $\boldsymbol{\beta_{N,\ K}}$ 与 $\boldsymbol{M_N}$：相比采用常见熵函数选择的 M_N 模型（玻尔兹曼$\eta(I) = I$对数 $I - I$或玻色-爱因斯坦 $\eta(I) = (I+1)$ 对数$(I+1) - I$对数 I），$\beta_{N,\ K}$模型的实现要容易得多，因为可以计算出矩的精确值。正如我们将在下文详细说明的那样

在下一节中，将使用牛顿法求解矩反演问题，其中积分

$$\int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{m}(\Omega)\boldsymbol{m}(\Omega)^\top \beta'(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{m}(\Omega))\,\mathrm{d}\Omega$$

需要进行计算。在 $\beta_{N,K}$ 模型中，被积函数是多项式，因此可以通过数值求积得到精确积分。然而，在 M_N 模型中，被积函数包含指数函数或普朗克函数，无法通过数值积分精确求得。M_N 模型的优势主要体现在理论层面：它采用物理熵函数，保证正性，并能够精确描述束流。然而，即使理论上可行，要在采用高阶 N的 M_N 方法数值格式中捕捉束流仍极具挑战，因为强度函数无法表示为有界多项式的指数，且矩反演问题会变得奇异。

- $\boldsymbol{\beta_{N,K}}$ 与 $\boldsymbol{S_N}$：S_N 方法又称离散纵标法，它将强度函数近似为位于固定角度上的 N 束流。与我们的 $\beta_{N,K}$ 模型相比，S_N 方法更易于实现，也能保持正性。然而，这类强度函数构成的空间不具有旋转不变性，因此 S_N 模型也无法保持旋转不变性；由此，在模拟各向同性辐射源 [16]时，数值解可能出现射线效应。$\beta_{N,K}$ 模型在这方面更具优势。请注意，在 [16], 中，M_N 模型的数值结果也会因数值积分而出现一些射线效应。事实上，当数值积分结果不精确时，旋转不变性就会遭到破坏，求积节点所指定的方向会被人为地优先选取，这与 S_N 模型的情况类似。如果积分未能精确计算，模拟 $\beta_{N,K}$ 模型时也可能出现类似现象。尽管如此，只要采用足够多的求积节点，确保所有积分均能精确计算，就始终可以避免射线效应。

4 数值方法

为了更好地理解 $\beta_{N,\ K}$ 模型，我们将进行一些数值实验来测试其性能。本节将介绍实验所用的数值方法，数值结果将在下一节中报告。

4.1 矩反演问题

使用 $\beta_{N,\ K}$ 模型模拟辐射传输问题，需要通过数值求解矩反演问题，以便计算数值通量。在我们的实现中，我们没有使用单项式来定义矩，而是采用由球谐函数定义的“正交矩”：

$$\rho_{lm} := \int_{\mathbb{S}^2} Y_{lm}(\Omega) I(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega.$$

实球谐函数 $Y_{lm}(\cdot)$ 满足正交关系：

$$\int_{\mathbb{S}^2} Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

那么，矩反演问题可表述如下：

给定矩 $\rho_{lm},\ l = 0, 1, \cdots, N,\ m = -l, \cdots, l$，求系数 $\lambda_{lm},\ l = 0, 1, \cdots, N, m = -l, \cdots, l$，使得

$$\int_{\mathbb{S}^2} Y_{lm}(\Omega)\left(1 + \frac{1}{K}\sum_{l'=0}^{N}\sum_{m'=-l'}^{l'} \lambda_{l'm'} Y_{l'm'}(\Omega)\right)^K \mathrm{d}\Omega = \rho_{lm}.$$

在我们的实现中，我们应用牛顿法求解矩反演问题。用 $\lambda_{lm}^{(n)}$ 表示第 n 个时间步的系数，通过求解以下线性系统，从第 n 步更新到第 $(n+1)$ 步：

$$\sum_{l'=0}^{N}\sum_{m'=-l'}^{l'}\left(\lambda_{l'm'}^{(n+1)}-\lambda_{l'm'}^{(n)}\right)\int_{\mathbb{S}^2}Y_{l'm'}(\Omega)Y_{lm}(\Omega)\left(1+\frac{1}{K}\sum_{l''=0}^{N}\sum_{m''=-l''}^{l''}\lambda_{l''m''}^{(n)}Y_{l''m''}(\Omega)\right)^{K-1}\mathrm{d}\Omega=\Delta_{lm},$$
$$l=0,1,\cdots,N,\qquad m=-l,\cdots,l.$$

其中

$$\Delta_{lm}=\rho_{lm}-\int_{\mathbb{S}^2}Y_{lm}(\Omega)\left(1+\frac{1}{K}\sum_{l''=0}^{N}\sum_{m''=-l''}^{l''}\lambda_{l''m''}^{(n)}Y_{l''m''}(\Omega)\right)^{K}\mathrm{d}\Omega.$$

可以观察到，上述线性系统的系数矩阵是对称的，因此可以使用共轭梯度法求解。当 L^2 矩的差小于 10^{-10} 时，牛顿迭代终止：

$$\sqrt{\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=-l}^{l}|\Delta_{lm}|^2}<10^{-10}.$$

线性系统中的积分使用勒贝德求积计算。除舍入误差外，当求积点数量足够多时，勒贝德求积可以保证数值积分的精确性。不同代数精度阶数下的勒贝德求积节点和权重可见包括 [27, 28]在内的一系列论文。这里需要精度阶数至少为 $N(K+1)$，以保证数值积分的精确性。由于系数矩阵具有正定性，线性系统可以使用共轭梯度法求解。在含时问题中，初值 $\alpha_{lm}^{(0)}$ 取为前一时间步的解；否则，设为

$$\lambda_{lm}^{(0)}=\rho_{lm}^{(0)},\qquad l=-N,\cdots,N,\quad m=-l,\cdots,l$$

作为我们迭代的初始值。

求解系数后，也可再次通过 Lebedev 求积计算通量函数。在 $\beta_{N,\ K}$ 模型中，矩的通量函数为以下积分：M_{lm}

$$\int_{\mathbb{S}^2}\Omega\,Y_{lm}(\Omega)\left(1+\frac{1}{K}\sum_{l'=0}^{N}\sum_{m'=-l'}^{l'}\lambda_{l'm'}Y_{l'm'}(\Omega)\right)^{K}\mathrm{d}\Omega,$$

要精确计算该积分，精度阶数需达到 $(K+1)N+1$。表 1 列出了若干 N 和 K 取值下，Lebedev 求积所需的求积点数量。

表 1：$\beta_{N,\ K}$ 模型所需的求积点数量

N	K	点数	N	K	点数	N	K	点数
3	1	26	7	1	86	11	1	194
3	3	74	7	3	302	11	3	770
3	5	146	7	5	770	11	5	1730
3	7	230	7	7	1202	11	7	2702

4.2 空间和时间离散化

在我们的实验中，采用有限体积法对矩方程进行离散。本文仅研究二维问题，因此可以将矩方程写成以下平衡律形式：

$$\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\rho})}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\rho})}{\partial y}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\rho}).$$

空间域采用均匀网格进行离散，每个网格单元记为 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$。根据有限体积法，数值解 $\boldsymbol{\rho}_{i,\,j}^{n}$ 近似于第 n 个时间步 t_n 上解的平均值：

$$\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{n} \approx \frac{1}{\Delta x\,\Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \boldsymbol{\rho}(x, y, t_n)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

为更新 $\boldsymbol{\rho}_{i,\,j}^{n}$，我们采用以下基于 Heun 方法的数值格式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{*} &= \boldsymbol{\rho}_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{F}_{i+1/2,j}^{n} - \boldsymbol{F}_{i-1/2,j}^{n}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(\boldsymbol{G}_{i,j+1/2}^{n} - \boldsymbol{G}_{i,j-1/2}^{n}) + \Delta t\,\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{n}), \\
\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{n+1} &= \frac{\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{n} + \boldsymbol{\rho}_{i,j}^{*}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\boldsymbol{F}_{i+1/2,j}^{*} - \boldsymbol{F}_{i-1/2,j}^{*}) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}(\boldsymbol{G}_{i,j+1/2}^{*} - \boldsymbol{G}_{i,j-1/2}^{*}) + \frac{\Delta t}{2}\,\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{*}).
\end{aligned}$$

数值通量 $\boldsymbol{F}_{i+1/2,\,j}^{n}$、$\boldsymbol{F}_{i+1/2,\,j}^{*}$ 和 $\boldsymbol{G}_{i,\,j+1/2}^{n}$、$\boldsymbol{G}_{i,\,j+1/2}^{*}$ 通过线性重构计算得到 s:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{i+1/2,j}^{n} &= \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{n} + \frac{\Delta x}{2}\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{n}, \boldsymbol{\rho}_{i+1,j}^{n} - \frac{\Delta x}{2}\boldsymbol{\sigma}_{i+1,j}^{n}\right), \quad \boldsymbol{F}_{i+1/2,j}^{*} = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{*} + \frac{\Delta x}{2}\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{*}, \boldsymbol{\rho}_{i+1,j}^{*} - \frac{\Delta x}{2}\boldsymbol{\sigma}_{i+1,j}^{*}\right), \\
\boldsymbol{G}_{i,j+1/2}^{n} &= \mathbf{G}\left(\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{n} + \frac{\Delta y}{2}\boldsymbol{\kappa}_{i,j}^{n}, \boldsymbol{\rho}_{i,j+1}^{n} - \frac{\Delta y}{2}\boldsymbol{\kappa}_{i,j+1}^{n}\right), \quad \boldsymbol{G}_{i,j+1/2}^{*} = \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{*} + \frac{\Delta y}{2}\boldsymbol{\kappa}_{i,j}^{*}, \boldsymbol{\rho}_{i,j+1}^{*} - \frac{\Delta y}{2}\boldsymbol{\kappa}_{i,j+1}^{*}\right),
\end{aligned}$$

其中，斜率 $\boldsymbol{\sigma}_{i,\,j}^{n}$、$\boldsymbol{\sigma}_{i,\,j}^{*}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}_{i,\,j}^{n}$、$\boldsymbol{\kappa}_{i,\,j}^{*}$ 例如可由单调中心限制器计算得到：

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{n} = \operatorname{minmod}\left(\frac{2(\boldsymbol{\rho}_{i+1,j}^{n} - \boldsymbol{\rho}_{i,j}^{n})}{\Delta x}, \frac{2(\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{n} - \boldsymbol{\rho}_{i-1,j}^{n})}{\Delta x}, \frac{\boldsymbol{\rho}_{i+1,j}^{n} - \boldsymbol{\rho}_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}\right).$$

在我们的实现中，我们采用 Lax-Friedrichs 通量：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho}) = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varrho})}{2} - \frac{\boldsymbol{\varrho} - \boldsymbol{\rho}}{2}, \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho}) = \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\varrho})}{2} - \frac{\boldsymbol{\varrho} - \boldsymbol{\rho}}{2}.$$

请注意，此处我们利用特征速度小于 1 这一事实来确定数值黏性。还需注意，在计算通量函数 $\boldsymbol{F}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{G}(\cdot)$ 时，需要求解矩反演问题。时间步长 Δt 的确定满足

$$\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} + \sigma\right) < 1.$$

上述方法对于光滑解具有二阶精度。这里我们选择该格式，是因为它相对容易实现。与其他双曲型方程类似，更高阶格式可能具有更好的性能。在实际应用中，可以将任意通用高阶格式（如 WENO 方法和间断伽辽金方法）应用于矩方程。在下一节中，我们将把该方法应用于一些基准问题。数值方法的更多细节，例如网格单元尺寸和边界条件，将在各个示例中具体说明。

5 数值结果

5.1 某些密度函数的近似

本节中，我们研究使用 $\beta_{N,K}$ 模型对 $I(\Omega)$ 进行近似。由于 M_N 模型的一大优势是能够精确表示束流（狄拉克函数），我们还将测试 $\beta_{N,K}$模型对与束流相关函数的近似能力。以下小节将介绍三个数值算例。

5.1.1 单束近似

我们首先研究定义在球面上的狄拉克函数的近似:

$$I(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega_0),$$

其中，Ω_0 是 $\mathbb{S}^2$上的一个给定点。由于$\beta_{N,K}$ 模型具有旋转不变性，在本测试中任意点Ω_0 都是等价的。下文选取 $\Omega_0 = (0,0,1)^\top$ ，使得 $I(\Omega)$的矩为

$$\rho_{lm} := \int_{\mathbb{S}^2} Y_{lm}(\Omega) I(\Omega)\, \mathrm{d}\Omega = \delta_{m0}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}.$$

矩反演采用第4.1节所述的牛顿法求解。

$N = 3$为7、11，且 $K = 1$为3、5、7时，狄拉克δ函数的近似结果如图1所示。注意，当 $K = 1$时，$\beta_{N,K}$ 模型与 P_N 模型相同。一般而言，随着 N 或 K 增大，强度会更加集中于球面的北极，表明对狄拉克δ函数的近似效果更好。当 $K = 1$时，图中可以观察到强度函数有显著的负值部分，并且可以清楚地看到近似函数的振荡。随着 K 增大至3，这一情况显著改善。进一步增大 K可获得更高的峰值，这意味着可能收敛于狄拉克δ函数。

为量化近似误差，我们注意到，对于所有 $\alpha < -1$，狄拉克δ函数都属于 $H^\alpha(\mathbb{S}^2)$，其中 H^α-范数定义为（见 [5]）

$$\|I\|_{H^\alpha(\mathbb{S}^2)} = \left(\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l} [1 + l(l+1)]^\alpha |\rho_{lm}|^2\right)^{1/2}.$$

这里我们考察狄拉克δ函数与其近似之间的 H^{-2}-误差。根据谱方法的一般收敛理论，在 H^α 空间中近似函数时， H^{-2} 收敛率应为 $O(N^{-2-\alpha})$。在这个测试案例中，我们预期收敛阶接近 1。为验证这一预测，我们在图 2 中绘制了 $K = 1$、3、5 对应的数值误差。由于计算 H^{-2} 误差存在数值困难，结果仅给出至 $N = 13$。三条曲线均显示出一致的收敛阶，且接近 1； K取值越大，前因子越小。这验证了我们从图 1 得出的观察。注意，$\beta_{N,K}$ 模型具有 $(N+1)^2$ 个矩。因此，相对于自由度的数量，其收敛阶为 $1/2$ 。

回顾一下， M_N 模型能够对任意 $N \geq 1$下的单个狄拉克δ函数进行精确表示，这意味着近似误差等于$\beta_{N,K}$ 模型与 M_N 模型之间的差异。这一事实使我们能够利用该测试案例检验我们的$\beta_{N,K}$ 模型向 M_N 模型的收敛率。现在固定 N ，并计算不同 K取值下的 H^{-2} 误差。结果见图3。图中显示，对于 $N = 1$、3、5，相对于 K 的收敛阶接近 $1/2$。请注意，此收敛率仅适用于这一特定情况；它可能随函数的光滑性以及用于衡量误差的范数而变化。

5.1.2 多束光束的近似

现在我们考虑具有多束光束的强度函数:

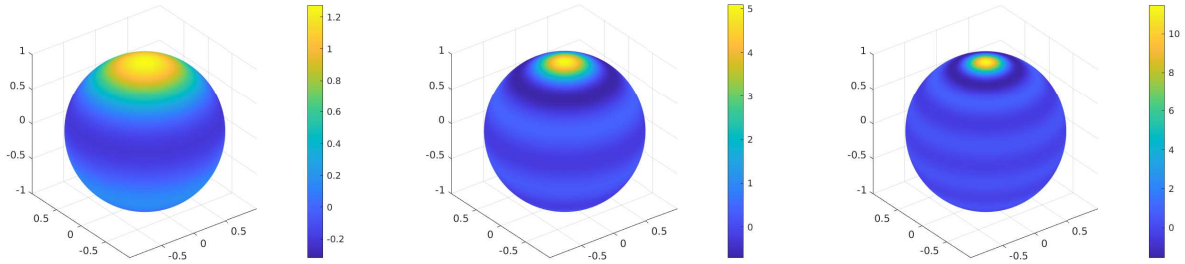
$$I(\Omega) = \sum_{k=1}^{n} \delta(\Omega - \Omega_k).$$

获得$\beta_{N,K}$ 近似的数值格式与单束光束的情况相同。为简洁起见，我们仅展示 $n = 2$ 和 $n = 3$的结果。

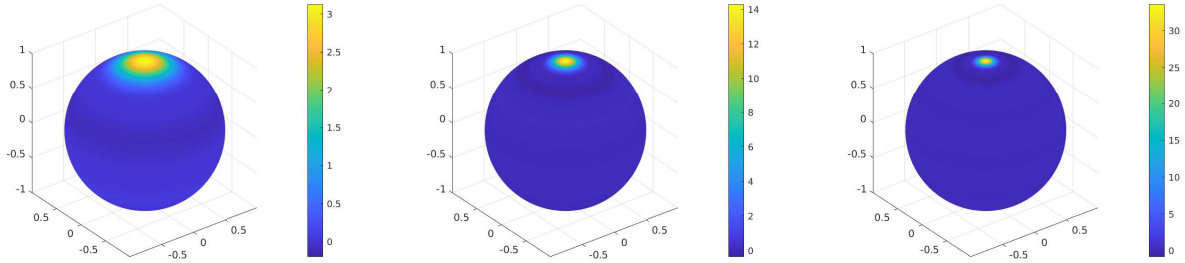
对于双束情形（$n = 2$），我们令

$$\Omega_1 = (0,0,1)^\top, \qquad \Omega_2 = (0,-1,0)^\top.$$

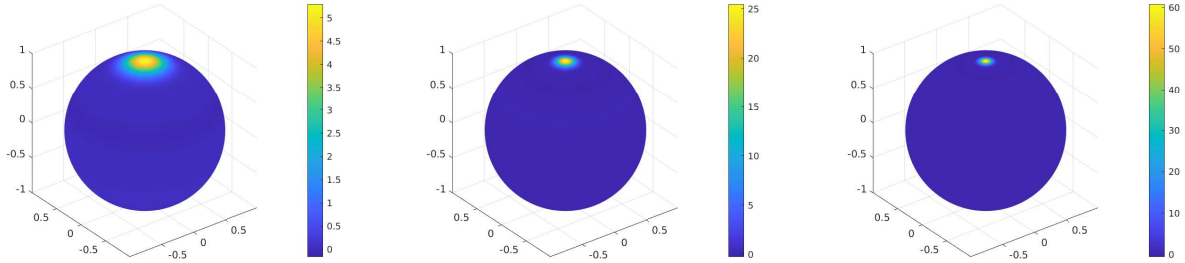
$N = 1$、2、3 和 $K = 5$、9 的数值结果绘制于图 4 中。不同于单束光束的情况，现在 M_1 模型无法准确表示 $I(\Omega)$，因此$\beta_{1,K}$ 模型对



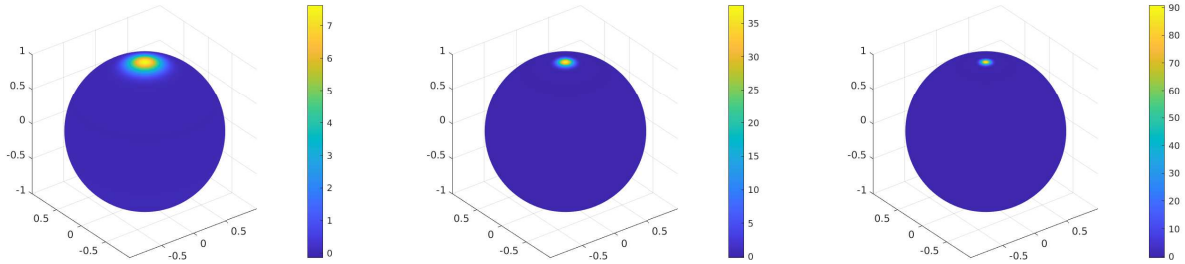
(a) $N = 3,\ K = 1$ (b) $N = 7,\ K = 1$ (c) $N = 11,\ K = 1$



(d) $N = 3,\ K = 3$ (e) $N = 7,\ K = 3$ (f) $N = 11,\ K = 3$



(g) $N = 3,\ K = 5$ (h) $N = 7,\ K = 5$ (i) $N = 11,\ K = 5$



(j) $N = 3,\ K = 7$ (k) $N = 7,\ K = 7$ (l) $N = 11,\ K = 7$

图1：使用$\beta_{N,\ K}$ 模型近似单个狄拉克δ函数

强度函数的近似效果较差。图 4a 和图 4d 表明，该近似会在 Ω_1 与 Ω_2中间的角度周围产生扩散的辐射。M_2 模型可以准确表示强度函数，因此$\beta_{2,K}$ 模型的结果在 Ω_1 和 Ω_2周围出现两个亮斑。然而，即使对于 $K = 9$，$\beta_{2,K}$结果仍然显示出大量沿连接 Ω_1 和 Ω_2的方向传播的辐射。这可以很好地

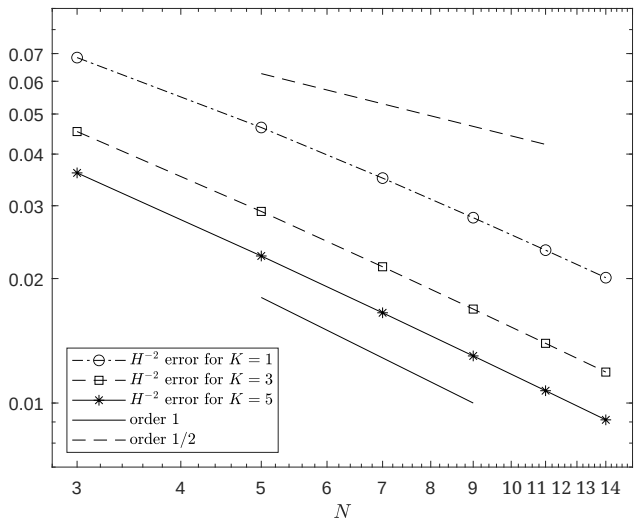


图 2：单个狄拉克δ函数近似的收敛阶

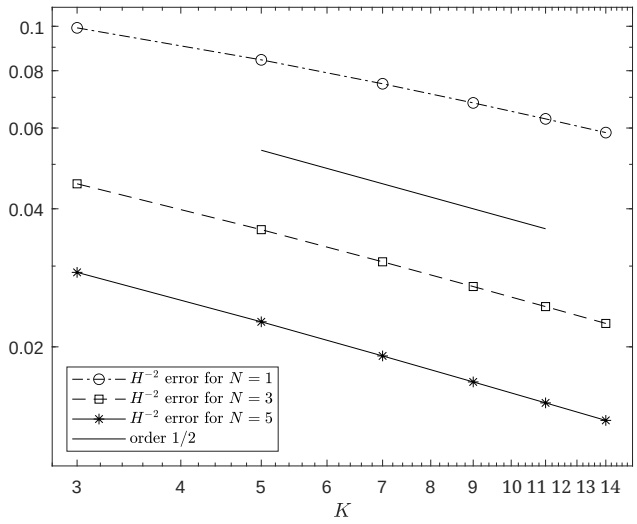


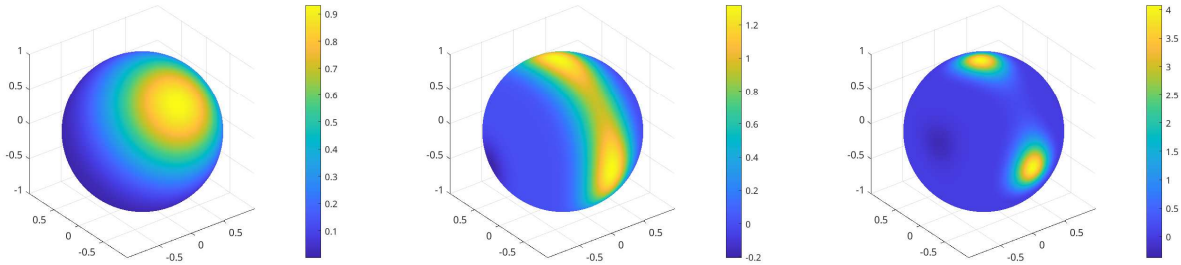
图 3：单个狄拉克δ函数近似的收敛阶

通过增加 N 至 3 来抑制。

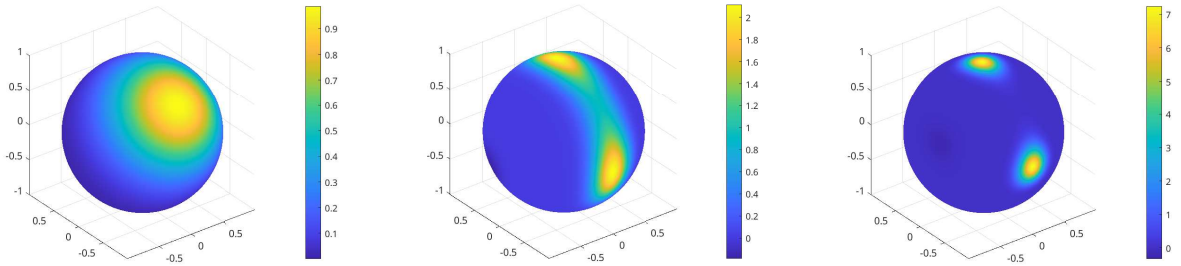
进一步增加 N 将带来更好的近似。我们不展示函数图，而是给出 H^{-2} 数值误差的衰减情况。同样，我们观察到所有 $K = 1$、3 和 5 均呈现一阶收敛。针对三个束流（$n = 3$）的测试表现出类似的行为。此处我们选择

$$\Omega_1 = (0, 0, 1)^\top, \qquad \Omega_2 = (0, -1, 0)^\top, \qquad \Omega_3 = (-1, 0, 0)^\top.$$

结果如图 6 所示。然而，由于 M_2 模型无法表示此类函数，$\beta_{2,\ K}$ 模型也无法产生定性上正确的结果。要获得合理的近似，$\beta_{N,\ K}$ 模型至少需要 $N = 3$ 。



(a) $N = 1$, $K = 5$ (b) $N = 2$, $K = 5$ (c) $N = 3$, $K = 5$



(d) $N = 1$, $K = 9$ (e) $N = 2$, $K = 9$ (f) $N = 3$, $K = 9$

Fi图 4：使用 $\beta_{N,\ K}$ 模型逼近两个狄拉克 δ 函数之和

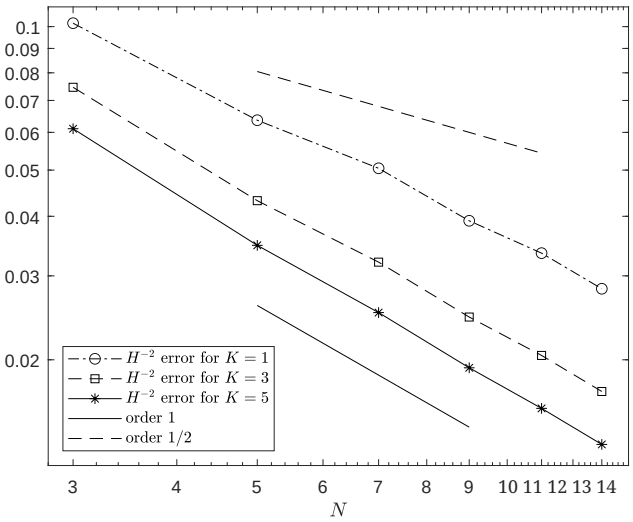
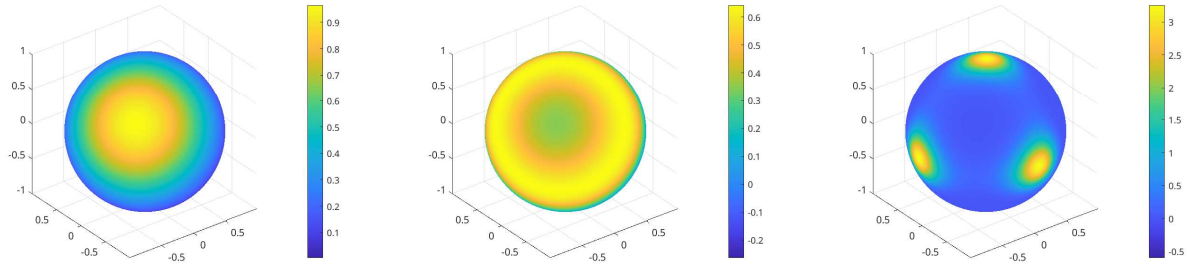


图 5：对两个狄拉克 δ 函数之和的近似的收敛阶

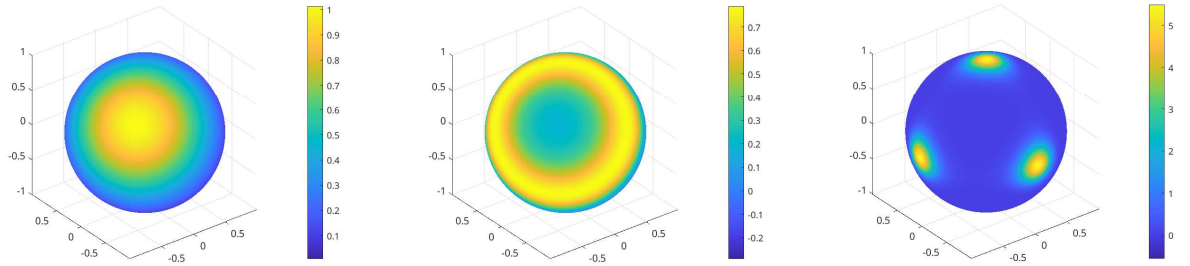
5.1.3 光滑函数的逼近

In t本节中，我们考虑对以下光滑强度函数进行近似：

$$I(\Omega) = \sum_{k=1}^{6} \exp(-5\|\Omega - \Omega_k\|^2), \tag{24}$$



(a) $N = 1, K = 5$ (b) $N = 2, K = 5$ (c) $N = 3, K = 5$



(d) $N = 1, K = 9$ (e) $N = 2, K = 9$ (f) $N = 3, K = 9$

Fi图 6：使用 $\beta_{N,\ K}$ 模式对三个狄拉克 δ 函数之和进行近似 l

其中

$$\Omega_1 = (1,0,0)^\top, \qquad \Omega_2 = (0,1,0)^\top, \qquad \Omega_3 = (0,0,1)^\top,$$
$$\Omega_4 = (-1,0,0)^\top, \qquad \Omega_5 = (0,-1,0)^\top, \qquad \Omega_6 = (0,0,-1)^\top.$$

原函数以及使用 $\beta_{9,\ 1}$ 和 $\beta_{5,\ 3}$ 模型得到的近似结果见图 7。图中显示，$\beta_{5,\ 3}$ 模型的近似效果优于 P_5 模型。然而，随着 N 进一步增大，P_N 模型将开始表现得更好。结果见图 8，其中 P_N 模型的收敛率明显快于另外两个模型，尽管由于纵轴采用对数刻度，$\beta_{N,\ 3}$ 模型和 $\beta_{N,\ 5}$ 模型也表现出谱精度。同时可以看出，$\beta_{N,\ 5}$ 模型的误差略大于 $\beta_{N,\ 3}$ 模型。这种现象的一个可能原因是，$\beta_{N,\ K}$ 模型本质上用一个 N 次多项式来近似函数 $[I(\Omega)]^{1/K}$。当 $K > 1$ 时，函数 $x^{1/K}$ 在 x 接近零时导数较大，因此在 $I(\Omega)$ 值较小的位置，函数 $[I(\Omega)]^{1/K}$ 可能较难近似。

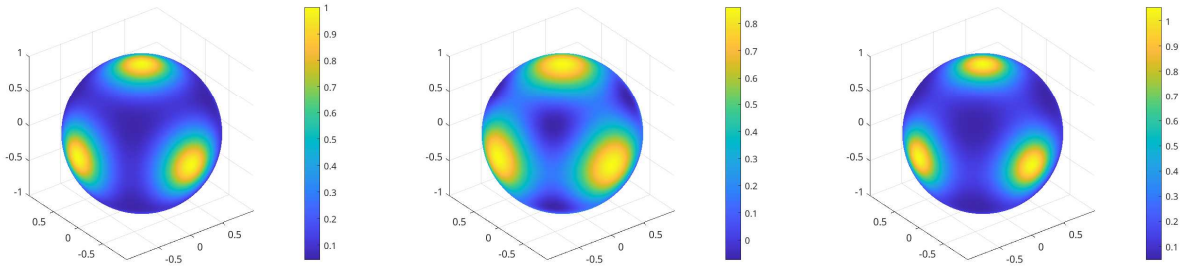
为了验证这一猜想，我们考虑对一个略有不同的函数进行近似

$$I(\Omega) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{6} \exp(-5\|\Omega - \Omega_k\|^2), \tag{25}$$

该函数在强度函数（24）中加入 $1/2$，使其最大值与最小值之比大幅减小。收敛结果见图 9。结果表明，当 $N = 13$ 时，三个模型的表现仍然相近；与前一个示例相比，$\beta_{N,\ 3}$ 和 $\beta_{N,\ 5}$ 模型可以达到小得多的 L^2 误差。尽管如此，由于函数 $x^{1/K}$ 的高阶导数较大，P_N 模型从 $N = 17$ 起仍表现出好得多的结果。

5.2 线源问题

现在，我们在基准线源问题上测试 $\beta_{N,K}$ 模型的性能。该问题常用于展示离散纵标法中的射线效应，并测试矩方法的能力



(a) 原函数　　(b) $\beta_{5,\ 1}$ (P_5)近似　　(c)$\beta_{5,\ 3}$ 近似

图 7：强度函数 (24) 的近似

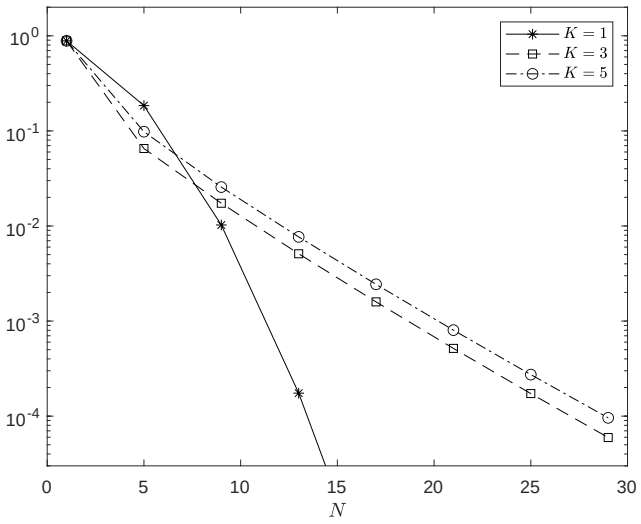


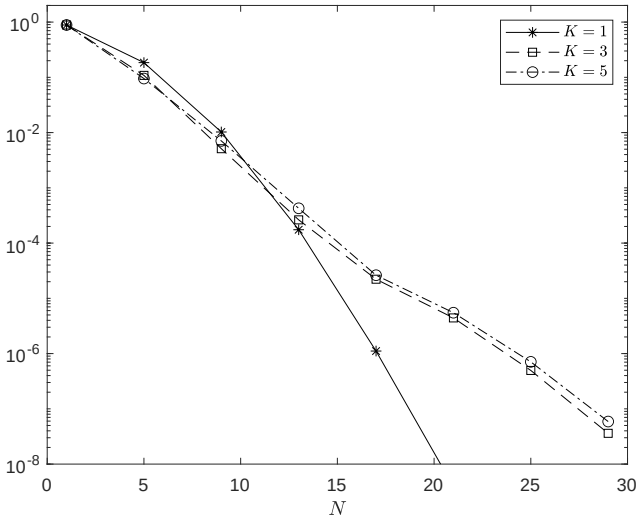
Figure 8：　L^2 强度函数 (24) 近似的误差，采用 $\beta_{N,\ K}$ 模型　　el

[25, 8]。考虑具有如下初始条件的二维空间区域

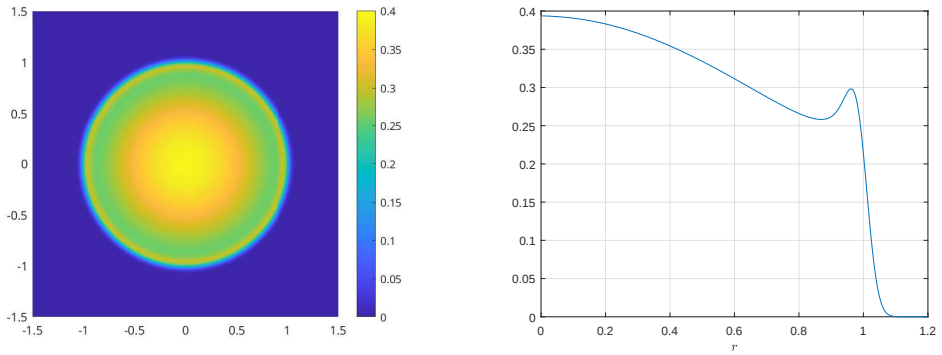
$$I(x, y, \Omega, 0) = \frac{1}{8\pi^2\omega^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\omega^2}\right), \tag{26}$$

该问题模拟了原点处的点源。由于所有方向上都存在束状解，因此极具挑战性。已有多种矩方法在该测试问题上进行了测试，见 [16]。按照 [16]，我们选择 $\omega = 0.03$，并将散射系数设为 $\sigma = 1$。该偏微分方程的格林函数已在 [15]，中求得，因此可以通过对格林函数和初始数据进行卷积，得到初值问题的解。初始条件 (26) 在 $t = 1$ 时的密度精确解（对 $I(x, y, \Omega\ t)$ 关于 Ω 的积分）绘于图 10a。由于初始条件具有径向对称性，因此任意 t 的解也仅取决于半径 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$。密度随 r 变化的曲线绘于图 10b。

由于强度函数呈指数衰减，只需将计算区域设为$[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$。使用包含 400×400 个网格单元的均匀网格对空间域进行离散化，并采用虚单元法模拟边界条件，将虚单元中的所有矩设为零。求解矩反演问题时，使用前一时间步求得的拉格朗日乘子作为牛顿迭代的初值。数值方法的更多细节见第 4 节。计算在 $t = 1$时终止。



Fig图 9: L^2 使用 $\beta_{N,K}$ mod 对强度函数 (25) 的近似误差 el



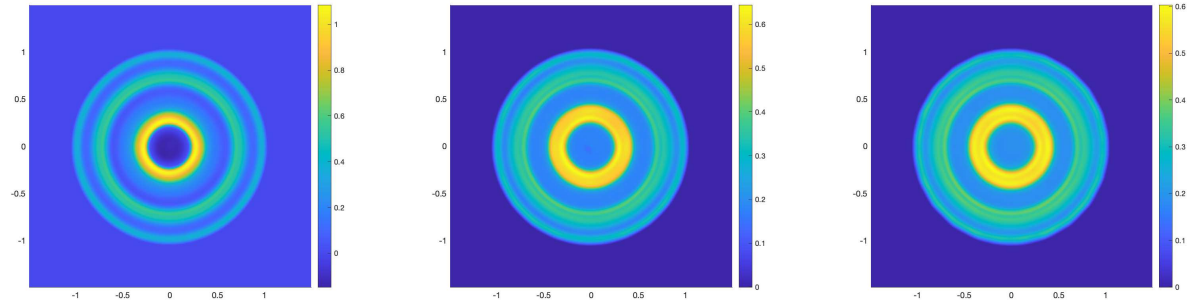
(a) 二维图 (b) 径向图

图 10: 线源问题在 $t = 1$ 时的密度精确解。

P_N 和 M_N 的结果均可在参考文献 [16], 中找到，该文表明， P_N 方法在 $N = 11$处存在强烈振荡。至于 M_N 方法，虽然仍存在振荡，但程度要轻得多。然而，由于 M_N 方法的实现中数值积分并不精确，在二维图中仍可观察到射线效应。这里我们预计，$\beta_{N,\ K}$ 模型的结果应具有介于 P_N 模型与 M_N 模型之间的振荡幅度；并且，由于多项式可以在球面上精确积分，射线效应能够被完全消除。

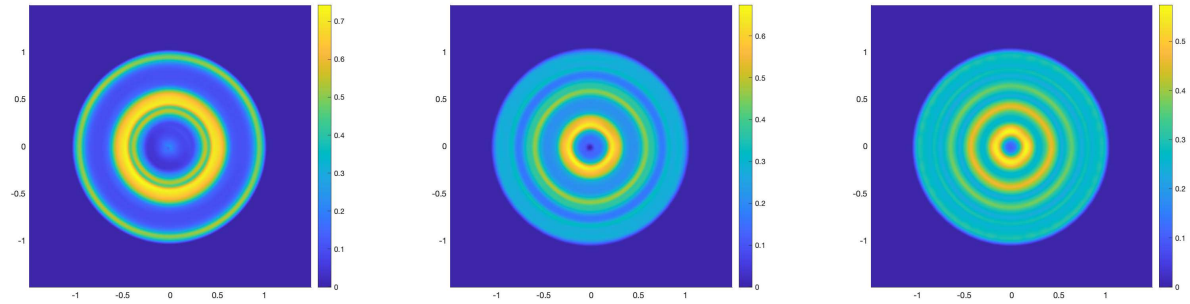
图 11 绘出了若干 $\beta_{5,K}$ 模型在 $t = 1$ 时的密度结果。径向对称性总体上得到了很好的保持，但由于方形网格单元的影响，仍可观察到一些导致轻微不对称的数值伪影。请注意，随着 K 增大，数值解并不会收敛到精确解。相反，我们预期其会收敛到 M_5 模型。M_5 模型的一般波结构在 $K = 7$ 时已经形成，在 $K = 11$ 时变化不大。图 12 展示了一些 $\beta_{N,5}$ 模型的结果。这一次，我们预期随着 N 增大，解会收敛到精确解。随着 N 增大，振荡数量增多，而其振幅减小。将我们的结果与 [16], 中所示的 P_N 和 M_N 模型进行比较可见，$\beta_{N,5}$ 的结果比 P_N 更接近 M_N，且 P_N 结果中的强烈振荡已显著受到抑制。

为了更清楚地比较数值结果与精确解，我们还绘制了



(a) $N = 5, K = 3$ (b) $N = 5, K = 7$ (c) $N = 5, K = 11$

图 11：$\beta_{5,\ K}$ 模型的线源问题解。



(a) $N = 3, K = 5$ (b) $N = 7, K = 5$ (c) $N = 11, K = 5$

图 12：$\beta_{N,5}$ 个模型的线源问题解。

数值解和径向变量的函数。$\beta_{5,K}$ 模型的结果见图 13，从中可以发现，$K = 3$在原点附近有明显的负值部分。从 $K = 5$开始，解的正性得到了良好保持；随着 K 增大，解趋向于 M_5 模型而非精确解，这一趋势十分明显。$\beta_{N,5}$ 的解见图 14。由于奇数阶与偶数阶 N的表现不同，我们将结果分别绘制在两张图中。可以发现，偶数阶 N对应的结果在原点处有峰值，而奇数阶 N对应的结果在原点处则为谷值。

与 [16]，的结果相比，$\beta_{N,K}$ 模型在未滤波模型中表现良好，尤其是在 K 取较小值（如 $K = 5$）时。对于这个特定问题，可以通过添加滤波器进一步改进，这将作为我们未来的研究内容。

5.3 双束相互作用

我们的第三个数值算例是在区域 $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ 中进行的测试，其边界条件如下：

- 左边界条件：对于 $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^\top$，其中 $\Omega_1 > 0$,

$$I(-1/2, y, \Omega, t) = \begin{cases} \delta(\Omega - e_x), & \text{if } y \in [-1/8, 1/8], \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中 $e_x = (1, 0, 0)^\top$。

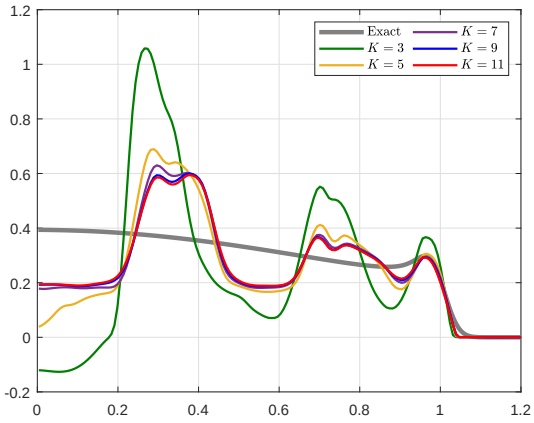
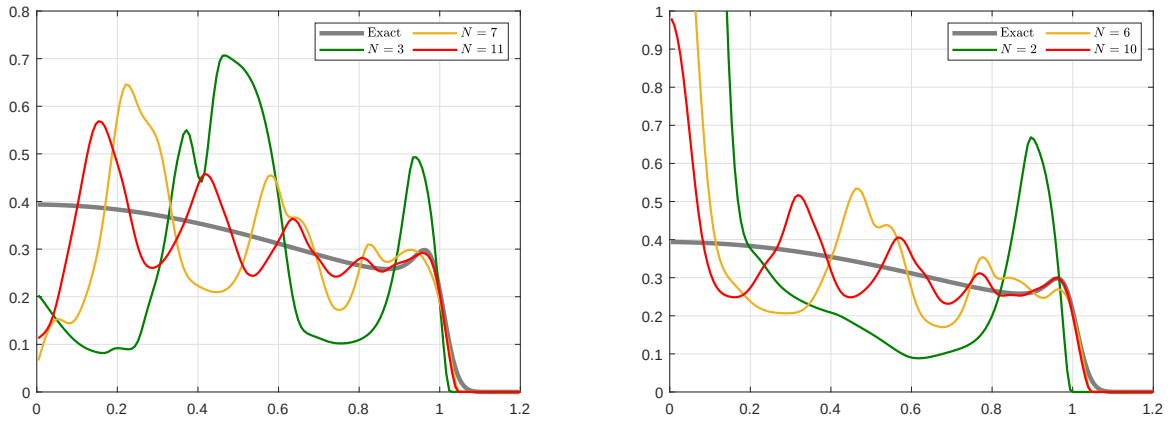


图 13：$\beta_{5,\ K}$ 模型的线源问题解



（a）奇数 N　　（b）偶数 N

图 14：$\beta_{N,\ 5}$ 模型的线源问题解。

- 底部边界条件：对于 $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^\top$ 其中 $\Omega_2 > 0$,

$$I(x, -1/2, \Omega, t) = \begin{cases} \delta(\Omega - e_y), & \text{if } x \in [-1/8, 1/8], \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

  其中 $e_y = (0, 1, 0)^\top$。

- 右侧边界条件：对于 $\Omega = (\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)^\top$ 且 $\Omega_1 < 0$,

$$I(1/2, y, \Omega, t) = 0.$$

- 顶部边界条件：对于 $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^\top$，其中 $\Omega_2 < 0$,

$$I(x, 1/2, \Omega, t) = 0.$$

这些边界条件表示宽度为 $1/4$ 的束流从左侧和底部注入区域。区域内的初始条件为真空：

$$I(x, y, \Omega, 0) = 0, \qquad \forall x \in [-1/2, 1/2] \text{ and } y \in [-1/2, 1/2].$$

空间域采用包含 400×400 个网格单元的均匀网格进行离散化。本测试所使用的数值求解器仍采用第 4 节中描述的计算方案。

我们首先研究无散射的双束问题（$\sigma = 0$）。在这种情况下，两束流会彼此交叉而不发生相互作用。根据第5.1.2节中的讨论，由于精确解仅包含单束或双束强度函数，因此 M_2 模型能够精确模拟此问题。在实验中，我们测试了$\beta_{3,\ K}$ 模型，并在图15中展示了 $t = 0.5$ （两束流均到达区域中部）、 $t = 1$ （两束流均到达区域另一侧）以及 $t = 1.1$ （两束流均完全穿透区域）时的结果。在 $t = 0.5$ （图15第一列）中，已经可以观察到束流明显扩散。增大 K 的值有助于使束流更加集中，但由于我们在图3中看到的收敛率较慢，这种效果并不显著。在 $t = 1$（图15第二列）中，数值解中辐射前沿与边界另一侧之间仍存在明显间隙，这意味着$\beta_{N,\ K}$ 模型的最大特征速度小于1。随着 K增大，间隙会缩小，但只有在极限情形下才能达到等于1的特征速度，也就是说，只有 M_N 模型才能达到。图15最后一列也显示，随着 K 增大，解的改善速度较慢。

现在固定 K 的值并增大 N。部分结果绘于图16。显然，增大 N 比增大 K更有效，因为前者收敛到狄拉克δ函数的速度更快（见图2）。请注意，计算成本也会增长得更快，因为矩方程中的矩数量为 $(N+1)^2$。在 $t = 1$时，对于 $\beta_{7,\ 5}$ 和 $\beta_{9,\ 5}$ 模型，两束流几乎都已到达边界的另一侧，交叉部分也与正方形十分相似。在我们的多数数值结果中，由于束流近似导致来自不同边界点的辐射重叠，最大值可能略大于2。但解的正性总体上得到了很好的保持。

最后一项测试考虑相同的问题，但散射系数为 $\sigma = 5$。由于存在散射， M_N 模型无法再精确描述辐射传输方程的解，因此我们只研究 $\beta_{N,\ 5}$ 模型。在 $t = 0.3$、0.6 和 1.0 时的结果见图17。由于散射，部分辐射会朝源的方向传播，导致即使在交叉发生之前，辐射密度的最大值也已超过1；两束流相互作用时充分混合。在这个数值算例中，所有 $\beta_{N,\ 5}$ 模型都给出了定性正确的结果，显示了矩方法的有效性。增大 N 仍能得到更尖锐的解，尤其是在 $t = 0.3$这样的较早时刻。

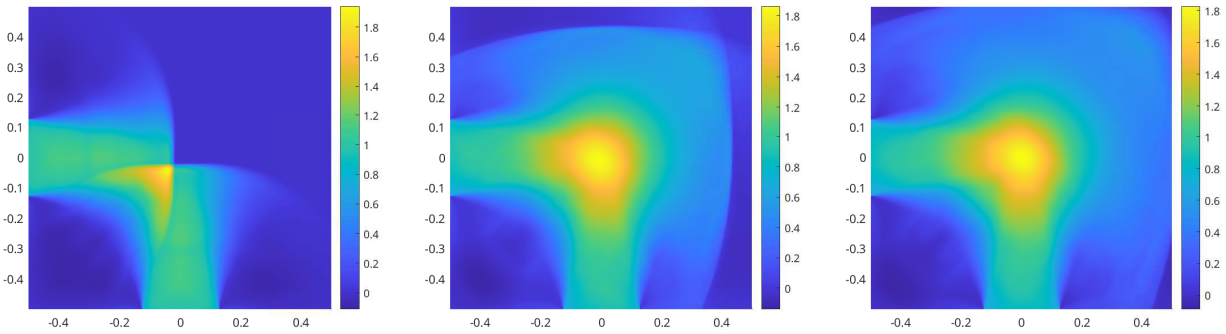
6 结论与未来工作

我们利用 φ-散度定义熵，并据此推导了辐射传输方程的熵矩方程。这些新的矩方程称为 $\beta_{N,\ K}$ 模型，可视为 P_N 模型（$K = 1$）与 M_N 模型（$K = \infty$）之间的插值。这类新模型保留了辐射传输方程几乎所有的基本性质，包括守恒定律、旋转不变性和熵耗散。与 P_N 模型相比，具有 $K > 1$ 的 $\beta_{N,\ K}$ 模型能更好地捕捉束流等奇异强度函数；而与 M_N 模型相比，$\beta_{N,\ K}$模型对应的矩反演问题更易求解。我们的工作为辐射传输方程的矩方程体系增添了多种可能性，使其在应用中拥有更多选择。

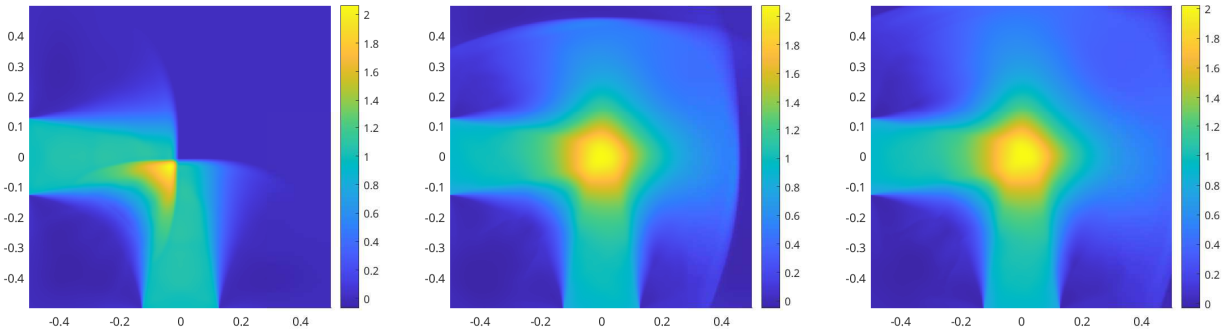
我们将在未来的工作中进一步改进 $\beta_{N,\ K}$ 模型。在本文中，矩反演问题中的所有积分均采用精确计算；当 N 和 K 较大时，这需要大量求积点。可以采用更好的积分规则来降低计算成本。此外，为了更好地模拟线源问题，可以考虑在 $\beta_{N,\ K}$ 模型中添加滤波器，以获得更平滑的结果。

致谢

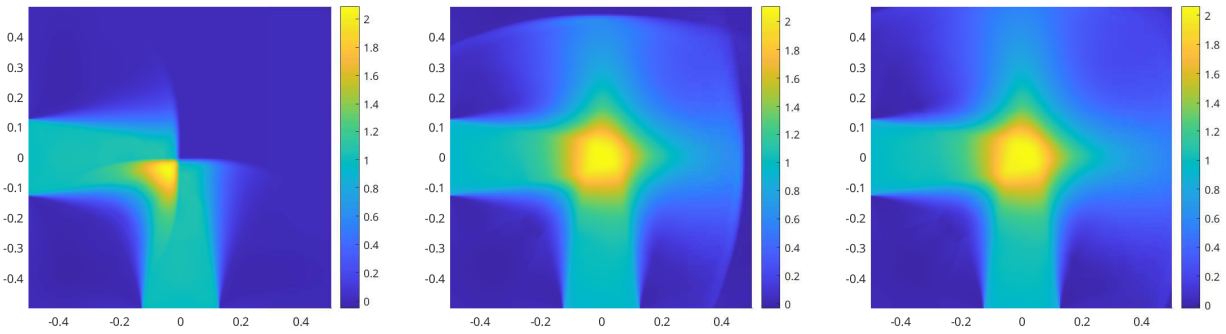
蔡振宁获得新加坡教育部学术研究基金的资助，项目编号为 A-0004592-00-00。



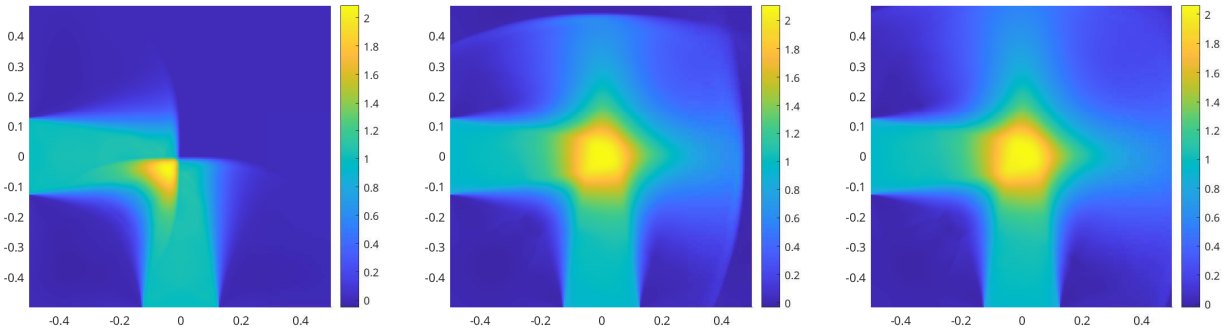
(a) $K = 3,\ t = 0.5$ (b) $K = 3,\ t = 1$ (c) $K = 3,\ t = 1.1$



(d) $K = 5,\ t = 0.5$ (e) $K = 5,\ t = 1$ (f) $K = 5,\ t = 1.1$

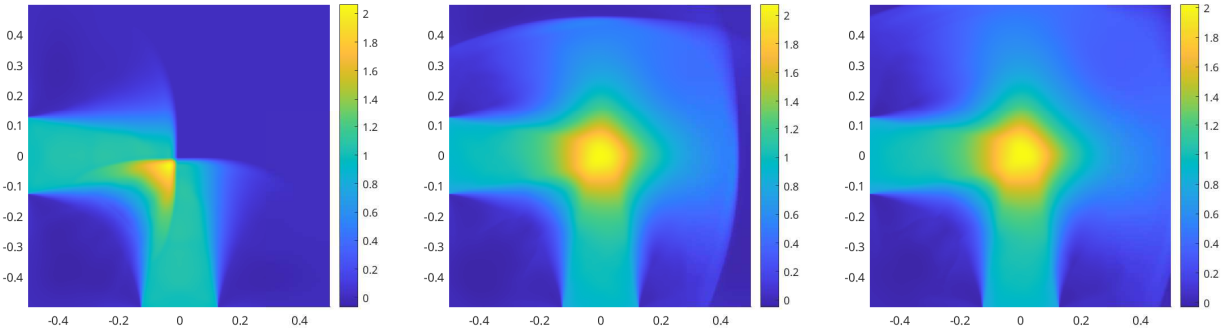


(g) $K = 7,\ t = 0.5$ (h) $K = 7,\ t = 1$ (i) $K = 7,\ t = 1.1$

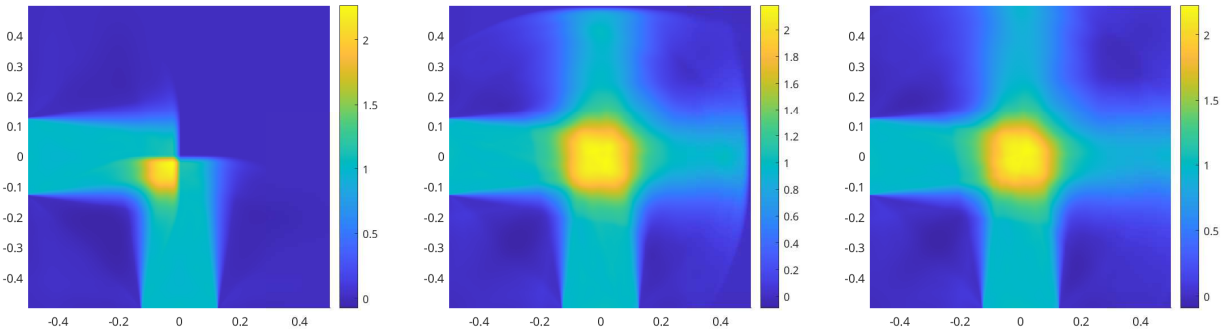


(j) $K = 9,\ t = 0.5$ (k) $K = 9,\ t = 1$ (l) $K = 9,\ t = 1.1$

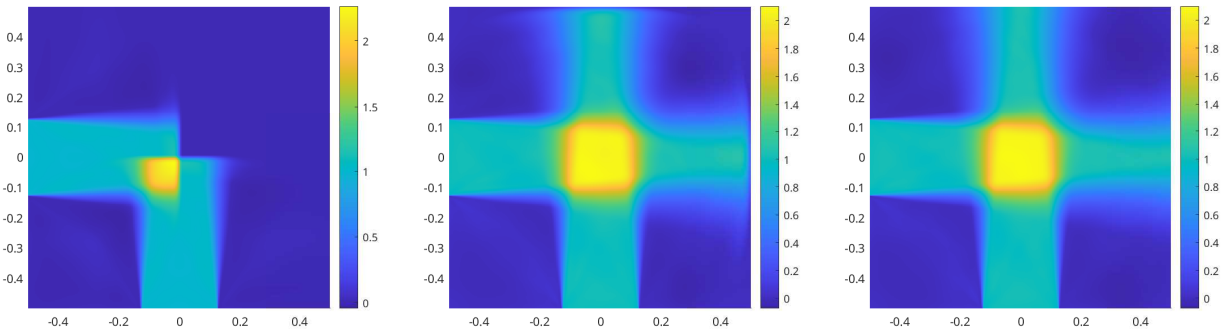
图 15：$\beta_{3,K}$ 模型的双束问题解



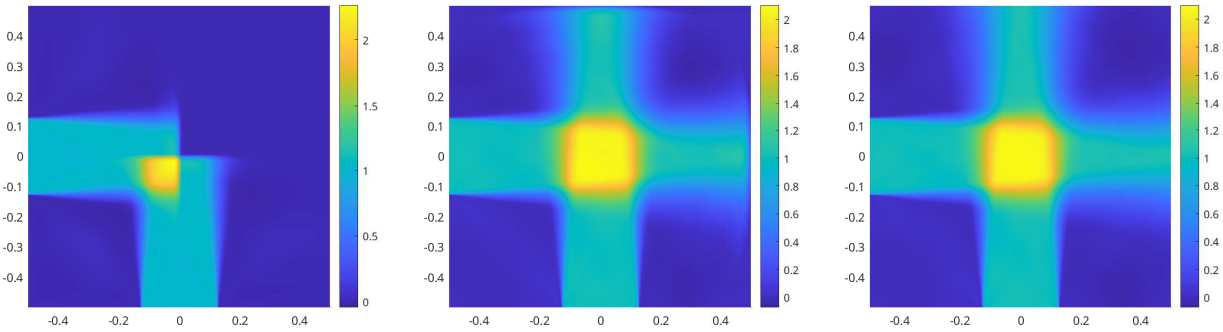
(a) $N = 3, \quad t = 0.5$ (b) $N = 3, \quad t = 1$ (c) $N = 3, \quad t = 1.1$



(d) $N = 5, \quad t = 0.5$ (e) $N = 5, \quad t = 1$ (f) $N = 5, \quad t = 1.1$

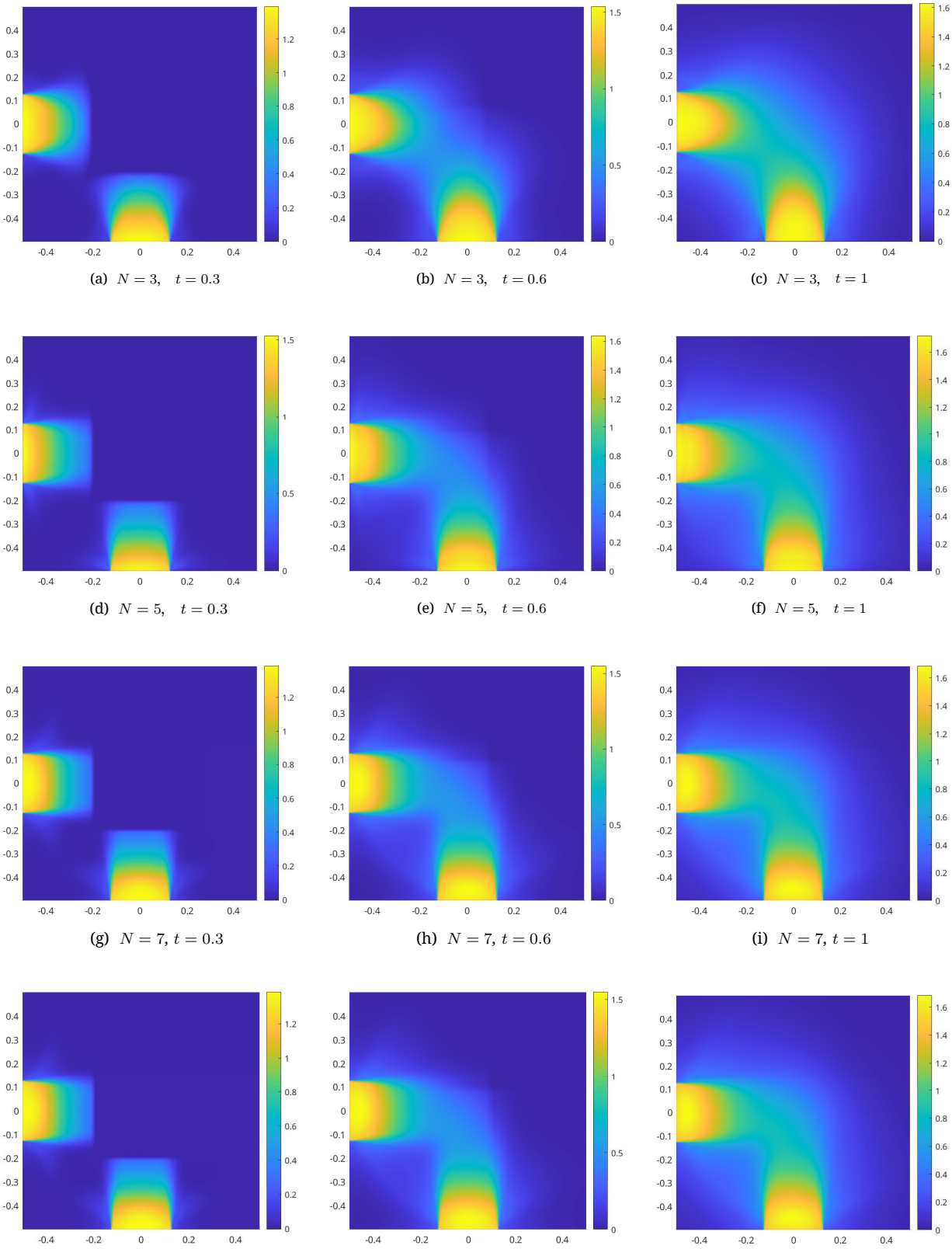


(g) $N = 7,\ t = 0.5$ (h) $N = 7,\ t = 1$ (i) $N = 7,\ t = 1.1$



(j) $N = 9,\ t = 0.5$ (k) $N = 9,\ t = 1$ (l) $N = 9,\ t = 1.1$

图 16：$\beta_{N,5}$ 模型的双束问题解



(a) $N = 3, \quad t = 0.3$ (b) $N = 3, \quad t = 0.6$ (c) $N = 3, \quad t = 1$

(d) $N = 5, \quad t = 0.3$ (e) $N = 5, \quad t = 0.6$ (f) $N = 5, \quad t = 1$

(g) $N = 7,\ t = 0.3$ (h) $N = 7,\ t = 0.6$ (i) $N = 7,\ t = 1$

(j) $N = 9,\ t = 0.3$ (k) $N = 9,\ t = 0.6$ (l) $N = 9,\ t = 1$

图17：$\beta_{N,\ 5}$ 模型的含散射双束问题解

参考文献

[1] M. Abdelmalik, 《玻尔兹曼方程最优多尺度模型层次结构的自适应算法：动理学理论的 Galerkin 方法》，博士论文，埃因霍温理工大学，2017年。[2] M. Abdelmalik 和 H. van Brummelen, 基于 φ-散度的玻尔兹曼方程矩闭合近似，《统计物理学杂志》（2016年），第164卷，77–104页。[3] G. W. Alldredge、C. D. Hauck、D. P. O'Leary 和 A. L. Tits，线性动力学方程基于熵的矩闭合中的自适应基变换，《J. Comp. Phys.》74（2014年），第4期，489–508页。[4] G. W. Alldredge、C. D. Hauck 和 A. L. Tits，平板几何中线性输运的高阶基于熵的闭合 II：优化问题的计算研究，《SIAM科学计算杂志》34（2012年），第4期，361–391页。[5] J. A. Barcel´o、M. Folch-Gabayet、T. Luque、S. P´erez-Esteva 和 M. C. Vilela，球面 Sobolev 空间中分布的傅里叶延拓算子与亥姆霍兹方程，《爱丁堡皇家学会会刊：A辑 数学》151（2021年），第6期，1768–1789页。[6] H. Bloch、P. Tremblin、M. Gonz´alez、T. Padioleau 和 E. Audit，一种基于 M_1 模型的高性能、可移植渐近保持辐射流体力学代码，《天文学与天体物理学》646（2021年），1–17页。[7] L. E. J. Brouwer，关于 n维区域不变性的证明，《数学年刊》71（1911年），305–313页。[8] T. Camminady、M. Frank、K. K¨upper 和 J. Kusch，通过求积旋转缓解离散纵标法中的射线效应，《J. Comput. Phys.》382（2019年），105–123页。[9] C. Canuto、M. Y. Hussaini、A. Quarteroni 和 T. A. Zang，《谱方法：单一区域基础》，施普林格出版社，2006年。[10] I. Csisz´ar，观测信道信息量度的一类，《Periodica Mathematica Hungarica》2（1972年），191–213页。[11] R. Dautray 和 J.-L. Lions，《科学与技术的数学分析与数值方法：第6卷，演化问题 II》，Springer，2000年。[12] W. Dreyer，非平衡态下熵的最大化，《J. Phys. A: Math. Gen.》20（1987年），6505–6517页。[13] B. Dubroca 和 J.-L. Feugeas，辐射传输方程的熵矩闭合层次结构，《C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I》329（1999年），915–920页。[14] R. Duclous，《多尺度动理学电子输运的建模与数值模拟》，博士论文，波尔多大学，2009年。[15] Barray D Ganapol、Randall S Baker、Jon A Dahl 和 Raymond E Alcouffe，均匀无限介质时变解析基准，技术报告，洛斯阿拉莫斯国家实验室，2001年。[16] C. Krœistopher Garrett 和 Cory D. Hauck，线性动力学输运方程矩闭合的比较：线源基准，《输运理论与统计物理学》42（2013年），第6–7期，203–235页。[17] T. Hanawa 和 E. Audit，辐射传输 M_1 模型的重新表述，《J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer》（2014年），第145期，9–16页。[18] C. D. Hauck，平板几何中线性输运的高阶基于熵的闭合，《数学科学通讯》9（2011年），第1期，187–205页。

[19] C. D. Hauck、C. D. Levermore 和 A. L. Tits，凸对偶与基于熵的矩闭合：退化密度的刻画，《SIAM J. Control Optim.》47（2008年），第4期，1977–2015页。[20] J. S. Hesthaven、S. Gottlieb 和 D. Gottlieb，《时变问题的谱方法》，剑桥，2009年。[21] M. Junk，约化矩问题的最大熵，《Math. Mod. Meth. in Appl. Sci.》10（1998年），1001–1028页，2000年。[22] S. Kawashima 和 W.-A. Yong，双曲型平衡律系统的耗散结构与熵，《Arch. Rational Mech. Anal.》174（2004年），345–364页。[23] D. Kershaw，自然的通量限制方式，技术报告，劳伦斯利弗莫尔实验室，1976年。[24] K. K¨upper，《放射治疗的模型、数值方法与不确定性量化》，博士论文，亚琛工业大学，2016年。[25] M. Paul Laiu、C. D. Hauck、R. G. McClarren、D. P. O'Leary 和 A. L. Tits，线性动力学方程的正滤波 P_N矩闭合，《SIAM J. Numer. Anal.》54（2016年），第6期，3214–3238页。[26] J.-B. Lasserre，《矩、正多项式及其应用》，帝国学院出版社，2009年。[27] V.I. Lebedev，球面积分公式，《USSR Comput. Math. Math. Phys.》16（1976年），第2期，10–24页。[28] V.I. Lebedev 和 D.N. Laikov，代数精度阶为131的球面积分公式，《数学报告》59（1999年），第3期，477–481页。[29] C. D. Leveremore，埃丁顿因子与通量限制器的关系，《J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer》31（1984年），149–160页。[30] C. D. Levermore，动理学理论的矩闭合层级，《统计物理学杂志》83（1996年），第5–6期，1021–1065页。[31] R. Li 和 W. Li，辐射传输方程的三维 B_2 模型，《Int. J. Numer. Anal. Modeling》17（2020年），第1期，118–150页。[32] E. Audit、M. Gonz´alez 和 P. Huynh，Heracles：三维辐射流体力学代码，《天文学与天体物理学》64（2007年），429–435页。[33] D. Mihalas 和 B. R. W. Mihalas，《辐射流体力学基础》，牛津，1983年。[34] G. N. Minerbo，最大熵埃丁顿因子，《J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer》20（1978年），541–545页。[35]P. Monreal，《辐射传输中的矩可实现性与 Kershaw 闭合》，博士论文，亚琛工业大学，2012年。[36] J. Page，《在熵矩 m1 模型中开发并验证洛伦兹力的应用。研究磁场对外照射放射治疗中剂量沉积的影响》，博士论文，波尔多大学，2018年。[37] T. Pichard，《光子治疗与质子治疗剂量沉积的数学建模》，博士论文，波尔多大学，2016年。[38] T. Pichard，基于在可实现域边界上投影的矩闭合：一维情形，《Kin. rel. models》（2020年），第13卷，1243–1280页。[39] T. Pichard、G. W. Alldredge、S. Brull、B. Dubroca 和 M. Frank，M_2 闭合的一种近似：在放射治疗剂量模拟中的应用，《J. Sci. Comput.》（2017年），第71卷，71–108页。[40] G. C. Pomraning，《辐射流体力学方程》，培格曼出版社，1973年。

[41] J. A. R. Sarr 和 C. P. T. Groth，灰色参与介质辐射传热的二阶最大熵启发的插值闭合，J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer（2020年），107238。[42] K. Schmuedgen，《矩问题》，Springer，2017年。[43] F. Schneider，平板几何中的线性输运方程 Kershaw 闭合 I：模型推导，J. Comput. Phys.（2016年），第 322 卷，905–919。[44] J. Schneider，动理学理论中的熵近似，ESAIM: M2AN 38（2004年），第 3 期，541–561。