arXiv:2304.01786v2 [math.OC] 2 Sep 2023

随机合作博弈中收益分配的分布鲁棒稳定性

George Pantazis、Barbara Franci、Sergio Grammatico 和 Kostas Margellos

摘要——我们研究联盟价值存在不确定性的多智能体合作博弈。针对每个联盟都为不确定性的（可能未知的）概率分布构造模糊集的情形，我们提出一种研究大联盟稳定性的新方法。作为相较于联盟稳定性最坏情形方法更不保守的解概念，我们考虑所谓核心集的随机版本，即期望值核心。然而，在缺乏概率分布精确信息的情况下，评估期望值核心极具挑战性。因此，我们提出分布鲁棒（DR）核心的概念。借助基于Wasserstein距离的数据驱动分布鲁棒优化工具，我们给出有限样本保证：任何属于DR核心的分配，相对于真实概率分布也都是稳定的。此外，我们证明，随着样本数量趋于无穷，DR核心几乎必然收敛到真实的期望值核心。最后一节探讨在DR核心中寻找分配的计算可处理性。

I. 引言

合作博弈 [1] 广泛应用于工程学 [2]–[4] 、经济学和社会科学[5]等领域。尽管这类系统中的代理通常以自身利益为先，但他们有动力组成联盟，以获得更高的个人收益或降低自身成本。由于代理各自的利益不同，如何分配收益，使任何人都没有动机退出所谓的大联盟（即所有代理共同协作的联盟），是一项颇具挑战性的任务。在合作博弈论文献中，这一问题被称为大联盟的稳定性，而能够实现稳定性的收益集合则称为博弈的核心。由于核心概念简单明了，它已被广泛用作合作博弈中的稳定性概念[1] ，因此，求解核心内分配的研究也备受关注。

大联盟的稳定性与各联盟的价值密切相关。然而，联盟价值通常会受到不确定性的影响。因此，需要重新审视并扩展确定性合作博弈的数学框架。奠基性研究 [6]–[8]是最早探讨随机合作博弈的工作。文献[9] 也研究了不确定合作博弈，并表明对于某一特定类别，即使引入不确定性，博弈的某些性质（例如核心非空性）仍然成立。文献 [10], [11],从贝叶斯学习的角度研究了不确定合作博弈，而文献 [12] 则考察在不确定性的样本揭示后，哪些稳定性解概念能够使分配的概率稳定性最大化。此外， [13] 和 [14] 关注重复随机博弈的动态演化。

在 [2], 中，作为传统确定性核心的一种推广，本文引入了所谓的鲁棒核心概念。在这一设定中，假定可能的联盟价值范围已知。 [15] 将鲁棒核心的概念扩展为情景核心，以考虑更一般的情况：影响联盟价值的不确定性的支撑集和概率分布均未知。作为鲁棒核心 [2] 及其数据驱动对应概念 [15], 的替代方案，本文转而考虑均值意义下稳定性这一宽松得多的概念，并由此引出所谓的期望值核心。研究均值意义下的分配稳定性，或可避免核心集为空的情形；这也是合作博弈论中的一项根本性技术挑战。除对不确定性的概率分布作出非常温和的假设外，本文还假定支撑集和概率分布均未知。在其他情况下，影响合作博弈的不确定参数甚至可能不存在单一的概率分布，而是具有一系列可能的分布，可通过数据驱动方法加以刻画。因此，在这种设定下评估期望核心极具挑战性。

为解决这一问题，我们采用基于分布鲁棒（DR）优化的方法 [16]–[22], 从而考虑能够代表经验集合的模糊集；在这些集合中，真实概率分布（如果不确定性存在概率分布）很可能包含于其中。考虑模糊集会得到分布稳定的分配。我们将所有分布稳定分配的集合称为该博弈的分布鲁棒（DR）核心。

利用基于数据的分布鲁棒优化在 Wasserstein距离下的结果 [23], [24], , 我们为如下概率提供有限样本保证：近似分布鲁棒博弈的 DR核心中的任意分配也

作者来自代尔夫特理工大学代尔夫特系统与控制中心（{g.pantazis, s.grammatico}@tudelft.nl）、马斯特里赫特大学高级计算科学系（b.franci@maastrichtuniversity.nl），以及牛津大学工程科学系（kostas.margellos@eng.ox.ac.uk）。本研究部分由欧洲研究委员会通过 COSMOS 项目（802348）资助。

©2023年IEEE。允许个人使用本材料。对于所有其他用途，均须获得IEEE许可，无论是在当前还是未来的任何媒体中，包括为广告或宣传目的重印或再版本材料、创作新的汇编作品、转售或重新分发至服务器或列表，或在其他作品中重复使用本作品的任何受版权保护部分。

以给定置信度属于原博弈的期望值核心（第三节）。此外，我们证明了 Wasserstein 分布鲁棒核心几乎必然渐近收敛至原博弈的期望核心（第四节 A）。最后，我们提供了计算 Wasserstein 分布鲁棒核心中某一分配的方法（第四节 B）。具体而言，我们证明，在一定条件下，寻找此类分配的问题可以重构为一个凸优化问题；其决策变量和约束的数量在本质上均与可能的子联盟数量相关。数值仿真验证了我们的理论结果（第五节）。

II. 随机合作博弈

A. 分配的均值稳定性与期望值核心

我们考虑一个由 N 个代理构成的合作博弈，其索引集为 $\mathcal{N}=\{1,\dots,N\}$。除大联盟外，可能的子联盟数量记为 M，即 $M = 2^N - 1$。在这种情况下，代理虽然自利，但如果结成联盟能够提高其个体收益，他们便愿意组成联盟。每个联盟的总收益由所谓的值函数给出；该函数根据联盟 $S \subseteq \mathcal{N}$ 取一个实数，表示参与该联盟的代理结成联盟后可获得的总收益。然而，每个联盟的值都受到不确定性的影响，因此每个联盟的值函数都是随机的。

定义 1：（随机特征函数）联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 的值函数 $u_S: 2^{\mathcal{N}} \times \Xi \to \mathbb{R}$ 是一个函数；给定不确定性实现值 $\xi \in \Xi \subseteq \mathbb{R}^p$，该函数返回组成联盟 S 的代理所获得的总收益。大联盟的值函数是确定性的，即 $u_{\mathcal{N}}: 2^{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}$。□

于是，不确定合作博弈定义为元组 $G_{\mathbb{P}} = \{\mathcal{N}, \{u_S\}_{S\subseteq\mathcal{N}}, \Xi, \mathbb{P}\}$，其中 $\mathbb{P}$ 表示不确定性 $\xi \in \Xi$ 所遵循的概率分布。为解决 [2], 中所定义的鲁棒核心为空这一根本问题，我们考虑均值意义下的分配稳定性，其定义如下。

定义 2：（均值意义下的稳定性）博弈 $G_{\mathbb{P}} = \{\mathcal{N}, \{u_S\}_{S\subseteq\mathcal{N}}, \Xi, \mathbb{P}\}$ 的一个分配 $x = (x_i)_{i\in\mathcal{N}}$ 若满足 i) $\sum_{i\in\mathcal{N}} x_i = u_{\mathcal{N}}$，且 ii) $\sum_{i\in S} x_i \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)]$, $\forall S \subset \mathcal{N}$，则称其在均值意义下稳定。□

第一个条件称为效率条件。根据我们关于大联盟是确定性的假设，这意味着所有代理共同合作时所带来的收益总增量是确定的。当代理可能知道完全合作方案的效率，但对各子联盟可能产生的结果存在一定程度的不确定性/歧义时，便属于这种情况。第二个条件意味着分配 x 并非严格可行，因此代理没有动机组建 S。否则，如果 $\sum_{i\in S} x_i < \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)]$，代理就会有动机离开大联盟并组建 S，从而获得 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)]$，而不是 $\sum_{i\in S} x_i$。在这种情形下，我们希望研究大联盟的稳定性，即没有代理有动机偏离并组建其他子联盟。为此

让我们引入对经典核心概念的一种扩展，即所谓的期望值核心，它是下文所定义的、在均值意义上所有稳定分配的集合。

定义 3：（期望值核心）博弈 $G_{\mathbb{P}}$ 的期望值核心 C_E $G_{\mathbb{P}}$ 定义为以下集合

$$C_E(G_{\mathbb{P}}) = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in\mathcal{N}} x_i = u_{\mathcal{N}}, \sum_{i\in S} x_i \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)],\ \forall\ S \subset \mathcal{N}\},$$

其中

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)] = \int_{\Xi} u_S(\xi)\mathbb{P}(d\xi). \tag{1}$$

□

现在我们提出以下温和的技术性假设。

假设1：（轻尾概率分布）对于真实概率测度 $\mathbb{P}$，存在一个 > 1 使得

$$A := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(\|\xi\|^a)] = \int_{\Xi} \exp(\|\xi\|^a)\mathbb{P}(d\xi) < \infty.$$

假设2：对于概率测度 $\mathbb{P}$，有 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\|\xi\|] = \int_{\Xi} \|\xi\|\mathbb{P}(d\xi) < \infty$。

假设1要求真实概率分布 $\mathbb{P}$ 的尾部以指数速率衰减。当 Ξ 是紧集时，该假设显然成立。假设2要求 $\mathbb{P}$ 具有有限的一阶矩。在这样的一般设定下，计算式（1）中给出的期望值积分颇具挑战，甚至可能无法实现；也就是说，无法计算期望值核心 $C_E(G_{\mathbb{P}})$。为应对这一挑战，我们提出一种基于分布鲁棒优化的方法。

B. 分配的分布鲁棒稳定性

在我们的设定中，代理联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 可以针对影响其联盟价值 $u_S(\xi)$ 的不确定性 $\xi \in \Xi$ 的概率分布 $\mathbb{P}$ 构建歧义集。这是因为我们对 $\mathbb{P}$ 缺乏了解。换言之，不仅影响联盟博弈的不确定性本身存在不确定性，不确定参数的分布也存在不确定性。

我们假设每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 都可以构建自己的模糊集。联盟模糊集的异质性为我们的理论提供了必要的建模自由度，使其能够灵活地应用于实际问题。为此，我们假设每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 都可以获取自己的独立同分布样本 $\xi_{K_S} = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(K_S)}) \in \Xi^{K_S}$，并考虑原博弈 $G^{\hat{P}_K}$ 的分布鲁棒版本 $\hat{G}$

$$\hat{G} = \{\mathcal{N}, \{\hat{u}_S\}_{S\subseteq\mathcal{N}}, \Xi, \hat{\mathcal{P}}_K\},$$

其中 $\hat{u}_S = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)]$，而 $\hat{\mathcal{P}}_K = \{\mathcal{P}_{K_S}\}_{S\subset\mathcal{N}}$ 是基于每个子联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 的可用数据 ξ_{K_S} 构建的模糊集的集合。接下来，我们将定义分配的分布稳定性概念。

定义 4：（分配的分布鲁棒稳定性）对于每个联盟 S 抽取的给定数量的独立同分布样本 $\xi_{K_S} = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(K_S)}) \in \Xi^{K_S}$，若分配 $x = (x_i)_{i\in\mathcal{N}}$ 满足以下条件，则称其相对于联盟模糊集 $\hat{\mathcal{P}}_{K_S}$，$S \subset \mathcal{N}$ 具有分布鲁棒稳定性：

1) $\sum_{i\in\mathcal{N}} x_i = u_{\mathcal{N}}$ and
2) $\sum_{i\in S} x_i \geq \sup_{\mathbb{Q}_S\in\hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[u_S(\xi)]$, $\forall\ S \subset \mathcal{N}$. □

III. 基于Wasserstein距离的分布鲁棒合作博弈

A. 分布鲁棒性背景

本节介绍 Wasserstein度量 [17], [23], [24] 下分布鲁棒优化的一些基本概念。我们将说明如何利用这一框架，为相对于真实未知联盟博弈的稳定性提供证书，并对其期望值核心给出易于处理的近似。首先，我们对作为真实概率分布候选的概率分布施加一个温和的假设$\mathbb{P}$。具体而言，我们考虑所有一阶矩有界的分布，即 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\Xi)$，其中 $\mathcal{M}(\Xi)$ 是满足假设 2 且支撑集为 Ξ 的概率分布集合。接下来，我们需要一种度量两个概率分布之间距离的方法，以量化候选概率分布与真实概率分布 $\mathbb{P}$ 之间的接近程度。因此，我们采用如下定义的 Wasserstein距离。

定义5：（Wasserstein距离，[25]）两个概率分布 $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{M}(\Xi)$之间的Wasserstein距离$d_W: \mathcal{M}(\Xi) \times \mathcal{M}(\Xi) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义为

$$d_W(\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2) = \inf_{\Pi} \Big\{ \int_{\Xi^2} \|\xi_1 - \xi_2\| \Pi(d\xi_1, d\xi_2) : \Pi \text{ is a joint distribution of } \xi_1 \text{ and } \xi_2 \text{ with marginals } \mathbb{Q}_1 \text{ and } \mathbb{Q}_2, \text{ respectively} \Big\},$$

其中，$\|\cdot\|$ 可以是 $\mathbb{R}^p$上的任意范数。

还可以通过所谓的康托罗维奇-鲁宾斯坦定理得到另一种对偶解释：

定理1：（康托罗维奇-鲁宾斯坦定理，[25]）给定两个概率分布$\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{M}(\Xi)$，我们有

$$d_W(\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \int_{\Xi} f(\xi) \mathbb{Q}_1(d\xi) - \int_{\Xi} f(\xi) \mathbb{Q}_2(d\xi) \right\},$$

其中，$\mathcal{F}$ 是所有利普希茨连续函数构成的空间，且对所有 $\xi、\xi' \in \Xi$，均有 $|f(\xi) - f(\xi')| \leq \|\xi - \xi'\|$。□

B. 分布鲁棒核心的有限样本保证

在后续分析中，我们假设每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$都拥有来自 $\mathbb{P}$的独立样本。每个给定的联盟 $S \subset \mathcal{N}$都基于所收集的数据 $\xi_{K_S} = (\xi^{(k_S)})_{k_S=1}^{K_S} \in \Xi^{K_S}$ 构造各自的模糊集。对于每个联盟 S，其模糊集定义如下：

$$\mathbb{B}_{\varepsilon_S}(\hat{\mathbb{P}}_{K_S}) = \{\mathbb{Q}_S \in \mathcal{M} : d_W(\hat{\mathbb{P}}_{K_S}, \mathbb{Q}_S) \leq \varepsilon_S\}, \tag{2}$$

其中，$\hat{\mathbb{P}}_{K_S} = \sum_{k_S=1}^{K_S} \delta_{(\xi - \xi^{(k_S)})}$ 是基于联盟 S 从支撑集 Ξ 中抽取的 K_S 个独立同分布样本构造的该联盟经验概率分布，其中$\delta_{(\xi - \xi^{(k_S)})} = 1_{K_S}$当 $\xi = \xi^{(k_S)}$ 时，$k_S = \{1, \ldots, K_S\}$；否则为 0。

以下结果依赖假设1，保证以给定置信度，从联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 中抽取的多重样本所对应的真实概率测度位于所构造的 Wasserstein球内。

引理1：设假设1成立，且对任意联盟 $S \subset \mathcal{N}$，固定 $\varepsilon_S > 0$。我们有

$$\mathbb{P}^{K_S}\{\xi_{K_S} \in \Xi^{K_S} : d_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}_{K_S}) \leq \varepsilon_S\} \geq 1 - \beta_S,$$

其中

$$\beta_S = \begin{cases} c\exp(-qK_S\varepsilon_S^{\max\{p,2\}}), & \text{if } \varepsilon_S \leq 1 \\ c\exp(-qK_S\varepsilon_S^{a}), & \text{if } \varepsilon_S > 1, \end{cases} \tag{3}$$

对于所有 $K_S \geq 1$ 和 $p \neq 2$，其中 c、q 为正数，仅取决于假设1中的参数 a、A 以及支撑集 p 的维度。

证明：该证明是对 [17] 中定理2的改写，并应用于每个围绕经验概率分布 $\mathbb{P}_{K_S}$ 构造的 Wasserstein球 $\hat{\mathcal{P}}_{K_S} = \mathbb{B}_{\varepsilon_S}(\hat{\mathbb{P}}_{K_S})$，其半径$\varepsilon_S$ 由每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$选择。■

引理1为以下基于Wasserstein的分布鲁棒核心的有限样本保证奠定了基础。

定义6：（分布鲁棒核心）基于Wasserstein距离的博弈 $G_{\mathbb{P}}$ 的分布鲁棒核心 $C_{DR}(G^{\hat{\mathcal{P}}_K})$ 定义为该集合

$$C_{DR}(G^{\hat{\mathcal{P}}_K}) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in \mathcal{N}} x_i = u_{\mathcal{N}}, \sum_{i \in S} x_i \geq \sup_{Q_S \in \hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{Q_S}[u_S(\xi_S)],\ \forall\ S \subset \mathcal{N} \Big\},$$

其中 $\hat{\mathcal{P}}_{K_S} = \mathbb{B}_{\varepsilon_S}(\hat{\mathbb{P}}_{K_S})$。□

全文中，我们假设对于所有多重样本，其模糊集均能产生非空的DR核心。

定理2：对于每个 $S \subset \mathcal{N}$，固定一个 Wasserstein半径 ε_S，并考虑多样本规模 K_S。成立：

$$\mathbb{P}^K\Big\{\xi_K \in \Xi^K : C_E(G_{\mathbb{P}}) \supseteq C_{DR}(G^{\hat{\mathcal{P}}_K})\Big\} \geq \beta, \tag{4}$$

其中 $\beta = \prod_{S \subset \mathcal{N}}(1 - \beta_S)$，且每个 β_S均由式（3）给出。

证明：我们有：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^K\Big\{\xi_K \in \Xi^K :\ C_E(G_{\{\Xi,\mathbb{P}\}}) \supseteq C_{DR}(G_{\{\Xi,\mathbb{P}\}})\Big\} \\
&\geq \mathbb{P}^K\Big\{\xi_K \in \Xi^K : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)] \leq \sup_{\mathbb{Q}_S \in \hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S}[u_S(\xi)],\ \forall\ S \subset \mathcal{N}\Big\} \\
&= \mathbb{P}^K\Big\{\bigcap_{S \subset \mathcal{N}} \Big\{\xi_K \in \Xi^K : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)] \leq \sup_{\mathbb{Q}_S \in \hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S}[u_S(\xi)]\Big\}\Big\} \\
&= \prod_{S \subset \mathcal{N}} \mathbb{P}^{K_S}\Big\{\xi_{K_S} \in \Xi^{K_S} : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)] \leq \sup_{\mathbb{Q}_S \in \hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[u_S(\xi)]\Big\}
\end{aligned} \tag{5}$$

最后一个等号源于这样一个事实：每个联盟都基于自身（独立的）样本构造其模糊集。根据引理1，对于每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$，我们有 that

$$\mathbb{P}^{K_S}\Big\{\xi_{K_S} \in \Xi^{K_S} : d_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}_{K_S})\} \leq \varepsilon_S\Big\} \geq 1 - \beta_S.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
&\prod_{S \subset \mathcal{N}} \mathbb{P}^{K_S}\Big\{\xi_{K_S} \in \Xi^{K_S} : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)] \leq \sup_{\mathbb{Q}_S \in \hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S}[u_S(\xi_S)]\Big\} \\
&\geq \prod_{S \subset \mathcal{N}} \mathbb{P}^{K_S}\Big\{\xi_{K_S} \in \Xi^{K_S} : d_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}_{K_S}) \leq \varepsilon_S\Big\} \\
&\geq \prod_{S \subset \mathcal{N}} (1 - \beta_S),
\end{aligned} \tag{6}$$

其中，第一个不等式由 [23].■ 中的定理3.5得出。

以下结果为所有联盟使用相同参数时提供了保证。

推论1：考虑假设1。对于每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$，固定一个共同的 Wasserstein 半径 ε，并假设各联盟使用相同的多重样本 ξ_K。则有

$\mathbb{P}^K\{\xi_K \in \Xi^K : C_E(G_{\mathbb{P}}) \supseteq C_{DR}(G\hat{}_{\mathcal{P}_K})\} \geq (1-\beta)^M$，其中 β 由式（3）通过设定 $\varepsilon_S = \varepsilon$ 和 $K_S = K$ 得出。□证明：由于对于所有 $S \subset \mathcal{N}$，$\varepsilon_S = \varepsilon$ 均成立，且对所有 $S \subset \mathcal{N}$ 抽取的样本数 $K \in \mathbb{N}$ 相同，因此根据式（3），对于所有 $S \subset \mathcal{N}$，$\beta_S = \beta$ 均成立。由引理1可得，对每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$

$$\mathbb{P}^K\left\{\xi_K \in \Xi^K : d_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}_K) \leq \varepsilon\right\} \geq 1-\beta,$$

其中 β 由式（3）给出。按照定理2的相同证明思路，并将 $\beta_S = \beta$ 设为式（6）的右端，即可完成证明。■

注释1：定理2和推论1中的置信参数取决于可能的子联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 的数量。推论1表明，原问题中可能联盟的数量也会影响所给出的有限样本保证。尽管采用了不同的方法，[15],中的先验结果也观察到了这一点；其中作者应用 [26], [27] 的结果构建鲁棒核心的数据驱动版本。□

C. 代理层级抽样

现在假设模糊集是基于个体代理抽取的样本构造的，即稍微滥用一下记号，每个代理抽取一个多重样本 ξ_{K_i}，然后该样本被任意满足 $i \in S$ 的联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 所使用。为每个 $S \subset \mathcal{N}$ 固定一个置信参数 $\beta_S \in (0,1)$，并令 $\xi_{\bar{K}} = (\xi_{\bar{K}_S})_{S\subset\mathcal{N}}$，其中 $\xi_{\bar{K}_S}$ 是每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 的样本。那么，很容易证明

$$\mathbb{P}^{\bar{K}}\{\xi_{\bar{K}} \in \bar{\Xi}^{\bar{K}} : C_E(G_{\mathbb{P}}) \supseteq C_{DR}(G_{\hat{\mathcal{P}}_{\bar{K}}})\} \geq \bar{\beta},$$

其中 $\bar{\beta} = \sum_{S\subset\mathcal{N}}(1-\beta_S) - M + 1$，且每个 β_S 由（3）设定，其中 $\varepsilon_S = \bar{\varepsilon}_S$ 以及 $K_S = K_S = \sum_{i\in S} K_i$。该结果是将 Bonferroni不等式应用于定理2证明的第三步而得到的，因此构成了一个相当保守的界。还需要进一步研究如何利用代理层面的数据，并将其转化为联盟层面的理论保证，同时考虑联盟之间的数据共享，从而改进这些理论保证。这是一项具有挑战性的任务，因此留待未来工作。

IV. DR核心的渐近一致性与计算可处理性

A. DR核心的渐近一致性

本小节将说明，在值函数满足利普希茨连续性，且为每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 谨慎选择 Wasserstein球的半径 ε_S 和置信参数 β_S 的条件下，基于 Wasserstein距离的 DR核心几乎必然收敛到原问题的真实期望值核心。我们作出以下假设：

假设3：对于每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$，值函数 u_S 关于 ξ 是 L_S-利普希茨连续的，其中 $L_S \geq 0$，即 $\|u_S(\xi) - u_S(\xi')\| \leq L_S\|\xi - \xi'\|$，对所有 ξ、$\xi' \in \Xi$ 均成立。□

这类假设在随机规划的稳定性分析中很常见 [24], [28]，也为我们的研究场景提供了有趣的见解。事实上，分布鲁棒联盟价值与相应期望联盟价值之间误差的增加，与该联盟真实分布和经验分布之间的估计误差成正比；这一误差最多会被相应值函数的利普希茨常数放大。

与上一节的推导不同，上一节中我们对任意 $S \subset \mathcal{N}$ 固定半径 ε_S 和样本数 K_S，并根据 (3) 计算 β_S；现在，我们针对 ε_S 求解 (3)，从而得到 Wasserstein半径，它是置信参数 β_S 和样本数 K_S 的函数。具体而言，有

$$\varepsilon_S(\beta_S, K_S) = \begin{cases} \left(\frac{\ln(\frac{c}{\beta_S})}{qK_S}\right)^{\frac{1}{\max\{p,2\}}} & \text{if } K_S \geq \frac{\ln(\frac{c}{\beta_S})}{q} \\ \left(\frac{\ln(\frac{c}{\beta_S})}{qK_S}\right)^{\frac{1}{a}} & \text{if } K_S < \frac{\ln(\frac{c}{\beta_S})}{q}. \end{cases}$$

以下定理证明，随着样本数增加，DR核心几乎必然收敛到期望值核心。

定理3：设假设1和3成立。假设对每个 $S \subset \mathcal{N}$，$\beta^{K_S}{}_{S} \in (0,1)$，$K_S \in \mathbb{N}$ 满足 $\sum_{K_S=1}^{\infty} \beta^{K_S}{}_{S} < \infty$ 且 $\lim_{K_S\to\infty} \varepsilon_S(\beta_S, K_S) = 0$。任意一列基于 Wasserstein 距离的 DR 核心 $\{C_{DR}(G\hat{}_{\mathcal{P}_K})\}_{K\in\mathbb{N}^M}$，其中 $K = (K_S)_{S\subset\mathcal{N}}$，均以 $\mathbb{P}^\infty$ 几乎必然收敛到真实期望核心 $C_E(G_{\mathbb{P}})$，当 $K_S \to \infty$ 对所有 $S \subset \mathcal{N}$ 成立时。□

证明：对每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$，我们有

$$\mathbb{P}^{K_S}\{\xi_{K_S} \in \Xi^{K_S} : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)] \leq \sup_{\mathbb{Q}_S\in\hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S}[u_S(\xi)]\}$$
$$\geq \mathbb{P}^{K_S}\{\xi_{K_S} \in \Xi^{K_S} : d_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}_{K_S}) \leq \varepsilon_S(\beta_S^{K_S}, K_S)\} \geq 1 - \beta_S^{K_S},$$

其中，最后一个不等式由引理1得出。令 $K_S \to \infty$，且由于 $\lim_{K_S\to\infty} \beta^{K_S}{}_{S} = 0$，我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)] \leq \lim_{K_S\to\infty} \sup_{\mathbb{Q}_S\in\hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S}[u_S(\xi)] \tag{7}$$

$\mathbb{P}^\infty$ 几乎必然。遵循与 [23], 类似的方法，对每个联盟 $S \subset \mathcal{N}$ 以及每个 $K_S \in \mathbb{N}$，根据上确界的定义，对任意 $\delta_S > 0$，存在 $\hat{\mathbb{Q}}_{K_S}$ 使得

$$\sup_{\mathbb{Q}_S\in\hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S}[u_S(\xi)] \leq \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}_{K_S}}[u_S(\xi)] + \delta_S$$

根据康托罗维奇-鲁宾斯坦定理（定理1），我们 have that

$$L_S d_W(\hat{\mathbb{Q}}_{K_S}, \mathbb{P}) \geq L_S\left(\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}_{K_S}}\left[\frac{1}{L_S}u_S(\xi)\right] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1}{L_S}u_S(\xi)\right]\right),$$

因为根据假设3，$u_S L_S$ 是一个利普希茨连续函数，其利普希茨常数小于或等于1。因此，上述关系可以写为

$$\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}_{K_S}}[u_S(\xi)] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)] + L_S d_W(\hat{\mathbb{Q}}_{K_S}, \mathbb{P}).$$

由此可得：

$$\lim_{K_S\to\infty}\sup_{\mathbb{Q}_S\in\hat{\mathcal{P}}_{K_S}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S}[u_S(\xi)]\le\lim_{K_S\to\infty}\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}_{K_S}}[u_S(\xi)]+\delta_S$$
$$\le\lim_{K_S\to\infty}\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)]+L_S d_W(\hat{\mathbb{Q}}_{K_S},\mathbb{P})\}+\delta_S=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)]+\delta_S\mathbb{P}^\infty$$几乎必然，因为根据我们的情形调整 [23, 引理 3.7] ，我们有：对每个 $S\subset\mathcal{N}$

$$\lim_{K_S\to\infty}d_W(\mathbb{P},\hat{\mathbb{Q}}_{K_S})=0,\ \mathbb{P}^\infty\text{-almost surely.}$$

令 $\delta_S\ \ 0\downarrow$ 我们有

$$\lim_{K_S\to\infty}\sup_{\mathbb{Q}_S\in\hat{\mathcal{P}}_{K_S}}\mathbb{E}_{Q_S}[u_S(\xi)]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)].\tag{8}$$

由关系式 (7) 和 (8)，我们有：对任意 $S\subset\mathcal{N}$

$$\lim_{K_S\to\infty}\sup_{\mathbb{Q}_S\in\hat{\mathcal{P}}_{K_S}}\mathbb{E}_{Q_S}[u_S(\xi)]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_S(\xi)],\ \mathbb{P}^\infty\text{-almost surely.}$$

因此，根据定义 3 和 6，任何 DR核心序列 $\{C_{DR}(G_{\hat{\mathcal{P}}_K})\}_{K\in\mathbb{N}^M}$，若满足 $S\subset\mathcal{N}$, $\beta_S^{K_S}\in(0,1)$，$K_S\in\mathbb{N}$满足$\sum_{K_S=1}^{\infty}\beta_S^{K_S}<\infty$，且对所有 $S\subset\mathcal{N}$，当 $K=(K_S)_{S\subset\mathcal{N}}$ 时，$\lim_{K_S\to\infty}\varepsilon_S(\beta_S)=0$，则当 $K_S\to\infty$ 对所有 $S\subset\mathcal{N}$ 时，该序列几乎必然收敛于真实期望核心 $C_E(G_{\mathbb{P}})$。■

B. 求解 DR核心内的分配

本小节的结果与我们采用何种抽样方式无关。利用 [23], 中的结果，我们证明，通过求解一个有限维凸优化问题，可以计算出 DR核心内的一个分配。这里我们作出以下假设。

假设 4：1）对于任意 $S\subset\mathcal{N}$，值函数 $u_S(\xi)$ 可写为 $u_S(\xi)=\max_{m_S=1,\ \ldots,\ M_S}u_{m_S}(\xi)$，其中 $-u_{m_S}(\xi)$ 对所有 $m_S\in\{1,\ldots,M_S\}$ 及任意 $S\subset\mathcal{N}$ 都是适当、凸且下半连续的。2）对于任意 $S\subset\mathcal{N}$，u_S 在 Ξ 上不取值 $-\infty$。3）支撑集 Ξ 是闭且凸的。□

在这些假设下，我们有以下结果：

引理 2：设假设 4 成立。通过抽取 K_S 个样本，并考虑与每个联盟 $S\subset\mathcal{N}$ 的 Wasserstein 球约束相对应的对偶变量 λ_S、ℓ_{k_S}、$z_{k_Sm_S}$, $v_{k_Sm_S}$，可通过求解以下优化问题找到 DR核心内的一个分配

$$P:\begin{cases}\min\limits_{x,\{\lambda_S,\ell_{k_S},z_{k_Sm_S},v_{k_Sm_S}\}_{S\subset\mathcal{N}}}\ ||x||_2^2\\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i\in\mathcal{N}}x_i=u_{\mathcal{N}}\\ \lambda_S\varepsilon_S+\dfrac{1}{K_S}\sum\limits_{k_S=1}^{K_S}\ell_{k_S}\le\sum\limits_{i\in S}x_i,\ \forall\ S\subset\mathcal{N}\\ [-u_{m_S}]^*(z_{k_Sm_S}-v_{k_Sm_S})+\sigma_\Xi(v_{k_Sm_S})-z_{k_S}^\top\xi^{(k_S)}\le\ell_{k_S},\\ \qquad\qquad\forall k_S,\forall m_S,\ \forall\ S\subset\mathcal{N}\\ \|z_{k_Sm_S}\|_*\le\lambda_S\ \forall k_S,\forall m_S,\ \forall\ S\subset\mathcal{N}\end{cases}$$

其中，$[f]^*$表示函数 f 的共轭函数，即 $[f]^*(y)=\sup_{x\in dom(f)}(y^\top x-f(x))$。而 $\|\cdot\|_*$是对偶范数，σ_X 表示示性函数的共轭函数。□

证明：我们希望求解以下可行性问题

$$\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\ ||x||_2^2\\ \text{s.t}\ x\in C_{DR}(G_{\hat{\mathcal{P}}_K}),\end{cases}$$

根据定义6，并将数据驱动 Wasserstein 球视为每个联盟的歧义集，这等价于

$$\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\ ||x||_2^2\\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i\in\mathcal{N}}x_i=u_{\mathcal{N}},\\ \qquad\sum\limits_{i\in S}x_i\ge\sup\limits_{\mathbb{Q}_S\in\hat{\mathcal{P}}_{K_S}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S}[u_S(\xi)],\ \forall\ S\subset\mathcal{N}.\end{cases}$$

请注意，基于从每个联盟 S 中抽取的 K_S个样本计算 DR核心，归结为求解以下最坏情形期望值问题：

$$P_S':\ \sup_{Q_S\in\hat{\mathcal{P}}_{K_S}}\mathbb{E}_{Q_S}[u_S(\xi)],\ \forall\ S\subset\mathcal{N}.$$

这是一个关于概率测度的无限维优化问题。在假设 4 下，根据 [23], 中的定理4.2，这些以 S 为参数的规划均可改写为有限维凸规划 [23], ，从而得到其对偶形式：

$$\begin{cases}\min\limits_{x}\ ||x||_2^2\\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i\in\mathcal{N}}x_i=u_{\mathcal{N}}\ \text{and}\ \forall\ S\subset\mathcal{N},\\ \qquad\sum\limits_{i\in S}x_i\ge\begin{cases}\min\limits_{\substack{\lambda_S,\ell_{k_S}\\ z_{k_Sm_S},v_{k_Sm_S}}}\ \lambda_S\varepsilon_S+\dfrac{1}{K_S}\sum\limits_{k_S=1}^{K_S}\ell_{k_S}\\ \qquad\text{s.t.}\ [-u_{m_S}]^*(z_{k_Sm_S}-v_{k_Sm_S})+\\ \qquad\sigma_\Xi(v_{k_Sm_S})-z_{k_S}^\top\xi^{(k_S)}\le\ell_{k_S}\ \forall k_S,\forall m_S\\ \qquad\|z_{k_Sm_S}\|_*\le\lambda_S\ \forall k_S,\forall m_S.\end{cases}\end{cases}$$

Th上述问题可以改写为 h b i

$$\begin{cases}\min\limits_{x}\ ||x||_2^2\\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i\in\mathcal{N}}x_i=u_{\mathcal{N}}\ \text{and}\ \forall\ S\subset\mathcal{N},\\ \begin{cases}\exists\ \lambda_S,\ell_{k_S},z_{k_Sm_S},v_{k_Sm_S}:\lambda_S\varepsilon_S+\dfrac{1}{K_S}\sum\limits_{k_S=1}^{K_S}\ell_{k_S}\le\sum\limits_{i\in S}x_i\\ \text{s.t.}\ [-u_{m_S}]^*(z_{k_Sm_S}+v_{k_Sm_S})+\\ \sigma_\Xi(v_{k_Sm_S})-z_{k_S}^\top\xi^{(k_S)}\le\ell_{k_S}\ \forall k_S,\forall m_S\\ \|z_{k_Sm_S}\|_*\le\lambda_S\ \forall k_S,\forall m_S.\end{cases}\end{cases}$$

由于存在算子，我们可以对 λ_S、ℓ_{k_S}、$z_{k_Sm_S}$、$v_{k_Sm_S}$进行最小化，对所有 $S\subset\mathcal{N}$均成立。至此，证明完毕。■

注意，P 的附加决策变量对应于原始问题 P_S'中针对每个 $S\subset\mathcal{N}$ [23, 定理 4.2] 的 Wasserstein距离约束。

V. 数值示例

我们考虑一个有 $N=3$个代理的随机联盟博弈，其联盟价值为 $u_1=2+\xi$、$u_2=1.5+\xi$、$u_3=2.5+\xi$ 和 $u_{12}=6+\xi$、$u_{23}=6.5+\xi$、$u_{13}=7+\xi$，其中 ξ是不确定参数，服从均值为 $\mu=1$ 、方差为 $\sigma^2=1$的高斯分布，并截断在区间 $\Xi=[0,1]$内。我们假设每个联盟对于不确定参数的分布都存在一定程度的歧义。尽管我们的结果适用于考虑不同 Wasserstein球的情况

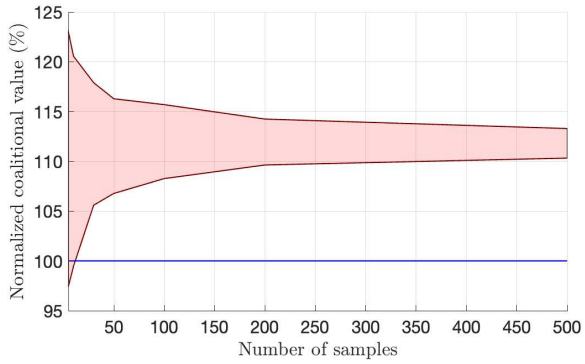


图1. 对于 $K_S \in \{5,10,30,50,100,200,500\}$ 和 $\varepsilon = 0.3$，在 500 次模拟中评估的 $u_S(\xi)$ 的期望对应的 DR联盟价值（红色阴影区域），与相应的期望联盟价值（蓝色实线）的对比。当 $K_S \geq 10$ 时，DR核心以经验置信度 1 包含于期望值核心中。

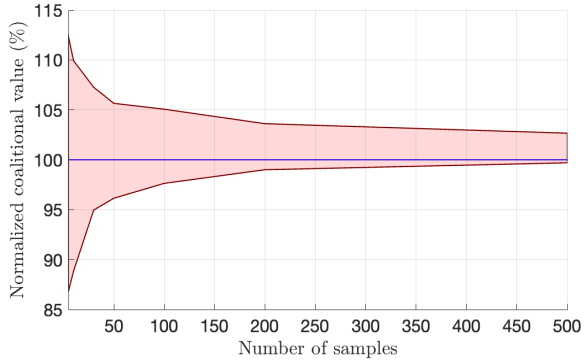


图2. 对于 $K_S \in \{5,10,30,50,100,200,500\}$ 和 $\varepsilon = 0.03$，在 500 次模拟中评估的 $u_S(\xi)$ 的期望对应的 DR联盟价值（红色阴影区域），与相应的期望联盟价值（蓝色实线）的对比。可以观察到，ε的减少会影响 DR核心包含于期望值核心中的置信度。然而，在 $K_S = 500$时，只有一小部分 DR值低于期望值。

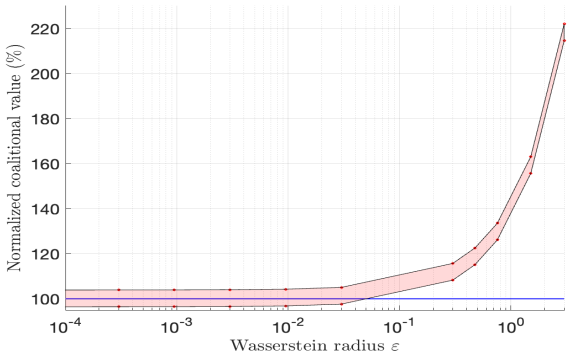


图3。在 Wasserstein半径 ε for $K_S = 100$ 逐渐增大的情况下，500次模拟中的联盟价值（红色阴影区域）。随着半径增大，$u_S(\xi)$ 的期望值所对应的DR联盟价值高于其对应的期望值（蓝色实线），因此，由于各联盟中重复出现相同的模式，DR核心位于期望值核心之内。

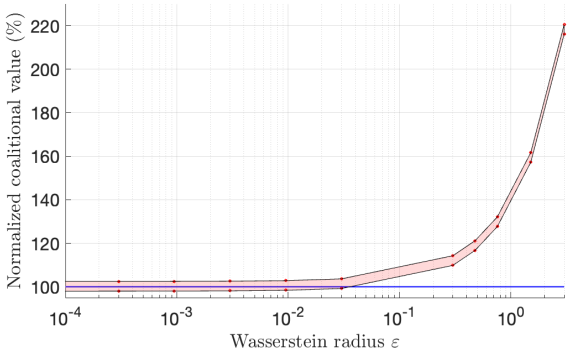


图4。在 Wasserstein半径 ε for $K_S = 250$ 逐渐增大的情况下，500次模拟中的联盟价值（红色阴影区域）。当样本取自具有密度且具备一定集中性质的分布时，我们推测，由于各次模拟中的经验概率更加准确，DR联盟价值的变异性小于图3。

以及每个联盟采用不同的多样本规模 $S \subset \mathcal{N}$，为便于说明，此处假设半径和多样本规模均相同（见推论1）。首先，我们为每个联盟考虑一个半径为 $\varepsilon = 0.3$的 Wasserstein球。

图1聚焦于联盟 $S = \{1\}$，展示了每种多样本规模 K_S下，$u_S(\xi)$ 的期望对应的归一化DR价值范围，记为 $\sup_{\mathbb{Q}_S \in \hat{\mathcal{P}}_{K_S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S}[u_S(\xi)]$，每种规模均基于 500 次模拟。我们注意到，所有其他联盟也呈现出类似的行为，只是图形的中心值不同。由于各联盟中观察到的模式相似，为避免重复，此处不予展示。

对于每个联盟的样本数相同且随$[5,500]$, 变化时，我们观察到，随着样本数增加，图1中红色阴影区域所示的所有DR联盟价值都高于相应的期望值（蓝色实线）。由于所有联盟都呈现相同的规律，这意味着（见定理2证明中的公式（6）），随着每个$S \subset \mathcal{N}$的K_S 增加，DR核心包含于期望值核心之中。这一观察与定理1一致，因为对于一个

每个联盟的多样本规模不断增加时，对所提供理论保证的置信度 β趋于1。图2显示，采用与图1相同的方法，但使用显著更小的Wasserstein半径 $\varepsilon = 0.03$，会导致经验置信度较低；随着获得的样本增多，经验置信度会提高。然而，在$K_S = 500$时，只有少部分DR值低于期望值，这意味着DR稳定分配以高置信度在均值意义下具有稳定性。

图3展示了在500次模拟中，随着Wasserstein半径 ε增大（固定样本数 $K_S = 100$），$u_S(\xi)$ 的经验期望对应的 DR联盟价值（红色阴影区域），并将其与相应的期望值（蓝色实线）进行比较。我们再次注意到，当半径 ε大于某个阈值时，所有 DR联盟价值都高于其对应的期望值。因此，由于在样本数相同的情况下这一结论对所有联盟均成立，DR核心位于期望值核心之内。出现这一现象是符合预期的，因为在样本数固定时，Wasserstein球越大，

包含真实概率分布的可能性就越高。因此，即使样本数较少，也可以通过相应地调整各联盟的Wasserstein半径，获得均值意义下稳定的分配。我们注意到，图1和图2的比较结果与图3一致。阴影区域宽度所占的百分比可作为置信度的经验估计。 ε或 K_S 越大， β_S 越小，因此置信度越高。

与图3相比，图4中的每次模拟都生成了更多样本 $K_S = 250$ 。然而，要对一般情形得出结论并不容易；不过，我们推测，当样本来自具有密度且满足某些集中性质的分布时，使用的样本越多，不同模拟（即使用不同多组样本）所得到的经验分布 $\hat{P}^{K_S}$ 就越可能彼此接近。这样一来，Wasserstein球的中心也会更接近，进而意味着 $u_S(\xi)$ 期望的分布鲁棒值也会彼此更接近。换言之，样本数量越多，不同模拟中 $u_S(\xi)$ 期望的分布鲁棒值的变异性就越小。与这一直觉相符，图4中阴影区域的宽度（变异性的经验估计）比图3中的更窄。

VI. 结论

我们提出了分布不确定性下合作博弈的分布鲁棒核心概念，即在期望值意义下具有鲁棒性的一组收益分配。我们从理论和数值两方面证明，给定一定的半径，随着可用数据增多，分布鲁棒稳定性意味着均值意义下的稳定性。此外，即使样本量较小，也可以通过调整Wasserstein半径，在期望核心中获得收益分配。本文迈出了研究分布鲁棒机会约束合作博弈这一类问题的第一步。未来的工作将致力于改进概率保证，并设计分布式收益分配算法。

参考文献

[1] G. Chalkiadakis、E. Elkind 和 M. Wooldridge，《合作博弈论的计算方面》，《人工智能与机器学习综合讲座》，第5卷，第6期，第1–168页，2011年。[2] A. A. Raja 和 S. Grammatico，《时变网络中鲁棒合作博弈的收益分配》，IEEE自动控制与网络系统汇刊，第1–1页，2021年。[3] L. Han、T. Morstyn 和 M. McCulloch，《运用合作博弈论激励产消者联盟进行能源管理》，IEEE电力系统汇刊，第34卷，313，2019年1，303，第–页。[4] F. Fele、J. M. Maestre 和 E. F. Camacho，《联盟控制：合作博弈论与控制》，IEEE控制系统杂志，第37卷，第1期，第53–69页，2017年。[5] R. A. McCain，《合作博弈与合作组织》，社会经济学杂志，第37卷，第6期，第2155–2167页，2008年，专刊：合作社与经济。[6] A. Charnes 和 D. Granot，《n人博弈的联盟博弈与机会约束解 I：先验满意核》，SIAM应用数学杂志，第31卷，第2期，第358–367页，1976年。

[7] ——，《n人博弈的联盟博弈与机会约束解 II：两阶段解》，运筹学，第25卷，第6期，第1013–1019页，1977年。[8] ——，《先验解：将凸核解扩展至机会约束博弈》。1973年。[9] J. Suijs、P. Borm、A. De Waegenaere 和 S. Tijs，《具有随机收益的合作博弈》，《博弈与经济行为杂志》，第1995-88卷，1995年。[10] G. Chalkiadakis 和 C. Boutilier，《不确定条件下联盟形成的贝叶斯强化学习》，AAMAS 2004，1097，2004年，第1090–页。[11] S. Ieong 和 Y. Shoham，《贝叶斯联盟博弈》。AAAI，第95–100页，2008年1月。[12] Y. Li 和 V. Conitzer，《在噪声下最大化稳定性的合作博弈解概念》，AAAI，2015年。[13] G. Chalkiadakis 和 C. Boutilier，《不确定条件下重复联盟形成中的序贯决策》，载于AAMAS，2008年。[14] J. Guéneron 和 G. Bonnet，《基于探索的策略是否适用于重复随机联盟博弈？》，《智能体、多智能体系统与社会公益实际应用进展：PAAMS论文集》，第89–100页，2021年。[15] G. Pantazis、F. Fabiani、F. Fele 和 K. Margellos，《不确定合作博弈中的概率鲁棒稳定分配》，IEEE控制系统快报，第6卷，第3128–3133页，2022年。[16] A. Shapiro 和 A. Kleywegt，《随机问题的极小极大分析》，《优化方法与软件》，第17卷，第3期，第523–542页，2002年1月。[17] N. Fournier 和 A. Guillin，《经验测度在Wasserstein距离下的收敛速率》，《概率论及相关领域》，第162卷，第3–4期，第707–738页，2015年8月。[18] G. C. Calafiore 和 L. E. Ghaoui，《分布鲁棒机会约束线性规划》，《优化理论与应用杂志》，第130卷，第1期，第1–22页，2006年12月。[19] J. Goh 和 M. Sim，《分布鲁棒优化及其可处理近似》，运筹学，第58卷，第4部分第1期，第902–917页，2010年8月。[20] E. Delage 和 Y. Ye，《矩不确定性下的分布鲁棒优化及其在数据驱动问题中的应用》，运筹学，第58卷，第3期，第595–612页，2010年6月。[21] A. Cherukuri 和 J. Cortes，《合作式数据驱动分布鲁棒优化》，IEEE自动控制汇刊，第65卷，第10期，第4400–4407页，2020年10月。[22] R. Gao 和 A. Kleywegt，《基于Wasserstein距离的分布鲁棒随机优化》，《运筹学数学》，2022年8月。[23] P. Mohajerin Esfahani 和 D. Kuhn，《使用Wasserstein度量的数据驱动分布鲁棒优化：性能保证与可处理重构》，《数学规划》，第171卷，第1–2期，第115–166页，2018年9月。[24] D. Kuhn、P. M. Esfahani、V. A. Nguyen 和 S. Shafieezadeh-Abadeh，《Wasserstein分布鲁棒优化：机器学习理论与应用》，《分析时代的运筹学与管理科学》，第130–166页，2019年10月。[25] L. Kantorovich 和 G. S. Rubinstein，《关于完全可加函数空间》，《列宁格勒大学学报》，第13卷，第52–59页，1958年。[26] G. Pantazis、F. Fele 和 K. Margellos，《不确定多智能体博弈中纳什均衡的事后概率可行性保证》，IFAC在线论文集，第53卷，第2期，第3403–3408页，2020年。[27] ——，《不确定条件下多智能体优化问题中解的概率可行性》，《欧洲控制杂志》，第63卷，第186–195页，2022年。[28] W. Römisch 和 R. Schultz，《随机规划的稳定性分析》，《运筹学年鉴》，第30卷，第1期，第241–266页，1991年12月。