arXiv:2304.01769v1 [math.DG] 4 Apr 2023

三维无视界黎曼 Penrose 不等式

JINTIAN ZHU

Abstract. 基于 μ-泡方法，我们能够证明以下版本的黎曼 Penrose 不等式 *without horizon*：若g 是定义在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 上的一个完备度量，具有非负标量曲率，且在 $\mathbb{R}^3$的无穷远处渐近平坦，则 $\mathbb{R}^3$ 无穷远处的ADM质量 m 满足 $m \geq \sqrt{\frac{A_g}{16\pi}}$，其中 A_g 表示 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$中与 $\mathbb{S}^2$(1) 同调的嵌入闭曲面的面积下确界。此外，等号成立当且仅当存在一个严格外向极小的极小二维球面，使得其外部区域

与质量为 $\sqrt{\frac{A_g}{16\pi}}$的半施瓦西流形等距。

1. Introduction

若一个完备黎曼 n-流形 (M, g) 满足 $n \geq 3$，并且存在一个紧子集 $K \subset M$，使得

(i) 补集 $M - K$ 有有限个端，每个端都与 $\mathbb{R}^n - B_1$ 微分同胚，且满足 $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$；(ii) 在上述欧几里得坐标图中，度量 g 满足

$$|g_{ij} - \delta_{ij}| + |x||\partial g_{ij}| + |x|^2|\partial^2 g_{ij}| = O\left(|x|^{2-n}\right) \text{ as } |x| \to +\infty, \tag{1.1}$$

(iii) 标量曲率 $R(g)$ 属于 $L^1(M, g)$。

为方便起见，将具有渐近形式 (1.1) 的端 $(\mathcal{E}, g)$ 称为渐近平坦端。回忆一下，与 (M, g) 的每个渐近平坦端 $\mathcal{E}$ 相关联的 Arnowitt-Deser-Misner (ADM) 质量（参见 [ADM61]）定义为

$$m(M, g, \mathcal{E}) = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{\rho \to +\infty} \int_{S_\rho} (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}) \nu^i \, d\sigma,$$

其中 ω_{n-1} 是单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$(1)的体积， S_ρ 是坐标ρ-球面 $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \rho\}$，而 ν 是 $\mathbb{R}^n$中 S_ρ 的外向单位法向量。

受广义相对论的启发，人们对证明非负标量曲率的渐近平坦流形的 ADM 质量下界抱有浓厚兴趣。Schoen-Yau [SY79, SY81]（以及 Witten [Wit81]）证明了著名的黎曼几何正质量定理：如果给定的渐近平坦三维流形 (M, g) 具有非负标量曲率，那么其每个渐近平坦端的 ADM 质量都必须非负，其中

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C21, 53C24.1

当且仅当 (M, g) 与欧几里得三维空间 $(\mathbb{R}^3, g_{euc})$ 等距时，ADM 质量才为零。作为对 ADM 质量更定量的估计，Bray [Bra01]证明了著名的黎曼 Penrose 不等式：若 (M, g) 是具有非负标量曲率的渐近平坦三维流形，且 Σ是相对于某个渐近平坦端 $\mathcal{E}$的最外层极小二维球面，则有 $m(M, g, \mathcal{E}) \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|_g}{16\pi}}$，等号成立当且仅当 Σ 之外的区域与质量为 $\sqrt{\frac{|\Sigma|_g}{16\pi}}$的半施瓦西流形等距。（当 Σ 是单个二维球面时的情形由 Huisken-Ilmanen [HI01] 处理，近期 [AMMO22, HMT22] 也对此进行了研究。）关于这些结果在高维中的类似结论，读者可参阅 [Sch89, Wit81, SY22, BL09], ；但本文仅关注足以满足我们目的的三维情形。值得指出的是，Huisken-Ilmanen 并不要求 Σ 一定是极小的，他们更一般的结果可表述如下

定理 1.1（ADM-Hawking 质量不等式 [HI01,AMMO22, HMT22]）。设 (M^3, g) 是一个边界 ∂M 非空且标量曲率非负的渐近平坦三维流形。假设

- ∂M 连通且外向极小（见定义 2.1）；
- M只有一个端 $\mathcal{E}$，并满足 $H_2(M, \partial M, \mathbb{Z}) = 0$。

则有

$$m(M, g, \mathcal{E}) \geq \sqrt{\frac{|\partial M|_g}{16\pi}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial M} H^2 \mathrm{d}\sigma_g\right),$$

其中，H 是相对于内向单位法向量而言的 ∂M 的平均曲率，$\mathrm{d}\sigma_g$ 是关于 ∂M 的诱导度量的面积元。

如果 ∂M 是极小的，则称其为渐近平坦流形 (M, g) 的视界。注意，渐近平坦流形 (M, g) 的每个端上的大坐标球面相对于外向单位法向量都是平均凸的，因此总可以通过极小化面积泛函找到一个视界。因此，黎曼 Penrose 不等式所要求的视界总是存在的。然而，考虑以下更一般的渐近平坦流形类别时，情况可能并非如此。

定义 1.2（Lesourd-Unger-Yau [LUY21]）。具有指定端 $\mathcal{E}$ 的完备黎曼 n-流形 (M, g) 称为具有任意端的渐近平坦流形，若 $n \geq 3$ 且 $\mathcal{E}$ 与 $\mathbb{R}^n - B_1$ 微分同胚，其中度量 g 满足渐近条件 (1.1)，且 $R(g)$ 属于 $L^1(\mathcal{E}, g)$。

注 1.3. 与本节开头提到的渐近平坦流形相比，上述定义的具有任意端的渐近平坦流形允许除指定的渐近平坦端 $\mathcal{E}$之外存在非渐近平坦端。

对具有任意端的渐近平坦流形的研究，受到共形几何中的刘维尔定理的启发。Schoen-Yau [SY88, SY94]将刘维尔定理归结为渐近施瓦西流形（具有任意端）上某种形式的黎曼几何正质量定理，

这一结果最近由 Lesourd-Unger-Yau [LUY21] 证实（一般渐近平坦情形见 [LLU22, Zhu22] ）。

对于具有任意端的渐近平坦流形，视界的存在不再是自动成立的。在附录 A 中，我们构造了一种类似喇叭的度量 $g$on $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ ，使得 ($\mathbb{R}^n \setminus \{O\}, g$) 看起来是一个具有任意端和非负标量曲率的渐近平坦流形，并且它具有由坐标球面组成的全局平均凸叶状分解，从而排除了存在任何极小曲面的可能性。鉴于这一事实，寻找仍能为质量提供下界的适当几何量，似乎是一个很有趣的问题。本文致力于为这一问题寻找可能的答案；我们的思路是将黎曼 Penrose 不等式视为某种形式的等周不等式。

我们的三维情形主定理陈述如下。

定理 1.4。设 O 为 $\mathbb{R}^3$ 的原点， g 为定义在$\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 上的完备度量，且具有非负标量曲率，并且在 $\mathbb{R}^3$的无穷远处渐近平坦。那么， $\mathbb{R}^3$无穷远处的 ADM质量 m 满足

$$m \geq \sqrt{\frac{A_g}{16\pi}}, \tag{1.2}$$

其中 A_g 由下式给出

$$A_g = \inf \left\{ \mathcal{H}_g^2(\Sigma) \,\middle|\, \begin{array}{c} \Sigma \textit{ is a smoothly embedded surface} \\ \textit{homologous to } \mathbb{S}^2(1) \textit{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}. \end{array} \right\}$$

此外，当且仅当存在一个与 $\mathbb{S}^2$(1)同调的严格外向极小极小二维球面 Σ_h ，且 Σ_h 之外的区域与质量为 $\sqrt{\frac{A_g}{16\pi}} > 0$的半施瓦西流形等距时，等号成立。

在我们的定理中，将底流形限制为 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ ，是因为这样便于我们在频繁使用 ADM-Hawking 质量不等式时验证定理 1.1 的拓扑条件。我们在三维情形下开展研究的另一个原因是：我们必须依据 Gromov 的带宽估计 [Gro18] ，为某个曲面控制直径，以控制其平均曲率；此外，我们还需要使用 [GL83], 给出的非紧稳定极小曲面的无穷体积估计，而该估计仅适用于三维流形中的曲面。

尽管本文存在这些技术上的局限，我们仍希望定理 1.4 的一个更一般的版本成立。鉴于 Bray 和 Lee 的工作 [BL09] ，自然可以预期类似结果在三维以上的维数中也成立。结合定理 1.4 所体现的短程性质，我们提出以下更一般的

猜想 1.5（无视界的黎曼 Penrose 不等式）。设 $(M^n, g, \mathcal{E})$ 是一个具有任意端且标量曲率非负的渐近平坦流形。那么有

$$m(M, g, \mathcal{E}) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{A_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

其中 ω_{n-1} 是单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$(1) 的体积，且

$$A_g = \inf\left\{\mathcal{H}_g^{n-1}(\Sigma) \,\middle|\, \begin{array}{c}\Sigma \text{ is a smoothly embedded hypersurface} \\ \text{homologous to } \partial\mathcal{E} \text{ in } M.\end{array}\right\}.$$

此外，当且仅当存在一个与 $\partial\mathcal{E}$ 同调的严格外向极小极小（$n-1$）球面 Σ_h，使得其外部区域 Σ_h 与质量为 $m > 0$ 的半施瓦西流形等距时，等号成立。

在本节余下部分，我们简要说明定理 1.4 的证明。首先注意，当常数 A_g 为零时，不等式 (1.2) 直接由 [LLU22, Zhu22] 中建立的黎曼几何正质量定理得出。若常数 A_g 不为零，受定理 1.1 启发，我们的想法是寻找平均曲率较小的外极小曲面，以便对其外部区域应用定理 1.1，从而在误差任意小的意义下得到所需的质量下界。希望通过设置适当的 μ-泡问题（详见第 2 节）能够构造出这样的曲面，而这足以证明质量不等式 (1.2)。

由于前文讨论中存在一些小误差，因此尚不足以证明刚性，我们必须直接找到视界Σ_h，而不是通过平均曲率很小的曲面进行逼近。作者此前的工作 [Zhu20]讨论了刚性定理或几何不等式的临界情形中极小超曲面的出现，并提出了针对 μ-泡的近似方案。这里我们沿用同一思路，构造一列平均曲率为 $H_i \to 0$、满足 $i \to \infty$ 的 μ-泡 Σ_i，并取其极限曲面 Σ_∞。沿着这一思路，关键在于确保 Σ_i 始终与某个固定紧子集 K相交。在作者的工作 [Zhu20] 中，作者基于 Σ_i 对正标量曲率的拓扑障碍，提出了一种固定技巧。由于这里的 Σ_i 是拓扑 2-球面，这一技巧无法奏效，因此我们必须以更几何的方式获得固定现象。关键的观察是，当黎曼 Penrose 不等式（1.2）取等号时，这些经过适当构造、平均曲率越来越小的曲面无法越过体积具有确定正下界的区域（详见引理 3.2）。结合 A_g 的正性，我们可以证明，一列经过精心构造的 μ-泡始终与某个固定紧子集相交，因而收敛到我们所需的视界 Σ_h。我们在第 3 节中给出刚性证明的全部技术细节。

Acknowledgement

本研究得到中国博士后科学基金资助（项目编号：BX2021013）。作者谨向田刚教授和史玉光教授致以诚挚谢意，感谢他们一直以来的鼓励。作者还感谢毕雨辰博士，在其于中国科学技术大学为期一周的访问期间进行了许多有益的讨论。

2. Proof of(1.2)

本节中，我们将证明所需的不等式（1.2）。首先回顾以下内容

定义 2.1. 设 (M^n, g) 为一个边界 ∂M 非空的黎曼流形。若对于任何包围区域 Ω 且满足 ∂M 的超曲面 Σ ，都有.....，则称 ∂M 为外向极小

$$\mathcal{H}_g^{n-1}(\Sigma) \geq \mathcal{H}_g^{n-1}(\partial M).$$

若等号成立当且仅当 $\Sigma = \partial M$，则称 ∂M 为严格外向极小。

在下文的讨论中，若超曲面 Σ 在（$\mathbb{R}^n \setminus \{O\}, g$）中作为 Σ 外部区域的边界是（严格）外向极小的，则称其为（严格）外向极小。

如前所述，证明 (1.2) 的策略是构造一个连通的严格外极小曲面序列 Σ_i，使得当 $i \to \infty$ 时， Σ_i 的平均曲率 H_i 趋于零。事实上，我们有如下

命题 2.2. 若定理 1.4 中的常数 A_g 为正，则存在一个严格外极小球面序列 Σ_i ，使得当 $i \to \infty$ 时 $H_i \to 0$ 。此外，它们的面积 $\mathcal{H}_g^2(\Sigma_i)$ 一致有界且不小于 A_g。

证明。证明基于 Gromov 在其四讲 [Gro19] 中提出的 μ-泡理论。首先指出，由渐近平坦性可知，存在正常数 r_0 ，使得满足 $r \geq r_0$ 的坐标球面 $S_r := \{|x| = r\}$ 相对于外向单位法向量均为平均凸。记

$$H_0 := \min_{S_{r_0}} H_{S_{r_0}}.$$

下面我们将构造所需的 μ-泡泡。首先构造一些后续会用到的适当函数。对到 S_{r_0} 的有符号距离函数进行标准磨光后，不难构造出一个光滑函数 $\rho : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \to (-\infty, +\infty)$，满足

- $\rho(x) \to -\infty$ as $x \to O$, $\rho(x) \to +\infty$ as $x \to \infty$, and $\operatorname{Lip} \rho < 1$;
- $B_{r_0} \setminus \{O\} = \{\rho < 0\}$, where B_{r_0} is the Euclidean r_0-ball.

对于适当选取的给定函数，我们取

$$h_{\epsilon,\beta}:\left(-\frac{4\beta}{3\epsilon},+\infty\right)\to(\epsilon,+\infty),\quad t\mapsto\epsilon\coth\left(\frac{3}{4}\epsilon t+\beta\right),$$

其中， β 是一个稍后确定的大正数。通过直接计算，很容易验证$h_{\epsilon,\ \beta}$具有以下性质：

- $h_{\epsilon,\ \beta}(t)\ \to+\infty$ 当$t\to-\frac{4\beta}{3\epsilon}$ 且$h'_{\epsilon,\ \beta}<0$时；
- $h_{\epsilon,\ \beta}(t)\ \to\epsilon$ 对于任意固定的 t ， 当 $\beta\to+\infty$时；
- $h_{\epsilon,\ \beta}$ 满足方程

$$2h'_{\epsilon,\beta}+\frac{3}{2}h^2_{\epsilon,\beta}=\frac{3}{2}\epsilon^2.$$

接下来我们处理 $\epsilon<H_0$。在这种情况下，我们可以取足够大的 β ， 以确保$h_{\epsilon,\ \beta}(0)\ <H_0$。现在将 μ-气泡问题设定如下。取

$$M_{\epsilon,\beta}=\left\{x\in\mathbb{R}^3\setminus\{O\}\,\middle|\,\rho(x)>-\frac{4\beta}{3\epsilon}\right\}\cap\bar{B}_{r_0}$$

and

$$\mathcal{C}_{\epsilon,\beta}=\left\{\begin{array}{c}\text{Caccioppoli sets }\Omega\subset\bar{B}_{r_0}\text{ containing the origin }O\\ \text{such that }\bar{B}_{r_0}\setminus\Omega\text{ has compact closure in }M_{\epsilon,\beta}.\end{array}\right\},$$

¯其中 B_{r_0} 表示 B_{r_0}的闭包。考虑泛函

$$\mathcal{A}_{\epsilon,\beta}:\mathcal{C}_{\epsilon,\beta}\to\mathbb{R},\quad\Omega\mapsto\mathcal{H}^2_g(\partial\Omega)+\int_{M_{\epsilon,\beta}}\chi_{\bar{B}_{r_0}\setminus\Omega}\,h_{\epsilon,\beta}\circ\rho\,\mathrm{d}\mathcal{H}^3_g,$$

其中 $\chi_{\bar{B}_{r_0}\setminus\Omega}$ 是如下给出的示性函数

$$\chi_{\bar{B}_{r_0}\setminus\Omega}(x)=\left\{\begin{array}{ll}1, & x\in\bar{B}_{r_0}\setminus\Omega;\\ 0, & x\notin\bar{B}_{r_0}\setminus\Omega.\end{array}\right.$$

由作者的 [Zhu21, 命题 2.1] （另见 [CL20]）可知，存在一个光滑区域 $\Omega_{\epsilon,\beta}$ ，使得其位于 $\mathcal{C}_{\epsilon,\beta}$ 中，并满足

$$\mathcal{A}_{\epsilon,\beta}(\Omega_{\epsilon,\beta})=\min_{\Omega\in\mathcal{C}_{\epsilon,\beta}}\mathcal{A}_{\epsilon,\beta}(\Omega).\tag{2.1}$$

由下文的引理 2.3 即可完成证明。具体而言，我们取一个序列 $\epsilon_i\to0$ ，使其满足 $i\to+\infty$ ，并且 β_i 充分大，从而使 $\Omega_{\epsilon_i,\beta_i}$ 满足引理 2.3 中列出的那些性质。然后我们将 Σ_i 选为其中严格外向极小的曲面$\Sigma_{\epsilon_i,\beta_i,O}$ 。显然有

$$H_i=H_{\epsilon_i,\beta_i,O}\to0\text{ as }i\to+\infty,$$

and

$$A_g\le\mathcal{H}^2_g(\Sigma_i)\le\mathcal{H}^2_g(S_{r_0}).$$

证明至此完成。 □

引理 2.3。$\Omega_{\epsilon,\ \beta}$具有以下性质：

- *the exterior* $\Omega^e_{\epsilon,\beta}$ *of* $\Omega_{\epsilon,\beta}$ *is connected;*

- 包含原点 O 的连通分支 $\Omega_{\epsilon,\beta,O}$ 属于 $\Omega_{\epsilon,\beta}$，与一个三维球同胚，且其边界 $\Sigma_{\epsilon,\beta,O}$ 是光滑嵌入的二维球面；
- $\Sigma_{\epsilon,\beta,O}$ 是严格外向极小的；
- 相对于外向单位法向量，$\Sigma_{\epsilon,\beta,O}$ 的平均曲率 $H_{\epsilon,\beta,O}$ 满足 $0 < H_{\epsilon,\beta,O} < 2\epsilon$，其中 β 足够大。

引理 2.3 的证明。我们逐一验证这些性质。

对于第一个性质，我们采用反证法。假设 Ω 的外部 $\bar{\Omega}^e_{\epsilon,\beta}$ 具有多个连通分支 ϵ,β，那么由 $\Omega_{\epsilon,\beta} \subset B_{r_0}$ 可知，至少存在一个有界的 $\Omega^e_{\epsilon,\beta}$ 连通分支包含于 $M_{\epsilon,\beta}$ 中，记为 U_b。注意，区域 $\Omega_{\epsilon,\beta} \cup U_b$ 仍然位于 $\mathcal{C}_{\epsilon,\beta}$ 中，因此我们可以计算

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\epsilon,\beta}(\Omega_{\epsilon,\beta} \cup \bar{U}_b) &= \mathcal{H}^2_g(\partial\Omega_{\epsilon,\beta} \setminus \partial U_b) + \int_{M_{\epsilon,\beta}} \chi_{\bar{B}_{r_0}\setminus(\Omega_{\epsilon,\beta}\cup\bar{U}_b)}\, h_{\epsilon,\beta}\circ\rho \,\mathrm{d}\mathcal{H}^3_g \\ &= \mathcal{A}_{\epsilon,\beta}(\Omega_{\epsilon,\beta}) - \mathcal{H}^2_g(\partial U_b) - \int_{\bar{U}_b} h_{\epsilon,\beta}\circ\rho \,\mathrm{d}\mathcal{H}^3_g \\ &< \mathcal{A}_{\epsilon,\beta}(\Omega_{\epsilon,\beta}),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式来自以下事实：$\mathcal{H}^2_g(\partial U_b) > 0$ 以及 $h_{\epsilon,\beta} > \epsilon$。这显然与极小化性质（2.1）相矛盾。

对于第二个性质，我们只需证明 $\Sigma_{\epsilon,\beta,O}$ 是一个光滑嵌入的二维球面，由此 $\Omega_{\epsilon,\beta,O}$ 的三维球拓扑可由 Alexander 定理 [Hat07，定理 1.1]得到。首先，我们证明$\Sigma_{\epsilon,\beta,O}$ 是连通的。否则，利用 $\Omega^e_{\epsilon,\beta}$ 和 $\Omega_{\epsilon,\beta,O}$的连通性，我们可以构造一条闭曲线，使其仅与 $\mathbb{R}^3$ 中的某个连通分支 $\Sigma_{\epsilon,\beta,O}$相交一次。另一方面，我们有简单的事实 $H_1(\mathbb{R}^3, \mathbb{Z}) = 0$。这说明该闭曲线与任意闭曲面的代数交数都应为零，从而导致矛盾。现在，让我们通过经典的变分论证确认 $\Sigma_{\epsilon,\beta,O}$ 的球面拓扑。由第一变分我们可以计算

$$\int_{\Sigma_{\epsilon,\beta,O}} (H_{\epsilon,\beta,O} - h_{\epsilon,\beta}\circ\rho)\psi \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_g = 0 \text{ for any } \psi \in C^\infty_0(\Sigma_{\epsilon,\beta,O}),$$

其中$H_{\epsilon,\beta,O}$是相对于外向单位法向量的平均曲率。因此，我们有$H_{\epsilon,\beta,O} = h_{\epsilon,\beta}\circ\rho$ 在$\Sigma_{\epsilon,\beta,O}$。由二阶变分可得

$$\begin{aligned}&2\int_{\Sigma_{\epsilon,\beta,O}} |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_g \geq \\ &\int_{\Sigma_{\epsilon,\beta,O}} \left(R(g) - R_{\epsilon,\beta,O} + H^2_{\epsilon,\beta,O} + |A_{\epsilon,\beta,O}|^2 + 2\partial_\nu(h_{\epsilon,\beta}\circ\rho)\right)\psi^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_g\end{aligned} \tag{2.2}$$

对于任意的 $\psi \in C^\infty_0(\Sigma_{\epsilon,\beta,O})$，其中 $R_{\epsilon,\beta,O}$ 和 $A_{\epsilon,\beta,O}$ 分别是 $\Sigma_{\epsilon,\beta,O}$ 的标量曲率和第二基本形式。在取 $\psi \equiv 1$ 之后，我们

see

$$4\pi\chi(\Sigma_{\epsilon,\beta,O}) \geq \int_{\Sigma_{\epsilon,\beta,O}} R(g) + H^2_{\epsilon,\beta,O} + |A_{\epsilon,\beta,O}|^2 + 2\partial_\nu(h_{\epsilon,\beta}\circ\rho)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_g$$
$$\geq \int_{\Sigma_{\epsilon,\beta,O}} R(g) + \left(\frac{3}{2}h^2_{\epsilon,\beta} + 2h'_{\epsilon,\beta}\right)\circ\rho\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2_g > 0,$$

其中我们用到了 $\mathrm{Lip}\,\rho < 1$ 和 $R(g) \geq 0$ 这些事实，以及

$$2h'_{\epsilon,\beta} + \frac{3}{2}h^2_{\epsilon,\beta} = \frac{3}{2}\epsilon^2 > 0. \tag{2.3}$$

由此可知，$\Sigma_{\epsilon,\,\beta,\,O}$ 是一个二维球面。

对于第三个性质，我们取 Σ 为任意一个闭曲面，它围住一个有界区域 Ω，该区域包含 $\Omega_{\epsilon,\,\beta,\,O}$。回想一下，在 B_{r_0} 外部存在一个平均凸叶状分解，因此坐标球面 S_{r_0} 是严格外向极小的。现在取一个新的曲面 $\Sigma_{r_0} = \partial\Omega_{r_0}$，使得 $\Omega_{r_0} = \Omega \cap B_{r_0}$。于是我们有

$$\mathcal{H}^2_g(\Sigma) - \mathcal{H}^2_g(\Sigma_{r_0}) = \mathcal{H}^2_g\left(\partial(\Omega\cup B_{r_0})\right) - \mathcal{H}^2_g(S_{r_0}) \geq 0,$$

其中，当且仅当 $\Omega \subset B_{r_0}$ 且 $\Sigma_{r_0} = \Sigma$ 时等号成立。由于 Ω_{r_0} 包含于 B_{r_0}，并集 $\Omega_{\epsilon,\,\beta}\cup\Omega_{r_0}$ 仍属于集合 $\mathcal{C}_{\epsilon,\,\beta}$。根据 $\Omega_{\epsilon,\,\beta}$ 的极小化性质，我们有 $\mathcal{A}_{\epsilon,\,\beta}(\Omega_{\epsilon,\,\beta}\cup\Omega_{r_0}) \geq \mathcal{A}_{\epsilon,\,\beta}(\Omega_{\epsilon,\,\beta})$。我们可以计算

$$\mathcal{H}^2_g(\Sigma_{r_0}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}) \geq \mathcal{H}^2_g(\partial\Omega_{\epsilon,\beta}\cap\bar{\Omega}_{r_0}) + \int_{\Omega_{r_0}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}} h_{\epsilon,\beta}\circ\rho\,\mathrm{d}\mathcal{H}^3_g, \tag{2.4}$$

其中我们用到了如下关系

$$\mathcal{H}^2_g\left(\partial(\Omega_{\epsilon,\beta}\cup\Omega_{r_0})\right) = \mathcal{H}^2_g(\partial\Omega_{\epsilon,\beta}\setminus\bar{\Omega}_{r_0}) + \mathcal{H}^2_g(\partial\Omega_{r_0}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}).$$

由于 $\Omega_{\epsilon,\,\beta,\,O}\subset\Omega_{r_0}$，我们可知 $\Sigma_{\epsilon,\,\beta,\,O}\subset\Omega_{r_0}$，因此

$$\mathcal{H}^2_g(\partial\Omega_{\epsilon,\beta}\cap\bar{\Omega}_{r_0}) \geq \mathcal{H}^2_g(\Sigma_{\epsilon,\beta,O}).$$

将其代入 (2.4) 后，我们得到所需的不等式

$$\mathcal{H}^2_g(\Sigma) \geq \mathcal{H}^2_g(\Sigma_{r_0}) \geq \mathcal{H}^2_g(\Sigma_{r_0}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}) \geq \mathcal{H}^2_g(\Sigma_{\epsilon,\beta,O}). \tag{2.5}$$

等号成立时，我们有

$$\mathcal{H}^2_g(\Sigma_{r_0}) = \mathcal{H}^2_g(\Sigma_{r_0}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}) \text{ and } \int_{\Omega_{r_0}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}} h_{\epsilon,\beta}\circ\rho\,\mathrm{d}\mathcal{H}^3_g = 0.$$

结合 $h_{\epsilon,\,\beta} > \epsilon$ 这一事实，我们得出 Σ_{r_0} 位于 $\Omega_{\epsilon,\,\beta}$ 之外，并且 $\Omega_{\epsilon,\,\beta,\,O}\subset\Omega_{r_0}\subset\Omega_{\epsilon,\,\beta}$，这意味着 Ω_{r_0} 只是 $\Omega_{\epsilon,\,\beta}$的若干个连通分支之并。由

$$\mathcal{H}^2_g(\Sigma) = \mathcal{H}^2_g(\Sigma_{r_0}) = \mathcal{H}^2_g(\Sigma_{\epsilon,\beta,O})$$

我们得到 $\Sigma = \Sigma_{r_0} = \Sigma_{\epsilon,\,\beta,\,O}$。这验证了 $\Sigma_{\epsilon,\,\beta,\,O}$ 是严格外极小的。

对于第四个性质，我们希望证明 $\Sigma_{\epsilon,\,\beta,\,O}$ 属于 $\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ 的某个紧子集 K_ϵ，且该子集与 β 无关。由此，我们可以取足够大的 β

使得 $0 < H_{\epsilon,\ \beta,\ O} < 2\epsilon$。首先指出，$\Sigma_{\epsilon,\ \beta,\ O}$ 的直径有一个正的上界常数 $D = D（\epsilon）$。回顾 (2.2) 和 (2.3)，我们有

$$\lambda_1\left(-\Delta + \frac{1}{2}R_{\epsilon,\beta,O}\right) \geq \frac{3}{4}\epsilon^2.$$

记 u 为相应的第一特征函数。众所周知，u是在 $\Sigma_{\epsilon、\ \beta、\ O}$ 上的正光滑函数，因此我们可以考虑扭曲度量

$$g_{warp} = g_{\epsilon,\beta,O} + u^2\mathrm{d}\theta^2 \text{ on } \Sigma_{\epsilon,\beta,O} \times \mathbb{S}^1,$$

其中 $g_{\epsilon、\ \beta、\ O}$ 是 $\Sigma_{\epsilon、\ \beta、\ O}$的诱导度量。直接计算可得

$$R(g_{warp}) = R_{\epsilon,\beta,O} - \frac{2\Delta u}{u} \geq \frac{3}{2}\epsilon^2 > 0.$$

由 Gromov 的带宽度估计 [Gro18] 可知，$\Sigma_{\epsilon、\ \beta、\ O}$ 的直径不超过 $D(\epsilon) = \frac{4\pi}{3\epsilon}$。其次，我们论证 $\Sigma_{\epsilon、\ \beta、\ O}$ 必与紧子集相交

$$V_\epsilon = \left\{-\frac{\mathcal{H}_g^2(S_{r_0})}{\epsilon A_g} \leq \rho \leq 0\right\}.$$

否则，由事实 $\Omega_{\epsilon,\ \beta,\ O} \subset B_{r_0}$ 和 $B_{r_0}\setminus\{O\} = \{\rho < 0\}$ 可知，$\bar{\Omega}_{\epsilon,\ \beta,\ O}$ 包含于 $\{\rho < -\mathcal{H}_g^2(S_{r_0})/\epsilon A_g\}$中。特别地，对于 ρ的任意负正则值 s，只要其不小于 $-\mathcal{H}_g^2(S_{r_0})/\epsilon A_g$，由 (2.5) 得

$$\mathcal{H}_g^2(\{\rho = s\} \setminus \Omega_{\epsilon,\beta}) \geq \mathcal{H}_g^2(\Sigma_{\epsilon,\beta,O}) \geq A_g.$$

由 $\Omega_{\epsilon,\ \beta}$ 的极小化性质可得 $\mathcal{A}_{\epsilon,\ \beta}(\Omega_{\epsilon,\ \beta}) \leq \mathcal{A}_{\epsilon,\ \beta}(B_{r_0})$，即

$$\mathcal{H}_g^2(\partial\Omega_{\epsilon,\beta}) + \int_{\bar{B}_{r_0}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}} h_{\epsilon,\beta}\circ\rho\,\mathrm{d}\mathcal{H}_g^3 \leq \mathcal{H}_g^2(S_{r_0}).$$

由余面积公式可计算得

$$\begin{aligned}\int_{\bar{B}_{r_0}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}} h_{\epsilon,\beta}\circ\rho\,\mathrm{d}\mathcal{H}_g^3 &\geq \int_{\left\{-\frac{\mathcal{H}_g^2(S_{r_0})}{\epsilon A_g}\leq\rho\leq 0\right\}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}} h_{\epsilon,\beta}\circ\rho\,\mathrm{d}\mathcal{H}_g^3\\ &\geq \int_{-\frac{\mathcal{H}_g^2(S_{r_0})}{\epsilon A_g}}^0 \mathrm{d}s\int_{\{\rho=s\}\setminus\Omega_{\epsilon,\beta}} h_{\epsilon,\beta}\circ\rho\,\mathrm{d}\mathcal{H}_g^3\\ &> \mathcal{H}_g^2(S_{r_0}),\end{aligned}$$

其中第二行用到了 $\mathrm{Lip}\,\rho < 1$，第三行用到了 $h_{\epsilon,\ \beta}\circ\rho > \epsilon$。由此得到 $\mathcal{H}_g^2(\partial\Omega_{\epsilon,\ \beta}) < 0$，这不可能成立。取 K_ϵ 为 V_ϵ的 $D(\epsilon)$-邻域的闭包，即完成证明。□

（1.2）的证明。若常数 A_g 为零，则（1.2）直接由适用于具有任意端 [的渐近平坦流形的黎曼几何正质量定理得出 22]。接下来考虑情形 $A_g > 0$。在这种情形下，我们可以从命题 2.2 中取一个严格外极小二维球面序列 Σ_i，

其中 $\mathcal{H}_g^2(\Sigma_i) \geq A_g$，并将 $H_i \to 0$ 作为 $i \to +\infty$。记 M_i 为 Σ_i 外部的无界区域，显然有

$$H_2(M_i, \partial M_i, \mathbf{Z}) = H_2(\mathbb{R}^3 - B, \partial B, \mathbf{Z}) = 0.$$

将定理 1.1 应用于 (M_i, g) 后，我们得到

$$\begin{aligned} m &\geq \sqrt{\frac{\mathcal{H}_g^2(\Sigma_i)}{16\pi}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_i} H_i^2 \mathrm{d}\mathcal{H}_g^2\right) \\ &\geq \sqrt{\frac{A_g}{16\pi}} - (16\pi)^{-\frac{3}{2}} \mathcal{H}_g^2(\Sigma_i)^{\frac{3}{2}} \|H_i\|_{L^\infty(\Sigma_i)}^2. \end{aligned}$$

回顾命题 2.2，$\mathcal{H}_g^2(\Sigma_i)$ 是一致有界的。取$i \to +\infty$ 并利用事实 $H_i \to 0$后，我们便得到所需的黎曼 Penrose 不等式

$$m \geq \sqrt{\frac{A_g}{16\pi}}.$$

□

3. 刚性

本节将证明定理 1.4 中关于刚性的部分。我们的思路是在假设 O的条件下，寻找一个包围原点的闭极小曲面

$$m = \sqrt{\frac{A_g}{16\pi}}. \tag{3.1}$$

我们先给出以下面积估计。

引理 3.1. 固定一个欧几里得球 B_{r_0}。存在正常数 $\epsilon_0 = \epsilon_0(r_0, g)$ 和 $\Lambda_0 = \Lambda_0(r_0, g)$，使得若 Σ_ϵ 是 B_{r_0} 中一个严格外极小 2-球面，具有常平均曲率 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，且包围原点 O，则有 $\mathcal{H}_g^2(\Sigma_\epsilon) \leq A_g + \Lambda_0 \epsilon^2$。

证明. 根据定理 1.1，我们有

$$\sqrt{\frac{\mathcal{H}_g^2(\Sigma_\epsilon)}{16\pi}} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{16\pi} \mathcal{H}_g^2(\Sigma_\epsilon)\right) \leq m = \sqrt{\frac{A_g}{16\pi}}.$$

由于 Σ_ϵ 是严格外向极小的，我们有 $\mathcal{H}_g^2(\Sigma_\epsilon) \leq \mathcal{H}_g^2(S_{r_0})$。取

$$\epsilon_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{\mathcal{H}_g^2(S_{r_0})}} \text{ and } \Lambda_0 = \frac{1}{2\pi} A_g \mathcal{H}_g^2(S_{r_0}).$$

那么对于 $0 < \epsilon < \epsilon_0$，我们有

$$\mathcal{H}_g^2(\Sigma_\epsilon) \leq A_g \left(1 - \frac{\epsilon^2}{16\pi} \mathcal{H}_g^2(S_{r_0})\right)^{-2} = A_g + \Lambda_0 \epsilon^2,$$

其中我们使用了以下初等不等式

$$(1-\alpha)^{-2}-1<8\alpha \text{ for } 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

这就完成了证明。 □

为了找到闭极小曲面，我们在构造严格外向极小曲面时还需要以下体积控制。

引理 3.2. 设 B_{r_0}、ϵ_0 和 Λ_0 与引理 3.1 中相同。若 Σ_ϵ 是 B_{r_0} 中一个包围原点 O、平均曲率为常数 $0<\epsilon<\epsilon_0$ 的严格外极小 2-球面，那么对于任意 $0<\tilde{\epsilon}<\epsilon$，我们可以找到一个被 Σ_ϵ 包围、包围原点 O 且平均曲率为常数 $\tilde{\epsilon}$ 的严格外极小 2-球面 $\Sigma_{\tilde{\epsilon}}$，并满足体积估计

$$\mathcal{H}^3_g(\Omega_{\tilde{\epsilon},\epsilon})\le\frac{\Lambda_0\epsilon^2}{\tilde{\epsilon}}, \tag{3.2}$$

其中 $\Omega_{\tilde{\epsilon},\,\epsilon}$ 是由 $\Sigma_{\tilde{\epsilon}}$ 和 Σ_ϵ 围成的区域。

证明。我们按照命题 2.2 的证明，以类似方式设定一个适当的 μ-气泡问题。通过对曲面 Σ_ϵ 的有符号距离函数进行磨光，我们可以构造一个光滑函数 $\rho_\epsilon\colon\ \mathbb{R}^3\setminus\{O\}\to(-\infty,+\infty)$，满足

- $\rho_\epsilon(x)\to-\infty$ as $x\to O$, $\rho_\epsilon(x)\to+\infty$ as $x\to\infty$, and $\operatorname{Lip}\rho_\epsilon<1$;
- $\Omega_\epsilon\setminus\{O\}=\{\rho_\epsilon<0\}$, where Ω_ϵ is the region enclosed by Σ_ϵ.

与之前一样，我们取

$$h_{\tilde{\epsilon},\beta}:\left(-\frac{4\beta}{3\tilde{\epsilon}},+\infty\right)\to(\tilde{\epsilon},+\infty),\quad t\mapsto\tilde{\epsilon}\coth\left(\frac{3}{4}\tilde{\epsilon}t+\beta\right),$$

其中 β 是一个足够大的正常数，使得 $h_{\tilde{\epsilon},\,\beta}(0)<\epsilon_0$。定义

$$M_{\tilde{\epsilon},\beta}=\left\{x\in\mathbb{R}^3\setminus\{O\}\,\middle|\,\rho_\epsilon(x)>-\frac{4\beta}{3\tilde{\epsilon}}\right\}\cap\bar{\Omega}_\epsilon$$

and

$$\mathcal{C}_{\tilde{\epsilon},\beta}=\left\{\begin{array}{c}\text{Caccioppoli sets } \Omega\subset\bar{\Omega}_\epsilon \text{ containing the origin } O\\ \text{such that } \bar{\Omega}_\epsilon\setminus\Omega \text{ has compact closure in } M_{\tilde{\epsilon},\beta}.\end{array}\right\}.$$

考虑泛函

$$\mathcal{A}_{\tilde{\epsilon},\beta}:\mathcal{C}_{\tilde{\epsilon},\beta}\to\mathbb{R},\quad \Omega\mapsto\mathcal{H}^2_g(\partial\Omega)+\int_{M_{\tilde{\epsilon},\beta}}\chi_{\bar{\Omega}_\epsilon\setminus\Omega}\,h_{\tilde{\epsilon},\beta}\circ\rho_\epsilon\,\mathrm{d}\mathcal{H}^3_g.$$

于是，我们可以找到泛函 $\mathcal{A}_{\tilde{\epsilon},\beta}$的一个光滑极小元 $\Omega_{\tilde{\epsilon},\beta}$，它位于 $\mathcal{C}_{\tilde{\epsilon},\beta}$ 中。记 $\Omega_{\tilde{\epsilon},\beta,O}$ 为 $\Omega_{\tilde{\epsilon},\beta}$ 中包含原点 O 的连通分支。由引理 2.3 证明中的类似论证可知，曲面$\Sigma_{\tilde{\epsilon},\beta,O}=\partial\Omega_{\tilde{\epsilon},\beta,O}$ 是一个包含在固定紧子集 $K_{\tilde{\epsilon}}$（与 β无关）中的严格外极小 2-球面，其平均曲率满足

$$\tilde{\epsilon}<H_{\tilde{\epsilon},\beta,O}\le\tilde{\epsilon}+o(1)\text{ as }\beta\to+\infty.$$

对于所需的曲面 $\Sigma_{\tilde{\epsilon}}$，我们选取一个序列 $\beta_i \to +\infty$，并且取其一个子序列后，区域 $\Omega_{\tilde{\epsilon},\beta_i,O}$ 收敛到一个位于其中的光滑极小元 $\Omega_{\tilde{\epsilon}}$

$$\mathcal{C}_{\tilde{\epsilon}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Caccioppoli sets } \Omega \subset \bar{\Omega}_\epsilon \text{ containing the origin } O \\ \text{such that } \bar{\Omega}_\epsilon \setminus \Omega \text{ has compact closure in } \bar{\Omega}_\epsilon \setminus \{O\}. \end{array} \right\}$$

以下泛函的

$$\mathcal{A}_{\tilde{\epsilon}}(\Omega) = \mathcal{H}^2_g(\partial\Omega) + \tilde{\epsilon}\mathcal{H}^3_g(\bar{\Omega}_\epsilon \setminus \Omega) \text{ for } \Omega \in \mathcal{C}_{\tilde{\epsilon}}.$$

由一致面积界 $\mathcal{H}^2(\Sigma_{\tilde{\epsilon},\ \beta_i,\ O}) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_\epsilon)$，以及平均曲率的一致界 $H_{\tilde{\epsilon},\ \beta_i,\ O}$ 和 K_ϵ 的紧性可知，我们得到一致曲率估计 $|A_{\tilde{\epsilon},\ \beta_i,\ O}| \leq C$，其中 C 与 i无关。因此，$\partial\Omega_{\tilde{\epsilon},\ \beta_i,\ O}$ 光滑收敛到 $\partial\Omega_{\tilde{\epsilon}}$，所以边界$\Sigma_{\tilde{\epsilon}} := \partial\Omega_{\tilde{\epsilon}}$ 是一个具有常平均曲率 $\tilde{\epsilon}$ 的二维球面。至于 $\Sigma_{\tilde{\epsilon},\ \beta,\ O}$，我们可以验证曲面 $\Sigma_{\tilde{\epsilon}}$ 是严格外向极小的。

所需的体积控制源于 $\Sigma_{\tilde{\epsilon}}$ 的严格外向极小性质。注意，由 $\mathcal{A}_{\tilde{\epsilon}}(\Omega_{\tilde{\epsilon}}) \leq \mathcal{A}_{\tilde{\epsilon}}(\Omega_\epsilon)$ 可得

$$\mathcal{H}^2_g(\Sigma_{\tilde{\epsilon}}) + \tilde{\epsilon}\mathcal{H}^3_g(\Omega_{\tilde{\epsilon},\epsilon}) \leq \mathcal{H}^2_g(\Sigma_\epsilon).$$

将上述不等式与$\mathcal{H}^2_g(\Sigma_{\tilde{\epsilon}}) \geq A_g$这一事实，以及引理 3.1 中关于 Σ_ϵ 的面积估计相结合，可得 (3.2)。□

现在我们可以证明定理 1.4 的刚性部分了。

刚性证明。与命题 2.2 的证明一样，我们固定一个欧几里得球B_{r_0}，使得在 B_{r_0} 之外存在一个平均凸叶状分解。令 ϵ_0 和 Λ_0与引理 3.1 中的相同。固定一个足够小的 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$。通过求解命题 2.2 证明中的$\mu$-泡问题，并像引理 3.2 的证明中那样取极限区域，我们可以找到一个严格外向极小的二维球面Σ_ϵ，它包含于 B_{r_0} 内，具有常平均曲率 ϵ，并包围原点 O。

固定一个 $\gamma \in (1,2)$。根据引理 3.2，我们可以构造另一个严格外极小 2- 球面 Σ_{ϵ^γ}，位于 Σ_ϵ 内部，且具有常平均曲率 ϵ^γ，使得

$$\mathcal{H}^3_g(\Omega_{\epsilon^\gamma,\epsilon}) \leq \Lambda_0\epsilon^{2-\gamma}.$$

此处及下文中，$\Omega_{\tau,\ \delta}$ 始终表示由Σ_τ 和 Σ_δ所围成的区域。利用归纳法，我们可以构造一个严格外向极小 2-球面序列 $\left\{\Sigma_{\epsilon^{\gamma^k}}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$，它们包围原点 O，并满足

- $\Sigma_{\epsilon^{\gamma^{k+1}}}$ 被 $\Sigma_{\epsilon^{\gamma^k}}$包围;
- $\Sigma_{\epsilon^{\gamma^k}}$ 具有常平均曲率 ϵ^{γ^k};
- 我们有

$$\mathcal{H}^3_g\left(\Omega_{\epsilon^{\gamma^{k+1}},\epsilon^{\gamma^k}}\right) \leq \Lambda_0\left(\epsilon^{\gamma^k}\right)^{2-\gamma} = \Lambda_0\epsilon^{\gamma^k(2-\gamma)}.$$

因此，我们得到

$$\mathcal{H}^3_g\left(\Omega_{\epsilon^{\gamma^k},\epsilon}\right) \leq \Lambda_0\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon^{\gamma^i(2-\gamma)} < \Lambda_0\epsilon^{\gamma(2-\gamma)}\left(1-\epsilon^{(\gamma-1)(2-\gamma)}\right)^{-1}, \tag{3.3}$$

其中我们使用了初等不等式

$$\gamma^i \geq 1 + i(\gamma - 1) \text{ for } i \in \mathbf{N}_+ \text{ and } \gamma \in (1, 2).$$

根据一致面积界 (3.3)，我们能够证明所有曲面$\Sigma_{\epsilon^{\gamma^k}}$ 都与一个固定紧子集 K 相交，且该子集与 k无关。与之前一样，我们取到曲面 Σ_ϵ 的一个修正的（带符号）距离函数 $\rho_\epsilon\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \to (-\infty, +\infty)$，其 Lip $\rho_\epsilon < 1$, $\rho_\epsilon^{-1}(0) = \Sigma_\epsilon$ 且在 Σ_ϵ内 $\rho_\epsilon < 0$。给定任意 $T < 0$，若曲面 $\Sigma_{\epsilon^{\gamma^k}}$ 不与 $\rho_\epsilon^{-1}([T, 0])$相交，则可推出

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_g^3\left(\Omega_{\epsilon^{\gamma^k},\epsilon}\right) &\geq \int_{\rho_\epsilon^{-1}([T,0])} |\mathrm{d}\rho_\epsilon|_g \, \mathrm{d}\mathcal{H}_g^3 \\
&= \int_T^0 \mathrm{d}s \int_{\rho_\epsilon^{-1}(s)} \mathrm{d}\mathcal{H}_g^2 \\
&\geq A_g |T|.
\end{aligned}$$

将此与 (3.3) 结合，我们得出曲面 $\Sigma_{\epsilon^{\gamma^k}}$ 与该紧子集相交

$$K = \rho_\epsilon^{-1}\left([T_0, 0]\right) \text{ with } T_0 = -\frac{\Lambda_0 \epsilon^{\gamma(2-\gamma)}}{A_g\left(1 - \epsilon^{(\gamma-1)(2-\gamma)}\right)}.$$

回顾引理 3.1，我们有 $\mathcal{H}_g^2(\Sigma_{\epsilon^{\gamma^k}}) \leq A_g + \Lambda_0 \epsilon_0^2$。由于 $\Sigma_{\epsilon^{\gamma^k}}$是稳定的常平均曲率曲面，且其平均曲率一致有界，由 [ZZ20 定理 3.6] 可知，这些曲面在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$的任意紧子集内满足一致曲率估计 $\Sigma_{\epsilon^{\gamma^k}}$。因此，这些曲面光滑收敛到一个面积极小曲面 Σ_{min}，其面积不大于 A_g。特别地，Σ_{min} 的稳定性给出

$$\int_{\Sigma_{min}} |\nabla\phi|^2 + K\phi^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}_g^2 \geq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{min}} (R(g) + |A|^2)\phi^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}_g^2 \geq 0$$

对任意 $\phi \in C_0^\infty(\Sigma_{min})$，其中 K 是具有诱导度量的 Σ_{min} 的高斯曲率。由 Gromov 和 Lawson 的 [GL83, Theorem 8.11] 可知，由于 Σ_{min} 面积有限，它是闭的。因此，Σ_{min} 最终是一个围住原点 O、面积为 A_g 的极小二维球面。

通过在 Σ_{min} 之外最小化面积泛函，通常可以找到一个与 Σ_{min} 同调、面积为A_g 的严格外向极小曲面 Σ_h，它由极小二维球面组成。根据 A_g 的定义，显然 Σ_h 只能是一个围住原点 O的极小二维球面。根据 [HI01] 的工作，我们得出结论：Σ_h 之外的闭区域与质量为

$$m = \sqrt{\frac{A_g}{16\pi}} > 0.$$

至此，证明完成。 □

AppendixA. Trumpet-like AF manifolds

引理 A.1. 存在一个完备的旋转对称度量 g on$\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$，使得

- g 在 $\mathbb{R}^n$ 的无穷远处是渐近平坦的;
- 标量曲率 $R(g)$ 非负;
- 对于任意 $\rho > 0$，坐标球面 $S_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \rho\}$ 相对于外向单位法向量是平均凸的。

证明。其思路是弯曲 Schwarzschild 度量，使其两个端中的一个渐近于圆柱。具体而言，我们取

$$u_1(r) = r^{\frac{2-n}{2}} \text{ and } u_2(r) = 1 + r^{2-n} \text{ with } r = |x| \in (0, +\infty),$$

它们分别是圆柱度量和 Schwarzschild 度量的共形因子。由于我们有

$$u_1'(r) = \left(1 - \frac{n}{2}\right) r^{-\frac{n}{2}} \text{ and } u_2'(r) = (2-n)r^{1-n},$$

根据事实 $n \geq 3$ 可知，我们可以找到一个正常数 r_0，使得对于所有 $r \in \in (0, 2r_0)$，都有 $u_1'(r) > u_2'(r)$。取一个光滑的截断函数

$$\zeta : (0, +\infty) \to [0, 1]$$

使得当 $0 \leq t \leq r_0$ 时，$\zeta(t) \equiv 1$；当 $t \geq 2r_0$ 时，$\zeta(t) \equiv 0$，并且 $\zeta'(t) \leq 0$。我们定义

$$u_\alpha(r) = \alpha + u_1(r_0) - \int_r^{+\infty} [\zeta(s)u_1'(s) + (1 - \zeta(s))u_2'(s)] \, \mathrm{d}s,$$

其中 α 是一个待定的正常数。考虑度量

$$g = u_\alpha^{\frac{4}{n-2}} (\mathrm{d}r^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}).$$

由于对于 $r \in \in (0, r_0)$，我们有 $u_\alpha(r) \geq u_1(r)$，且对于 $r \geq 2r_0$，有 $u_\alpha(r) \geq u_2(r)$，因此度量 g 是完备的。此外，根据其定义，它具有旋转对称性。接下来，我们逐一验证所需的性质。

为了说明 g 在 $\mathbb{R}^n$ 的无穷远处是渐近平坦的，我们注意到 u_α 可表示为

$$u_\alpha(r) = \alpha_0 + r^{2-n} \text{ when } r \geq 2r_0$$

对于某个正常数 α_0。改变无穷远附近的坐标图后，度量 g 结果是某个 Schwarzschild 度量，当然它是渐近平坦的。

为验证 $R(g)$ 的非负性，我们计算

$$\begin{aligned} \Delta u_\alpha &= u_\alpha''(r) + u_\alpha'(r) \cdot \frac{n-1}{r} \\ &= \zeta(r)\Delta u_1 + (1 - \zeta(r))\Delta u_2 + \zeta'(r)\left(u_1'(r) - u_2'(r)\right). \end{aligned} \tag{A.1}$$

由于圆柱度量和Schwarzschild 度量都具有非负标量曲率，因此我们有 $\Delta u_1 \leq 0$ 和 $\Delta u_2 \leq 0$。由于 $u_1'(r) > u_2'(r)$成立于

$\zeta'(r)$的支集内，且我们有 $\zeta' \leq 0$，所以（A.1）第二行中的第三项也非正。这意味着 $\Delta u_\alpha \leq 0$，因此标量曲率

$$R(g) = -\frac{4(n-1)}{n-2} u_\alpha^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta u_\alpha$$

是非负的。

为验证坐标球面的平均凸性 S_ρ，我们计算

$$\left(u_\alpha^{\frac{2}{n-2}} r \right)' = u_\alpha^{\frac{4-n}{n-2}} \left(u_\alpha(r) + \frac{2}{n-2} r u_\alpha'(r) \right).$$

当 $0 < r < r_0$ 时，我们有

$$u_\alpha(r) + \frac{2}{n-2} r u_\alpha'(r) > \alpha + u_1(r) + \frac{2}{n-2} r u_1'(r) = \alpha > 0.$$

当 $r > 2r_0$ 时，我们有

$$u_\alpha(r) + \frac{2}{n-2} r u_\alpha'(r) > \alpha + 1 - r^{2-n}$$

当我们选择 α 大于 $(2r_0)^{2-n}$ 时，它为正。当 $r_0 \leq r \leq 2r_0$ 时，我们有

$$u_\alpha(r) + \frac{2}{n-2} r u_\alpha'(r) > \alpha - \frac{2}{n-2} \| r u_\alpha'(r) \|_{L^\infty([r_0, 2r_0])}.$$

经过直接计算可得

$$|r u_\alpha'(r)| \leq |r u_1'(r)| + |r u_2'(r)| \leq C(n) \left(r_0^{\frac{2-n}{2}} + r_0^{2-n} \right)$$

对于某个通用常数 $C(n)$。通过将 α 取得足够大，我们可以保证

$$\left(u_\alpha^{\frac{2}{n-2}} r \right)' (r) > 0 \text{ for all } r \in (0, +\infty)$$

因此，所有坐标球面 S_ρ 相对于外向单位法向量都是平均凸的。□

References

[ADM61] R. 阿诺维特、德瑟和 C. W. 米斯纳。广义相对论中的坐标不变性与能量表达式。 *Phys. Rev. (2)*, 122:997–1006, 1961.[AMMO22] Virginia Agostiniani、Carlo Mantegazza、Lorenzo Mazzieri 和 Francesca Oronzio。通过非线性势理论证明黎曼 Penrose 不等式。*preprint*, arXiv:2205.11642。[BL09] Hubert L. Bray 和丹·A·李。关于八维以下的黎曼 Penrose 不等式。 *Duke Math. J.*, 148(1):81–106, 2009。[Bra01] Hubert L. Bray。利用正质量定理证明黎曼 Penrose 不等式。 *J. Differential Geom.*, 59(2):177–267, 2001。[CL20] Otis Chodosh 和 Chao Li。广义肥皂泡与正标量曲率流形的拓扑。 *preprint*, arXiv:2008.11888。[GL83] Mikhael Gromov 和 H. Blaine Lawson, Jr.。完备黎曼流形上的正标量曲率与狄拉克算子。 *Inst. Hautes Études Sci.Publ. Math.*, (58):83–196 (1984), 1983。

[Gro18] 米哈伊尔·格罗莫夫。标量曲率的度量不等式。 *Geom. Funct. Anal.*, 28 3 645 726, 2018 ( ): – 。[Gro19] 米哈伊尔·格罗莫夫。《标量曲率四讲》。 *preprint*, arXiv: 1908.10612。[Hat07] 艾伦·哈彻。《三维流形拓扑基础笔记》。 *online*, https:// pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf, 2007。[HI01] 格哈德·休斯肯和汤姆·伊尔马宁。逆平均曲率流与黎曼 Penrose 不等式。 *J. Differential Geom.*, 59(3):353–437, 2001。[HMT22] 斯文·赫希、缪鹏子和谭联辉。 p-调和函数的单调量及其应用。 *preprint*, arXiv:2211.06939。[LLU22] 丹·A·李、马丁·莱苏尔和瑞安·昂格。不完备流形的密度与正质量定理。 *preprint*, arXiv:2201.01328。[LUY21] 马丁·莱苏尔、瑞安·昂格和丘成桐。《任意端上的正质量定理》。 *preprint*, arXiv:2103.02744。[Sch89] 理查德·舍恩。黎曼度量的总标量曲率泛函的变分理论及相关主题。载于 *Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987)* 1365 *Lecture Notes in Math.* , 第 卷, 第 120–154 页。施普林格，柏林，1989。[SY79] 理查德·舍恩和丘成桐。关于广义相对论中正质量猜想的证明。 *Comm. Math. Phys.*, 65(1):45–76, 1979。[SY81] 理查德·舍恩和丘成桐。正质量定理的证明。II。*Comm. Math. Phys.*, 79(2):231–260, 1981。[SY88] R. Schoen 和 S.-T. Yau。共形平坦流形、克莱因群与标量曲率。 *Invent. Math.*, 92(1):47–71, 1988。[SY94] R. Schoen 和 S.-T. Yau。 *Lectures on differential geometry*。几何与拓扑讲义会议论文集，I。国际出版社，剑桥，马萨诸塞州，1994。讲义由丁维岳、张公庆 [Gong Qing Zhang], 钟家庆和徐义超整理；由 Ding 和程新宇从中文翻译；前言由曹启生从中文翻译。[SY22] 理查德·舍恩和丘成桐。正标量曲率与极小超曲面奇点。载于 *Surveys in differential geometry 2019. Differential geometry Calabi-Yau theory and general relativity. Part 2* 24 *Surv. Differ. Geom.*第 卷, 第 441–480 页。国际出版社，波士顿，马萨诸塞州， [2022] ©2022。[Wit81] 爱德华·威滕。正能量定理的新证明。 *Comm. Math. Phys.* 80 3 381 402, 1981 *Comm. Math.* , ( ): – 。[Zhu20] Jintian Zhu。非负标量曲率完备流形的刚性结果。 *preprint*, arXiv:2008.07028。[Zhu21] Jintian Zhu。宽度估计与双重扭曲积。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 374 2 1497 1511, 2021 *Trans. Amer. Math.* , ( ): – 。[Zhu22] Jintian Zhu。任意端上的正质量定理及其应用。*preprint*, arXiv:2204.05491。[ZZ20] 周欣和朱约拿单。具有给定平均曲率的超曲面的存在性 I——一般性极小极大。 *Camb. J. Math.*, 8(2):311–362, 2020。

Key Laboratory of Pure and Applied Mathematics, School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing, 100871, People's Republic of China
Email address: zhujintian@bicmr.pku.edu.cn

Institute for Theoretical Sciences, Westlake University, 600 Dunyu Road, 310030, Hangzhou, Zhejiang, People's Republic of China
Email address: zhujintian@westlake.edu.cn