arXiv:2304.01795v1 [math.DS] 4 Apr 2023

# Friedkin-Johnsen模型的扩展：基于同质性的影响矩阵的作用

Giorgia Disar`o 和 Maria Elena Valcher

摘要—**本文提出 Friedkin-Johnsen（FJ）模型的一种扩展版本，用以考虑同质性机制对个体相互评价的影响。所提出的模型由两个差分方程组成。第一个方程描述意见的演变，即个体如何在考虑自身个人信念以及其他个体影响的基础上修正意见，这与标准 FJ 模型相同。与此同时，第二个方程对意见形成过程中涉及的影响矩阵进行建模，使其根据同质性机制更新，并允许存在正面和负面评价。我们证明，经典 FJ 模型的这一时变版本总是渐近收敛于一个常数解。此外，对于单一讨论主题的情形，我们以闭式形式推导出系统的渐近行为。**

## I. 引言

过去几十年来，理解和描述人们交流与交换观点的方式一直是广泛研究的重点。意见动力学已成为一个十分活跃的研究领域，吸引并融合了来自不同学科的概念和技术，涵盖社会学、心理学、经济学、数学和控制工程等领域。这种浓厚的兴趣催生了大量模型，试图捕捉并以数学形式刻画社交网络中的意见形成过程。意见形成过程受众多变量影响，因此很难构建既足够简单、能够进行严格分析，又足够准确、能够捕捉社会现象复杂性的数学模型。尽管现有模型做出了明显简化，但它们仍为理解人类群体中意见扩散与演化的动态过程提供了诸多见解 [19], [20]。早期研究主要关注旨在解释共识的模型 [6],；近年来，人们则提出了许多模型，用以解释社会群体中观察到的意见分歧、极化和冲突等行为 [1], [8], [10], [11], ，而在现实情境中，这些现象甚至比共识更为常见。

其中，最著名的模型之一无疑是 Friedkin-Johnsen（FJ）模型 [8], ，它刻画了个体对某一主题的意见在两种主要驱动力作用下不断演变的过程。一方面，个体（下文也称为“个体”）会受到社交网络中邻居对同一主题的意见影响，而每位邻居的权重由该个体对其的评价决定。

G. Disar`o 和 M.E. Valcher 任职于意大利帕多瓦 35131，via Gradenigo 6B，帕多瓦大学信息工程系，电子邮箱：giorgia.disaro@phd.unipd.it、meme@dei.unipd.it。本文已提交，拟在 $62^{nd}$ IEEE 决策与控制会议 CDC'23 上宣读。

另一方面，个体倾向于“坚持”自己的初始意见（偏见），因此这些意见会在之后的每个时刻继续影响其意见。从渐近意义上看，个体的意见会逐渐趋于彼此接近，但不会完全相同，也就是说，不再达到共识。在原始 FJ模型 [8] 中，意见围绕单一主题表达；影响矩阵用于量化每个个体对他人意见的重视程度，且该矩阵是常数行随机矩阵。此后，文献中提出了该模型的多种扩展。具体而言，该模型已扩展至多个议题 [7], [17], [18],的情形，并采用时变行随机影响矩阵 [21], ；近期还提出了一种影响矩阵同时包含正负元素的 FJ模型 [9], ，从而考虑到网络中个体之间的关系也可能具有竞争性或对抗性（参见 [2],[16], [24]）。

在所有这类模型中，影响矩阵要么是常量，要么随时间变化；其取值可以是非负数或实数，但始终假设它独立于个体意见的动态变化。这一假设似乎不太现实，因为现实生活中，个体之间的人际关系往往取决于他们意见的比较，并遵循同质性机制，即人们倾向于与观点相近的人交往和互动得更频繁 [3], [4], [14], [15], [22]。换言之，个体倾向于受到意见相似者的影响；反过来，他们往往会对意见分歧较大的个体的意见赋予很小甚至负的权重。

近年来，F. Liu 等人提出了一种有趣的模型，用于研究基于同质性的评价动力学与基于影响的意见动力学之间的相互作用 [13]。该模型首次探讨了一群个体对若干议题/主题的意见如何受到个体间相互评价的影响；反过来，个体间的相互评价又如何根据个体对不同议题的意见，按照同质性原则进行更新。最近， [5] 提出了一种该模型的简化版本，它不量化相互评价的程度，只考虑其符号。研究表明，该模型更为简单，却同样能够准确预测小型网络中个体意见的渐近演化；本文将考虑的正是这类网络。

在本文中，我们提出一种扩展版的

FJ模型，其影响矩阵依据同质性机制生成，仅考虑个体评价的符号。在一般情况下，我们证明了一组在 $m$ 个主题上讨论的 $n$个体的意见矩阵渐近收敛于一个常数解，该解高度依赖于个体的初始意见以及个体的固执系数，即个体坚持原有意见的态度。最后，我们考虑只有一个讨论主题的特殊情况，并给出个体渐近意见的显式表达式。

本文结构安排如下：第II节介绍模型，并解释其中各个量的含义。第III节给出模型动力学的主要结果。第IV 节讨论单主题情形。在第V 节给出两个数值示例。最后，第VI 节总结全文。

记号。给定两个整数 $k$ 和 $n$，其中 $k \leq n$，符号 $[k,n]$ 表示集合 $\{k,k+1,\ldots,n\}$。我们用 $\mathbb{0}_k$ 表示所有元素均为零的 $k$维向量，用 $\mathbb{0}_{k\times l}$表示元素全为零的 $k\times l$ 维矩阵。用 $\mathbf{e}_i$ 表示维数为 $n$的第 $i$个标准基向量，其中$n$ 总是可以从上下文中明确。下文中，矩阵 $A$ 的第（$i$， $j$）个元素记为 $[A]_{ij}$，而向量 $v$ 的第 $i$个元素记为 $v_i$。函数 sgn：$\mathbb{R}^{n\times m}\to\{-1,0,1\}^{n\times m}$将实矩阵 $A$ 映射为取值于 $\{-1,0,1\}$的矩阵，其元素的取值由对应元素的符号决定，即对任意 $i$、$j$，有 $[\mathrm{sgn}(A)]_{ij}=\mathrm{sgn}([A]_{ij})$。表达式 $X=\mathrm{blockdiag}\{X_1,\ldots,X_k\}$ 表示以 $X_1$、.....、$X_k$为对角块的分块对角矩阵。符号矩阵是指对角元素属于 $\{-1,1\}$的对角矩阵。矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$的无穷范数定义为 $\|A\|_\infty:=\max_{i\in[1,n]}\sum_{k=1}^n|A_{ik}|$。向量 $v\in\mathbb{R}^n$ 的无穷范数为 $\|v\|_\infty:=\max_{i\in[1,n]}|v_i|$。

矩阵 $A$ 的谱，记作 $\sigma(A)$，是其所有特征值的集合；谱半径 $\rho(A)$ 定义为 $\rho(A):=\max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\}$。

本文中，无向符号图指三元组 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E},\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{V}=[1,n]$ 是节点（或顶点）集合，$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ 是边（或弧）集合，$\mathcal{A}\in\{-1,0,1\}^{n\times n}$ 是该图的邻接矩阵$\mathcal{G}$。当且仅当 $[\mathcal{A}]_{ij}\neq 0$ 时，弧 $(j,i)\in\mathcal{E}$。此时，$[\mathcal{A}]_{ij}$ 表示该弧的权重（正或负）。此外，由于该图是无向图，矩阵 $\mathcal{A}$ 对称，因此 $(i,j)\in\mathcal{E}$ 当且仅当 $(j,i)\in\mathcal{E}$。由于邻接矩阵 $\mathcal{A}$ 能唯一确定该图，以下将使用记号 $\mathcal{G}(\mathcal{A})$。若图 $\mathcal{G}$ 的节点集合可以划分为两个互不相交的子集，使得同一子集内节点之间的边权非负，而不同子集内节点之间的边权非正，则称该图结构平衡 [2], [24] 。

## II. 模型

给定一组 $n$ 个体，他们对$m$ 个不同主题表达意见，我们将 $Y(t)\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 记为意见时刻 $t$ 的矩阵，其中第（$i$， $j$）项表示个体 $i$ 在时刻 $t\in\mathbb{Z}_+$ 对主题 $j$ 的意见。

我们用 $W(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示时刻 $t$ 的影响矩阵，其第（$i$， $j$）个元素表示个体 $j$在时刻 $t$对个体 $i$ 的影响。具体而言，我们假设：

- $[W(t)]_{ij}>0\Leftrightarrow i$ 正面看待 $j$的意见；
- $[W(t)]_{ij}<0\Leftrightarrow i$ 负面看待 $j$的意见；
- $[W(t)]_{ij}=0\Leftrightarrow i$ 忽视 $j$的意见。

我们假设，在每个时刻 $t$ ，个体 $j$对个体 $i$ 的影响由个体 $i$对个体 $j$的评价给出。另一方面， $i$ 在时刻 $t$ 对 $j$ 的评价基于同质性机制 [3], [14], ，因为这取决于个体 $i$ 和 $j$ 在时刻 $t-1$对所有主题的意见比较。与 [5], 一样，我们只考虑相互评价的正负号，而不考虑其数值。这是因为从实际角度来看，量化每个个体对其他个体的评价很复杂；相反，判断两个个体之间的关系是友好还是敌对则很容易。此外，这种选择对建模误差更稳健，也更符合实际，因为个体 $j$ 可以正面或负面地影响个体 $i$对某个主题的意见，但这种影响不一定与双方相互评价的绝对值成比例。此外，我们也考虑了两个个体决定不依赖彼此意见的情况，即 $[W(t)]_{ij}=0$。实际上，在我们所考虑的小规模网络中，就像这种情况一样，个体 $i$ 认识个体 $j$，但由于双方评价之间缺乏相关性，决定忽视其意见。因此，相互评价为零这一事实也是应予考虑的信息，这也解释了为何要将影响矩阵的每一行除以 $n$，而不是除以该行非零元素的个数。不过，值得注意的是，条件$[W(t)]_{ij}=0$ 极少出现，后文将会说明，因为这对应于个体 $i$ 和 $j$ 在时刻$t-1$的实值意见向量（即 $Y(t-1)$的第 $i$行和第 $j$行）彼此正交的情况。

基于这些前提，本文提出以下模型，以表示 FJ 型意见动力学与基于同质性的评价机制之间的交织：

$$Y(t+1) = (I_n-\Theta)W(t+1)Y(t)+\Theta Y(0), \quad (1)$$

$$W(t+1) = \frac{1}{n}\mathrm{sgn}\left(Y(t)Y(t)^\top\right), \quad (2)$$

其中，$\Theta\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个对角矩阵。对于每个 $i\in[1,n]$，$\Theta$ 的非负对角元素 $\theta_i$ 表示个体 $i$ 坚持原有意见的程度。本文将始终作如下假设：

假设*1*。对于每个 $i\in[1,n]$ ，个体 $i$ 的固执程度满足 $0<\theta_i<1$。

容易看出，如果 $Y(0)$ 的第 $i$行为零，那么对于任意 $t\geq 0$，$Y(t)$ 的第 $i$行都为零。同样，如果 $Y(0)$ 的第$i$列为零，那么 $Y(t)$ 的第 $i$列

对于任意 $t \geq 0$ 都为零。因此，以下我们将排除这些无关紧要的情形。

假设*2*。矩阵 $Y(0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 没有全零行或全零列。

最后，值得注意的是，按定义，影响矩阵 $W(t+1)$ 对每个 $t \geq 0$ 都是对称矩阵。

## III. 一般结果

为了研究意见矩阵的渐近行为，我们首先通过引入转移矩阵 $M(t)$，给出一种表示时刻 $t$ 的意见矩阵的替代方法，该转移矩阵将 $Y(t)$ 与 $Y(0)$ 联系起来。下文将始终使用以下记号：

$$S_0 := Y(0)Y(0)^\top. \tag{3}$$

**命题1**。对于每个 $Y(0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$，在任意时刻 $t \geq 0$，都有

$$Y(t+1) = M(t+1)Y(0), \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} M(t+1) &= (I_n - \Theta)W(t+1)M(t) + \Theta, && (5)\\ M(0) &= I_n, && (6)\\ W(t+1) &= \frac{1}{n}\mathrm{sgn}(M(t)S_0M(t)^\top). && (7) \end{aligned}$$

证明。我们通过对 $t$进行归纳法来证明该结果。首先证明该结果对 $t=0$ 成立。我们注意到

$$W(1) = \frac{1}{n}\mathrm{sgn}(Y(0)Y(0)^\top) = \frac{1}{n}\mathrm{sgn}(M(0)S_0M(0)^\top),$$

因此

$$\begin{aligned} Y(1) &= [(I_n - \Theta)W(1) + \Theta]\,Y(0)\\ &= [(I_n - \Theta)W(1)M(0) + \Theta]\,Y(0) = M(1)Y(0), \end{aligned}$$

其中

$$M(1) = (I_n - \Theta)W(1)M(0) + \Theta.$$

现在假设方程（4）、（5）和（7）对 $t < \bar{t}$ 成立，并证明它们对 $t = \bar{t}$也成立。由

$$W(\bar{t}+1) = \frac{1}{n}\mathrm{sgn}(Y(\bar{t})Y(\bar{t})^\top)$$

根据归纳假设（关于 $Y$ 的表达式），我们得到

$$W(\bar{t}+1) = \frac{1}{n}\mathrm{sgn}(M(\bar{t})S_0M(\bar{t})^\top).$$

另一方面，

$$\begin{aligned} Y(\bar{t}+1) &= (I_n - \Theta)W(\bar{t}+1)Y(\bar{t}) + \Theta Y(0)\\ &= [(I_n - \Theta)W(\bar{t}+1)M(\bar{t}) + \Theta]\,Y(0)\\ &= M(\bar{t}+1)Y(0), \end{aligned}$$

其中 $M(\bar{t}+1) = (I_n - \Theta)W(\bar{t}+1)M(\bar{t}) + \Theta.$ □

根据命题1，现在我们推导关于序列渐近行为的主要结果$\{M(t)\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$。

**定理 2**。对于任意 $Y(0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$，系统(5)-(6)-(7) 的解有界，即[1] $\exists M \in \mathbb{R}_+$ 使得$\|M(t)\|_\infty \leq M$ 对所有 $t \geq 0$。此外，存在 $M_\infty :=$极限$_{t\to+\infty} M(t)$ 且满足

$$M_\infty = (I_n - \Theta)\frac{1}{n}\mathrm{sgn}(M_\infty S_0 M_\infty^\top)M_\infty + \Theta, \tag{8}$$

即，它是 (5) 对于 $W(t+1)$ 按如下形式表示(7)。

证明。系统（5）在初始条件（6）和 $W(t+1)$ 如式（7）所示时，其解可表示为以下两个（无输入项和有输入项）之和：

$$M(t) = M_u(t) + M_f(t), \qquad t \geq 1,$$

其中

$$\begin{aligned} M_u(t) &= (I - \Theta)W(t)(I - \Theta)W(t-1)\dots(I - \Theta)W(1)M(0)\\ M_f(t) &= \Big[I + (I - \Theta)W(t) + (I - \Theta)W(t)(I - \Theta)W(t-1)\\ &\quad + \dots + (I - \Theta)W(t)\dots(I - \Theta)W(2)\Big]\Theta, \end{aligned}$$

由此得到 $M_f(t) = \Theta$ 对于 $t = 1$。因此 $\forall t \geq 1$

$$\|M(t)\|_\infty \leq \|M_u(t)\|_\infty + \|M_f(t)\|_\infty.$$

我们首先注意到 $\forall k \geq 1$

$$\begin{aligned} \|(I - \Theta)W(k)\|_\infty &= \max_i \left\{(1-\theta_i)\sum_{j=1}^n \Big|[W(k)]_{ij}\Big|\right\}\\ &\leq \max_i (1-\theta_i) =: \alpha < 1. \end{aligned}$$

因此，对于每个 $t \geq 1$，我们都有（回忆一下，$M(0) = I_n$）

$$\begin{aligned} \|M_u(t)\|_\infty &= \|(I - \Theta)W(t)(I - \Theta)W(t-1)\dots\\ &\quad (I - \Theta)W(1)\|_\infty\\ &\leq \prod_{k=1}^t \|(I - \Theta)W(k)\|_\infty \leq \alpha^t. \end{aligned}$$

类似地，对于每个 $t \geq 1$

$$\begin{aligned} \|M_f(t)\|_\infty &\leq \|I + (I - \Theta)W(t) +\\ &\quad +(I - \Theta)W(t)(I - \Theta)W(t-1) + \dots\\ &\quad +(I - \Theta)W(t)\dots(I - \Theta)W(2)\|_\infty\|\Theta\|_\infty\\ &\leq [\|I\|_\infty + \|(I - \Theta)W(t)\|_\infty +\\ &\quad +\|(I - \Theta)W(t)(I - \Theta)W(t-1)\|_\infty + \dots\\ &\quad +\|(I - \Theta)W(t)\dots(I - \Theta)W(2)\|_\infty]\|\Theta\|_\infty\\ &\leq \left[1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{t-1}\right]\|\Theta\|_\infty\\ &= \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}\|\Theta\|_\infty. \end{aligned}$$

因此，对于每个 $t \geq 1$,

$$\|M(t)\|_\infty \leq \alpha + \|\Theta\|_\infty.$$

这表明 $M(t)$ 有界 $\forall t \geq 0$。

[1]注意，$W(t+1)$ $t \in \mathbb{Z}_+$，始终有界，因为其取值属于 $\{-1/n, 0, 1/n\}$。

为证明存在 $M_\infty = \lim_{t\to+\infty} M(t)$，我们观察到

$$\lim_{t\to+\infty} \|M_u(t)\|_\infty \le \lim_{t\to+\infty} \alpha^t = 0.$$

这保证了 $\lim_{t\to+\infty} M_u(t) = \mathbb{0}_{n\times n}$，因此 $\lim_{t\to+\infty} M(t) = \lim_{t\to+\infty} M_f(t)$。现在我们注意到

$$M_f(t) = \Theta + \sum_{k=0}^{t-2} \Big[(I-\Theta)W(t)(I-\Theta)W(t-1)\dots (I-\Theta)W(t-k)\Big]\Theta,$$

因此

$$\lim_{t\to+\infty} M_f(t) = \Theta + \lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{t-2} \Big[(I-\Theta)W(t)\dots (I-\Theta)W(t-k)\Big]\Theta.$$

因此，我们还需要证明前一表达式中的级数收敛。众所周知（例如，参见 [23]，中的定理 3.45，该定理很容易推广到矩阵级数），如果范数级数收敛，即 $\lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{t-2} \|(I-\Theta)W(t)(I-\Theta)W(t-1)\dots(I-\Theta)W(t-k)\| < +\infty$，那么级数 $\lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{t-2} (\Theta)W(t)(I-\Theta)W(t-1)\dots(I-\Theta)W(t-k)$ 也随之收敛。但是，根据前面的分析，我们可以断言

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{t-2} \|(I-\Theta)W(t)(I-\Theta)W(t-1)\dots (I-\Theta)W(t-k)\| \\ &\le \lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{t-2} \alpha^{k+1} = \lim_{t\to+\infty} \alpha\frac{1-\alpha^{t-1}}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha} < +\infty.\end{aligned}$$

最后，我们有

$$\lim_{t\to\infty} M(t+1) = \lim_{t\to\infty} \Big[(I-\Theta)\frac{1}{n}\operatorname{sgn}\left(M(t)S_0M(t)^\top\right)\cdot M(t) + \Theta\Big],$$

这意味着 $M_\infty$ 满足（8）。
证明至此完成。 □

定理 2的主要结论是，对于每个$Y(0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$Y_\infty := \lim_{t\to+\infty} Y(t)$$

存在且与 $M_\infty Y(0)$ 重合。因此，所提出的 FJ模型扩展版本渐近收敛于一个常数解。此外，存在 $W_\infty := \lim_{t\to+\infty} W(t+1)$，并且

$$W_\infty = \frac{1}{n}\operatorname{sgn}\left(M_\infty S_0 M_\infty^\top\right) \in \left\{-\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right\}^{n\times n}. \quad (9)$$

由假设2可知，$W_\infty$ 的对角元素均为正，因此等于 $\frac{1}{n}$。

**引理3。** 对于每个 $Y(0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$，我们有

$$[W_\infty]_{ii} = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in [1,n],$$

并且 $W_\infty$ 要么在1 中有一个特征值（若有，则 $\mathcal{G}(W_\infty)$ 是结构平衡的），要么是 *Schur*稳定。

证明。 首先，由（2）可得

$$W_\infty = \frac{1}{n}\operatorname{sgn}\left(Y_\infty Y_\infty^\top\right). \quad (10)$$

因此，对每个 $i \in [1,n]$，都有 $n[W_\infty]_{ii} = \operatorname{sgn}(e_i^\top Y_\infty Y_\infty^\top e_i) = \operatorname{sgn}(\|Y_\infty^\top e_i\|^2)$，其值只能为 0 或 1。反设，$\exists i \in [1,n]$ s.t. $[W_\infty]_{ii} = 0 = n[W_\infty]_{ii}$，并且不失一般性地假设

$$\mathcal{I} := \{i \in [1,n] : [W_\infty]_{ii} = 0\} = [1, n-k],\ \exists k \in [1, n-1].$$

因此，对每个 $i \in [1, n-k]$，都有 $\|Y_\infty^\top e_i\|^2 = 0$，且当且仅当 $Y_\infty^\top e_i = \mathbb{0}_n$ 时该结论成立。因此，我们还得到 $e_i^\top Y_\infty Y_\infty^\top e_j = 0$，$\forall j \in [1,n]$。由此可知，$W_\infty$可以按如下方式进行分块划分:

$$W_\infty = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{0}_{(n-k)\times(n-k)} & \mathbb{0}_{(n-k)\times k} \\ \hline \mathbb{0}_{k\times(n-k)} & W_{nz} \end{array}\right],$$

其中 $W_{nz} \in \left\{-\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right\}^{k\times k}$和 $[W_{nz}]_{ii} = \frac{1}{n}$，$\forall i \in [1,k]$。因此，我们相应地也将矩阵 $M_\infty$ 和 $\Theta$划分为

$$M_\infty = \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right], \quad \Theta = \left[\begin{array}{c|c} \Theta_1 & \\ \hline & \Theta_2 \end{array}\right].$$

由（8）和（9），可得

$$\left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \Theta_1 & \mathbb{0}_{(n-k)\times k} \\ \hline (I_k-\Theta_2)W_{nz}M_{21} & (I_k-\Theta_2)W_{nz}M_{22} \end{array}\right].$$

这等价于

$$\begin{cases} M_{11} = \Theta_1 \\ M_{12} = \mathbb{0}_{(n-k)\times k} \\ M_{21} = (I_k-\Theta_2)W_{nz}M_{21} \\ M_{22} = (I_k-\Theta_2)W_{nz}M_{22} + \Theta_2 \end{cases}$$

并且，特别地，第三个方程意味着

$$[(I_k-\Theta_2)W_{nz}]\, M_{21}e_i = M_{21}e_i,\ \forall i \in [1, n-k],$$

这意味着 $M_{21}e_i$ 是与特征值 $\lambda = 1$ 对应的 $(I_k-\Theta_2)W_{nz}$ 的特征向量。另一方面，可以很容易地证明 $(I_k-\Theta_2)W_{nz}$ 是 Schur稳定的，因此 $M_{21}e_i$ 必须等于 $\mathbb{0}_k$。这对每个 $i \in [1, n-k]$ 都成立，从而得到 $M_{21} = \mathbb{0}_{k\times(n-k)}$。这意味着 $M_\infty$ 具有以下分块对角结构

$$M_\infty = \left[\begin{array}{c|c} \Theta_1 & \mathbb{0}_{(n-k)\times k} \\ \hline \mathbb{0}_{k\times(n-k)} & (I_k-\Theta_2)W_{nz}M_{22} \end{array}\right].$$

此外，如果我们将 $S_0$ 划分为 $\left[\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{12}^\top & S_{22} \end{array}\right]$，方程（9）变为

$$\begin{aligned} W_\infty &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{0}_{(n-k)\times(n-k)} & \mathbb{0}_{(n-k)\times k} \\ \hline \mathbb{0}_{k\times(n-k)} & W_{nz} \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{sgn}\left(\left[\begin{array}{c|c} \Theta_1 & \\ \hline & M_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{12}^\top & S_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \Theta_1 & \\ \hline & M_{22}^\top \end{array}\right]\right) \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{sgn}\left(\left[\begin{array}{c|c} \Theta_1 S_{11}\Theta_1 & \Theta_1 S_{12} M_{22}^\top \\ \hline M_{22}S_{12}^\top\Theta_1 & M_{22}S_{22}M_{22}^\top \end{array}\right]\right). \end{aligned}$$

但是，第一个对角块 $\Theta_1 S_{11}\Theta_1$ 不能为零，因为这将意味着（由假设1） $S_{11} = \mathbb{0}_{(n-k)\times(n-k)}$，而这是不可能的，因为根据假设2， $Y(0)$没有全零行。

因此，我们可以得出结论： $[W_\infty]_{ii} = \frac{1}{n}$， $\forall i \in [1,n]$。最后，应用 [5], 中的引理17，我们可以证明$W_\infty$ 要么具有特征值1（若如此，则 $\mathcal{G}(W_\infty)$结构平衡），要么是Schur稳定。□

可以证明，如果 $W_\infty$ 没有零元素，那么影响矩阵会在有限步内收敛到其极限值 $W_\infty$ 。

**命题4**。 假设 $W_\infty = \lim_{t\to+\infty} W(t)$ 不含零元素。则

$$\exists\, T \geq 0 \ s.t.\ W(t) = W_\infty,\ \forall t \geq T.$$

证明。 任取[1, n]中的指标 $i$ 和 $j$ ，并假设例如 $[W_\infty]_{ij} = 1/n$。这意味着$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{sgn}([Y(t)Y(t)^\top]_{ij}) = 1$，因此$\lim_{t\to+\infty}[Y(t)Y(t)^\top]_{ij} = [Y_\infty]_{ij} > 0$. 。这意味着存在 $\exists\, T \geq 0$，使得对每个 $t \geq T$，都有 $[Y(t)Y(t)^\top]_{ij} > 0$，因此对每个 $t \geq T$，都有 $[W(t+1)]_{ij} = [W_\infty]_{ij} = 1/n$。 □

现在我们来探讨 $M_\infty$的一些有趣性质。

**命题5.** 对于每个 $Y(0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$，矩阵 $M_\infty = \lim_{t\to+\infty} M(t)$ 非奇异，且满足

*(i)* $\|M_\infty \mathbb{e}_i\|_\infty = \max_{j\in[1,n]} |[M_\infty]_{ji}| = |[M_\infty]_{ii}|, \forall i \in [1,n]$;

*(ii)* $[M_\infty]_{ii} > 0$， $\forall i \in [1,n]$.

证明. 我们先证明 $M_\infty$ 非奇异。反设，由矛盾可知 $v \in \mathbb{R}^n$， $v \neq \mathbb{0}_n$，属于$M_\infty$的核，即 $M_\infty v = \mathbb{0}_n$。然后，利用（8）和（9），可得

$$\mathbb{0}_n = M_\infty v = (I-\Theta)W_\infty M_\infty v + \Theta v \ \Rightarrow\ \Theta v = \mathbb{0}_n,$$

这不可能，因为根据假设1，每个 $\theta_i \in (0,\ 1)$。

*(i)* 令 $i$ 为 $[1,n]$中的任意索引。则

$$M_\infty \mathbb{e}_i = (I-\Theta)W_\infty M_\infty \mathbb{e}_i + \Theta \mathbb{e}_i.$$

如果我们使用一个 $n\times n$ 置换矩阵 $P$对 $M_\infty \mathbb{e}_i$的元素进行置换，使得

$$\tilde{v} := P^\top M_\infty \mathbb{e}_i = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix}, \quad \text{with } |\tilde{v}_1| \geq |\tilde{v}_2| \geq \cdots \geq |\tilde{v}_n|,$$

我们得到

$$\begin{aligned} \tilde{v} = P^\top M_\infty \mathbb{e}_i &= P^\top(I-\Theta)PP^\top W_\infty PP^\top M_\infty \mathbb{e}_i + \\ &+ P^\top \Theta PP^\top \mathbb{e}_i \\ &= (I-\tilde{\Theta})\tilde{W}_\infty \tilde{v} + \tilde{\Theta}\mathbb{e}_j, \qquad \exists j \in [1,n], \end{aligned}$$

其中 $\tilde{W}_\infty = P^\top W_\infty P$和

$$\tilde{\Theta} = P^\top \Theta P = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\theta}_n \end{bmatrix}.$$

考察 $\tilde{v}$的第一分量，即 $\tilde{v}_1$，可得

$$\tilde{v}_1 = (1-\tilde{\theta}_1)\mathbb{e}_1^\top \tilde{W}_\infty \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix} + \tilde{\theta}_1 \mathbb{e}_1^\top \mathbb{e}_j,$$

这意味着

$$|\tilde{v}_1| \leq (1-\tilde{\theta}_1)\sum_{i=1}^n \frac{|\tilde{v}_i|}{n} + \tilde{\theta}_1 \mathbb{e}_1^\top \mathbb{e}_j. \tag{11}$$

因此，若 $j \neq 1$，则（11）的右端将为

$$(1-\tilde{\theta}_1)\sum_{i=1}^n \frac{|\tilde{v}_i|}{n} < \sum_{i=1}^n \frac{|\tilde{v}_i|}{n} \leq |\tilde{v}_1|,$$

~，这就产生了矛盾。因此，必有 $j = 1$ 且 $\theta_1 = \theta_i$。于是，我们有 $\tilde{v}_1 = [M_\infty \mathbb{e}_i]_i = [M_\infty]_{ii}$。这意味着 $\max_{j\in[1,n]} |[M_\infty]_{ji}| = |[M_\infty]_{ii}|$。显然，这对每个索引 $i \in [1,n]$ 都成立，即对 $M_\infty$ 的每一列都成立。

*(ii)* 我们要证明 $[M_\infty]_{ii} > 0$， $\forall i \in [1,n]$，这等价于证明 $\tilde{v}_1 > 0$，这里沿用第 *(i)* 部分采用的记号。反设 $\tilde{v}_1 \leq 0$。那么，利用 $[\tilde{W}_\infty]_{11} = \frac{1}{n}$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= (1-\tilde{\theta}_1)\mathbb{e}_1^\top \tilde{W}_\infty \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix} + \tilde{\theta}_1 \\ &= (1-\tilde{\theta}_1)\frac{1}{n}\tilde{v}_1 + (1-\tilde{\theta}_1)\sum_{j\neq 1}[\tilde{W}_\infty]_{1j}\tilde{v}_j + \tilde{\theta}_1. \end{aligned}$$

因此，

$$\left(1 - \frac{1-\tilde{\theta}_1}{n}\right)\tilde{v}_1 - \tilde{\theta}_1 = (1-\tilde{\theta}_1)\sum_{j\neq 1}[\tilde{W}_\infty]_{1j}\tilde{v}_j.$$

如果 $\tilde{v}_1 \leq 0$，我们得到

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1-\tilde{\theta}_1}{n}\right)|\tilde{v}_1| + \tilde{\theta}_1 &= \left|\left(1 - \frac{1-\tilde{\theta}_1}{n}\right)\tilde{v}_1 - \tilde{\theta}_1\right| \\ &= (1-\tilde{\theta}_1)\left|\sum_{j\neq 1}[\tilde{W}_\infty]_{1j}\tilde{v}_j\right| \\ &\leq (1-\tilde{\theta}_1)\frac{n-1}{n}|\tilde{v}_1|, \end{aligned}$$

这意味着

$$\left(1 - \frac{1-\tilde{\theta}_1}{n} - \frac{1-\tilde{\theta}_1}{n}(n-1)\right)|\tilde{v}_1| + \tilde{\theta}_1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \Big(1-(1-\tilde{\theta}_1)\Big)\,|\tilde{v}_1|+\tilde{\theta}_1\le 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\theta}_1|v_1|+\tilde{\theta}_1\le 0,$$

一个矛盾。

因此， $\tilde{v}_1$ 必须为正，这等价于说 $[M_\infty]_{ii}>0,\ \forall i\in[1,n]$，正如我们想要证明的那样。 □

前一结果意味着，每个个体的初始意见对其自身最终意见的影响，大于对其他个体最终意见的影响。换言之，对个体 $i$的初始意见赋予较大权重的个体是$i$ 本人。此外（这并不令人意外！），这种影响始终为正。

## IV. 单议题情形

现在讨论 $m=1$的情形，即只有一个讨论主题。此时，意见矩阵是一个列向量，我们将其记为 $y(t)\in\mathbb{R}^n$，其中包含各个体对该主题的意见。容易看出，若我们定义

$$v(t):=\mathrm{sgn}(y(t)),$$

影响矩阵变为

$$W(t+1)=\frac{1}{n}\mathrm{sgn}\left(y(t)y(t)^\top\right)=\frac{1}{n}v(t)v(t)^\top.$$

因此，模型（1）-（2）变为:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= (I-\Theta)W(t+1)y(t)+\Theta y(0) \quad (12)\\ W(t+1) &= \frac{1}{n}\mathrm{sgn}\left(y(t)y(t)^\top\right)=\frac{1}{n}v(t)v(t)^\top, \quad (13)\end{aligned}$$

从而得到差分方程:

$$y(t+1)=\frac{1}{n}(I-\Theta)v(t)v(t)^\top y(t)+\Theta y(0). \quad (14)$$

我们还注意到，在此情形下，假设2意味着 $y(0)$中不含零元素。事实上，条件$y_i(0)=0$ 会导致第 $i$个个体始终处于孤立状态，并保持零意见。

在上述假设下，我们可以推导出以下结果。

**引理6.** 对于 $m=1$，影响矩阵保持不变，具体而言，

$$W(t+1)=W(1)=\frac{1}{n}v(0)v(0)^\top,\quad \forall t\ge 1.$$

证明. 对 $t$使用归纳法。对于 $t=1$，有

$$W(t+1)=W(2)=\frac{1}{n}\mathrm{sgn}(y(1)y^\top(1))=\frac{1}{n}v(1)v^\top(1).$$

But,

$$\begin{aligned} v(1) &= \mathrm{sgn}(y(1))\\ &= \mathrm{sgn}\left[(I-\Theta)\frac{1}{n}v(0)v(0)^\top y(0)+\Theta y(0)\right]=v(0),\end{aligned}$$

其中我们利用了以下事实：$v(0)^\top y(0)=\mathrm{sgn}(y(0))^\top y(0)>0$（（假设2排除了这种情况 $y(0)=\mathbb{0}_n$）。假设该结论对 $t<\bar{t}$ 成立。对于$t=\bar{t}$:

$$\begin{aligned} v(\bar{t}+1) &= \mathrm{sgn}(y(\bar{t}+1))\\ &= \mathrm{sgn}\left[(I-\Theta)\frac{1}{n}\overbrace{v(\bar{t})}^{=v(0)}\underbrace{v(\bar{t})^\top y(t)}_{\sum_{i=1}^n|y_i(\bar{t})|>0}+\Theta y(0)\right]\\ &= v(0).\end{aligned}$$

因此，$v(t+1)=v(0)\ \forall t\ge 0$ $W(t+1)=\frac{1}{n}v(t+1)v(0)$，得到$v(1)v(t+1)^\top=\frac{1}{n}v(0)v(0)^\top=W(1)\ \forall t\ge 1$ 。 □

根据前述引理，对于 $m=1$，式（12）—（13中的模型变为时不变模型，而 $y(t)$ 的动力学可表示为:

$$y(t+1)=\frac{1}{n}(I-\Theta)v(0)v(0)^\top y(t)+\Theta y(0). \quad (15)$$

引理6意味着，整个意见动力学在每个时间步都由一个对应于结构平衡情形的影响矩阵 [2], [24], 演化，即 $\mathcal{G}(W(t+1))$ 对每个 $t\ge 0$都是结构平衡的。现在可以得出以下结果。

**定理7。** 对于 $m=1$，有

$$\begin{aligned} W_\infty &= \frac{1}{n}v(0)v(0)^\top,\\ M_\infty &= \left[I_n+\frac{1}{\sum_{i=1}^n\theta_i}(I_n-\Theta)v(0)v(0)^\top\right]\Theta. \quad (16)\end{aligned}$$

证明。由引理6可得，$W(t)=\frac{1}{n}v(0)v(0)^\top$，$\forall t\ge 0$。因此，我们还有 $W_\infty=\frac{1}{n}v(0)v(0)^\top$。关于 $M_\infty$，由（8）和（9）可得

$$[I_n-(I_n-\Theta)W_\infty]M_\infty=\Theta,$$

可改写为

$$M_\infty=[I_n-(I_n-\Theta)W_\infty]^{-1}\Theta,$$

由于矩阵 $I_n-(I_n-\Theta)W_\infty$可逆，如下所示。根据Gershgorin圆盘定理 [12] （以及假设1），$(I_n-\Theta)W_\infty$ 的谱满足

$$\begin{aligned} \sigma((I_n-\Theta)W_\infty)\subseteq\\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^n\left\{s\in\mathbb{C}:\left|s-\frac{1-\theta_i}{n}\right|\le\frac{n-1}{n}(1-\theta_i)\right\}\\ &= \bigcup_{i=1}^n\left\{s\in\mathbb{C}:-\frac{n-2}{n}(1-\theta_i)\le s\le 1-\theta_i\right\}\\ &\subsetneq \{s\in\mathbb{C}:|s|<1\},\end{aligned}$$

其中，我们用到了以下事实：对于每个 $i\in[1,n]$，$[W_\infty]_{ii}=\frac{1}{n}$；对于每个 $i\ne j$，$-[W_\infty]_{ij}|\le\frac{1}{n}$；且 $i,\ j\in[1,n]$。这意味着 $(I_n-\Theta)W_\infty$ 是 Schur稳定。因此，$\rho((I_n-$

Θ)$W_\infty$) $< 1$。这进而意味着 $I$ –($I_n - \Theta$)$W_\infty$ 是一个可逆矩阵。此外，有

$$\begin{aligned}
[I_n - (I_n - \Theta)W_\infty]^{-1} &= I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} [(I_n - \Theta)W_\infty]^k \\
&= I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} [(I_n - \Theta)\frac{1}{n}v(0)v(0)^\top]^k \\
&= I_n + [(I_n - \Theta)\frac{1}{n}v(0)v(0)^\top] \cdot \\
&\quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (1-\theta_i)}{n}\right)^{k-1} \\
&= I_n + \frac{1}{\sum_{i=1}^n \theta_i}(I_n - \Theta)v(0)v(0)^\top.
\end{aligned}$$

因此， $M_\infty$ 可表示为式（16）。 □

总之，我们可以给出个体的渐近意见的显式表达式，即

$$y_\infty = \left[I_n + \frac{1}{\sum_{i=1}^n \theta_i}(I_n - \Theta)v(0)v(0)^\top\right]\Theta y(0).$$

## V. Examples

**例1**。我们考虑一组由 $n = 6$个体讨论 $m = 6$ 个主题的情形。假设 $\theta_1 = \theta_6 = \frac{2}{3}$ $\theta_2 =$个主题的情形。假设 $\theta_5 = \frac{1}{2}$ $\theta_3 =$（）为:–

$$Y(0) = \begin{bmatrix}
0.1317 & 1.7035 & -0.2350 & 0.0802 & 0.7824 & -0.6380 \\
0.2968 & -0.6272 & 0.9015 & -0.4425 & -0.1206 & -0.7040 \\
-0.6075 & -0.3453 & 0.3935 & -0.9496 & 0.5671 & -0.3654 \\
0.5217 & -0.2691 & -0.2884 & -0.1193 & -0.3721 & -1.1914 \\
0.0244 & -0.2168 & -0.2278 & 1.1211 & -0.3104 & -0.7398 \\
-0.3392 & 0.7993 & 0.1429 & -0.9816 & -1.4906 & 0.2002
\end{bmatrix}.$$

关于6 个主题的意见演化以及影响矩阵的演化如图1所示。

**例 2**。我们考虑一组讨论 $m = 3$ 个主题的 $n = 5$ 个体。我们假设 $\theta_1 = 0.1174$， $\theta_2 =$**0。2967**， $\theta_3 = 0.3188$, $\theta_4 = 0.4242$， $\theta_5 = 0.5079$， 并且$Y$**(0)**为:

$$Y(0) = \begin{bmatrix}
-18.8898 & 47.9748 & 9.4896 \\
42.3380 & -6.1130 & -23.7788 \\
-6.9793 & -38.8881 & 10.2843 \\
-31.5184 & -24.1935 & 21.1216 \\
40.4881 & -9.1280 & -27.8253
\end{bmatrix}.$$

关于3 个主题的意见演化以及影响矩阵的演化如图2所示。

## VI. 结论

本文提出了 Friedkin-Johnsen模型的一种扩展版本，该模型采用随时间变化的影响矩阵，以描述个体之间的合作与竞争交互。具体而言，我们假设影响矩阵基于同质性机制进行更新。我们证明，即使网络结构随时间变化，且个体之间并非全都友好，个体的意见仍会渐近收敛。此外，我们还指出了转移矩阵和影响矩阵极限值的一些有趣性质。最后，在 $m = 1$这一特殊情形下，即只有一个讨论主题时，我们以闭式形式推导了意见向量的渐近行为。

## 参考文献


[1] C. Altafini。《结构平衡社会网络中的意见形成动力学》。Plos One，7（6）：e38135，2012。[2] C. Altafini。《具有对抗性相互作用的网络共识问题》。IEEE Trans. Aut. Contr.，58（4）：935–946，2013。[3] P. Dandekar、A. Goel 和 D. T. Lee。《偏向性同化、同质性与极化动力学》。美国国家科学院院刊，110（15）：5791–5796，2013。[4] G. De Pasquale 和 M. E. Valcher。《意见动力学的二元同质性模型》。载于《欧洲控制会议（ECC）2021论文集》，第1057–1087页，鹿特丹，荷兰，2021年。[5] G. De Pasquale 和 M.E. Valcher。《基于从众偏差的意见动力学模型：同质性与影响机制的交织》。欧洲控制杂志，68，文件100675，2022年。[6] M. H. DeGroot。《达成共识》。美国统计学会会刊，69（345）：118–121，1974年。[7] N.E. Friedkin。《社会学中复杂系统的社会控制与协调问题：审视社区分裂问题》。IEEE 控制系统杂志，35（3）：40–51，2015年。[8] N.E. Friedkin 和 E.C. Johnsen。《社会影响与意见》。数学社会学杂志，15：193–206，1990年1月。[9] G. He、Z. Ci、X. Wu 和 M. Hu。《具有对抗性关系和多个相互依赖主题的意见动力学》。IEEE Access，10：31595–31606，2022年。[10] R. Hegselmann 和 U. Krause。《意见动力学与有界信任：模型、分析与仿真》。人工社会与社会模拟杂志，5：1–24，2002年。[11] T. Hiller。《朋友与敌人：符号网络形成模型》。理论经济学，3（12）：1057–1087，2017年。[12] R.A. Horn 和 C.R. Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，剑桥（英国），1985年。[13] F. Liu、S. Cui、W. Mei、F. D¨orfler 和 M. Buss。《基于同质性的评价动力学与基于影响的意见动力学之间的相互作用：建模与分析》。IEEE 控制系统快报，5（1）：181–186，2020年。[14] M. McPherson、L. Smith-Lovin 和 J.M. Cook。《物以类聚：社会网络中的同质性》。社会学年度评论，27（1）：文件415444，2001年。[15] W. Mei、P. Cisneros-Velarde、G. Chen、N.E. Friedkin 和 F. Bullo。《通过同质性与影响机制实现的动态社会平衡和收敛评价》。Automatica，110：61–67，2019年。[16] L. Pan、H. Shao 和 D. Li。《具有固执个体的符号社会网络中的意见动力学同伴选择》。神经计算，477：104–113，2021年。[17] S.E. Parsegov、A.V. Proskurnikov、R. Tempo 和 N.E. Friedkin。《具有多个相互依赖态度和偏见的社会行动者的新意见动力学模型》。载于第54届 IEEE 决策与控制会议（CDC），第3475–3480页，2015年。[18] S.E. Parsegov、A.V. Proskurnikov、R. Tempo 和 N.E. Friedkin。《社会网络中意见动力学的新型多维模型》。IEEE Trans. Aut. Contr.，62（5）：2270–2285，2017年。[19] A.V. Proskurnikov 和 R. Tempo。《动态社会网络建模与分析教程：第一部分》。Annu. Rev. Control.，43：65–79，2017年。[20] A.V. Proskurnikov 和 R. Tempo。《动态社会网络建模与分析教程：第二部分》。Annu. Rev. Control.，45：166–190，2018年。[21] A.V. Proskurnikov、R. Tempo、M. Cao 和 N. E. Friedkin。《带有偏见个体的时变社会影响网络中的意见演化》。IFAC-PapersOnLine，50（1）：11896–11901，2017年。[22] M.T. Rivera、S.B. Soderstrom 和 B. Uzzi。《社会网络中二元组的动力学：分类、关系与邻近机制》。社会学年度评论，36：文件91115，2010年。[23] W. Rudin。《数学分析原理》。麦格劳-希尔，第3版，1953年。[24] W. Xia、M. Cao 和 K.H. Johansson。《信任—不信任社会网络中的结构平衡与意见分化》。IEEE 网络系统控制汇刊，3：46–56，2016年。

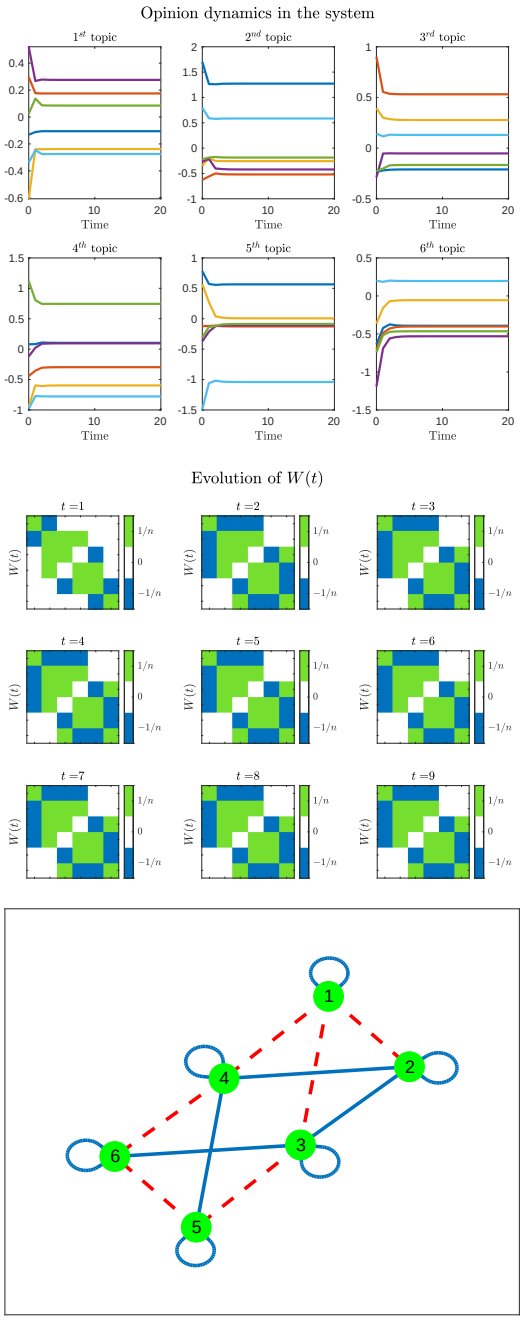



图 1. 示例 1：6 个主题上的意见演变（上）；影响矩阵的演变（中）；与 $W_\infty$ 相关的图（下）。

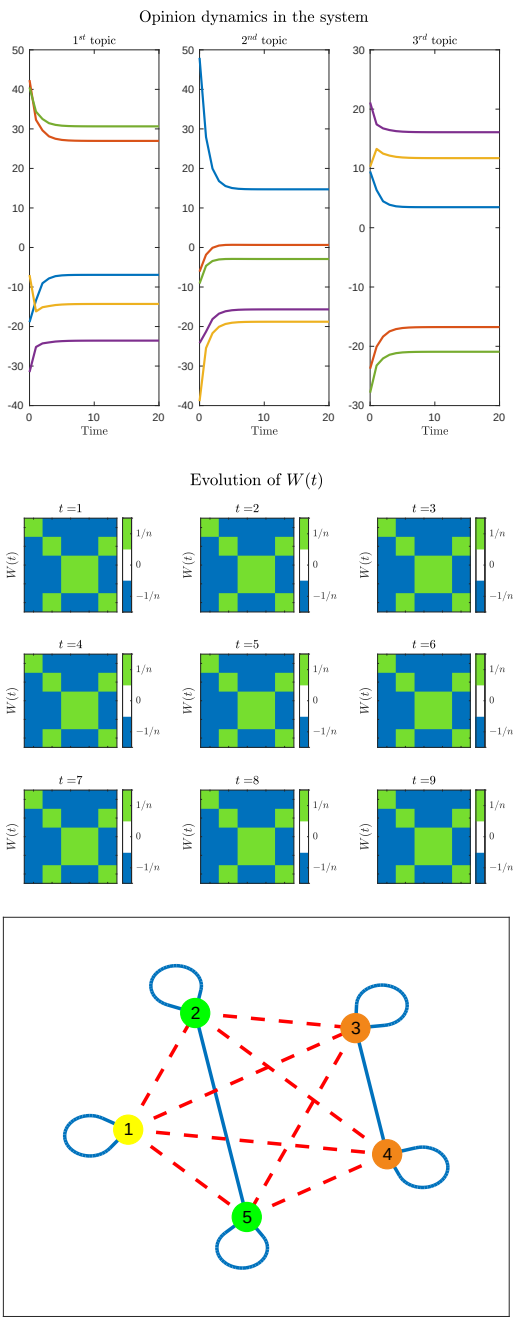



图 2. 示例 2：3 个主题上的意见演变（上）；影响矩阵的演变（中）；与 $W_\infty$ 相关的图（下）。