arXiv:2304.01790v2 [cs.DS] 5 Nov 2023

VC 集合系统 无小图（有向）图中的 VC 集合系统及其应用 S

Hung Le[1] 和 Christian Wulff-Nilsen[2]

[1]马萨诸塞大学阿默斯特分校[2]哥本哈根大学

摘要

近期关于无小图（无向）图中 VC 集合系统的一系列研究始于 Li 和 Parter [LP19], ，他们为平面图构造了一个新的 VC 集合系统，并取得了出人意料的算法结果 [LP19、Le23、DHV20、FHMWN20]。在本文中，我们开始对无小图中的 VC 集合系统及其在无向图和有向图（即 有向图）中的应用进行更系统的研究。具体而言：

1. 我们为无向图提出了一种新的 Li-Parter 集合系统变体。我们的集合系统解决了 Li-Parter 集合系统的两个不足：终端点可以位于任意位置，图也可以是 K_h-小图无关图，对任意固定的 h均如此。我们获得了若干算法应用，尤其是：(i) 首个针对无权无向K_h-小图无关图的精确距离预言机，其空间复杂度真正次二次且查询时间为常数；(ii) 首个用于计算 K_h-小图无关图维纳指数的真正次二次时间算法，解决了 Ducoffe、Habib 和 Viennot 提出的开放问题 [DHV20]。2. 我们将集合系统扩展到 K_h-小图无关有向图，并证明其 VC 维数为$O(h^2)$。利用这一结果，我们设计了首个用于计算 K_h-小图无关有向图的（无权）直径和所有顶点的离心率的次二次时间算法。3. 我们证明，小图无关有向图中的有向球构成的系统的 VC 维数至多为 $h-1$。随后，我们提出了一种利用球的 VC 集合系统的新技术，得到了首个针对无权小图无关有向图的精确距离预言机，其空间复杂度真正次二次且查询时间为对数级。4. 另一方面，我们证明，由平面有向图的最短路径树构造的 VC 集合系统不具有有界 VC 维数。这留下了一个引人深思的开放问题：确定由小图无关图导出的集合系统具有有界 VC 维数的充要条件。

我们工作的亮点是关于有向图的结果，因为据我们所知，尚无关于为有向图构造和利用 VC 集合系统的算法研究。

目录

1 引言 11.1 VC 集合系统与维数 .21.2 我们的结果与技术 .3

2 预备知识 **73 无向图的VC维数及应用** 8

3.1 VC 维数 线性规划G, M .83.2 算法应用 .12

4 有向图的VC维数及应用 19

4.1 VC 维数 线性规划G, M .194.2 $\vec{\mathcal{B}}(G)$ 的 VC 维数.214.3 算法应用 .23

5 有向 VC 维数边集系统的下界 296 **结论** 33

1 引言

Lipton 和 Tarjan 在 70 年代发表的两篇研讨会论文 [LT79, LT80] 开启了平面图算法这一富有成果的研究方向。在过去几十年间，人们为平面图开发了许多算法工具。粗略来说，这些工具可以分为两类：一类用于处理 NP 难问题，另一类用于为 P[1] 中的问题设计快速算法。前一类旨在为 NP 难问题提供（高效的）多项式时间近似方案，或次指数时间（参数化或精确）算法。典型例子包括 Baker 分层技术 [Bak94], 收缩分解 [Kle05a], 双维性 [DFHT05, DH05], 以及球面切分解 [DPBF09], , 等等。后一类旨在为 P 中的问题设计（近乎）线性时间算法，在许多情况下是运行时间真正达到次二次的算法，而一般图中尚无运行时间相同的算法。非穷尽的例子列表包括分隔子定理 [LT79, LT80] 、 r-划分 [Fed87], 最短路径分隔子 [LT79, Tho04], 多源最短路径 [Kle05b], Voronoi 图 [Cab18], 以及 VC 维数 [LP19]。（两类划分并不互斥：有些技术可用于这两种目的。）

另一方面，平面性十分脆弱：添加一条边或一个顶点都可能使平面图变成非平面图。因此，一个主要的研究目标是将上述算法工具扩展到平面图之外，特别是扩展到更加稳健的图，例如有界亏格图和 K_h-小图图。有界亏格图对于添加边具有稳健性——添加一条新边至多使亏格增加 1——但对于添加顶点则不然，因为添加单个顶点可能使亏格增加 $\Omega(n)$。 K_h-小图图对于添加边和顶点都具有稳健性。此外， K_h-小图图的类别比平面图和有界亏格图的类别广泛得多。

上述提及的大多数针对平面图的算法结果，都可以借助如今已成为标准的拓扑工具推广到有界亏格图 [Epp03, DHT04, CC07, DHM10] 。对于无小图图，Robertson 和 Seymour 历时 20 年的图 minor 项目深入揭示了其结构 [RS83, RS04]。Robertson-Seymour 分解 [RS03] 已成功用于将第一类中的几乎所有算法工具（用于应对 NP难问题）从平面图推广到 K_h-小图-无关图。然而，尽管人们长期致力于简化 Robertson 和 Seymour 的证明 [KTW18, KTW20]，目前已知构造 Robertson-Seymour 分解的最佳算法仍需二次时间 [KKR12], 。二次时间使 Robertson-Seymour 分解无法用于将第二类中的结果推广到无小图图。此外，即使 h 的值很小，对小图规模 h 的依赖也大得不切实际。因此，针对 K_h-小图-无关图设计真正次二次时间算法的算法工具要少得多。大多数研究都集中于在真正次二次时间内，寻找无小图图中的分隔集及由此得到的 r-划分 [RW09, KR10, WN11, WN14]。这一不足促使我们开展本项工作。

研究目标。 丰富用于设计真正次二次时间算法的算法工具箱，以解决不含 K_h-小图的图问题。

为了实现我们的目标，我们提出系统研究 VC 集合系统（定义见第 1.1 节）及其在设计真正次二次时间算法中的应用。我们的工作直接受到近期两项成果的启发；这两项成果都带来了若干出人意料的算法应用。

[1]我们指的是 P 和 NP 中判定问题的优化版本。

第一项成果由 Li 和 Parter 提出 [LP19], 他们从位于平面图外面上的一组终端点构造了 VC 集合系统。然而，如何将他们的结果推广到K_h-无小图图仍不清楚，因为外面的概念定义不明确，而且他们的证明大量依赖于平面性。第二项成果由 Ducoffe、Habib 和 Viennot 提出 [DHV20], 他们通过 Chepoi、Estellon 和 Vaxes 研究的球 VC 集合系统，设计了首个用于求解直径及相关问题的真正次二次时间算法，适用于 K_h-无小图图 [CEV07]。然而，从算法角度来看，球集合系统很难处理；这一难点也体现在 Ducoffe、Habib 和 Viennot [DHV20], 的构造中，导致算法十分复杂。因此，他们的算法运行时间会随着小图大小的增加而呈指数级增长。

我们指出，这两项结果 [LP19，DHV20] 仅适用于无向图，而我们的结果也适用于有向图，后者通常更难处理。事实上，我们尚未发现任何适用于有向图的 VC 集合系统，更不用说将其用于算法应用了。Chepoi、Estellon 和 Vaxes [CEV07] 针对平面图的开创性工作，以及 Kranakis 等人 [KKR+97] 针对一般图的工作，都没有考虑有向图。

1.1 VC 集合系统与维数

集合系统是一个二元组 (U, F)，其中 U 是一个基集，F 是 U 的子集所构成的集合；只有在上下文明确基集时，我们才只写 F。若 $\{Y \cap S : S \in \mathrm{F}\} = 2^Y$，则称 $Y \subseteq U$ 被 F 打散。也就是说， Y 与 F 中各集合的交包含 Y 的每一个子集。集合系统 (U, F) 的 VC 维数是被 F 打散的最大子集 $Y \subseteq U$ 的大小。VC 维数的概念由 Vapnik 和 Chervonenkis 引入，记为 [VC71]。若集合系统 (U, F) 的 VC 维数有一个固定常数上界，则称其为 VC 集合系统。

设 G 是一个边带权的无向图。对于顶点 $v \in V$ 和非负实数 r，用 $B(v,r) = \{u : d_G(u,v) \leq r\}$ 表示以 v 为中心、半径为 r 的球。令 $\mathrm{B}(G) = \{B(v,r) : v \in V, r \in \mathbb{R}^+\}$ 表示 G 中所有半径的球所构成的集合。Chepoi、Estellon 和 Vaxes [CEV07] 证明了，当 G 是平面图时，$\mathrm{B}(G)$ 的 VC 维数至多为 4，并指出同一证明应可推广至任意无 K_h 小图图；随后，Bousquet 和 Thomass´e[BT15] 详细给出了证明。

定理 1 (Chepoi、Estellon 和 Vaxes [CEV07])。 若 G 是无向图且 K_h 不含 (V 小图，$\mathcal{B}(G)$) 的 *VC* 维数至多为 $h-1$。

定理 1 此前一直仅用于图论和组合数学 [CEV07，BC14，BT15]直到最近，Ducoffe、Habib 和 Viennot [DHV20] 才在算法设计中利用了这一结果。具体而言，他们设计了首个能够在真正次二次时间内计算无小图图的精确直径及其变体的算法。他们借助了 Haussler 和 Welzl 的一项重要成果 [HW87], , 后者证明任何 VC 集合系统都存在一条具有次线性 刺穿数的生成路径。他们巧妙地将低刺穿生成路径技术与 r-划分技术结合起来；后者是设计无小图图算法的标准工具，几乎所有真正次二次时间算法都依赖于它。事实上，他们费了很大力气才将这两种技术结合起来（见 [DHV20]中的引理 5.2）。然而，他们的算法仍有两个不尽如人意之处。

首先，他们的算法难以推广到其他问题。一个具体问题是计算维纳指数，即所有点对之间距离的总和。他们写道：“我们目前看不出有什么办法能将我们的方法扩展到 [...] 从而也能在真正次二次时间内计算维纳指数。”维纳指数问题源于化学领域 [Wie47] 并已得到广泛研究，例如参见 [CK97、CK09、WN09、Cab18、GKM+21]。正如我们将在第 3.2.2 节中看到的，维纳

索引问题可以用我们的方法轻松解决。其次，最终运行时间会随 h： $O(n^{2-\varepsilon_h})$ 呈指数级增长，其中 $\varepsilon_h = 2^{-O(h)}$。（$\varepsilon_h$ 的确切值在 [DHV20]中未给出。）

在一个完全不同的背景下，受分布式 CON- GEST 模型中的直径问题启发，Li 和 Parter [LP19]基于一个固定的终端点集合构造了另一种 VC 集合系统S。在他们的论文中，他们只研究了一个特殊情形，其中 S 包含平面图外面上的顶点，不过该定义适用于任意 S。

定义1 (Li-Parter [LP19])。设 $M \subseteq \mathbb{R}$ 为一个实数集合。设 $S = \langle s_0, .., s_{k-1} \rangle$ 为无向边加权图 k 中的一列顶点 G。对于每个 $v \in V$，定义：

$$X_v = \{(i, \Delta) : 1 \le i \le k-1, \Delta \in M, d_G(v, s_i) - d_G(v, s_{i-1}) \le \Delta\} \tag{1}$$

令 $\mathcal{L}$ $\mathcal{P}_{G,M}(S) = \{X_v : v \in V\}$ 为基集 $[k-1] \times M$ 的子集族 .

集合 X_v 的形式看起来很复杂，但直观上它编码了从 v 到 S 中每个顶点的（近似）距离：数对 $(i, \Delta) \in X_v$ 表示 $d_G(v, s_i) \le d_G(v, s_{i-1}) + \Delta$。因此，给定 $d_G(v, s_0)$ 以及 X_v 中的所有数对 (i, Δ)，我们可以迭代地恢复任意 $i \in [2, k]$ 的 $d_G(v, s_i)$ 上界。根据 M 的选择，我们可能恢复出精确或近似距离 $d_G(v, s_i)$。Li 和 Parter 证明，对于 G 和 S 的一种特殊取值，$\mathrm{LP}_{G,M}(S)$ 是一个 VC 集合系统（见 [LP19] 中的定理 3.7）：

定理 2 (Li-Parter [LP19]). 设 G 是一个边带权的无向平面图。设 S 是按顺时针顺序排列在 G 外面上的 k 个顶点的集合。对于任意 $M \subseteq \mathbb{R}$，$([k-1] \times M, \mathcal{LP}_{G,M}(S))$的 *VC* 维数至多为3。

由于$\mathcal{LP}_{G,M}(S)$ 能够将图距离直接编码到集合系统中，因此在算法设计中比$\mathcal{B}(G)$ 更易于使用。具体而言，它在解决平面图中的若干问题时发挥了关键作用：度量压缩和分布式近似直径计算 [LP19], 精确距离预言机 [FHMWN20], 以及近似距离预言机 [Le23], 尽管对 S 和 G存在限制。一个自然的开放问题是：我们能否去除对 S 和 G的限制?

1.2 我们的结果与技术

我们提出了在 K_h-小图图中的若干集合系统：无向图和有向图中的 $\mathrm{LP}_{G,M}(S)$) 变体、有向图的球集合系统，以及由有向图中的最短路径诱导的集合系统。（我们将有向图称为有向图。）我们为这些系统得出了正反两方面的结果。我们希望能以一种“统一”的视角看待现有的 VC 集合系统，从而调和它们之间的差异，并为新系统的开发提供指引。两个 VC 集合系统 B_G 和 $\mathrm{LP}_{G,M}(S)$ 在三个方面有所不同：（i）应用难易程度；（ii）适用范围——一个适用于无小图图，另一个适用于平面图；以及（iii）证明技巧。在证明技巧方面，Chepoi、Estellon 和 Vaxes [CEV07] 假设（并为反证）平面图 G 中存在一组被 B_G 打散的大顶点集，直接构造出一个 K_5- 小图；最终得到的证明简洁优雅，并且很容易推广到 K_h- 小图图（Bousquet 和 Thomass´e [BT15] 已完成此项推广）。我们将这种证明技巧称为 minor 构造证明。Li 和 Parter 的证明穷举考察终端点之间路径的各种交叉模式，因此在很大程度上依赖于 G 是平面图且 S 位于外面这一假设，以使交叉模式的数量保持在可控范围内。

本文正面结果的证明都采用 minor 构造方法，不过每种 VC 集合系统的证明都需要各自的变化。我们的证明继承了 minor 构造技术的简洁与优雅，并适用于无向图和有向图，具体见

第 3.1 节、第4.1节和第4.2节。小构造证明技术对于开发新的集合系统也很有启发。事实上，为了尝试用 minor 构造技术重新证明 Li 和 Parter 的结果（定理 2），我们提出了一种与 $\mathrm{LP}_{G,\,M}(S)$) 略有不同的 VC 集合系统。它保留了 $\mathrm{LP}_{G,\,M}(S)$) 的所有上述优点，同时解决了它的两个缺点： G 可以是任意的 K_h-minor-free 图，而 S 可以位于图中的任意位置。

定义2。 令 $M \subseteq \mathbb{R}$， G、和 S 如 定义*1*所示。对每个 $v \in V$，定义：

$$\widehat{X}_v = \{(i, \Delta) : 1 \le i \le k-1, \Delta \in M, d_G(v, s_i) - d_G(v, s_0) \le \Delta\} \tag{2}$$

令 $\widehat{\mathcal{LP}}_{G,\,M}(S) = \{\widehat{X}_v : v \in V\}$ 为基集 $[k-1] \times M$ 的一个子集族。

$\widehat{X}_v$ 在高亮项中与 X_v (方程（1）) 不同：它使用 $d_G(v,\ s_i) - d_G(v,\ s_0)$，而不是$d_G(v,\ s_i) - d_G(v,\ s_{i-1})$。这一差异表面上虽小，但对小图构造证明技术而言在技术上至关重要；更正式地讨论为何该小图构造证明技术不适用于集合系统 $\mathrm{LP}_{G,\,M}(S)$，请参见备注1 。由此得到我们的第一个主要结果：

定理 3。 设 S 是一个边带权无向 K_h-小图无关图 G上的任意顶点集合。设 $M \subseteq \mathbb{R}$ 为任意实数集合。则 $\widehat{\mathcal{LP}}_{G,\,M}(S)$ 的 *VC* 维数至多为 $h-1$。

这里我们概述证明中的关键思路。在以球为基础的集合系统的小图构造技术中，一个关键步骤是选择打散集合族，即能够打散一个大小为 h 的顶点集合的球集合。这样的选择可能有很多种，如何为这些球选择合适的平局打破方案十分重要：Chepoi、Estellon 和 Vaxes [CEV07] 通过使距离之和最小来打破平局，而 Bousquet 和 Thomass´e[BT15] 则依据球的半径来打破平局。然而，$\widehat{\mathrm{LP}}_{G,M}(S)$ 与球集合系统截然不同，因此我们必须为打散集合族选择不同的平局打破方案。事实证明，按照定义2中的方式定义 X_v 后，我们可以利用隔离引理 [VV86]选择平局打破方案。隔离引理已被用于多种应用中的平局打破，例如参见 [VV86, Eri10, MNNW18, CCE13, BP21], ；我们预计，未来涉及小图构造技术的研究中会更多地用到这一引理。

在我们所了解的所有平面图中 VC 集合系统 $\mathcal{LP}_{G,\,M}(S)$ 的应用中，包括 [LP19、FHMWN20、Le23], 中提到的应用，我们可以使用 $\widehat{\mathcal{LP}}_{G,\,M}(S)$ 并获得相同甚至有时更强的保证。例如，我们可以推导出一种度量压缩方案，其保证几乎与 Li 和 Parter [LP19] 所获得的相同，但无需假设S 必须位于外面；此外， G 可以是任意无小图图；参见 第 3.2.4 节。

除了平面图之外，正如上文提到的我们的研究目标 ，我们还为无权 K_h-小图无关图构造了一种距离预言机（定义见 第2节 ），它具有真正次二次空间和常数查询时间。这是首个在 K_h-小图无关图中实现真正次二次空间与查询时间乘积的预言机，不过多年前，平面图中已有许多此类预言机[2] [FR01、MS12、CADWN17、GMWWN18、CGMW19、LP21]。此外，我们的预言机还可以在真正次二次时间内构造。（O 记号中省略了 n的一个多对数因子。）

推论 1。 设 $G = (V, E)$ 是一个无权 K_h-无小图图。我们可以为 G 构造一个精确距离预言机，其占用 $\tilde{O}(n^{2-\frac{1}{3h-1}})$ 空间，查询时间为 $O(1)$ 。我们的预言机构造时间为 $\tilde{O}(n^{2-\frac{1}{3h-1}})$。

[2]或许可以将一些具有真正次二次空间与查询时间乘积的距离预言机从平面图推广到有界亏格图；然而，我们尚未发现此前有任何论文研究这一方向。

我们在推论 1 中的预言机是通过将 Fredslund-Hansen、Mozes 和 Wulff-Nilsen 的构造定制到 K_h-无小图图，并应用定理 3 来界定距离模式的数量而得到的；关于更多细节，请参阅第 3.2.3 节 。

利用 定理 3，我们解决了 Ducoffe、Habib 和 Viennot 留下的一个开放问题 [DHV20]：在任意 K_h-小图图中以真正次二次时间计算维纳指数。我们还改进了 Ducoffe、Habib 和 Viennot [DHV20] 提出的用于计算所有顶点的离心率和无权 K_h-小图图直径的真正次二次时间算法，其运行时间从 $n^{2-1/2^{O(h)}}$ 降至$\tilde{O}(n^{2-\frac{1}{3h-1}})$

推论 2. 设 $G=(V,E)$ 是一个无权 K_h-小图图。我们可以在 $\tilde{O}(n^{2-\frac{1}{3h-1}})$ 时间内计算 G 的所有顶点离心率、直径和维纳指数。

我们指出，对于任意固定常数 $2^{o(h)}n^{2-\epsilon}$ ，在无权$\epsilon>0$ 图的无小图图中计算直径若要达到 K_h 形式的真正次二次运行时间，则不太可能；这是因为 Abboud、Williams 和 Wang [AWW16]，提出了条件下界，且该下界甚至适用于树宽至多 h的图这一特殊情形。

现在我们介绍关于有向图的结果。令 $d_G(u\to v)$ 表示 u 到 v 的距离，其中 G是一个有向图。可能 $d_G(u\to v)\neq d_G(v\to u)$类似于定义2，我们定义一个集合系统，记作 $\longrightarrow\mathrm{LP}_{G,M}(S)$。

定义3。设 $M\subseteq\mathbb{R}$ 和 $S=\{s_0,s_2,..,s_{k-1}\}$ 属于*定义1*，但 $G=(V,E)$ 现在是一个边加权有向图。对每个 $v\in V$，令：

$$\vec{X}_v=\{(i,\Delta):1\le i\le k-1,\Delta\in M,d_G(v\to s_i)-d_G(v\to s_0)\le\Delta\} \tag{3}$$

我们定义 $\longrightarrow\mathcal{LP}_{G,M}(S)=\{-\vec{X}_v:v\in V\}$。

我们的第二个主要结果是证明，在 K_h-小图自由有向图中，$\longrightarrow\mathrm{LP}_{G,M}(S)$ 是一个 VC 集合系统。（若一个有向图的底层无向图是 K_h-小图自由的，则称该有向图为 K_h-小图自由。）

定理 4. 令 S 为边带权 K_h-小图自由有向图 G上的任意顶点集合。令 $M\subseteq\mathbb{R}$为任意实数集合。那么 $\longrightarrow\mathcal{LP}_{G,M}(S)$ 的 *VC* 维数至多为 h^2。

定理 4 中的 VC 维数上界是二次的，而不是像定理 3那样是线性的。我们对定理 4的证明同样采用构造小图的方法。然而，有向情形的主要困难在于，两条有向最短路径可能相交任意多次（方向各异）。在无向情形中，只要采用一致的平局打破方案，两条最短路径至多相交一次。有向路径可能以非常复杂的方式相交，这使得在有向图中构造小图更加困难，因此我们采用了一个较宽松的上界。为了构造小图，我们将顶点分成 h 组；粗略地说，我们证明了如何选择组与组之间的有向路径，使这些路径顶点不相交。

我们使用定理 4 为无权 K_h-小图自由有向图设计了首个用于计算直径和离心率的真正次二次时间算法。此前，这些问题的真正次二次时间算法仅适用于平面有向图 [Cab18，GKM+21]。

推论 3. 设 $G=(V,E)$ 是一个无权 K_h-小图自由有向图。我们可以在 $\tilde{O}(n^{2-1/(3h^2+6)})$ 时间内计算其直径和全顶点离心率 G 。

为推论 3 中的有向图设计一个能够在真正次二次时间内计算直径和所有顶点离心率的算法，要比为推论 2 中的无向图设计对应算法困难得多。推论 3 无向图中的对应问题推论 2。无向图的算法基于模式这一概念：直观地说，每个模式都是图中某个顶点到某个子图边界的距离向量；其形式化定义见公式（12）。无向图中的模式具有两个良好性质：（i）模式的数量只有多项式级别；（ii）顶点 u 到顶点v 在 H 的连通子图中的距离，可以根据 u 到v的模式距离来定义。（我们尚未定义模式与顶点之间的距离；目前只需知道，可以定义这样的概念。）在有向图中，性质（i）完全不成立，原因或许并不令人意外：有向图中三角不等式不成立——非对称三角不等式也无济于事。为此，我们引入无限模式，允许其中的条目取 $\pm+\infty$ 值。对于无限模式，我们能够得到性质（i）。然而，性质（ii）对无限模式并不成立。我们通过同时考察模式到 H 所有顶点的全部距离来解决这一问题，并从中提取最大距离。因此，我们仍能在真正次二次时间内解决直径和所有顶点离心率问题。遗憾的是，使用无限模式无法在真正次二次时间内计算维纳指数；我们将此留作未来工作的一个开放问题。

在无向图中，我们构造利用 VC 维数界来处理空间和常数查询时间的精确距离预言机（推论 1）。然而，我们无法利用 VC 维数界来处理 $\longrightarrow \mathrm{LP}_{G,\ M}(S)$，以便为有向图得到类似的结果。这是因为模式这一概念并不适用，而我们引入的无限模式也无法用于解码距离。我们在第三个主要结果中解决了这一问题。具体而言，令 $\overrightarrow{B}(v,\ r) = \{u : d_G(v \to u) \le r\}$，并且：

$$\overrightarrow{\mathcal{B}}(G) = \{\overrightarrow{B}(v,r) : v \in V\} \tag{4}$$

定理 5。 若 G 是一个 K_h-小图自由有向图，则 $\overrightarrow{B}(G)$ 的 *VC* 维数至多为 $h-1$。

接下来，我们提出一种新技术，以利用有向球的 VC 集合系统。该技术与 r-分解自然契合，适用于 K_h-小图自由有向图。具体而言，对于r-分解中的每个簇，我们考察以簇外顶点为中心的球在该簇上的所有限制。我们利用 定理 5 证明不同限制的数量仅为多项式级。因此，我们可以将所有这些限制及其辅助信息存入一张表中。我们的技术首次为有向图构造出空间与查询时间乘积真正次二次的精确距离预言机。值得指出的是，目前尚不清楚如何将 Ducoffe、Habib 和 Viennot 提出的低刺穿生成路径技术 [DHV20] 与 r-分解相结合，从而构造出具有相同保证的精确距离预言机（即使在无向图中也是如此）。

推论 4。 设 $G = (V, E)$ 为一个无权 K_h-小图-*free* 有向图。我们可以为 G 构造一个精确距离预言机，其空间为 $\tilde{O}(n^{2-\frac{1}{h-2}})$，查询时间为 $O(\log(n))$。

现在我们转向一个否定性结果。我们研究其基集为有向图中的边集的集合系统。尽管边的集合系统有许多种定义方式 [KKR+97]，最短路径树的系统对我们有特殊意义：如果这样的集合系统具有有界 VC 维数，就可以用真正次二次时间计算维纳指数——从而解决我们上面提出的问题——加速精确直径计算，并为有向图构造精确距离预言机

查询时间为 $O(1)$，并且可能还有许多其他应用。不幸的是，我们证明该集合系统不具有有界 VC 维数。更正式地说，给定一个有向图 $G = (V, E)$，令 τ_v 为以 v为根的最短路径树。在 G中构造最短路径树时，始终以一致的方式打破平局。（如果不以一致的方式打破平局，可以较容易地证明，下面引入的边集所构成的集合系统不具有有界 VC 维数。）我们将 τ_v 视为E的子集，并定义：

$$\overrightarrow{\mathcal{SP}}(G) = \{\tau_v : v \in V\} \tag{5}$$

我们的第四个主要结果表明，即使在无权平面有向图中，集合系统（E, $\longrightarrow$SP(G)）的 VC 维数也没有上界。

定理 6。 对于任意常数整数 $r \geq 1$，存在一个无权平面有向图 $G = (V, E)$以及一个大小为 r 的子集 $X \subseteq E$，使得 X 被 $\longrightarrow\mathcal{SP}(G)$打散。

最后，我们简要提及另外两个本文未探讨的方向，因为它们超出了本文的范围。第一个方向是探索如何将我们的 VC 维数结果应用于解决图论问题。已有若干研究将 Chepoi、Estellon 和 Vaxes 先前关于 VC 维数的结果（定理 1）应用于理解平面图和无小图图的结构，例如 [BT15、BC14、BBE+21]，以及将 Li 和 Parter 的结果（定理 2）用于此目的，例如 [JR23], 。我们相信，我们的结果也适用于这一方向。第二个方向是研究无小图之外的图，例如 Ducoffe、Habib 和 Viennot 在其研究中探讨的具有多项式扩张的图或处处稠密图 [DHV20]。据我们所知，我们的结果也可以扩展到具有多项式扩张的图，并沿着 Ducoffe、Habib 和 Viennot [DHV20]的思路获得算法应用。然而，我们认为，要将我们的结果扩展到处处稠密图，似乎还需要付出更多努力。

2 预备知识

我们使用图来指代无向图，而将有向图称为有向图。我们用 V 和 E 分别表示 G 的顶点集和边集。对于其他任意图 H，其顶点集记为 $V(H)$，边集记为 $E(H)$。在图 G 中，我们用 $\pi(u, v, G)$ 表示 u 和 v 之间的一条最短路径。若 G 是有向图，则用 $\pi(u \to v, G)$ 表示从 u 到 v 的有向最短路径。若图由上下文可知，我们分别将最短路径记为 $\pi(u, v)$ 和 $\pi(u \to v)$。

顶点 u 的离心率 在图 G 中记为 ecc(u)，其定义为 ecc(u) = $\max_{v \in V} d_G(u, v)$。 G 的直径是最大离心率：$\max_{u \in V}$ecc(u)。图 G 的维纳指数定义为所有点对之间距离之和：$\frac{1}{2}\sum_{u \in V}\sum_{v \in V} d_G(u, v)$。有向图的维纳指数、离心率和直径定义类似，其中使用 $d_G(u \to v)$ 代替 $d_G(u, v)$。

我们称 H of G 的子图是诱导子图，如果 G 中两个顶点之间的每条边也都出现在 H 中。我们将在算法中使用无小图图的 r-划分。簇是 G 的连通诱导子图。设 C 是 G 的一个簇。我们称顶点 $v \in C$ 是边界顶点，如果 v 与一个顶点 $u \in V \setminus V(C)$ 相邻。我们用 ∂C 表示 C 的所有边界顶点构成的集合。 G 的 r-划分是由簇 G 组成的集合 R，其中每个簇 $R \in$R 至多包含 r 个顶点。

我们的 r-划分的定义有些非标准，因为我们没有 $O(\sqrt{|V(R)|})$对每个簇的边界顶点数量的上界 R。在 Wulff-Nilsen r的论文中，它被称为 [WN11]-聚类。这里我们仍称其为 r-划分，因为使用r-聚类的大部分直觉都来自 r-划分。

Wulff-Nilsen [WN11] 证明可以为任意 r图构造一个 K_h-小图图划分，使按重数计的边界顶点总数较小。我们注意到，在我们的应用中，每个簇 $R \in \mathcal{R}$ 都是 G的连通子图。

引理 *1*（*Wulff-Nilsen*，引理 2 [*WN*11]）。设 G 是一个具有 n 个顶点的 K_h-小图图，且$r \in [Ch^2 \log n, n]$ 其中常数 C充分大。对于任意固定常数 $\epsilon > 0$，我们可以在时间 $O(n^{1+\epsilon}\sqrt{r})$ 内构造一个 r-划分，记为 $\mathcal{R}$，它将 G 划分为满足以下条件的部分：**(a)** $\sum_{R\in\mathcal{R}} |\partial R| = \tilde{O}(nh/\sqrt{r})$，且 **(b)** R 中的每个簇 $R \in$ 都满足 $|V(R)| \le r$ 和 $|\partial R| = O(h\sqrt{r})$。此外，$\mathcal{R}$ 中的簇数至多为 $O(hn/\sqrt{r})$。

˜可以得到一个 r-划分，其簇的数量为 $O(hn/r)$ 但运行时间会更长。对我们而言，引理 1中的较弱界限已经足够。

在我们的许多结果中，我们将使用以下广为人知的 Sauer–Shelah 引理，它给出了 VC 集合系统规模的多项式上界。

引理 2 (Sauer–Shelah 引理)。设 $\mathcal{F}$ 是由一个含有 n 个元素的基集的若干子集构成的族。若 $\mathcal{F}$ 的 *VC* 维数至多为 k，则 $|\mathcal{F}| = O(n^k)$。

图 G 的距离预言机是一种紧凑数据结构，给定任意两个顶点 u 和 v，能够快速返回 $d_G(u, v)$。查询时间是对所有顶点对的查询进行回答所需时间的最大值。预言机的空间与查询时间之间通常存在权衡。

3 无向图的 VC 维数及其应用

3.1 $\mathcal{LP}_{G,M}$ 的 VC 维数

本节中，我们固定 $G = (V, E)$ 为一个无向 K_h-小图自由图。我们首先证明定理 3，并在下文重述。

定理 3。设 S 是一个带边权的无向 K_h-小图自由图 G上的任意顶点集合。设 $M \subseteq \mathbb{R}$ 是任意实数集合。则 $\mathcal{LP}_{G,M}(S)$ 的 *VC* 维数至多为 $h - 1$。

我们的证明采用反证法。假设存在一个大小为 h 的集合 Y，它被LP$_{G,M}$打散。不失一般性，假设 $Y = \{(1, \Delta_1), \ldots, (h, \Delta_h)\}$。我们首先观察到：

观察 1。$s_i \neq s_j$ 对于任意 $1 \le i \ne j \le h$。

证明。反设 $s_i = s_j$。$\widehat{X}_v$ $v \in V$ $s_i\ \Delta_j \in \widehat{X}_v$ $d_G\ v\ s_i \le d_G\ v\ s_0\ +\Delta_i$ $s_i \in$ $d_G\ v\ s_i$。不失一般性，假设 $\Delta_i < \Delta_j$。这意味着，如果某个顶点满足（, Δ_i），那么（, ），因为（, ）（, ）蕴含（, ） $d_G\ v\ s_0\ +\Delta_j$ $\mathcal{LP}_{G\ M}$ Y $\le$ $\widehat{X}_v$（, ）。然而，由于 LP, 打散了，根据打散的定义，存在一个集合包含（s_i, Δ_i）但不包含（s_i, Δ_j），矛盾。 □

对于任意两个元素 (s_i, Δ_i) 和 (s_j, Δ_j)，其中 $i \neq j$ 属于 Y，令 v_{ij} 为一个顶点，使得 $\{(s_i, \Delta_i), (s_j, \Delta_j)\} = \widehat{X}_{v_{ij}} \cap Y$。

令 $\widehat{G}$ 为通过向 G 的边添加（微小的）扰动权重而得到的图，使得 (i) G 中任意顶点之间的最短路径都是唯一的，并且 (ii) $\widehat{G}$ 中的每条最短路径也是 $\widehat{G}$ 中的最短路径。（ G中的某些最短路径可能不再是 G 中的最短路径。）我们 $\widehat{G}$可以将 ^视为为 G 中的最短路径提供平局打破方案。根据隔离引理 G，这种扰动是存在的 [VV86]。

定义 4。 我们将顶点 t_{ij} 定义为 $\pi(v_{ij}, s_i, \widehat{G}) \cup \pi(v_{ij}, s_j, \widehat{G})$ 中满足以下条件的顶点：

(a) $d_G(v_{ij}, t_{ij}) + d_G(t_{ij}, s_i) \le \Delta_i + d_G(v_{ij}, s_0)$ *and* $d_G(v_{ij}, t_{ij}) + d_G(t_{ij}, s_j) \le \Delta_j + d_G(v_{ij}, s_0)$.

(b) 距离 $d_{\widehat{G}}(t_{ij}, s_i) + d_{\widehat{G}}(t_{ij}, s_j)$ 之和最小。

注意，定义 4 的条目 (a) 中的距离是相对于图 G 而言的，而条目 (b) 中的距离是相对于 $\widehat{G}$ 而言的。根据 $\widehat{G}$ 的定义，$\pi(s_i, v_{ij}, \widehat{G})$ 也是 G 中的一条最短路径；有时我们会滥用记号，用 $\pi(s_i, v_{ij}, \widehat{G})$ 指代其在 G 中对应的最短路径。我们指出，t_{ij} 确实存在，因为 v_{ij} 是满足 (a) 的 t_{ij} 的一个可能选择。对于 t_{ij}，一个便于理解但并不准确的解释是：当两条最短路径 $\pi(s_i, v_{ij}, \widehat{G})$ 和 $\pi(s_i, v_{ij}, \widehat{G})$ 除 v_{ij} 外还共享同一个顶点时，t_{ij} 是距 v_{ij} 最远的公共顶点；如果我们将 t_{ij} 限制为 $\pi(v_{ij}, s_i, \widehat{G}) \cap \pi(v_{ij}, s_j, \widehat{G})$ 中的顶点，而不是像定义 4 中那样限制为 $\pi(v_{ij}, s_i, \widehat{G}) \cup \pi(v_{ij}, s_j, \widehat{G})$ 中的顶点，就会出现这种情况。事实上，在证明中，t_{ij} 所起的作用比仅仅作为距最远的公共顶点更加微妙。

断言 1. $\pi(s_i, t_{ij}, G)$ 与 $\pi(s_j, t_{ij}, G)$ 内部不相交。

证明。 反设不然；则存在一个顶点 $x_{ij} \in (\pi(v_i, t_{ij}, G) \cap \pi(v_j, t_{ij}, G)) \setminus \{t_{ij}\}$；见图 1(a)。于是，我们有：

$$\begin{aligned} d_G(v_{ij}, x_{ij}) + d_G(x_{ij}, s_i) &\le d_G(v_{ij}, t_{ij}) + d_G(t_{ij}, x_{ij}) + d_G(x_{ij}, s_i) \\ &= d_G(v_{ij}, t_{ij}) + d_G(t_{ij}, s_i) \\ &\le \Delta_i + d_G(v_{ij}, s_0) \qquad \text{(by Item (a) in Definition 4)} \end{aligned}$$

用同样的论证可得：

$$d_G(v_{ij}, x_{ij}) + d_G(x_{ij}, s_j) \le \Delta_j + d_G(v_{ij}, s_0).$$

这意味着 x_{ij} 满足定义 4中的条目 (a)定义 4。此外，由于 $x_{ij} \in (\pi(v_i, t_{ij}, G) \cap \pi(v_j, t_{ij}, G)) \setminus \{t_{ij}\}$，我们有：

$$\begin{aligned} d_{\widehat{G}}(x_{ij}, s_i) + d_{\widehat{G}}(x_{ij}, s_j) &= d_{\widehat{G}}(t_{ij}, s_i) - d_{\widehat{G}}(t_{ij}, x_{ij}) + d_{\widehat{G}}(t_{ij}, s_j) - d_{\widehat{G}}(t_{ij}, x_{ij}) \\ &< d_{\widehat{G}}(t_{ij}, s_i) + d_{\widehat{G}}(t_{ij}, s_j) \end{aligned}$$

这与 t_{ij} 的极小性相矛盾，因为根据条目 (b)定义 4。 □

我们定义每个顶点的 *Bunch* s_i (见图 1(b))：

$$\mathsf{Bunch}(s_i) = \cup_{j \neq i} \pi(s_i, t_{ij}, \widehat{G}) \tag{6}$$

如果 t_{ij} 在子图 Bunch(s_i) 中的度为 1，我们称 t_{ij} 为 Bunch(s_i) 的端点 。否则，我们称 t_{ij} 为 Bunch(s_i) 的内部顶点。（ t_{ij} 不是端点的一种情况是，路径 $\pi(s_i, t_{ij}, \widehat{G})$ 是另一顶点 $t_{ij'}$ 的路径 $\pi(s_i, t_{ij'}, \widehat{G})$ 的子路径。）

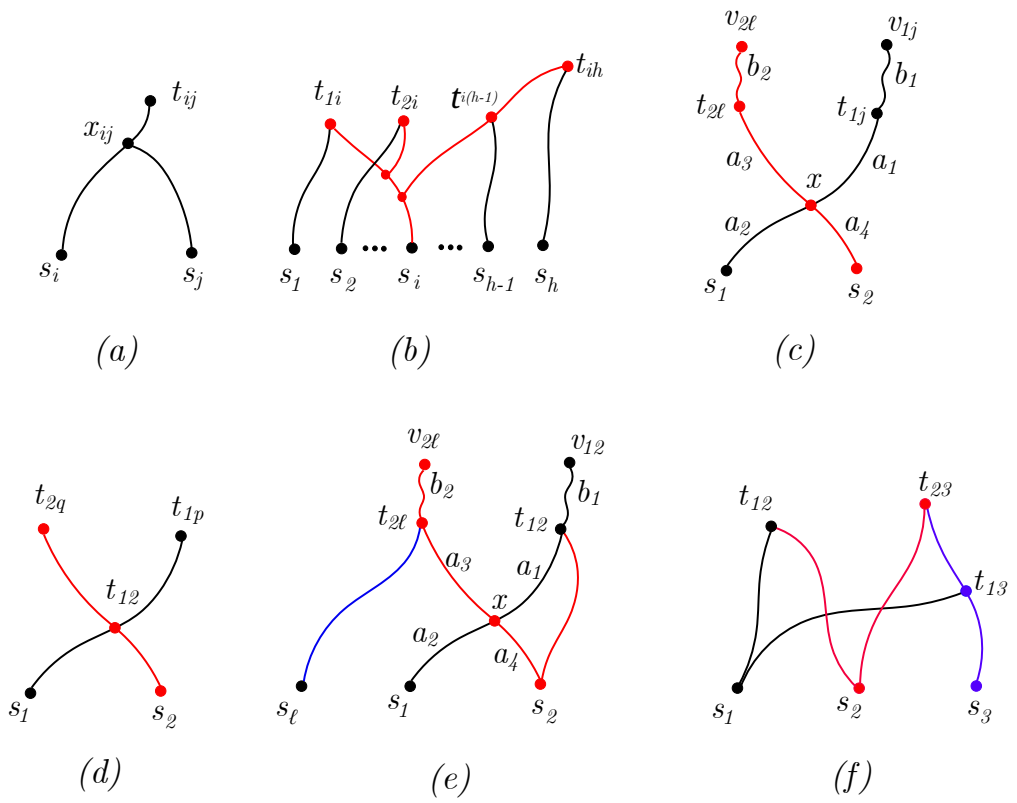

图 1：（a） $x_{ij} \in (\pi(s_i, t_{ij}, G) \cap \pi(s_j, t_{ij}, G)) \setminus \{t_{ij}\}$；（b） s_i 的 Bunch 包含所有红色路径， $t_{i(h-1)}$ 是 Bunch(s_i) 的内部顶点，但却是 Bunch(s_{h-1}) 的端点；（c） $x \in \pi(s_1, t_{1j}, G) \cap \pi(s_2, t_{2k}, G)$；（d）证明 t_{12} 必须是端点的示意图；（e）$\{x\} \in \pi(s_1, t_{12}, G) \cap \pi(s_2, t_{2\ell}, G)$；（f）由三个 Bunch Bunch($s_1$)、Bunch($s_2$) 和 Bunch($s_3$) 构造的 A K_3 小图； t_{12} 将收缩到 s_1， t_{23} 收缩到 s_2，而 t_{13} 收缩到 s_3。

引理 3. 对于每个 $a \neq b$，Bunch(s_a) $\cap$Bunch(s_b) $= \{t_{ab}\}$。此外， t_{ab} 是Bunch(s_a)的端点，或是Bunch(s_b)的端点，也可能两者皆是。

证明。 根据 s_i 的对称性，我们只需对 $a = 1, b = 2$ 证明该引理。设 $\pi(s_1, t_{1j}, \widehat{G})$ 和 $\pi(s_2, t_{2\ell}, \widehat{G})$ 分别是 Bunch(s_1) 和 Bunch(s_2) 中的路径。

命题 2。 如果 $\{j, \ell\} \cap \{1, 2\} = \varnothing$，那么 $\pi(s_1, t_{1j}, \widehat{G}) \cap \pi(s_2, t_{2\ell}, \widehat{G}) = \varnothing$。

证明。 设 否则，存在 $x \in \pi(s_1, t_{1j}, \widehat{G}) \cap \pi(s_2, t_{2k}, \widehat{G})$；参见 图 1(c)。设 ：

$$\begin{aligned} a_1 &= d_G(t_{1j}, x) & a_2 &= d_G(x, s_1) \\ a_3 &= d_G(t_{2\ell}, x) & a_4 &= d_G(x, s_2) \\ b_1 &= d_G(v_{1j}, t_{1j}) & b_2 &= d_G(v_{2\ell}, t_{2\ell}) \end{aligned}$$

根据 t_{1j}(定义 4 中的条目 (a))，有 $b_1 + a_1 + a_2 \leq \Delta_1 + d_G(v_{1j}, s_0)$。出于同样的原因，我们有 $b_2 + a_3 + a_4 \leq \Delta_2 + d_G(v_{2k}, s_0)$。因此：

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 \leq \Delta_1 + \Delta_2 + d_G(v_{1j}, s_0) + d_G(v_{2\ell}, s_0) \tag{7}$$

另一方面，$(s_2, \Delta_2) \notin \widehat{X}_{v_{1j}}$。因此，$d_G(v_{1j}, s_2) > \Delta_2 + d_G(v_{1j}, s_0)$。根据三角不等式，$b_1 + a_1 + a_4 \geq d_G(v_{1j}, s_2)$，这意味着：

$$b_1 + a_1 + a_4 > \Delta_2 + d_G(v_{1j}, s_0) \tag{8}$$

根据相同的论证，我们有 $b_2 + a_2 + a_3 > \Delta_1 + d_G(v_{2\ell}, s_0)$。结合公式 (8)，得到：

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 > \Delta_1 + \Delta_2 + d_G(v_{1j}, s_0) + d_G(v_{2\ell}, s_0), \tag{9}$$

这与公式 (7)矛盾。因此，x 不存在。 □

命题 3。若$\{j, \ell\} \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$, 则 $\pi(s_1, t_{1j}, \widehat{G}) \cap \pi(s_2, t_{2\ell}, \widehat{G}) \subseteq \{t_{12}\}$，且 t_{12} 是Bunch(s_1) 或Bunch(s_2) 的端点，或同时是两者的端点。

证明。若 $t_{12} \in \pi(s_1, t_{1j}, \widehat{G}) \cap \pi(s_2, t_{2\ell}, \widehat{G})$，则我们断言，$t_{12}$ 必定是 Bunch(s_1) 或 Bunch(s_2) 的端点，或同时是两者的端点。反设 t_{12} 不是 Bunch(s_1) 或 Bunch(

s_2 $\pi\ s_1\ t_{1p}$ $\pi\ s_2\ t_{2q}$ t_{12}) 中任何一个的端点。这意味着存在两条路径 $(\ ,\ ,\widehat{G})$ 和 $(\ ,\ ,\widehat{G})$，使得 $\{\}(\ ,\ )(\ ,\ )$，且 $\{\ ,\ \}\{\}$；见图 (d)。存在这样两条路径与命题 2 矛盾。

现在证明 $\pi(s_1, t_{1j}, \widehat{G}) \cap \pi(s_2, t_{2\ell}, \widehat{G}) \subseteq \{t_{12}\}$。注意，若 $j = 2$ 且 $\ell = 1$，则根据断言 1，$t_{12} = \pi(s_1, t_{1j}, \widehat{G}) \cap \pi(s_2, t_{2\ell}, \widehat{G})$。因此，命题 3 得证。还需考虑另外两种情况：（i） $j = 2, \ell \neq 1$，或（ii） $j \neq 2, \ell = 1$。这两种情况是对称的，因此不妨仅考虑情况（i）。

假设存在 $x \neq t_{12}$，使得 $\{x\} \in \pi(s_1, t_{12}, \widehat{G}) \cap \pi(s_2, t_{2\ell}, \widehat{G})$（现为 $j = 2$）；见图1(e)。我们按照命题 2 的定义，定义 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$，具体如下：

$$\begin{aligned} a_1 &= d_G(t_{12}, x) \qquad a_2 = d_G(x, s_1) \\ a_3 &= d_G(t_{2\ell}, x) \qquad a_4 = d_G(x, s_2) \\ b_1 &= d_G(v_{12}, x) \qquad b_2 = d_G(v_{2\ell}, x) \end{aligned}$$

根据 t_{12}(定义 4中的条目 (a))，$b_1 + a_1 + a_2 \leq \Delta_1 + d_G(v_{12}, s_0)$。由相同的论证可得，$b_2 + a_3 + a_4 \leq \Delta_2 + d_G(v_{2\ell}, s_0)$。因此，

$$b_1 + b_2 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq \Delta_1 + \Delta_2 + d_G(v_{12}, s_0) + d_G(v_{2\ell}, s_0). \tag{10}$$

由于 $(s_1, \Delta_1) \notin \widehat{X}_{v_{2\ell}}$，$d_G(v_{2\ell}, s_1) > \Delta_1 + d_G(v_{2\ell}, s_0)$。根据三角不等式，我们有 $b_2 + a_3 + a_2 > \Delta_2 + d_G(v_{2k}, s_0)$。因此，根据方程 (10)，$b_1 + a_1 + a_4 \leq \Delta_2 + d_G(v_{12}, s_0)$。综上，我们有：

$$\begin{aligned} b_1 + a_1 + a_2 &\leq \Delta_1 + d_G(v_{12}, s_0) \\ b_1 + a_1 + a_4 &\leq \Delta_2 + d_G(v_{12}, s_0) \end{aligned}$$

根据三角不等式，我们有 $d_G(v_{12}, x) \leq b_1 + a_1$。回想一下，$a_2 = d_G(x, s_1)$ 和$a_4 = d_G(x, s_2)$。由此可得：

$$\begin{aligned} d_G(v_{12}, x) + d_G(x, s_1) &\leq \Delta_1 + d_G(v_{12}, s_0) \\ d_G(v_{12}, x) + d_G(x, s_2) &\leq \Delta_2 + d_G(v_{12}, s_0) \end{aligned} \tag{11}$$

因此， x满足定义 4中的条目 (a)。现在我们证明， $d_{\widehat{G}}(x,\ s_1)+d_{\widehat{G}}(x,\ s_2) < d_{\widehat{G}}(t_{12},\ s_1)+d_{\widehat{G}}(t_{12},\ s_2)$，这将与 t_{12} 在定义 4的条目 (b) 中的选取相矛盾。

注意，由三角不等式可得， $d_G(x,s_2) \le d_G(x,t_{12}) + d_G(t_{12},s_2)$。由于在 $\widehat{G}$ 中最短路径唯一， $d_{\widehat{G}}(x,s_2) < d_{\widehat{G}}(x,t_{12}) + d_{\widehat{G}}(t_{12},s_2)$。（见图1(e)。）由于 $\pi(t_{12},s_1,\widehat{G})[x,s_1]$ 是 $\widehat{G}$ 中的一条最短路径， $d_{\widehat{G}}(x,s_1) = d_{\widehat{G}}(t_{12},s_1) - d_{\widehat{G}}(x,t_{12})$。因此：

$$\begin{aligned} d_{\widehat{G}}(x,s_1) + d_{\widehat{G}}(x,s_2) &< d_{\widehat{G}}(t_{12},s_1) - d_{\widehat{G}}(x,t_{12}) + d_{\widehat{G}}(x,t_{12}) + d_{\widehat{G}}(t_{12},s_2) \\ &= d_{\widehat{G}}(t_{12},s_1) + d_{\widehat{G}}(t_{12},s_2), \end{aligned}$$

如所需。 □

我们注意到，引理 3 可直接由命题 2和命题 3得出。 □

现在继续证明定理 3。考虑子图 $H = \cup_{1\le i\le h}\text{Bunch}(s_i)$。我们按如下方式构造 K_h 的一个小图（见图1(f)）。设 $\pi(s_i,t_{ij},G)$ 是 Bunch(s_i) 中的一条路径，满足 $i<j$。如果 t_{ij} 是 Bunch(s_j) 的一个端点，那么我们将 $\pi(s_i,t_{ij},G)$ 收缩到 s_i。否则，我们将 $\pi(s_i,t_{ij},G)\setminus\{t_{ij}\}$ 收缩到 v_i；引理 3 意味着 t_{ij} 将被收缩到 v_j。所得图是 H 的一个 K_h-小图，因为对于任意 $i\neq j$，路径 $\pi(s_i,t_{ij},G)$ 和 $\pi(s_j,t_{ij},G)$ 根据断言 1 内部不相交。定理 3 的证明至此完成。

备注1. 我们对以下内容作出说明：定理 *3*：

- 若将定理 *3* 的证明应用于定义*1*中 *Li* 和 *Parter* 给出的集合系统，证明将无法成立。具体而言，在公式 *(7)* 中， $d_G(v_{1j},s_0) + d_G(v_{2\ell},s_0)$ 将替换为$d_G(v_{1j},s_0) + d_G(v_{2\ell},s_1)$；而在公式*(9)* 中， $d_G(v_{1j},s_0) + d_G(v_{2\ell},s_0)$ 将替换为$d_G(v_{1j},s_1)+d_G(v_{2\ell},s_0)$，因此我们无法在命题 *2* 的证明中导出矛盾。命题 *3* 的证明也会遇到同样的问题。

- 在 S 位于平面图 G外面这一设定下，*Li* 和 *Parter* *[LP19]* 得到的 *VC* 维数上界为 *3*，而我们的定理 *3* 给出的 *VC* 维数为 *4*。不过，只需稍微修改证明，并要求 G 排除一种 K_h-小图，其中团子式的每个顶点都必须对应于 G 的一个连通子图，且该子图至少包含 S中的一个顶点，即可将 *VC* 维数改进到 *3*。我们称 G 为 S受限 K_h-小图自由图。（对于任意子集 S，一个K_h-小图自由图都是 S受限 K_h-小图自由图。）*Li* 和 *Parter* 所研究设定中的图及顶点集 S 是 S受限的 K_4-小图自由对象，因此定理 *3* 给出的 *VC* 维数上界为 *3*，与 *Li* 和 *Parter* 原先得到的上界一致。

3.2 算法应用

本节将探讨定理 3的算法应用。 本节中的图均为无权图，因此这里的距离均为无权距离。 我们将使用由 Fredslund-Hansen、Mozes 和 Wulff-Nilsen 提出的模式这一概念 [FHMWN20]，，不过我们的模式⌒定义略有不同。具体而言，我们的定义基于 Li 和 Parter 提出的 VC 集合系统 $\mathcal{LP}_{G,\ M}$而 Fredslund-Hansen、Mozes 和 Wulff-Nilsen 则依据 $\mathcal{LP}_{G,\ M}$ 即 Li 和 Parter 提出的 [LP19]。

令 H 为 G 的一个连通诱导子图。回想一下，∂H 表示 H 的所有边界顶点组成的集合。任取 ∂H 的一个顶点序列 σ_H，它是 ∂H 的一个线性序。我们将 $\sigma_H = s_0, s_1, \ldots\ldots, s_{|\partial H|-1}$ 记作。对于每个顶点 $v \in V$，我们定义 v 关于 σ_H 的一个模式，记为 $\mathbf{p}_v$，它是一个 $|\partial H|$ 维向量，其中：

$$\mathbf{p}_v[i] = d_G(v, s_i) - d_G(v, s_0) \quad \text{for every } 0 \le i \le |\partial H| - 1 \tag{12}$$

注意 $\mathbf{p}_v[0] = 0$ 根据定义。我们限定了相对于 σ_H 的所有可能模式的数量。

引理 4。设 H 是一个无 K_h-小图的图 G 的连通诱导子图，且 σ_H 是 ∂H 中任意的顶点序列。令 $P = \{\mathbf{p}_v : v \in V\}$ 为关于 σ_H 的所有模式组成的集合。则$|P| = O((|\partial H| \cdot |V(H)|)^{h-1})$。

证明。由于 H 连通，根据三角不等式，$-(|V(H)|-1) \le d_G(v, s_i) - d_G(v, s_0) \le |V(H)| - 1$。令 $M = \{-(|V(H)|-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (|V(H)|-1)\}$，并令 S 为 H 的所有边界顶点组成的集合。令 $\bar{p}_v$ 为将 $\mathbf{p}_v$ 扁平化后得到的集合；也就是说，对于每个 $i \in [1, |\partial H| - 1]$，对于所有满足 $\Delta \ge \mathbf{p}_v[i]$ 的 $\Delta \in M$，我们都向集合 $\bar{p}_v$ 中添加一对 (i, Δ)。根据方程 (2) 中 $\widehat{X}_v$ 的定义可知 $\bar{p}_v = \widehat{X}_v$。因此，模式集合 P 与 $\widehat{\text{LP}}_{G,M}$ 之间存在双射。

根据 Sauer–Shelah 引理（引理 2），我们得到 $|\widehat{\text{LP}}_{G,M}| = O((|S||M|)^{h-1}) = O((|\partial H| \cdot |V(H)|)^{h-1})$，如所述。 □

设 v 是 H 中的一个顶点，且 $\mathbf{p}$ 是一个模式（对应于某个顶点 u），相对于 σ_H。我们将 $\mathbf{p}$ 中 v 的距离记为 $d(\mathbf{p}, v)$，定义如下：

$$d(\mathbf{p}, v) = \min_{0 \le i \le |\partial H|-1} \{d_G(v, s_i) + \mathbf{p}[i]\} \tag{13}$$

顶点与模式之间的距离可用于计算两个顶点之间的距离，如 Fredslund-Hansen、Mozes 和 Wulff-Nilsen 提出的以下引理所示 [FHMWN20]。由于我们在方程（13）中对模式与顶点之间距离的定义与 [FHMWN20], 略有不同，为求完整起见，我们给出证明。

引理 5 (Fredslund-Hansen、Mozes 和 Wulff-Nilsen，引理 7 [FHMWN20])。设 $u \in V \setminus V(H)$是一个不在 H中的顶点，并且 $\mathbf{p}_u$ 是 u 相对于 σ_H的模式。设 v 是 H中的一个顶点。则：

$$d_G(u, v) = d_G(u, s_0) + d(\mathbf{p}_u, v) \tag{14}$$

证明。注意，对于每个边界顶点 s_i，当 $0 \le i \le |\partial H|$、$d_G(u, s_i)$ 时，$= \mathbf{p}_u[i] + d_G(u, s_0)$。令 s_ℓ为 $\pi(u, v, G) \cap \partial H$中的边界顶点；$s_\ell$之所以存在，是因为 H是一个诱导子图，并且$u \notin V(H)$、$v \in V(H)$。然后：

$$\begin{aligned}
d_G(u, v) &= d_G(u, s_\ell) + d_G(s_\ell, v) = \min_{0 \le i \le |\partial H|-1} \{d_G(u, s_i) + d_G(s_i, v)\} \\
&= \min_{0 \le i \le |\partial H|-1} \{d_G(u, s_0) + \mathbf{p}_u[i] + d_G(s_i, v)\} \\
&= d_G(u, s_0) + \min_{0 \le i \le |\partial H|-1} \{d_G(v, s_i) + \mathbf{p}_u[i]\} \\
&= d_G(u, s_0) + d(\mathbf{p}_u, v) \ ,
\end{aligned}$$

如所需。 □

在第 3.2.1 节和第 3.2.2 节中，我们介绍计算直径、离心率和维纳指数的算法。我们的算法建立在 Wulff-Nilsen 先前提出的算法之上 [WN09]。在此，我们使用引理 4将运行时间改进到真正次二次时间。在第 3.2.3 节中，我们构造一个空间复杂度为真正次二次、查询时间为常数的距离预言机。该算法与 Fredslund-Hansen、Mozes 和 Wulff-Nilsen 提出的算法几乎相同 [FHMWN 20]，但我们将使用引理 4。在第 3.2.4 节中，我们提及其他算法应用。

3.2.1 直径和离心率

在本节中，我们将展示如何按照推论 2所述，在真正次二次时间内计算所有顶点的离心率。只需在 $O(n)$ 时间内求出最大的离心率，即可直接得到直径。该算法分为三个步骤：

- **(步骤1)**。为 G 构造一个 r-划分 R，适用于 $r = n^2/(3h-1)$。对于 R 中的每个簇 $R \in$，以任意方式构造一个由边界顶点组成的序列 σ_R。然后计算关于 σ_R 的模式集合：$P_R = \{u \in V : \mathbf{p}_u\}$。我们将 P_R 存储在表 $T_{(1)\,R}$ 中。
- **(步骤 2)**。对于 R 中的每个簇 $R \in$ 和每个模式$\mathbf{p} \in P_R$，求出 $v = \arg\max_{v \in V(R)} d(v,\mathbf{p})$。也就是说，$v$ 是 $V(R)$中所有顶点里到$\mathbf{p}$ 距离最大的顶点；我们称 v 为距离$\mathbf{p}$最远的顶点。然后，我们将距离 $d(\mathbf{p}\ v)$存储在 R的表 $T_{(2)\,R}$中；访问 $T_{(2)\ R}$ 的键是（$\mathbf{p}$的）标识符。

- （**步骤 3**）。现在，我们为每个顶点 $u \in V$ 计算 ecc(u)。对于每个簇 $R \in$ R，我们计算从 u 到距离 u 最远的顶点 $v \in R$ 的距离，记作 $\Delta(u,\ R)$，如下所示。

  – 如果 $u \notin R$，令 $\mathbf{p}_u$ 为在（步骤1）中计算得到的相对于 σ_R 的 u 的模式。令 v 为在（步骤 2）中计算得到的、距离 $\mathbf{p}_u$ 最远的顶点。然后返回 $\Delta(u, R) = d_G(u, s_0) + d(\mathbf{p}_u, v)$，其中 s_0 是 σ_R 的第一个顶点。最后，计算 ecc(u) $= \max_{R \in \mathcal{R}} \Delta(u, R)$。 ˜– 如果 $u \in R$，则使用广度优先搜索计算距离 $d_R(u, v)$。然后，计算 $d_G(u, v) = \tilde{}\min\{d_G(u, s_0) + d(\mathbf{p}_u, v)\ d_R(u, v)\}$，最后返回 $\Delta(u, R) = \max_{v \in R} d_G(u, v)$。

根据引理 5 和（步骤 2）中的计算，如果 $u \notin R$，那么 $\pi(u, v, G) \cap \partial R \neq \varnothing$，因此 $\Delta(u, R)$ 在步骤 3 中被正确计算。如果 $u \in R$，则 $\pi(u, v, G)$ 可能包含外部元素；在这种情况下，$d_G(u, v) = d_G(u, s_0) + d(\mathbf{p}_u, v)$；否则，$d_G(u, v) = d_R(u, v)$。由于算法取˜最小值，因此它会正确返回 $\Delta(u, R) = \max_{v \in R} d_G(u, v)$，从而正确计算 ecc($u$)。

现在，我们高效地实现算法的每个步骤，并假设 h 是常数。我们可以假设 $h \geq 4$，因为（连通的） K_3-无小图图是树，因此这里提到的所有问题都可以在线性时间内求解。令 B 为该 r-划分 $\mathcal{R}$的边界顶点：$_B = \cup_{R \in \mathcal{R}} \partial R$。根据 引理 1，$|B| = O(n/\sqrt{r})$。因此，我们可以在 B的每个顶点处各选一个根，找到所有广度优先搜索树，所需时间为 $\tilde{O}(n^2/r)$ 。

观察 2. 令 $D(B, V) = \{d_G(b, v) : (b, v) \in B \times V\}$。那么 $D(B, V)$ 可以在时间 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$内计算。

˜根据 引理 1，每个簇 $R \in \mathcal{R}$ 至多有 r 个顶点和 $O(\sqrt{r})$ 个边界顶点。¯以下结论是引理 4的直接推论。

推论5. $|P_R| = \tilde{O}(r^{3(h-1)/2})$ 对每个 $R \in \mathcal{R}$均成立。

Proof. 根据 引理 4，模式的数量为 $O((|\partial R| \cdot |V(R)|)^{h-1}) = \tilde{O}(r^{3(h-1)/2})$。 □

接下来，我们界定步骤1的运行时间。

引理 6。 给定 $D(B, V)$，我们可以在 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$ 时间内实现步骤*1*。

证明。首先，根据引理 1，对于任意固定常数 $\epsilon > 0$，R 可以在 $O(n^{1+\epsilon}\sqrt{r})$ 时间内构造。由于 $h \geq 4$, $n^2/\sqrt{r} = n^{2-1/(3h-1)} = \Omega(n^{1.5})$，且 $n^{1+\epsilon}\sqrt{r} = n^{1+\epsilon+1/(3h-1)} = n^{1.2+\epsilon}$。因此，通过选择$\epsilon = 0.1$，我们有 $n^{1+\epsilon}\sqrt{r} = O(n^2/\sqrt{r})$。也就是说，R 可以在 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$ 时间内构造。

接下来我们计算 P_R，其初始化为 $\varnothing$。然后，对于每个 $u \in V$，我们查找 ∂R 中所有顶点到 u 的距离，该操作在 $D(B, V)$ 时间内完成。接着，我们在 $O(|\partial R|)$ 时间内计算从 u 到 R 的模式 p_u。如果 p_u 当前不在 P_R 中，我们就将 p_u 添加到 P_R；例如，利用字典树数据结构，这项检查可在 $O(|\partial R|)$ 时间内完成。计算 P_R 的总运行时间为 $O(n|\partial R|)$。因此，根据引理 1，此步骤的总运行时间为 $O(n\sum_{R\in\mathcal{R}}|\partial R|) = \tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$。 □

引理7。 给定 $D(B, V)$ 和 $\{P_R\}_{R\in\mathcal{R}}$，我们可以在 $\tilde{O}(nr^{(3h-2)/2})$ 时间内实现（步骤 *2*）。

证明。对于每个模式 $\mathrm{p} \in P_R$，我们可以在 $O(|\partial R|) = O(\sqrt{r})$ 时间内，计算每个 $v \in V(R)$ 的距离 $d(\mathrm{p}, v)$。因此，找到距离 p 最远的顶点需要 $O(\sqrt{r}|V(R)|)$ 时间。根据推论 5，计算表 $T_R^{(2)}$ 的运行时间为 $\tilde{O}(r^{1/2}|V(R)|r^{3(h-1)/2}) = \tilde{O}(r^{(3h-2)/2})|V(R)|$。因此，(步骤 2) 的总运行时间为 $\tilde{O}(r^{(3h-2)/2})\sum_{R\in\mathcal{R}}|V(R)|) = \tilde{O}(nr^{(3h-2)/2})$，如断言所述。 □

引理 8。 *(步骤 3)* 可以利用 *(步骤 1)* 和*(步骤 2)* 中计算出的信息，在 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$ 时间内实现。

证明。首先，我们估算给定顶点 $u \in V$ 时计算 ecc(u) 的运行时间。对于满足 $u \in R$ 的簇 $R \in \mathrm{R}$，计算 $\Delta(u, R)$ 需要 $O(|V(R)|) = O(r)$ 时间。如果 $u \notin R$，我们可以在 O 中用 $= O(1)$ 时间查找模式 p_u 在 $T_R^{(1)}$ 中的（标识符）。给定 p_u，我们可以在根据（步骤 2 ）构造的 $T_R^{(2)}$ 中用 $O(1)$ 时间查找 $d(\mathrm{p}_u, v)$。此外，$d_G(u, s_0)$ 可以直接从 $D(B, V)$ 中用 $O(1)$ 时间找到。因此，计算 $\Delta(u, R)$ 的运行时间为 $O(1)$。由此可得，对所有 R 计算 $\Delta(u, R)$ 的总运行时间为 $O(r + |\mathrm{R}|)$。根据引理 1，

$$O(r + |\mathcal{R}|) = \tilde{O}(r + n/\sqrt{r}) = \tilde{O}(n/\sqrt{r})$$

作为 $r = n^{2/(3h-1)} \leq n^{0.2}$，其中 $h \geq 4$。这意味着，计算所有离心率的总运行时间为 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$。 □

根据引理 6至8，计算 G 中所有离心率（因此也包括直径）的总运行时间为:

$$\tilde{O}(\frac{n^2}{\sqrt{r}} + nr^{(3h-2)/2}) = \tilde{O}(n^{2-\frac{1}{3h-1}}) \tag{15}$$

当 $r = n^{2/(3h-1)}$ 时。

3.2.2 维纳指数

我们将展示如何按照推论 2 中的描述，以真正次二次时间计算维纳指数。对于任意两个顶点集合 X、$Y \subseteq V$，令 $W(X,Y) = \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} d_G(x,y)$。$G$ 的维纳指数为 $\frac{1}{2}W(V,V)$，因此我们的目标是计算 $W(V,V)$。设 R 为引理 1 针对 $r = n^{2/(3h-1)}$ 计算出的 G 的一个 r-划分。令 $R^\circ = V(R) \setminus \partial R$。回顾第 3.2.1 节中的定义，我们定义了 $B = \cup_{R\in\mathcal{R}}\partial R$。注意：

$$\begin{aligned} W(V,V) &= W(B,V) + \sum_{R\in\mathcal{R}} W(R^\circ, V) \\ &= W(B,V) + \sum_{R\in\mathcal{R}} W(R^\circ, V(R)) + \sum_{R\in\mathcal{R}} W(R^\circ, V\setminus V(R)) \end{aligned} \tag{16}$$

首先，我们着重计算 $W(B,\ V)$ 和 $\sum_{R\in\mathcal{R}} W(R^\circ,\ V(R))$。

引理 9. *$W(B,V)$ 可在 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$ 时间内计算，而 $\sum_{R\in\mathcal{R}} W(R^\circ, V(R))$ 可在 $O(nr)$ 时间内计算。*

证明。根据观察 2，从 B 中的顶点到 V（集合 $D(B,\ V)$）中的顶点的所有距离都可以在 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$ 时间内计算，这也是计算 $W(B,\ V)$ 的运行时间。

根据引理 1，每个簇的大小至多为 r。此外，使用广度优先搜索，可以在 R 中计算某个顶点到 R 所有其他顶点的距离，耗时 $O(r)$。因此，计算 $\sum_{R\in\mathcal{R}} W(R^\circ,\ R)$ 的运行时间为 $\sum_{R\in\mathcal{R}} O(r|R^\circ|) = O(nr)$。□

接下来，我们界定计算 $\sum_{R\in\mathcal{R}} W(R^\circ,\ V\setminus V(R))$ 的运行时间。

Lem引理 10. *$\sum_{R\in\mathcal{R}} W(R^\circ, V\setminus V(R))$ 可在 $\tilde{O}(nr^{(3h-2)/2} + n^2/\sqrt{r}$ 时间内计算得出 $)$,*

证明。首先，根据 $\{P_R\}_{R\in\mathcal{R}}$，我们在 $\mathcal{R}$ 中计算所有簇的模式集合，所需时间为 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$。接下来，我们注意到：引理 6。

$$\sum_{R\in\mathcal{R}} W(R^\circ, V\setminus V(R)) = \sum_{R\in\mathcal{R}}\sum_{u\in V\setminus V(R)} W(u, R^\circ) \tag{17}$$

此外，根据引理 5，

$$W(u,R^\circ) = \sum_{v\in R^\circ} d_G(u,v) = |R^\circ| d_G(u,s_0) + \sum_{v\in R^\circ} d(\mathbf{p}_u, v)$$

其中，s_0 是簇 R 的边界序列 σ_R 中的第一个顶点。距离 $d_G(u,\ s_0)$ 已经计算过，即 $d_G(u,\ s_0) \in D(B,\ V)$。

在引理 7 中，我们通过遍历 R 的所有顶点来找出每个模式 $\mathbf{p} \in P_R$ 对应的最远顶点，总运行时间为 $O(\sqrt{r}|V(R)|)$。因此，我们可以在 $O(\sqrt{r}|V(R)|)$ 时间内计算总和 $\sum_{v\in R^\circ} d(\mathbf{p}\ v)$，而计算 P_R 中所有模式的总和所需的运行时间为 $\tilde{O}(\sqrt{r}|V(R)|r^{3(h-1)/2}) = \tilde{O}(r^{(3h-2)/2}|V(R)|)$。我们可以将此视为计算 $W(u,R^\circ)$ 的预处理时间。对 R 中的所有簇求和，总预处理时间为：

$$\sum_{R\in\mathcal{R}} \tilde{O}(r^{(3h-2)/2})|V(R)| = \tilde{O}(nr^{(3h-2)/2}) \tag{18}$$

这是运行时间中的第一项。

给定 P_R 中所有模式的距离总和后，我们可以将它们存储在一个以模式的标识符为键的表中，然后可以在 $\sum_{v\in R^\circ} d(\mathbf{p}u, v)$ 中以 $O(1)$ 时间查找。因此，我们可以在 $W(u, R^\circ)$ 中以 $O(1)$ 时间计算得出结果，因此根据 公式（17）， $W(R^\circ, V \setminus V(R))$ 可在以下时间内计算得出：

$$\sum_{R\in\mathcal{R}} O(n) = O(n|\mathcal{R}|) = \tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$$

根据引理 1，这是运行时间的第二项。 □

根据引理 9 和引理 10，计算 $W(V,\ V)$ 的总运行时间为 $\tilde{O}(\frac{n^2}{\sqrt{r}} + nr^{(3h-2)/2}) = \tilde{O}(n^{2-\frac{1}{3h-1}})$ 当 $r = n^{2/(3h-1)}$ 时，如推论 2所述。

3.2.3 精确距离预言机

我们构造了第一个针对无权无小图图的精确距离预言机，其空间-查询时间权衡优于二次，同时预处理时间也为次二次，如推论 1所述。

构造。该构造分为两步：

- **(步骤1)**。构造一个 r-划分 R，使其满足 G 的 $r = n^2/(3h-1)$；对于每个簇 $R \in$ R，按照（任意）边界顶点序列 σ_R，将模式集合 P_R 存储在一张表 T_R 中。此外，我们还存储 R 中所有顶点对之间的精确距离。
- **(步骤 2)**。对于每个顶点 u 和区域 $R \in$ R：(2a) 若 $u \in R$，则对每个模式 $\mathbf{p} \in P_R$，存储 $d(\mathbf{p}\ u)$；(2b) 若 $u \notin R$，则存储一个指针，从 u 指向其在表 T_R 中的模式 $\mathbf{p}_u$，并存储从 u 到边界顶点序列 σ_R 中第一个顶点的距离。

距离查询。给定两个顶点 u 和 v，若存在一个同时包含 u 和v的区域 R，我们只需在 O中以 R (1) 的时间查找它们存储的距离。否则，令 R_v 为包含 v的区域。首先，我们以 O(1) 的时间查找从 u 到边界序列σ_{R_v}中第一个顶点（记作 s_0）的距离。然后，我们在 R_v中查找 u 的模式 $\mathbf{p}_u \in P_{R_v}$，并在总计 O(1) 的时间内查找距离d(v,$\mathbf{p}_u$)，这得益于（步骤 2）中的构造。最后，返回：

$$d_G(u, s_0) + d(\mathbf{p}_u, v)\ . \tag{19}$$

引理 5 表明，返回的距离为 $d_G(u, v)$。总查询时间为 $O(1)$。

空间分析。根据 推论5，模式数量为 $\tilde{O}(r^{3(h-1)/2})$，根据 引理 1， $|\mathcal{R}| = O(n/\sqrt{r})$。步骤1和步骤 2(a) 的总空间为：

$$\tilde{O}(\sum_{R\in\mathcal{R}} (r^{3(h-1)/2}|V(R)| + |V(R)|^2)) = \tilde{O}(\sum_{R\in\mathcal{R}} (r^{3(h-1)/2}|V(R)| + r|V(R)|)) = \tilde{O}(nr^{3h/2-2}) \tag{20}$$

因为 $h \geq 4$。步骤 2(b)的总空间为 $O(n|\mathcal{R}|) = \tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$ 根据 引理 1。因此，预言机的总空间为：

$$\tilde{O}(nr^{3h/2-2} + n^2/\sqrt{r}) = \tilde{O}(n^{2-\frac{1}{3h-1}}) \tag{21}$$

与 $r = n^{2/(3h-1)}$。

构造时间。 我们观察到，构造距离预言机所需的信息量，恰好等于计算直径和维纳指数所需的信息量。因此，计算所有这些信息的运行时间为 $\tilde{O}(n^{2-\frac{1}{3h-1}})$。

备注 2。通过以不同方式选择 r，可以增加构造时间，从而进一步减少预言机的空间；也可以按照 r-划分的嵌套方式，沿着 *[FHMWN20]*中的推理思路增加查询时间。

3.2.4 其他应用

这里我们讨论 定理 3的其他算法应用。

度量压缩。Li 和 Parter [LP19] 证明，对于无权平面图中的任意两个顶点集合 S、T，若该图的直径为 D，且 S 位于图的外面边界上，则只需使用 $\tilde{O}(|S|^3D+|T|\log(|S|D))$ 位，就能压缩从 T到 S的所有距离。这里值得考虑一种典型情形： D 为常数，且 $1 \ll \text{poly}(|S|) \ll |T|$。在 ~ ~这种典型情形下，只需存储从 T 到 S的所有距离，压缩方案的空间便为 $O(\text{poly}(|S|)+|T|)$ 位，而非 $O(|S|\cdot|T|)$ 位。该压缩方案可用于在分布式 CONGEST 模型中计算平面图的直径。

利用定理 3，我们在两个方面改进了 Li 和 Parter 的压缩方案： S 不再受到限制，并且 G 可以是任意无小图图。在规范情形下，~我们的压缩方案所需的空间为 $O(\text{poly}(|S|)+|T|)$，这与 Li-Parter 的空间上界相同，除了加性项中相差一个 poly$(|S|)$ 因子。

现在我们对结果作出更正式的描述。令 $S=\{s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}\}$ 和 $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_\ell\}$，其中 $k=|S|$ 和 $\ell=|T|$。对于每个顶点 $v \in V$，我们定义

$$\text{Tuple}(v) = \langle d_G(v,s_0), \ldots, d_G(v,s_{k-1}) \rangle ,$$

这称为相对于 S 的 v 距离元组。Li 和 Parter 在其定理 2.2 [LP19] 中证明，当 S 位于直径为 D 的平面图的外面时，集合 $\text{Tuple}(V)=\{\text{Tuple}(v) : v \in V\}$ 的大小为 $O(|S^3|D)$。因此，要压缩从 T 到 S的距离，只需使用 $\tilde{O}(|S|^3D)$ 位存储 Tuple(V)，然后对于每个 $t \in T$，存储一个从 t 指向其对应距离元组 Tuple$(t) \in$ Tuple(V) 的指针。在这里，我们证明，在更一般的情形下，当 S 不受限制且 G 为 K_h-无小图图时，元组的数量对于固定的 h 和 D，有界于 $O((|S|\cdot D)^{O(h)}) = O(\text{poly}(|S|))$。这就推出了我们关于度量压缩的结果。

引理 11. $|\text{元组}(V)| = O(|S|^{h-1}\cdot D^h)$ 当 G 是一个不含 K_h-小图的图，且其直径至多为 D 时。

证明。该证明与引理 4 的证明相同。唯一的区别是，现在 $-D \le d_G(v,s_i) - d_G(v,s_0) \le D$ 根据三角不等式。固定从 $d_G(v,s_0)$ 出发的距离，以及$M=\{-D,\ldots,-1,0,1,\ldots D\}$。令 $\bar{p}_v$为一个集合，通过为 $\Delta \in M$ 添加满足$d_G(v,s_i)-d_G(v,s_{i-1}) \le \Delta$ 的对 (i,Δ)，将其添加到集合 $\bar{p}_v$ 中，其中每个 $i \in [1,k-1]$ 都如此。于是，在集合 $\{\bar{p}_v\}_{v\in V}$ 与 $\widehat{\text{LP}}_{G,M}$ 之间存在一个双射。根据 Sauer–Shelah 引理（引理 2），我们有 $|\widehat{\text{LP}}_{G,M}| = O((|S||M|)^{h-1}) = O((|S|\cdot D)^{h-1})$。由于对于 $d_G(v,s_0)$ 有 D 种选择，不同距离元组的数量至多为 $O((|S|\cdot D)^{h-1}\cdot D) = O(|S|^{h-1}D^h)$。 □

直径计算和低树宽无小图图中的所有顶点的离心率。Abboud、Williams 和 Wang [AWW16] 研究了无权图中树宽为 k 时直径的计算问题。他们出人意料地证明，存在一个常数 $c > 0$，使得对于任意 $k \le c \cdot \log n$，在强指数时间假设（SETH）下，不存在运行时间为 $n^{2-\epsilon}2^{\Omega(k)}$ 的算法来计算任意固定 $\epsilon > 0$ 的直径。也就是说，如果坚持使用具有真正次二次时间的算法，就必须为树宽付出指数级的依赖代价。他们还提出了一种用于区分直径为 2 与直径为 3 的图的算法，其运行时间为 $n^{1+o(1)}2^{O(k}\log k)$。Husfeldt [Hus17] 设计了一种改进算法，通过动态规划实现，运行时间为 $O(d^{O(k)}n)$，其中 d 是直径。一个悬而未决的问题是设计一种运行时间为 $O(d^{O(1)}2^{O(k)}n)$ 的算法。

我们证明，若输入图 G 的树宽为 k，且此外不含 K_h 小图（其中 h 为固定常数），则可在 $O((dk)^{O(1)}n)$ 时间内求出 G 的直径。值得注意的是，对树宽 k 的依赖是多项式级，而非指数级。我们指出，树宽为 k 的 K_h 小图自由图类涵盖了若干广为研究的图类，例如 k 外平面图、Halin 图和串并联图。

下面我们概述论证思路。基本思想是利用定理 3，通过 Husfeldt [Hus17] 的算法（用于计算所有顶点的离心率，从而求出直径）来优化动态规划算法的运行时间。对于树分解中每个大小为 k 的袋 $B = \{s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}\}$，动态规划会跟踪由 B 的后代袋中的顶点（包括 B）所诱导的图中所有顶点的距离元组。距离元组的最大数量为 $d^{O(k)}$，因此运行时间为 $d^{O(k)}n$。当 G 不含 K_h 小图时，根据引理 11，距离元组的数量为 poly($k \cdot d$)，因此动态规划的运行时间变为 poly($k \cdot d$)n。

平面图中的近似距离预言机。在 [Le23], Le 构造了一个$(1 + \epsilon)$- 近似距离预言机，适用于具有 $\tilde{O}(n/\epsilon^{o(1)})$ 空间和 $\tilde{O}(1)$ 查询时间的平面图。也就是说，空间与查询时间乘积权衡以次线性于 $1/\epsilon$的方式变化。该构造的一个关键要素是 Li 和 Parter 对（近似）距离元组数量给出的多项式上界 [LP19]。我们的集合系统$\mathcal{LP}_{G,\,M}$ 也为此类距离元组的数量给出了多项式上界，因此可以同样地用于推导 [Le23]中的结果。

4 有向图的 VC 维数及应用

在本节中，$G = (V,\ E)$ 表示一个无 K_h-小图的有向图。G 可以是加权图，也可以是无权图。在界定 VC 维数时，我们允许 G 的边具有任意非负权重；而在算法应用中，G 是无权的。

4.1 $\mathcal{LP}_G$ 的 VC 维数

在本节中，我们证明定理 4，并在下文重述。

定理 4。设 S 为边权 K_h小图-自由有向图 G上的任意顶点集合。设 $M \subseteq \mathbb{R}$为任意实数集合。那么$\mathcal{LP}_{G,M}(S)$ 的 *VC* 维数至多为 h^2。

假设 LP$_{G,\,M}$能打散一个大小为 q 的集合 $X = \{(s_1,\ \Delta_1),\ (s_1,\ \Delta_2) \ldots,\ (s_q,\ \Delta_q)\}$。我们的目标是证明，$G$（的无向对应图）有一个大小至少为$\lfloor\sqrt{q}\rfloor$的团子式，这就给出

关于 $\longrightarrow_{\mathcal{LP}_{G,\,M}}$ 的 VC 维数上界，因为 $\lfloor\sqrt{q}\rfloor \le h - 1$。证明中的主要困难在于，对于有向图，我们并没有 Bunch(s_i)的强性质——我们以与 Bunch(s_i) 相同的方式构造它——而这正是我们在定理 3 的第 3.1 节证明中所做的。更准确地说，引理 3不再成立。这使得团子式的构造更加困难，因此我们无法证明 VC 维数的线性上界。另一方面，我们证明，断言 1 的一个类似结论就足以用于构造大小为$\sqrt{q}$的团子式。

现在给出证明。根据观察 1 中相同的推理，我们有：对于所有$i \neq j$，$s_i \not\models s_j$。对于每一对 (s_i, Δ_j)、(s_j, Δ_j)，令 t_{ij} 满足 — $\vec{X}_{t_{ij}} \cap (V \times M) = \{(s_i, \Delta_j), (s_j, \Delta_j)\}$。

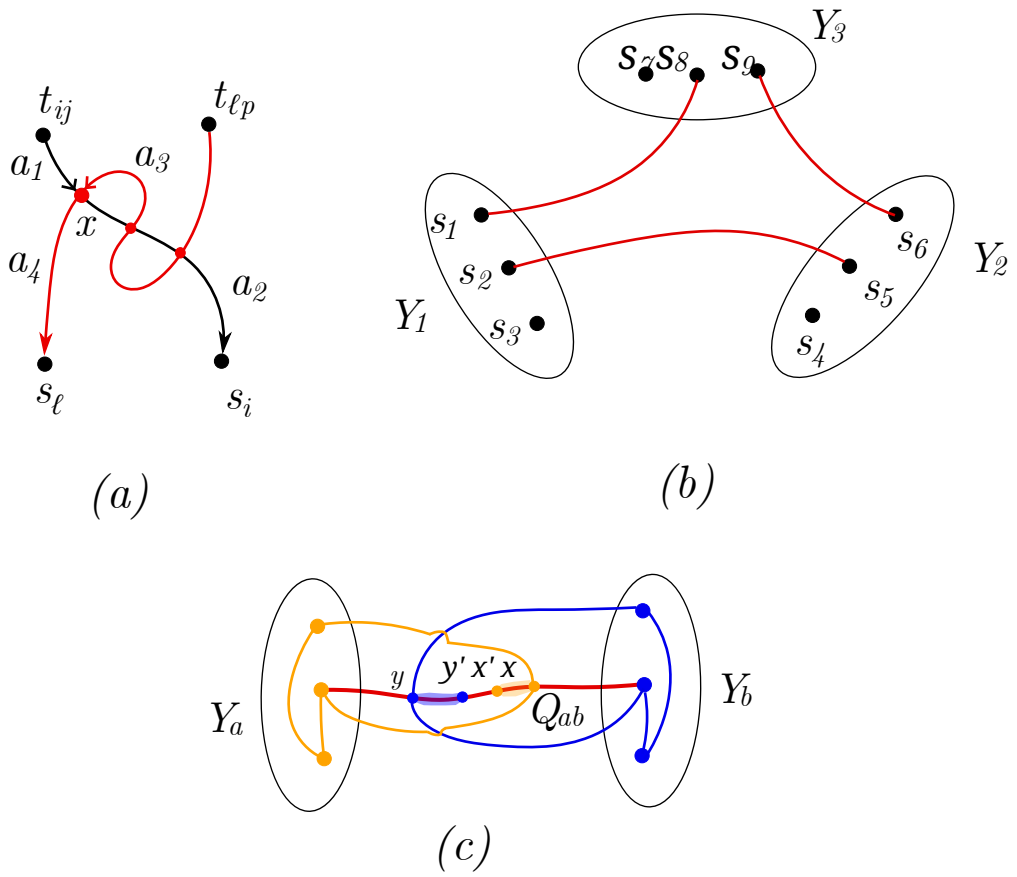

图 2：(a) 假设 $x \in \pi(t_{ij} \to s_i,\ G) \cap \pi(t_{\ell p} \to s_\ell,\ G)$；(b) 当 $k = 9$ 时的三个集合 Y_1，Y_2，Y_3 和三条路径 Q_{12}，Q_{23}，Q_{13}，其中任意两条路径都没有相同的端点；(c) 将 $Q_{ab}[x, x']$ 添加到 H_a（橙色），并将 $Q_{ab}[y, y']$ 添加到 H_b（蓝色）。

引理 12。 如果 i，j，ℓ，$p \in [q]$ 两两不同，那么 $\pi(t_{ij} \to s_i,\ G) \cap \pi(t_{\ell p} \to s_\ell,\ G) = \varnothing$。证明。反设，存在 $x \in \pi(t_{ij} \to s_i,\ G) \cap \pi(t_{\ell p} \to s_\ell,\ G)$；见 图 2(a)。令：

$$a_1 = d_G(t_{ij} \to x) \qquad a_2 = d_G(x \to s_i)$$
$$a_3 = d_G(t_{\ell p} \to x) \qquad a_4 = d_G(x \to s_\ell)$$

于是 $a_1 + a_2 \le d_G(t_{ij} \to s_0) + \Delta_i$ 和 $a_3 + a_4 \le d_G(t_{\ell p} \to s_0) + \Delta_\ell$。因此，我们有：

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \le d_G(t_{ij} \to s_0) + d_G(t_{\ell p} \to s_0) + \Delta_i + \Delta_\ell$$

此外，由于 $(s_\ell,\ \Delta_\ell) \notin X_{t_{ij}}$，我们有 $d_G(t_{ij} \to s_\ell) > d_G(t_{ij} \to s_0) + \Delta_\ell$。这意味着$a_1+a_4 > d_G(t_{ij} \to s_0)+\Delta_\ell$。同理，$a_2+a_3 > d_G(t_{\ell p} \to s_0)+\Delta_i$。因此，$a_1+a_2+a_3+a_4 > d_G(t_{ij} \to s_0) + d_G(t_{\ell p} \to s_0) + \Delta_i + \Delta_\ell$，矛盾。

□

现在我们忽略 G 的方向，着重构造一个大小为 $\lfloor\sqrt{q}\rfloor$的团子式。令 $\pi(t_{ij} \not\to s_i, G)$ 为忽略 $\pi(t_{ij} \to s_i, G)$ 中各边方向后得到的无向路径。对于每个 $i \neq j$，我们用 P_{ij} 表示从 s_i 到 s_j 的路径；该路径由简化从 s_i 到 s_j 的无向游走得到，而这条游走是将两条路径 $\pi(t_{ij} \not\to s_i, G)$ 和 $\pi(t_{ij} \not\to s_j, G)$ 在 t_{ij} 处拼接而成的。引理 12 意味着：

推论 6。 $P_{ij} \cap P_{\ell p} = \varnothing$ 当 i、j、ℓ、p 两两不同时。

也就是说，X 中连接两对顶点的两条路径相交，当且仅当它们共有一个端点。在这种情况下，它们的交集可能具有任意复杂的结构。

我们将 X 划分为 $\sqrt{q}$ 个子集 Y_1、……、$Y_{\sqrt{q}}$，每个子集在 X 中都包含 $\sqrt{q}$ 个顶点；为方便记号起见，我们假设 $\sqrt{q}$ 是整数。对于每一对 (Y_a, Y_b)，其中 a、$b \in [\sqrt{q}]$、$a \neq b$，令 $\mathrm{P}_{ab} = \{P_{ij} : s_i \in Y_a, s_j \in Y_b\}$ 表示连接 Y_a 和 Y_b 的路径集合。随后我们选择一条路径 $Q_{ab} \in \mathrm{P}_{ab}$，使所选路径组成的集合（记为 $\mathrm{Q} = \{Q_{ab}\}_{(a,b)\in[\sqrt{q}]\times[\sqrt{q}], a<b}$）中任意两条路径都不共享端点；我们可以用贪心方式选取 Q。Q 存在，因为每个 Y_a 有 $\sqrt{q}$ 个顶点，而我们只需要在 Q 中选取 $\sqrt{q}-1$ 条路径，将 Y_a 连接到其他集合。见图 2(b)。

现在按如下方式构造一个 $K_{\sqrt{q}}$-小图。对于每个 Y_a, $a \in [\sqrt{q}]$，令 $H_a = \cup_{s_i, s_j \in Y_a} P_{ij}$。显然，$H_a$ 是连通的；此外，根据推论 6，$V(H_a) \cap V(H_b) = \varnothing$。在 H_a 和 H_b之间，存在一条路径 $Q_{ab} \in$Q，它与 Q 中所有其他路径均顶点不相交。（H_a 和 H_b 可能包含 Q_{ab} 中除其端点以外的顶点。）由于 $V(H_a) \cap V(H_b) = \varnothing$，必然存在一条子路径$Q_{ab}[x,y]$，其端点分别为顶点 x 和顶点 y，满足 $x \in H_a$ 和 $y \in H_b$，且$Q_{ab}[x,y] \setminus \{x,y\}$中没有其他顶点属于 $H_a \cup H_b$。（$Q_{ab}[xy]$可能是一条边。）任取一条边 $e_{ab} = (x', y') \in Q[x,y]$；不失一般性，我们假设 $x' \in Q_{ab}[x,y']$。然后将 $Q_{ab}[x,x']$添加到 H_a，并将 $Q_{ab}[y',y]$ 添加到 H_b。见图 2(c)。令 H'_a 为对所有满足 $(a,b) \in [\sqrt{q}] \times [\sqrt{q}], a < b$ 的点对应用此过程后得到的图 H_a。那么 $\{H'_a\}_{a\in[\sqrt{q}]}$ 两两顶点不相交，且每对图之间都有一条边相连。这些图诱导出 G 的一个 $K_{\sqrt{q}}$，如所求。

4.2 $\mathcal{B}(G)$的 VC 维数

我们证明定理 5，该定理指出，在 $\vec{B}(G)$ 中定义的方程 (4) 所定义的球集合系统是 VC 集合系统。我们将 Bousquet 和 Thomassé [BT15] 针对无向情形的证明调整为适用于有向情形。

定理 5。 若 G 是一个不含 K_h小图的有向图，则 $\vec{B}(G)$ 的 *VC* 维数至多为 $h-1$。

证明沿用定理 3 证明的论述方式，但有若干细节不同。具体而言，我们反设 $\vec{B}(G)$ 打散了一个大小为h的集合 $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_h\} \subseteq V$。那么对于每个 $i \neq j$，都存在一个球 $\vec{B}(t_{ij}, r_{ij})$，使得 $\vec{B}(t_{ij}, r_{ij}) \cap X = \{v_i, v_j\}$。我们选取 t_{ij}和r_{ij} 使得

$$r_{ij} \text{ is minimum.} \tag{22}$$

于是我们可以假设 $r_{ij} = \max\{d_G(t_{ij} \to v_i),\ d_G(t_{ij} \to v_j)\}$，否则，$r_{ij} > \max\{d_G(t_{ij} \to v_i),\ d_G(t_{ij} \to v_j)\}$，并且我们总可以将 r_{ij} 设为 $\max\{d_G(t_{ij} \to v_i),\ d_G(t_{ij} \to v_j)\}$。我们的目标是构造 K_h的 G 小图，就像我们在定理 3 的证明中所做的那样。我们注意到，断言 1 在有向图的这一情形下仍然成立。

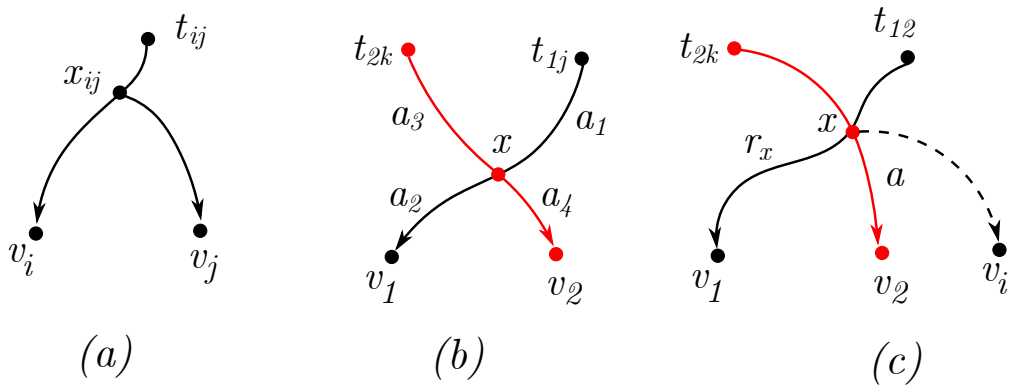

图 3： 定理 5的证明示意图。

观察 3。 $\pi(t_{ij} \to v_i, G)$ 和 $\pi(t_{ij} \to v_j, G)$ 内部不相交。

证明。反设不然；则存在一个顶点 $x_{ij} \in (\pi(t_{ij} \to v_i, G) \cap \pi(t_{ij} \to v_j, G)) \setminus \{t_{ij}\}$。注意到 $\vec{B}(x_{ij}, r_{ij} - d_G(t_{ij} \to x_{ij})) \cap X = \{v_i, v_j\}$，这与公式 (22) 中 r_{ij} 的选取矛盾；见图 3(a)。 □

对于每个 v_i，我们按照Bunch(v_i) 的定义，参见公式 (6)，并忽略路径的方向。

$$\text{Bunch}(v_i) = \cup_{j \neq i} \pi(t_{ij} \not\to v_i, G) \tag{23}$$

这里 $\pi(t_{ij} \not\to v_i, G)$ 是忽略 $\pi(t_{ij} \to v_i, G)$中各边的方向后得到的无向路径。第3.1 节中的定理 3的证明说明，证明存在一个 K_h小图可归结为证明以下引理。

引理 13。对于每个 $a \neq b$，Bunch$(v_a) \cap$Bunch$(v_b) = \{t_{ab}\}$。此外， t_{ab} 要么是Bunch(v_a)的一个端点，要么是Bunch(v_b)的一个端点，或者两者皆是。

证明。 我们沿用引理 3的相同证明策略：考虑 $a = 1$ 和 $b = 2$。设 $\pi(t_{1j} \to v_1, G)$ 和 $\pi(t_{2k} \to v_2, G)$ 是路径，其无向对应图分别属于Bunch(v_1) 和Bunch(v_2)。下面的断言与命题 2类似。

断言 4。 如果$\{j, k\} \cap \{1, 2\} = \varnothing$，那么 $\pi(t_{1j} \to v_1, G) \cap \pi(t_{2k} \to v_2, G) = \varnothing$。

证明。假设 否则，存在 $x \in \pi(t_{1j} \to v_1, G) \cap \pi(t_{2k} \to v_2, G)$；参见图 3(b)。设 ：

$$a_1 = d_G(t_{1j} \to x) \qquad a_2 = d_G(x \to v_1)$$
$$a_3 = d_G(t_{2k} \to x) \qquad a_4 = d_G(x \to v_2)$$

由于 $v_1 \in \vec{B}(t_{1j}, r_{1j})$ 和 $v_2 \in \vec{B}(t_{2k}, r_{2k})$， $a_1 + a_2 \leq r_{1j}$和 $a_3 + a_4 \leq r_{2k}$。这意味着

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq r_{1j} + r_{2k} \tag{24}$$

另一方面， $v_2 \notin \vec{B}(t_{1j}, r_{1j})$ 和 $v_1 \notin \vec{B}(t_{2k}, r_{2k})$，这给出 $a_1 + a_4 > r_{1j}$和 $a_2 + a_3 > r_{2k}$。这意味着 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > r_{1j} + r_{2k}$，与方程（24）矛盾。因此， x不存在。 □

该引理的证明可直接由以下断言得出。

断言 5。 若$\{j,k\}\cap\{1,2\}\neq\varnothing$，则 $\pi(t_{1j}\to v_1,G)\cap\pi(t_{2k}\to v_2,G)\subseteq\{t_{12}\}$，且 t_{12} 是Bunch(v_1) 或 Bunch(v_2) 的端点，或两者都是。

证明。不失一般性，假设 $j=2$ 和 $k\neq 1$。设存在 $x\in\pi(t_{12}\to v_1,G)\cap\pi(t_{2k}\to v_2,G)$，使得 $x\neq t_{12}$。令 $a=d_G(x\to v_2)$。则 $d_G(x\to v_1)>a$，否则，$v_1\in\overline{B}(t_{2k},r_{2k})$，矛盾。令 $r_x=d_G(x\to v_1)$。则 $\{v_2,v_1\}\subseteq\overline{B}(x,r_x)\cap X$。我们断言，$\overline{B}(x,r_x)\cap X$中除 v_1、v_2外不包含其他顶点；见图 3(c)。

反之，设存在 $v_i\in\overline{B}(x,r_x)\cap X$，满足 $v_i\neq v_1$，v_2。那么 $v_i\in\overline{B}(x,r_x)$，因此 $d_G(x\to v_i)\leq r_x=d_G(x\to v_1)$。这意味着 $d_G(t_{12},v_i)\leq d_G(t_{12}\to v_1)\leq r_{12}$；也就是说，$v_i$ 也属于球 $\overline{B}(t_{12},r_{12})$，这与 $\overline{B}(t_{12},r_{12})$ 仅能打散 $\{v_1,v_2\}$ 矛盾。

由于$\overline{B}(x,r_x)\cap X$除了 v_1、v_2和 $r_x<r_{12}$之外不包含任何其他顶点，因此这与 t_{12} 在 公式 (22)中的选择矛盾，因为 $\max\{d_G(x\to v_1)\ d_G(x\to v_2)<\max\{d_G(t_{12}\to v_1)\ d_G(t_{12}\to v_2)$。□

该引理可直接由断言 4 和 断言 5得出。□

4.3 算法应用

本节探讨两个 VC 集合系统的算法应用$\overrightarrow{\text{LP}}_{G,M}$ 以及$\overrightarrow{B}(G)$。本节中的有向图均为无权图，因此距离均为无权有向距离。在第 3.2 节中无向图的 $\text{LP}_{G,M}$ 算法应用的一个核心概念是模式，以及引理 4中对连通子图内模式数量的多项式上界。模式数量的同一上界在有向图中完全失效，因为三角不等式不再成立。有向图中仅有三角不等式的非对称版本，但这不足以推导出有向图中的引理 4。事实上，我们认为引理 4在有向图中并不成立。没有模式数量的多项式上界所带来的影响显而易见：我们无法轻易为有向图推导出与第 3.2 节中所述类似的算法结果。相反，我们使用$\overrightarrow{\text{LP}}_{G,M}$ 以及$\overrightarrow{B}(G)$，得到了类似的结果。

首先，我们设计了一种利用球集合系统 $\overrightarrow{B}(G)$ 来为有向图设计距离预言机的新方法，该预言机具有真正次二次空间和对数级查询时间。正如 Ducoffe、Habib 和 Viennot [DHV20]的研究所表明，球的 VC 集合系统很难操作，因为它并未将距离直接编码在系统中。因此，我们认为这项技术本身也具有独立的研究价值；详情见第 4.3.1 节。

其次，我们修改模式的概念，以纳入 $\pm\infty$，称为 无限模式，作为三角不等式失效的标记。随后，我们能够界定无限模式的数量，从而得到一个类似于 引理 4 的引理。我们注意到，我们仍然不知道如何利用无限模式来构造有向图中的距离预言机，因为它们不具备与其（有限）对应物相同的性质。不过，我们能够利用无限模式，设计出用于计算有向图的所有顶点的离心率和直径的真正次二次时间算法。技术细节见 第 4.3.1 节。

4.3.1 有向图中的距离预言机。

在本节中，我们为无权小图自由有向图构造一个$\tilde{O}(n^{2-\frac{1}{h-2}})$ 空间和 $O(\text{对数}(n))$ 查询时间的精确距离预言机，如推论 4所述。我们将使用 VC 集合系统限制在子集上的一个众所周知的性质，如下述引理所述。

引理14. 设$\mathcal{F}$ 是基集 U 上的一个集合系统，其 *VC* 维数为 $d \geq 1$。设 X 是 U的任意子集。那么 $\mathcal{F}_X = \{Y \cap X : Y \in \mathcal{F}\}$ 的 *VC* 维数至多为 d。我们将$\mathcal{F}_X$称为$\mathcal{F}$的 X-限制。

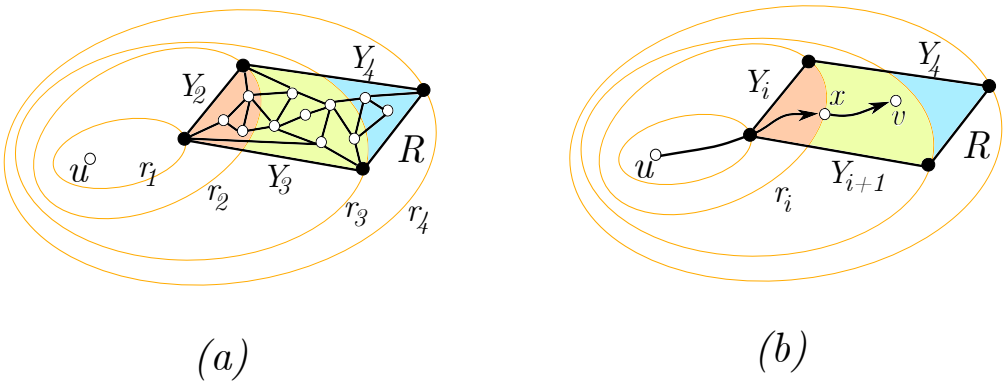

图 4: （a）一个含有 4 个边界顶点的区域 R；集合 $Y_1 = \vec{B}(u, r_1) \cap R$ 仅包含距离 u最近的边界顶点。为便于观察，本图忽略了 R 中边的方向。（b）查询从 u 到 v的距离。

构造。 该构造分为三个步骤。

- **（步骤1）**。 构造 G 的一个 r-划分 R，使其满足 $r = n^2/(2h-1)$；对于 R 中的每个簇 $R \in$ ，我们存储 R中所有顶点对之间的精确距离。令 $\longrightarrow$B $_R$ 为 $\longrightarrow$B (G) 的 $V(R)$-限制。我们将 $\longrightarrow$B $_R$ 中的集合（的标识符）存储在一张表中。

- **(步骤 2).** 对于每个簇 $R \in$ R 和每个顶点 $v \in R$，我们存储：(2a) 每个顶点 $s \in \partial R$ 到 v 的距离 $d_G(s \to v)$；(2b) 对于每个集合 $Y \in \longrightarrow$B $_R$，存储 $d_G(Y \to v)$ $_{\text{定义为}}$ $= \min_{y \in Y} d_G(y \to v)$。

- (步骤 3)。对于每个簇 $R \in$ R 和每个顶点 $u \notin R$，令 $k_R = |\partial R|$。令 $\overrightarrow{B}(u, r_1) \ldots, \overrightarrow{B}(u, r_{k_R})$ 为以 u为中心的嵌套球序列，其中 $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_{k_R}$满足：$\overrightarrow{B}(u, r_1)$ 是包含 ∂R中至少一个顶点的最小球，而 $\overrightarrow{B}(u, r_i)$ 是包含 $\overrightarrow{B}(u, r_{i-1})$ ∂R 中至少一个顶点的最小球；见图 4(a)。（球的数量可能少于 k_R；为简单起见，我们假设恰好有 k_R 个球。）然后，我们在 u 处存储半径 r_i以及限制 $\overrightarrow{B}(u, r_i) \cap V(R)$（及其标识符），并将所有 $i \in [k_R]$存储在列表 $L(u, R)$ 中。注意，根据（步骤1）中的构造， $Y_i \in \longrightarrow$B $_R$。我们还存储从 u 到每个边界顶点 $s \in \partial R$的距离 $d_G(u \to s)$。

距离查询。给定两个顶点 u 和 v，如果存在一个同时包含 u 和v的簇 R，我们只需在 O中查找存储于 R 的两者之间的距离，时间为 R (1)。否则，令 R 为包含 v的簇。令 $Y_i = \overrightarrow{B}(u, r_i) \cap V$ (R)。随后，我们对列表 $L(u, R)$进行二分搜索，找到满足 $v \notin Y_i$ 且 $v \in Y_{i+1}$的第一个半径 r_i；见图4(b)。注意，根据（步骤 2）中的构造，我们可以在 O(1)时间内检查 v 是否属于 Y_i，特别是由（2b）可知，$v \in Y_i$ 当且仅当 $d_G(Y_i \to v) = 0$。然后返回：

$$r_i + d_G(Y_i \to v) \tag{25}$$

作为从 u 到 v的距离。注意，$d_G(Y_i \to v)$ 存储在（步骤 2）的 (2b) 中，因此我们可以在 O(1) 时间内查得该距离。

查询时间主要由对 $L(u, R)$ 进行二分搜索所需的时间决定，即 $O(\log |L(u, R)|) = O(\log |\partial R|) = O(\log r) = O(\log n)$。

正确性。根据 Y_i 和 Y_{i+1}的定义，从 u 到 v 的最短路径必定经过 $\partial R \cap Y_i$中的某个顶点。设 x 为 $\pi(u \to v, G)$ 上最后一个属于 Y_i的顶点；见图4(b)。那么 $d_G(u \to v) = d_G(u \to x) + d_G(x \to v)$。由于 G 是无权的，因此必有 $d_G(u \to x) = r_i$。此外，$d_G(x \to v) = d_G(Y_i \to v)$；否则，$d_G(x \to v) > d_G(Y_i, v)$，这意味着从 u 到 v 存在一条长度小于 $d_G(u \to v)$ 的路径，矛盾。因此，$d_G(u \to v) = r_i + d_G(Y_i \to v)$，如所需。

$\longrightarrow$空间分析。根据定理 5 和引理14，B_R 的 VC 维数至多为 $h - 1$。根据引理 2，$\longmapsto \mathrm{B}_R| = O(r^{h-1})$，因此步骤1的总空间为 $\tilde{O}((n/\sqrt{r})(r^{h-1} + r^2) = \tilde{O}(nr^{h-3/2}))$。步骤 2 的总空间为 $\tilde{O}((n/\sqrt{r})(r \cdot r^{h-1})) = \tilde{O}(nr^{h-3/2})$。对于步骤 3 中的每个顶点 u 和簇 R，总空间为 $O(|\partial R|)$。因此，步骤 3 的总空间为边界顶点总数的 n 倍，根据引理 1，该数量为 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$。综上，预言机的总空间为：

$$\tilde{O}(nr^{h-3/2} + n^2/\sqrt{r}) = \tilde{O}(n^{2 - \frac{1}{2(h-2)}}) \tag{26}$$

当 $r = n^{1/(h-2)}$ 时。

4.3.2 计算所有顶点的离心率和直径。

无限模式。设 H 是 G 的一个导出子有向图；H 可能连通，也可能不连通（甚至不弱连通）。回想一下，∂H 是 H 的所有边界顶点构成的集合。令 $r = |V(H)|$ 和 $b = |\partial H|$。固定一个任意的序列 σ_H，它由 ∂H 的顶点组成，并构成 ∂H 的一个线性序。我们记作 $\sigma_H = s_0, s_1, \ldots, s_{b-1}$。对于每个顶点 $v \in V$，我们定义相对于 σ_H 的 v无限模式，记作$\mathbf{p}_v$ 是一个 b 维向量，其中对每个 $i \in [0, b-1]$

$$\mathbf{p}_v[i] = \begin{cases} -\infty & \text{if } d_G(v \to s_i) - d_G(v \to s_0) \le -r \\ d_G(v \to s_i) - d_G(v \to s_0) & \text{if } -(r-1) \le d_G(v \to s_i) - d_G(v \to s_0) \le r - 1 \\ +\infty & \text{if } d_G(v \to s_i) - d_G(v \to s_0) \ge r \end{cases} \tag{27}$$

特别地，两个值 $-\infty$ 和 $+\infty$ 用于标记距离 $d_G(v \to s_i)$ 远小于或远大于 $d_G(v \to s_0)$。我们有以下一个与 引理 4 类似的引理。

引理 15. *H 是一个无小图 K_h 的有向图 G 的导出子有向图，且 σ_H 是 ∂H 中任意一个顶点序列。令 $P = \{\mathbf{p}_v : v \in V\}$ 为关于 σ_H 的所有无限模式构成的集合。那么$|P| = O((|\partial H| \cdot |V(H)|)^{h^2})$。*

证明。证明思路与引理 4 的证明相同：我们证明，模式集合 P 与 $\widehat{\text{LP}}_{G,M}(\partial H)$ 之间存在一个双射，其中 M 取适当的值。令 $M = \{(), (), ()\}$。注意到 $|M| \le 2r+1$。考虑 VC 集合系统 $\text{LP}_{G,M}()$，根据定理 4，其 VC 维数至多为 h^2。根据 Sauer–Shelah 引理（引理 2），我们有 $|\widehat{\text{LP}}_{G,M}(\partial H)| = O((br)^{h^2})$。为说明模式集合 P 与 $\widehat{\text{LP}}_{G,M}(\partial H)$ 之间存在一个双射，只需按照引理 4 中完全相同的方式，将每个模式 $\mathbf{p}_v$ 展平，得到集合 $\widehat{X}_v \in \widehat{\text{LP}}_{G,M}(\partial H)$。 □

现在定义无限模式到一个顶点的距离。设 v 是 H中的一个顶点，$\mathbf{p}$是关于 σ_H的（某个顶点 u的）模式。$\text{reach}(v, \partial H)$表示 H中能够（通过有向路径）在 H中到达 v 的边界顶点集合。（我们不计入能够在 G中到达 v的边界顶点。）我们将$\mathbf{p}$ 到 v的距离记为 $d(\mathbf{p} \to v)$，定义如下：

$$d(\mathbf{p} \to v) = \begin{cases} \text{undefined} & \text{if } \mathbf{p}[i] = +\infty \text{ for some } i \\ \min_{s_i \in \text{reach}(v,\partial H)} \{d_G(s_i \to v) + \mathbf{p}[i]\} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{28}$$

对于无向图，我们在引理 5 中证明，若 $u \notin V(H)$ 且 $v \in V(H)$，则 $d_G(u, s_0) + d_G(\mathbf{p}_u, v) = d_G(u, v)$，其中 $\mathbf{p}_u$ 是 u的模式。在有向图中，这一结论不再成立。具体而言，$d_G(u \to s_0) + d_G(\mathbf{p}_u \to v)$ 现在可能未定义，或大于 $d_G(u \to v)$。然而，通过考察所有距离 $\{d_G(\mathbf{p}_u \to v)\}_{v \in V(H)}$，我们仍能提取信息。特别是，我们在下面的引理中证明，只要 $d_G(u \to s_0)$ 是所有边界顶点中的最大值，就可以通过 $\{d_G(\mathbf{p}_u \to v)\}_{v \in V(H)}$，恢复从 u 到 H中一个顶点的最大距离。

引理 16. 设 $u \in V \setminus V(H)$ 是一个不属于 H 的顶点，且 $\mathbf{p}_u$ 是 u 关于 σ_H 的模式。定义：

$$\Delta(u \to H) = d_G(u \to s_0) + \max_{v \in V(H)} \{d(\mathbf{p}_u \to v)\} \tag{29}$$

如果 $d_G(u \to s_0) = \max_{0 \le i \le |\partial H|-1} \{d_G(u \to s_i)\}$，那么 $\Delta(u \to H) = \max_{v \in V(H)} d_G(u \to v)$。

证明。由于 $d_G(u \to s_0)$ 取最大值，因此对每个 $i \in [0, b-1]$，$d_G(u, s_i) - d_G(u \to s_0) \le 0$。所以，$\mathbf{p}_u$ 的任何条目都不是 $+\infty$。因此，$d(\mathbf{p}_u \to v)$ 有定义（但仍可能是 $-\infty$）。

断言 6. 如果存在一个边界顶点 $s_i \in \text{reach}(v, \partial H)$ 使得 $\mathbf{p}_u[i] = -\infty$，那么 $d_G(u \to v) < d_G(u \to s_0)$。

证明。$\mathbf{p}_u[i] = -\infty$ 意味着 $d_G(u, s_i) \le d_G(u \to s_0) - r$。由于 v在 H中可从 s_i到达，因此存在一条从 s_i到 v的路径，其长度至多为 $|V(H)| - 1 = r - 1$，这意味着 $d_G(s_i \to v) \le r - 1$。因此，$d_G(u \to v) \le d_G(u \to s_i) + d_G(s_i \to v) \le d_G(u \to s_0) - r + (r-1) < d_G(u \to s_0)$，如所断言。 □

根据公式（28）中距离的定义，如果存在一个边界顶点 $s_i \in \text{reach}(v, \partial H)$，使得 $\mathbf{p}_u[i] = -\infty$，那么 $d(\mathbf{p}_u \to v) = -\infty$，因此不会影响 $\Delta(u \to H)$ 的计算。并且根据断言 6，这样的顶点 v也不会对 $\max_{v \in V(H)} d_G(u \to v)$ 作出贡献。因此，我们只需考虑满足以下条件的顶点 v：对于每个边界顶点 $s_i \in \text{reach}(v, \partial H)$，$\mathbf{p}_u[i] \ne -\infty$。我们断言，对于这样的顶点，$d_G(u \to s_0) + d(\mathbf{p}_u \to v)$ 是从 u到 v的距离。

断言 7. 如果对于每个边界顶点 $s_i \in$ 可达$(v, \partial H)$，$\mathbf{p}_u[i] \ne -\infty$，那么 $d_G(u \to v) = d_G(u \to s_0) + d(\mathbf{p}_u \to v)$。

证明. 该断言的假设意味着，对于每个边界顶点 $s_i \in \mathsf{reach}(v, \partial H)$，都有 $d_G(u \to s_i) = d_G(u \to s_0) + \mathbf{p}_u[i]$。设 s_ℓ 其中某个 $\ell \in [0, b-1]$ 是路径 $\pi(u \to v, G)$ 上距离 u 最远的边界顶点。也就是说，$\pi(u \to v, G)$ 中从 s_ℓ 到 v 的子路径完全位于 H 中。因此，$s_\ell \in \mathsf{reach}(v, \partial H)$ 且 $d_G(s_\ell \to v) = d_H(s_\ell \to v)$。于是：

$$\begin{aligned} d_G(u \to v) &= d_G(u \to s_\ell) + d_G(s_\ell \to v) \\ &= \min_{s_i \in \mathsf{reach}(v, \partial H)} \{d_G(u \to s_i) + d_G(s_i \to v)\} \\ &= \min_{s_i \in \mathsf{reach}(v, \partial H)} \{d_G(u \to s_0) + \mathbf{p}_u[i] + d_G(s_i \to v)\} \\ &= d_G(u \to s_0) + \min_{s_i \in \mathsf{reach}(v, \partial H)} \{d_G(v \to s_i) + \mathbf{p}_u[i]\} \\ &= d_G(u \to s_0) + d_G(\mathbf{p}_u \to v) \ , \end{aligned}$$

如所需。 □

令 $\delta = \max_{v \in V(H)} d_G(u \to v)$ 和 $v^* \in V(H)$ 满足 $d_G(u \to v^*) = \delta$。注意，由于 s_0 是 v^* 的一个合适选择，因此 $\delta \geq d_G(u \to s_0)$。现在我们证明，对于每个满足 $s_j \in \mathsf{reach}(v^*, \partial H)$ 的边界顶点 s_j，都有 $\mathbf{p}_u[j] \neq -\infty$。若如此，根据断言 Claim 7，$\delta = d_G(u \to s_0) + d(\mathbf{p}_u \to v^*)$，这便推出该引理。

为证明 $\mathbf{p}_u[j] \neq -\infty$，首先注意，$d_G(s_j \to v^*) \leq r - 1$，因为 $s_j \in \mathsf{reach}(v, \partial H)$，且 $d_G(u \to s_j) + d_G(s_j \to v^*) \geq d_G(u \to v^*) = \delta$。因此，我们有：

$$d_G(u \to s_j) \geq \delta - d_G(s_j \to v^*) \geq \delta - (r-1) \geq d_G(u \to s_0) - (r-1)$$

由此得到 $d_G(u \to s_j) - d_G(u \to s_0) \geq -(r-1)$。此外，根据 s_0 的定义，$d_G(u \to s_j) - d_G(u \to s_0) \leq 0$。因此，$\mathbf{p}_u[j] \neq -\infty$，如所需。 □

我们将边界序列 s_0 中的第一个边界顶点 σ_H，称为 H 的 **基点**。σ_H。我们指出，在 引理 16中，从 u 到基顶点的距离满足$d_G(u \to s_0) = \max_{0 \leq i \leq |\partial H|-1} \{d_G(u \to s_i)\}$这一点很重要；我们将此条件称为 **最大基底条件**。一般而言，对于任意固定序列 σ_H，若最大基底条件对 u成立，则对某些顶点 v可能不成立。因此，在以下计算所有顶点的离心率的算法中，我们必须考虑 $|\partial H|$ 不同的边界序列，每个序列都以不同的边界顶点为基点。我们注意到，只有基点是重要的；序列中其余顶点的顺序σ_H 可以任意排列。

该算法。 计算所有顶点的离心率的算法分为 3 个步骤。这里我们重点介绍其思路，稍后再讨论实现。

- **(步骤1)**。 为 $r = n^2/(3h^2+6)$构造一个 r-划分 $\mathbf{R}$。对于 $\mathbf{R}$ 中的每个簇 $R \in$ ，我们构造一个集合，记为 Γ_R，其中包含 R 的 $|\partial R|$ 个不同的边界顶点序列，使得 Γ_R 中的每个序列都以不同的边界顶点为基点。我们将其写作$\Gamma_R = \{\sigma_R^1, \sigma_R^2, \ldots\ldots, \sigma_R^{|\partial R|}\}$。然后，对于 $t \in [|\partial R|]$ 的每个序列 σ_R^t，我们构造一个关于 σ_R^t 的无限模式集合：$P_R^t = \{u \in V : \mathbf{p}_u^t\}$，其中 $\mathbf{p}_u^t$ 是关于 σ_R^t 的 u 的无限模式。令 $\mathbf{P}_R = \{P_R^t\}_t$。

• **(步骤 2)**。 对于 R 中的每个簇 $R \in$，以及每个模式 $\mathbf{p} \in (\cup_{P_R \in \mathcal{P}_R} P_R)$，求 $v = \arg\max_{\tilde{v} \in V(R)} d(\mathbf{p} \to \tilde{v})$；搜索 v 时排除未定义的距离。也就是说， v 是顶点中与 $\mathbf{p}$ 的距离最大的顶点，其中 $V(R)$；我们称 v 为距 $\mathbf{p}$ 最远的顶点。然后，我们将距离 $d(\mathbf{p} \to v)$ 存储在一张表中。

• (步骤 3)。现在，我们计算每个顶点 $u \in V$ 的 ecc(u)。对于每个簇 $R \in$ R，我们计算从 u 到距离 u 最远的顶点 $v \in R$ 的距离，记为 $\Delta(u \to R)$，如下所示。令 s_t 为 R 中最远的边界顶点： $d_G(u \to s_t) = \max_{s \in \partial R} d_G(u \to s)$。令 P_R^t 为相对于边界序列的无限模式集合，该边界序列以在（步骤 1）中计算出的 s_t 为基点。令 $\mathbf{p}_u^t$ 为 P_R^t 中 u 的模式。若 $u \notin R$，令 v 为距离 $\mathbf{p}_u^t$ 最远的顶点，该顶点在（步骤 2）中计算得出。然后返回 $\Delta(u \to R) = d_G(u \to s_t) + d(\mathbf{p}_u^t \to v)$。否则，对于每个顶点 $v \in R$，计算 $\tilde{d}_G(u \to v) = \min\{d_G(u, s_0) + d(\mathbf{p}_u^t \to v)\ d_R(u \to v)\}$，最后返回 $\Delta(u, R) = \max_{v \in R} d_G(u \to v)$。

如（步骤 3）中所述，引理 16 意味着计算得到的值 ecc(u) 是 u 的离心率。现在我们给出一种高效的实现，并分析其运行时间。

高效实现。要将上述针对有向图的算法实现为真正的次二次时间，比实现第 3.2.1 节中针对无向图的算法更困难。原因之一是，现在每个顶点 u 都关联着至多 $\sqrt{r}$ 个不同的模式向量，每个模式向量对应同一簇 R 中的一个边界序列。由于每个模式向量的大小至多为 $\sqrt{r}$，因此每个顶点 u 以及每个簇 R 所包含的信息总量为 $O(r)$。引理 1 中的簇数为 $O(n/\sqrt{r})$~。实际上，如果愿意付出更长的运行时间，簇数可以进一步降至 $O(n/r)$。即使簇数达到最优，若不谨慎处理，总计算量仍会达到 $\tilde{O}(nr \cdot (n/r) \cdot r) = \tilde{O}(n^2)$，超过允许的范围。

实现中的关键思路是不计算图中所有顶点的所有模式。正如我们在（步骤 3）中看到的，我们只需要计算与特定边界序列相关联的模式 $\mathbf{p}_u$ ，其中该序列的基点是最远边界顶点；其他边界序列与计算 $\Delta(u \to R)$ 无关。这正是我们要做的：我们不会 像（步骤1）中所述那样预先计算所有集合 Γ_R 和 P_R。相反，我们将先直接实现（步骤 3 ），然后在检查每个顶点 u 的过程中，将模式逐步添加到 P_R 中。

回顾一下， B 是 r-划分 R 的边界顶点集合： $B = \cup_{R \in \mathcal{R}} \partial R$。令 $D(B \to V) = \{d_G(s \to v) : (s, v) \in B \times V\}$， $D(V \to B) = \{d_G(v \to s) : (v, s) \in V \times B\}$。观察 2 在此处仍然成立：

Ob察 4。 $D(B \to V)$ 和 $D(V \to B)$ 可在时间 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$ 内计算得出。¯

我们还得到 作为引理 15的推论，关于无限模式数量的一个多项式界 .

推论 7。$\sum_{P_R \in \mathcal{P}_R} |P_R| = \tilde{O}(r^{(3h^2+1)/2})$ 对于每个 $R \in \mathcal{R}$。

证明。 每个边界序列对应的无限模式数量为 $\sigma_R\ O((|\partial R| \cdot |V(R)|)^{h^2}) = \tilde{O}(r^{3h^2/2})$。该推论源于这样一个事实：我们至多有 $\sqrt{r}$ 个不同的边界序列。 ¯ □

现在我们展示算法的详细实现，给定 $D(B \to V)$ 和 $D(V \to B)$。在（步骤1）中，我们现在只为每个簇 R 构造所有 $|\partial R|$ 边界序列——集合 Γ_R——。

每个区域的总运行时间为 $O(|\partial R|^2) = \tilde{O}(r)$。根据引理 1，查找所有$\{\Gamma_R\}_{R\in\mathcal{R}}$ 的运行时间为：

$$\tilde{O}(n \cdot r/\sqrt{r}) = \tilde{O}(n \cdot r^{1/2}) \tag{30}$$

现在转到（步骤 3）。对于每个顶点 u 和每个簇 R，我们首先通过遍历 $D(V \to B)$ 中存储的从 u 到顶点 ∂R 的所有距离，在 $O(|\partial R|)$ 时间内找到最远边界顶点 s_t。因此，针对所有顶点和所有簇查找全部最远边界顶点的总运行时间为：

$$n \sum_{R\in\mathcal{R}} |\partial R| = \tilde{O}(n^2/\sqrt{r}) \tag{31}$$

根据 引理 1。现在我们知道了在（步骤 1）中计算出的边界序列 σ_R^t，也知道了最远顶点 s_t。我们可以在 $\mathbf{p}_u^t$ 时间内计算出满足最大基底条件的模式；这与查找 s_t所需的时间相同。因此，根据 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$ 和公式（31），在所有顶点和簇中查找满足最大基底条件的全部无限模式的总运行时间为。

最后，我们需要计算 $\max_{\tilde{v}\in R} d(\mathbf{p}_u^t \to \tilde{v})$，并找出距离 $\mathbf{p}_u^t$ 最远的顶点 v，其中 $\mathbf{p}$ R。每次考察一个顶点 u 时，我们不能简单地遍历 R 中的所有顶点。回想一下，每个簇 R 中不同无限模式的数量为 $\tilde{O}(r^{(3h^2+1)}/2)$，因此许多顶点会共享相同的无限模式。于是，我们可以将之前计算出的结果存入表中，遇到相同模式时查表即可。具体而言，我们存储一个字典树数据结构 L：对于顶点 u，如果 $\mathbf{p}_u^t$ 不在 L 中（我们可以在 $O(|\partial R|)$ 时间内检查），那么就遍历 R 中的所有顶点以找到 v，并将 v 和 $d(\mathbf{p}_u^t \to v)$ 存入 L，以 $\mathbf{p}_u^t$ 为键。否则，我们只需从 L 中查找 v 和 $d(\mathbf{p}_u^t \to v)$。除去在 $\mathbf{p}_u^t \notin$L 时查找 v 和 $d(\mathbf{p}_u^t \to v)$ 的运行时间，查找 v 和 $d(\mathbf{p}_u^t \to v)$ 的总时间为 $|\partial R|$，这也是查找 s_t 所需的时间。因此，根据公式–（ 31 ），总运行时间为 $\tilde{O}(n^2/\sqrt{r})$。

现在，我们给出对每种模式 $\mathbf{p} \in (\cup_{P_R\in\mathcal{P}_R} P_R)$ 求出 v 和 $d(\mathbf{p} \to v)$ 的运行时间上界。对于给定的模式 $\mathbf{p}$，根据公式（28）的定义，计算$\mathbf{p}$ 到顶点 $\tilde{v} \in R$ 的距离可在$O(|\partial R|) = O(\sqrt{r})$ 时间内完成。接着，求 $\max_{v\in R} d(\mathbf{p} \to v)$ 可在 $|V(R)|\tilde{O}(\sqrt{r}) = \tilde{O}(r^{3/2})$ 时间内完成。根据推论 7，对 $(\cup_{P_R\in\mathcal{P}_R} P_R)$ 中所有模式进行计算的总运行时间为 $\tilde{O}(r^{(3h^2+1)/2} \cdot r^{3/2}) = \tilde{O}(r^{(3h^2+6)/2})$。对 R 中所有簇进行计算的运行时间为：

$$\tilde{O}(n/\sqrt{r}) \cdot \tilde{O}(r^{(3h^2+6)/2}) = \tilde{O}(nr^{(3h^2+5)/2}) \tag{32}$$

总之，根据 公式（30）、公式（31）和公式（32），计算所有顶点的离心率的总运行时间为：

$$\tilde{O}(nr^{(3h^2+5)/2}) + \tilde{O}(n^2/\sqrt{r}) = \tilde{O}(n^{2-1/(3h^2+6)}) \tag{33}$$

当 $r = n^{2/(3h^2+6)}$，如 推论 3中所述。这也是计算 G的有向直径所需的运行时间。

5 有向 VC 维数边集系统的下界

本节将证明 定理 6中的下界，下面将重新陈述该定理。

定理 6。 对于任意常数整数 $r \geq 1$，存在一个无权平面有向图 $G = (V, E)$，以及一个大小为 r 的子集 $X \subseteq E$，使得 X 被 $\longrightarrow\mathcal{SP}(G)$ 打散。

我们将构造一个图，其中包含一组 r 条有向边 $X = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$，这些边位于路径 P 上，并且对于每个子集 $Y \subseteq X$，都存在一个顶点 $v \notin P$，使得 Y 属于以 v 为根的最短路径树。

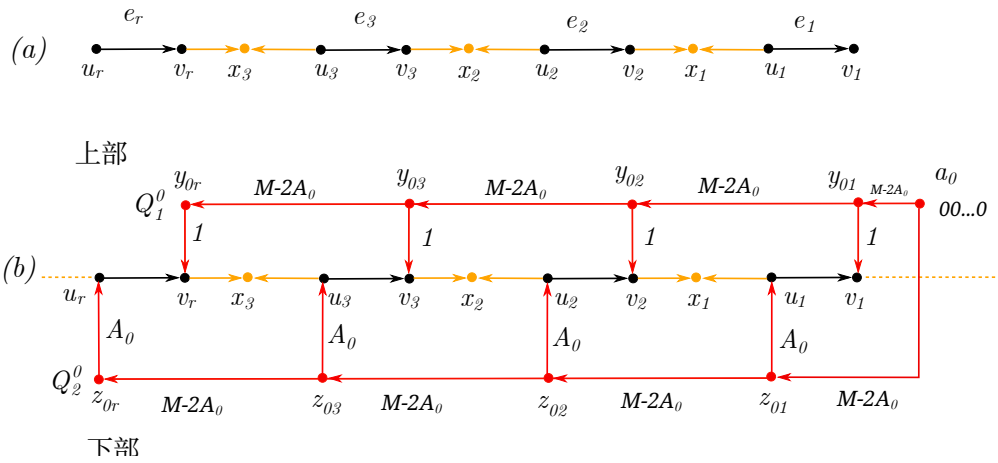

图 5：（a）路径 P。（b）顶点 a_0，对应于比特串 $s_0 = 0 \ldots 0$，其中包含 r 个 0 位，并通过有向边连接到 P。

我们按如下方式构造 P（见图 5(a)）。首先，构造由 X 条 r 有向边组成的集合，其中e_i =($u_i \to v_i$)。然后在 v_{i+1} 和 u_i 之间添加一条长度为 2 的路径，由两条方向不同的边组成：$(v_{i+1} \to x_i)$，$(u_i \to x_i)$。这样做是为了确保 e_i 的任何端点都无法沿着路径 P到达其他边的端点，也无法从其他边的端点沿该路径到达。将每条边的权重设为 1。

现在我们构造最短路径树，使每棵树都实现 X 的一个子集 Y。这里的“实现 Y”是指，子集 Y会包含在某棵最短路径树中，而 $X \setminus Y$中的其他边则不会包含在同一棵树中。我们将添加带有整数权重的边，最后可以通过细分将它们转换为无权边。

选取一个足够大的数 M，以及另外 2^r 个数：$1 \ll A_0 \le A_1 \le \ldots \le A_{2^r-1}$，其中$A_i = 4A_{i-1}$。$M$ 将远大于所有 $\{A_i\}$。下面的不等式将会有所帮助：

$$A_i \ge 2A_t + (A_{i-1} + A_{i-2} + \ldots + A_0 + 1) \quad \text{for any } t \le i-1 \tag{34}$$

现在考虑所有 2^r 比特串 $\{0, 1\}^r$，第 i 个比特串记为 s_i，是 $i$for $i \in [0, 2^r - 1]$的二进制表示。从 s_0开始，对于每个字符串 s_i，我们将向图中添加一个新顶点 a_i，以及一些其他顶点和有向边。部分有向边的权重将基于 M 和 A_i给出。顶点 a_i 将嵌入 G_{i-1}的外面，其中 G_{i-1}是步骤 $i-1$后构造的有向图。最终图为 $G = G_{2^r-1}$。

路径 P将把平面分成两部分：上部（或称 0 部分）和下部（或称 1 部分）；见 图 5(b)。上部将体现这样一个事实：某些边不会被加入到 X 的最短路径树中，而下部则起相反的作用。特别地，如果 j的第 s_i 位是 0，那么从 a_i 到 v_j 的最短路径只会包含上部的边，因此不包含 e_j。否则，从 a_i 到 v_j 的最短路径只会包含下部的边，并且 e_j。添加 a_i 的规则如下（见 图6）：

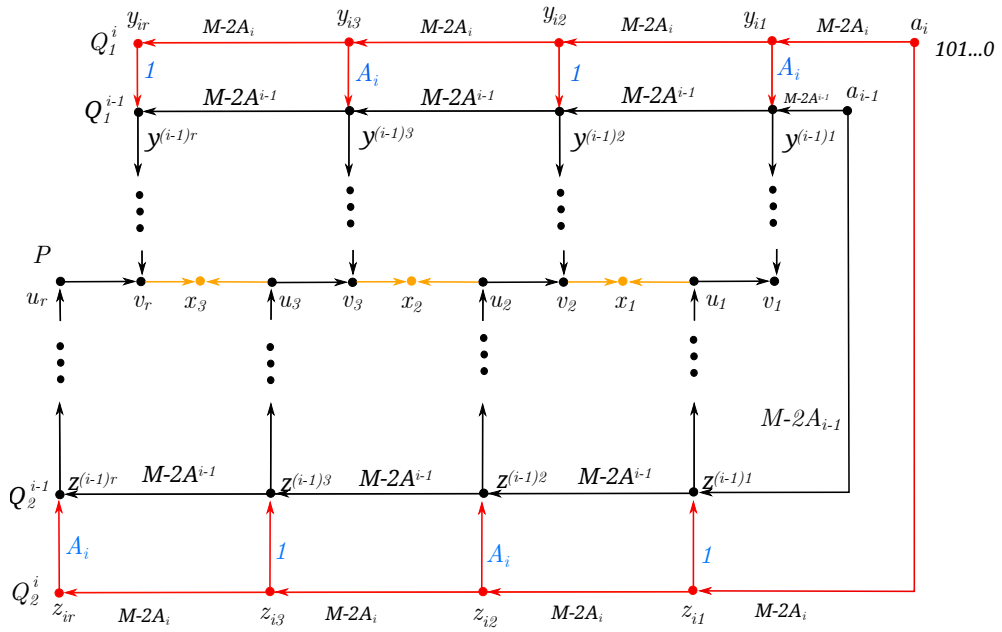

图6：将 a_i 添加到当前图 G_{i-1}中。

1. 添加两条从 a_i 向外延伸的有向路径 $Q_1^i = (a_i = y_{i0} \to y_{i1} \ldots \to y_{ir})$ 和 $Q_2^i = (a_i = z_{i0} \to z_{i1} \ldots \to z_{ir})$。每条路径恰好有 r 条边。两条路径中的每条边都赋予权重 $M - 2 \cdot A_i$。Q_1^i 嵌入平面的上部，由 P 分隔；Q_2^i嵌入平面的下部。

2. 查看比特串 s_i （示例见图6，前3位是{1，0，1}，而在 a_i的字符串中，最后一位是0）。假设 $i \geq 1$。

   - 如果第 j位是1，则添加一条权重为 A_i的有向边（$y_{ij} \to y_{(i-1)j}$），并添加一条权重为1的有向边（$z_{ij} \to z_{(i-1)j}$）。注意，$y_{(i-1)j}$ 和$z_{(i-1)j}$ 分别是 a_{i-1}的路径Q_1^{i-1}和 Q_2^{i-1}上的顶点。例如，在图6中，s_i 的第一位是1，因此我们有一条权重为 A_i 、从 y_{i1} 到$y_{(i-1)1}$的边，以及一条权重为1、从 z_{i1}到$z_{(i-1)1}$的边。y_{i3} 和 z_{i3}也同样如此。

   - 如果第 j 位为 0，则添加一条权重为 1 的有向边 $(y_{ij} \to y_{(i-1)j})$，并添加一条权重为 A_i 的有向边 $(z_{ij} \to z_{(i-1)j})$。例如，在图6中，s_i 的第二位为 0，因此我们有一条从 y_{i2} 到 $y_{(i-1)2}$ 、权重为 1 的边，以及一条从 z_{i2} 到 $z_{(i-1)2}$、权重为 A_i 的边。y_{ir} 和 z_{ir}的情况也相同。

当 $i = 0$ (参见图5(b)) 时，我们将y_{0j} 连接到v_j，并将z_{0j} 连接到u_j，对每个 $j \in [1, r]$都是如此。请注意，由于 s_0 只包含 0 位，每条边$(y_{0j} \to v_j)$ 的权重都是 1，而每条边$(z_{0j} \to u_j)$的权重都是 A_0。在这种情况下，X 中的边都不会被纳入 a_0的最短路径树中。

现在我们分析 a_i 的最短路径树，记作 T_i。如果一条边属于 P、Q_1^t 或某个 $t \in [0, 2^r - 1]$ 对应的 Q_2^t，我们就称它为水平边；否则称其为垂直边。注意，垂直边可能是从顶点 $y_{tj} \in Q_1^t$ 向下连到 Q_1^{t-1} 中某个顶点的边（当 $t \geq 1$ 时），也可能向下连到 P 中某个顶点（当 $t = 0$ 时）；还可能是从顶点 $z_{tj} \in Q_2^t$ 向上连到 Q_2^{t-1} 中某个顶点的边（当 $t \geq 1$ 时），或连到 P 中某个顶点（当 $t = 0$ 时）。

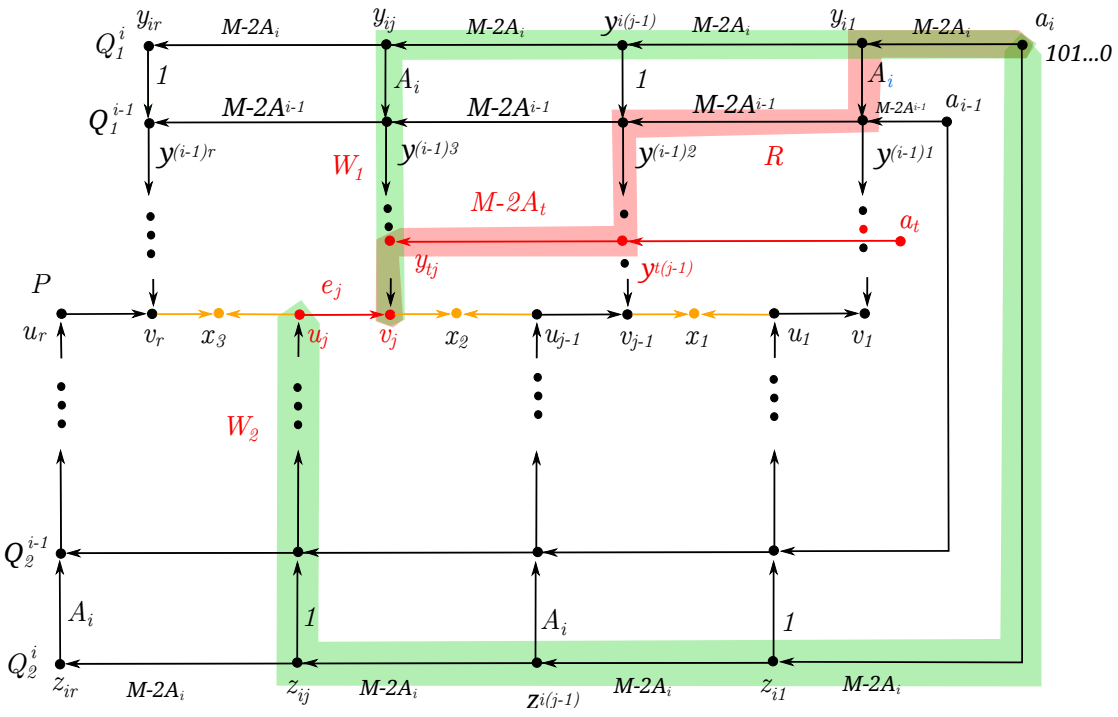

图 7：两条以绿色突出显示的路径分别是图 $G \setminus \{e_j\}$ 和 G_i 中从 a_i 到 v_j 以及从 a_i 到 u_j 的最短路径。

下面的断言是证明的关键；参见图 7。

命题 8. 对于任意 $j \in [1, r]$，则从 a_i 到 v_j 在 $G \setminus \{e_j\}$ 的最短路径由以下部分组成：*(a)* Q_1^i 中从 a_i 到 y_{ij} 的子路径，该子路径仅包含水平边；以及从 y_{ij} 到 v_j 的有向路径，该路径仅包含垂直边。

证明。从 a_i 到 v_j 的最短路径是 图 7中绿色标出的路径。令 W_1 为从 a_i 到 v_j 的路径，如断言中所述。注意，从 y_{ij}到 v_j存在唯一的有向路径，且该路径仅包含垂直边。同理，从 a_i 到 y_{ij}存在唯一的有向路径，且该路径仅包含水平边。因此，如果从 a_i 到 v_j 的最短路径经过 y_{ij}，那么该路径必定是 W_1。

令 R 为从 a_i 到 v_j的最短路径；假设 $R \neq W_1$。因此，$y_{ij} \notin R$。注意，R 只能包含 P 上部的边，因为e_j 已从 G中删除。也就是说， R 不包含任何 z-顶点。此外， R 恰好包含 j 条水平边和 i 条垂直边。注意， W_1 也恰好包含 j 条水平边和 i 条垂直边。另外，根据对 $\{A_i\}_{i=0}^{2^r-1}$的选择， W_1 中任意一条水平边的权重都不超过 R 中任意一条水平边的权重。

设 $(y_{t(j-1)} \to y_{tj})$ 是 R 的最后一条水平边；见 图 7。由于 $y_{ij} \notin R$， $t < i$。因此我们有：

$$\begin{aligned} w(R) - w(W_1) &\geq w(y_{t(j-1)} \to y_{tj}) - w(y_{i(j-1)} \to y_{ij}) - (\text{ total weight of all vertical edges of } W_1) \\ &\geq M - 2A_t - (M - 2A_i) - (A_i + A_{i-1} + \dots A_0) \\ &\geq A_i - 2A_t - (A_{i-1} + \dots A_0) \geq 1 \quad \text{(by Equation (34))} \end{aligned} \tag{35}$$

这与 R 是从 a_i 到 v_j的最短路径相矛盾。 □

以下断言与 命题 8类似，只是图为 G。证明完全相同。

断言 9。 对于任意 $j \in [1,r]$， G 中从 a_i 到 u_j 的最短路径由以下部分组成：*(a)* Q_2^i 中从 a_i 到 z_{ij} 的子路径，该子路径仅包含水平边；以及从 z_{ij} 到 u_j 的有向路径，这些路径仅包含垂直边。

最后，我们断言，e_j 是否属于 T_i，等价于比特串 s_i 中第 j 位是 1 还是 0。这意味着该有向边集系统的 VC 维数无界。

命题 10。 对于任意 $j \in [1,r]$，若 $s_i[j] = 1$，则 $e_j \in T_i$；否则，$e_j \notin T_i$

证明。 令 W_1 为 a_i 到 v 在 $G \setminus e_j$中的最短路径，令 W_2 为 a_i 到u_j 在 G中的最短路径。假设 $s_i[j] = 1$，则 $w(y_{ij} \to y_{(i-1)j}) = A_i$ 且 $w(z_{ij} \to z_{(i-1)j}) = 1$。参见 图 7。注意， W_1 和 W_2 所含水平边数量相同，且每条边的权重相同$M - 2A_i$。因此，我们有：

$$\begin{aligned} w(W_1) - w(W_2 \circ e_j) &\geq A_i - (\text{ total weight of all vertical edges of } W_2) - 1 \\ &\geq A_i - (1 + A_{i-1} + \ldots A_0) - 1 > 0 \quad (\text{by Equation (34)}) \end{aligned} \tag{36}$$

因此， $W_2 \bigcirc e_j$ 是从 a_i 到v_j的最短路径，这就证明了该断言。若 $s_i[j] = 0$，则$e_j \notin T_i$ 的证明也遵循同样的思路。 □

6 结论

在这项工作中，我们系统地研究了小图自由图中的 VC 集合系统，包括有向图和无向图。我们的工作留下了许多开放问题。首先，我们能否在形式上建立我们的集合系统 $\frown\!\!\!\!\!\!\text{LP}_{G,M}(S)$与 Li 和 Parter 的原始集合系统 $\text{LP}_{G,M}(S)$ [LP19] 之间的关系：如果其中一个具有有界 VC 维数，另一个是否也具有有界 VC 维数？这将意味着，对于任意 M, S 以及任意小图自由图 G，$\text{LP}_{G,M}(S)$都是一个 VC 集合系统。第二个问题是将本文的所有结果推广到小图自由图之外的图，例如具有多项式扩张的图和处处稀疏图。第三个问题是，能否为小图自由有向图设计一种具有常数查询时间且占用真正次二次空间的距离预言机？我们在推论 4 中的预言机具有 $O(\log n)$查询时间。第四个问题是为有向图获得类似的度量压缩结果。据我们所知，我们的定理 4 不足以实现度量压缩，因为有向图中不满足三角不等式。

致谢。 Hung Le 获得 NSF CAREER 奖（编号 CCF-2237288）和 NSF 资助（编号 CCF-2121952）的支持。

参考文献

[AWW16] A. Abboud、V. V. Williams 和 J. Wang。稀疏图中半径和直径的近似算法及固定参数次二次算法。载于第*27*届 *ACM-SIAM* 离散算法年会论文集，SODA '16，第377–391页，2016年。5，19

[Bak94] B. S. Baker。平面图上 NP 完全问题的近似算法。《ACM杂志》，41(1):153–180，1994年。1[BBE+21] Ni. Bousquet、W. Cames Van Batenburg、L. Esperet、G. Joret、W. Lochet、C. Muller 和 F. Pirot。排除某个小图的图中的球的打包与覆盖。Combinatorica，41(3):299–318，2021年。7[BC14] G. Borradaile 和 E. W. Chambers。用固定数量的球覆盖近似曲面嵌入图。《离散与计算几何》，51(4):979–996，2014年。2，7[BP21] G. Bodwin 和 M. Parter。边故障图中可恢复的最短路径平局判定。载于《2021年美国计算机学会分布式计算原理研讨会论文集》，2021年。4[BT15] N. Bousquet 和 S. Thomass´e。VC 维数与 Erd˝os–P´osa 性质。《离散数学》，338(12):2302–2317，2015年。2，3，4，7，21[Cab18] S. Cabello。平面图中直径及所有点对距离之和的次二次算法。《ACM算法汇刊》，15(2)，2018年。曾在 SODA'17 上公布。1，2，5[CADWN17] V. Cohen-Addad、S. Dahlgaard 和 C. Wulff-Nilsen。平面图的快速紧凑精确距离预言机。载于 IEEE 第58届计算机科学基础研讨会，FOCS '17，第962–973页，2017年。4[CC07] Sergio Cabello 和 Erin W. Chambers。亏格图中的多源最短路径。载于第18届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，SODA '07，第89–97页。工业与应用数学学会，2007年。1[CCE13] S. Cabello、E. W. Chambers 和 J. Erickson。嵌入图中的多源最短路径。SIAM 计算杂志，42(4):1542–1571，2013年。4[CEV07] V. Chepoi、B. Estellon 和 Y. Vaxes。用固定数量的球覆盖平面图。《离散与计算几何》，37(2):237–244，2007年。2，3，4[CGMW19] P. Charalampopoulos、P. Gawrychowski、S. Mozes 和 O. Weimann。平面图的近乎最优距离预言机。载于第51届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集，STOC '19，第138–151页，2019年。4[CK97] V. Chepoi 和 S. Klavˇzar。苯并类系统中维纳指数和塞格德指数的线性时间算法。《化学信息与计算机科学杂志》，37(4):752–755，1997年。2[CK09] S. Cabello 和 C. Knauer。通过正交范围搜索处理有界树宽图的算法。《计算几何》，42(9):815–824，2009年。2[DFHT05] Erik D. Demaine、Fedor V. Fomin、Mohammadtaghi Hajiaghayi 和 Dimitrios M. Thilikos。有界亏格图和h-小图图上的次指数参数化算法。《ACM杂志》，52(6):866–893，2005年。1

[DH05] E. D. Demaine 和 M. Hajiaghayi。双维性：固定参数可解算法与多项式时间近似方案之间的新联系。载于《第16届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》，SODA'05，第 590–601 页，2005年。1[DHM10] Erik D. Demaine、MohammadTaghi Hajiaghayi 和 Bojan Mohar。通过收缩分解实现近似算法。《Combinatorica》，30(5):533–552，2010年。1[DHT04] Erik D. Demaine、MohammadTaghi Hajiaghayi 和 Dimitrios M. Thilikos。有界亏格图的双维理论。载于《第29届计算机科学数学基础研讨会论文集》，MFCS '04，第 191–203 页，2004年。1[DHV20] D. Ducoffe、M. Habib 和 L. Viennot。无 h-次式图及有界（距离）VC 维数图的直径计算。载于《第31届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》，SODA '20，第 1905–1922 页，2020年。1, 2, 3, 5, 6, 7, 23[DPBF09] Frederic Dorn、Eelko Penninkx、Hans L. Bodlaender 和 Fedor V. Fomin。平面图上的高效精确算法：利用球面切分解。《Algorithmica》，58(3):790–810，2009年。1[Epp03] D. Eppstein。拓扑嵌入图的动态生成器。载于《第14届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》，SODA '03，第 599—-608 页，2003年。1[Eri10] J. Erickson。平面图中的最大流和参数化最短路径。载于《第21届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》，2010年。4[Fed87] Greg N. Federickson。平面图最短路径的快速算法及其应用。《SIAM 计算杂志》，16(6):1004–1022，1987年。1[FHMWN20] V. Fredslund-Hansen、S. Mozes 和 C. Wulff-Nilsen。平面图上具有常数查询时间的真正次平方精确距离预言机。arXiv 预印本 arXiv:2009.14716，2020年。https://arxiv.org/abs/2009.14716。1, 3, 4, 12, 13, 14, 18[FR01] J. Fakcharoenphol 和 S. Rao。平面图、负权边、最短路径与近线性时间。载于《第42届 IEEE 计算机科学基础研讨会论文集》，FOCS '01，2001年。4[GKM+21] P. Gawrychowski、H. Kaplan、S. Mozes、M. Sharir 和 O. Weimann。平面图上的沃罗诺伊图及确定性 $\tilde{O}(n^{5/3})$ 时间内的直径计算。《SIAM 计算杂志》，(2):509–554，2021年。2, 5[GMWWN18] P. Gawrychowski、S. Mozes、O. Weimann 和 C. Wulff-Nilsen。平面图精确距离预言机的更优权衡。载于《第29届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》，编号 SODA '18，第 515–529 页，2018年。4

[Hus17] T. Husfeldt。按树宽和直径参数化的图距离计算。载于《第11届参数化与精确计算国际研讨会》（IPEC 2016），第 63 卷，第 16:1–16:11 页，2017年。19[HW87] D. Haussler 和 E. Welzl。 ε-网与单纯形范围查询。《离散与计算几何》，2(2):127–151，1987年。2[JR23] G. Joret 和 C. Rambaud。平面图的邻域复杂度。arXiv 预印本 arXiv:2302.12633，2023年。7[KKR+97] E. Kranakis、D. Krizanc、B. Ruf、J. Urrutia 和 G. Woeginger。由图定义的集合系统的 VC 维数。《离散应用数学》，77(3):237–257，1997年。2, 6[KKR12] K. Kawarabayashi、Y. Kobayashi 和 B. Reed。二次时间内求解不相交路径问题。《组合理论杂志》B辑，102(2):424–435，2012年。1[Kle05a] P. N. Klein。平面加权旅行商问题的线性时间近似方案。载于《第46届 IEEE 计算机科学基础年会论文集》，FOCS ’05，第 647–657 页，2005年。1[Kle05b] Philip. N. Klein。平面图中的多源最短路径。载于《第16届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》，SODA ’05，第 146–155 页。工业与应用数学学会，2005年。1[KR10] K. Kawarabayashi 和 B. Reed。小闭类中的分隔子定理。载于《第51届计算机科学基础年会论文集》，FOCS ’10，2010年。1[KTW18] Ke. Kawarabayashi、R. Thomas 和 P. Wollan。平坦墙定理的新证明。《组合理论杂志》B辑，129:204–238，2018年。1[KTW20] K. Kawarabayashi、R. Thomas 和 P. Wollan。快速排除非平面图，2020年。1[Le23] H. Le。具有次多项式误差依赖的平面图近似距离预言机。载于《第18届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》，SODA ’23，第 1877–1904 页。工业与应用数学学会，2023年。1, 3, 4, 19[LP19] J. Li 和 M. Parter。通过度量压缩计算平面图直径。载于《第51届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集》，STOC 2019，第 152–163 页，2019年。1, 2, 3, 4, 12, 18, 19, 33[LP21] Y. Long 和 S. Pettie。具有更优时间-空间权衡的平面图距离预言机。载于《2021年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA’21，第 2517–2537 页，2021年。4[LT79] R. Lipton 和 R. Tarjan。平面图分隔定理。《SIAM应用数学杂志》，36(2):177–189，1979年。1

[LT80] R. J. Lipton 和 R. E. Tarjan。《平面分隔定理的应用》。《SIAM 计算杂志》，9(3):615–627，1980年。1[MNNW18] Shay Mozes、Kirill Nikolaev、Yahav Nussbaum 和 Oren Weimann。《在 $o(n \log \log n)$ 时间内求解有向平面图的最小割》。载于《第29届ACM-SIAM离散算法年会论文集》，第477–494页。2018年。4[MS12] S. Mozes 和 C. Sommer。《平面图的精确距离预言机》。载于《第23届ACM-SIAM离散算法年会论文集》，SODA'12，第209–222页，2012年。4[RS83] N. Robertson 和 P. D. Seymour。《图小面 I：排除一个森林》。《组合理论杂志》B辑，35(1):39–61，1983年。1[RS03] N. Robertson 和 P. D. Seymour。《图小面 XVI：排除一个非平面图》。《组合理论杂志》B辑，89(1):43–76，2003年。1[RS04] N. Robertson 和 P. D. Seymour。《图小面 XX：瓦格纳猜想》。《组合理论杂志》B辑，92(2):325–357，2004年。1[RW09] Bruce Reed 和 David R. Wood。《用于在排除某个小图的图中寻找分隔集的线性时间算法》。《ACM算法汇刊》，5(4):1–16，2009年。1[Tho04] M. Thorup。《平面有向图的可达性和近似距离紧凑预言机》。《ACM杂志》，51(6):993–1024，2004年。曾在 FOCS' 01 上公布。1[VC71] V. N. Vapnik 和 A. Ya. Chervonenkis。《事件相对频率到其概率的一致收敛》。《概率论及其应用》，16(2):264–280，1971年。2[VV86] L.G. Valiant 和 V.V. Vazirani。《NP 与检测唯一解同样容易》。《理论计算机科学》，47(0):85–93，1986年。4，9[Wie47] H. Wiener。《石蜡沸点的结构测定》。《美国化学学会志》，69(1):17–20，1947年。2[WN09] C. Wulff-Nilsen。《次二次时间内平面图的维纳指数和直径》。载于《第25届欧洲计算几何研讨会论文集》，第25–28页，2009年。2，14[WN11] C. Wulff-Nilsen。《无小图图和浅层无给定小面的图的分隔定理及其应用》。载于《第52届计算机科学基础年会论文集》，FOCS '11，2011年。1，8[WN14] C. Wulff-Nilsen。《通过动态近似距离预言机，为浅层无给定小面的图寻找更快的分隔集》。载于《第41届自动机、语言与编程国际研讨会论文集》，ICALP '14，第1063–1074页。2014年。1