机器学习发现等几何分析的最优求积规则

Tomas Teijeiro [a,*], Jamie M.Taylor [b], Ali Hashemian [a], David Pardo [c,a,d]

[a] *BCAM – Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao, Basque Country, Spain*
[b] *Department of Quantitative Methods, CUNEF University, Madrid, Spain*
[c] *University of the Basque Country (UPV/EHU), Leioa, Basque Country, Spain*
[d] *Ikerbasque – Basque Foundation for Sciences, Bilbao, Basque Country, Spain*

arXiv:2304.01802v1 [math.NA] 4 Apr 2023

摘要

我们提出采用机器学习技术，为等几何分析（IGA）中刚度矩阵和质量矩阵的构造寻找最优求积规则。我们首先考虑由均匀和非均匀节点序列张成的任意次数的一维样条空间，然后利用生成的最优规则，通过张量积方式对更高维空间进行积分。我们将求积规则搜索表述为一个优化问题，并采用基于梯度下降的机器学习策略求解。然而，由于优化空间具有高度非凸性，搜索能否成功很大程度上取决于求积点的数量和参数初始化。因此，我们采用动态规划策略，从节点数较少的样条空间中的最优解初始化参数。通过这种方法，我们为采用等几何分析离散的样条空间找到了最优求积规则，涵盖多达50个均匀单元和最高为8次的多项式，展现了该方法在这一场景中的普适性。对于非均匀剖分，该方法也在相当数量的测试案例中找到了最优规则。我们还在两个实际案例研究中评估了生成的最优规则，即拉普拉斯算子的特征值问题和自由形状曲梁的特征频率分析；后者展现了该方法在曲线几何中的适用性。具体而言，与传统高斯积分相比，所提出的方法最多可节省一维44%、二维68%和三维空间82%的计算量。

关键词：数值积分、最优求积规则、机器学习、动态规划、等几何分析

1. 引言

开发高效且准确的积分方法在许多数值分析技术中发挥着关键作用。在等几何分析（IGA） [1], 中，一种常用的数值积分方法是在伽辽金离散的系统矩阵构造过程中采用逐单元高斯（EWG）求积公式。这遵循了有限元分析（FEA）的经典系统构造方法。然而，已知对于具有较高连续性的样条空间，存在最优求积公式，因此所需的求积点数量远少于经典 EWG 方法。例如，可以采用 Calabr`o 等人 [2], 提出的快速矩阵形成技术：系统矩阵的每一行都使用其各自的求积公式进行积分，该公式通过线性方程组求得。Barto˘n 等人 [3] 提出了适用于 B 样条的加权高斯求积公式，在保证相对于权函数积分精确的同时，所需的求积点数量达到最少。Barto˘n 和 Calo [4, 5, 6] 提出的其他技术则采用多项式同伦延拓（PHC），这是一种求解多项式方程组的数值方法 [7], ，用于为样条生成高斯求积规则

*通讯作者*Email address:* tteijeiro@bcamath.org(Tomas Teijeiro)

连续性较高的样条空间。为了在目标样条空间中生成高斯求积公式，他们构造了一个相关的源空间，其中包含已知的求积公式（例如，多项式高斯求积公式的并集），然后将源空间中的求积公式变换到目标空间，同时保持其最优性。当单元数量趋于很大时，这些求积公式收敛于 Hughes 等人提出的半点求积公式。 [8]。关于为等几何分析离散获得最优或近乎最优求积公式的更多研究，例如，参见 [9–14]。

另一方面，近年来，利用机器学习技术解决数值积分问题正日益受到关注。尽管在实践中，计算误差有界的近似积分的最先进方法仍是蒙特卡洛方法， [15], 基于核的求积方法已展现出有趣的收敛特性，因此适用于高维问题，或被积函数计算成本较高的情况 [16, 17]。另一个例子是贝叶斯求积方法 [18–20], ，其目标是在尽量减少被积函数评估次数的同时，实现统计意义上准确的积分。求积技术也是基于深度学习的近似方法中的一个重要环节，但目前尚无合适的规则（例如，参见 [21]）。上述所有方法都试图计算积分的近似值，而本文的主要贡献在于提供最优求积规则，即以尽可能少的求积点计算出精确积分。

为确保所发现规则的最优性，我们首先根据半点规则定义目标求积点数 [8], ，然后将每个点的位置和权重设为可训练参数。用于完整定义机器学习问题的损失函数，以固定有限维样条空间中每个基函数的积分误差为依据。然而，这个问题具有高度非凸性，学习过程能否收敛至全局最优解，根本上取决于参数的初始值 [22]。因此，利用次数和连续性相同但单元数量不同的样条空间所具有的规律性，我们设计了一种动态规划策略 [23]，用一个更简单问题的最优解来初始化给定问题的参数。实验结果表明，该策略在具有均匀单元的剖分上能够实现普遍收敛。

本文其余部分的结构如下： 第 2 节正式定义目标函数空间和积分问题。在第 3 节中，我们介绍所开发的优化方法，包括损失函数以及用于参数初始化的动态规划策略。随后，第 4 节 展示所得求积公式在一般样条空间上的数值结果、与经典 EWG 规则的比较，以及相应的计算需求。在第 5 节中，我们讨论两个应用案例研究中的等几何分析结果。最后，第 6 节 总结全文并指出未来研究的可能方向。

2. 问题表述

2.1. 等几何分析离散

为简单起见，我们考虑一维参数空间上的等几何分析离散。通过取张量积，将其推广到高维空间是显而易见的。不失一般性，我们将计算域 Ω 定义为 $[0,1]$，中由一列互异节点 $U := \{u_j\}_{j=0}^{n_e}$ 描述的 n_e 个单元的剖分，使得 $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_{n_e-1} < u_{n_e} = 1$。我们将由次数为 p 、在 U 中每个内部节点处连续性为 c 的分段多项式函数构成的 B样条空间定义为 $\mathcal{S}_p^c(U)$，其中 $p > c \geq 0$。考虑钳制节点向量 $\Xi \supset U$，其为

$$\Xi := \{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1}, \underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{\mu}, \underbrace{u_2,\ldots,u_2}_{\mu} \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\} = \{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n+p+1}\}, \tag{2.1}$$

其中， $\mu := p - c$ 是内部节点的重数， $n+1$ 是 $\mathcal{S}_p^c(U)$的维数。我们通过Cox–De Boor递归 [24]求得该B样条空间的基函数 $\{v_i^p\}_{i=0}^n$ 。对于给定的参数

$x \in \Omega$，其表示为

$$v_i^0(x) = \begin{cases} 1, & \xi_i \le x < \xi_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$v_i^p(x) = \frac{x - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} v_i^{p-1}(x) + \frac{\xi_{i+p+1} - x}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} v_{i+1}^{p-1}(x). \tag{2.3}$$

在所需的 x处计算基函数时，我们在（2.2）中找到对应的非零节点区间，并高效地计算（2.3），避免处理重复节点时出现除以零。更多详情见 [24, 算法 A2.1 和 A2。2] 以及 [25, 算法 A1 和 A2]。图 1展示了一个 B 样条基函数示例，其特征由 $p = 4$ 和 $c = 0$ 给出，并定义在包含 $n_e = 8$ 个单元的均匀划分上。

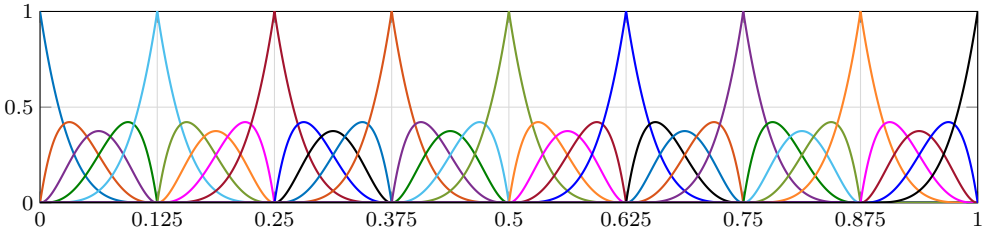


图 1。一个 B 样条空间示例的基函数，其中 $p = 4$、 $c = 0$ 和 $n_e = 8$。

注 1。我们注意到， $\mathcal{S}_c^p(U)$ 存在不同的基函数。例如，一组可选基函数为 $\{x^i\}_{i=0}^p$ 和 $\bigcup_{i=0}^{n_e-1}\{\text{ReLU}(x - u_i)^r\}_{r=c+1}^p$。然而，这些基函数会导致条件数过大，从而在搜索最优求积规则时引发数值不稳定性。

2.2. 数值积分

不失一般性，我们旨在寻找最优求积规则，以便在构造偏微分方程（PDE）离散化所产生的刚度 K 和质量 M 矩阵时，精确计算以下积分：

$$K_{ij} = \int_\Omega v_i' v_j' \, d\Omega, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.4}$$

$$M_{ij} = \int_\Omega v_i v_j \, d\Omega, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.5}$$

其中，撇号表示基函数的导数。为简洁起见，本文及下文在提及基函数时省略上标 p。需要指出的是，积分 (2.4) 和 (2.5) 的构造未考虑所研究偏微分方程的系数和问题几何。这是寻找最优求积规则时的常见假设（例如，参见 [8, 第 3 节。2]和 [9, 第 2]节）。

注 2. 设 $\mathcal{S}_c^p(U$是用于等几何分析离散的样条空间，(L^2 2.4) 中基函数导数的乘积需要对空间 $\mathcal{S}_{c-1}^{2p-2}(U)$ 进行积分，而在 (2.5) 中，我们对空间 $\mathcal{S}_c^{2p}(U)$ 进行积分。因此，同时包含刚度项和质量项的最小空间为 $\mathcal{S}_{c-1}^{2p}(U)$。此外，采用典型的最大连续性等几何分析离散化时， c 等于 $p - 1$。因此，为简洁起见，我们考虑被积函数所在的空间 $\mathcal{S}_k^d(U)$，其中 d等于 $2p$，而 k至多为 $p - 2$。

我们希望找到求积点 $X := \{x_i\}_{i=1}^q$ 和权重 $W := \{w_i\}_{i=1}^q$，假设给定的积分双线性型 $B\colon \mathcal{S}_k^d(U) \to \mathbb{R}$ 在 $\mathcal{S}_k^d(U)$ 上能够被精确计算。因此，对于任意 f， $g \in \mathcal{S}_c^p(U)$，我们有

$$B(f, g) := \sum_{i=1}^q f(x_i) g(x_i) w_i. \tag{2.6}$$

然而，我们注意到，只需在一个更大的积分空间中构造适当的求积公式，因为如果 f， $g \in \mathcal{S}_c^p(U)$，那么 $f \cdot g \in \mathcal{S}_k^d(U)$ 在 注 2 的意义下成立。因此，我们旨在寻找用于如下形式积分的求积规则

$$I(f; X, W) := \sum_{i=1}^{q} f(x_i) w_i \,, \tag{2.7}$$

对于所有 $f \in \mathcal{S}_k^d(U)$，满足以下约束：

$$\begin{aligned} & x_i, w_i \in [0,1] \,, \quad i = 1, 2, \ldots, q \,, \\ & \sum_{i=1}^{q} w_i = 1 \,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

在等几何分析中构造系统矩阵时，一种常见的实用方法是采用经典的逐单元高斯（EWG）求积公式，即在每个单元 $\Omega p+1$内使用（$\binom{e}{j}$）点求积公式：$[u_{j-1}, u_j]$，$j = 1$，……，n_e，用于积分（2.4）和（2.5）。只有在使用不连续空间时（即所有单元界面处的连续性为 $k = -1$），这种逐单元求积公式才是最优的；经典有限元分析离散化中可能会出现这种情况。因此，在等几何分析中使用 EWG 求积公式所增加的成本可能带来显著的计算开销，尤其是在采用高阶离散化和处理高维问题时。对于样条空间，始终存在一种最优求积公式，其求积点数 q 为：

$$d + l + 1 = 2q \,, \tag{2.9}$$

其中 l 是内部节点的总数（包括其重数），即 $l := (n_e - 1) \cdot (d - k)$，假设所有内部节点处的连续性 k 均匀。如果 $d \ll l$，则 $q \approx l/2$，这表明在极限情况下，当$n_e \to \infty$时，所提到的样条求积公式收敛于 Hughes 等人的半点求积公式 [8]，，该公式在整个区域上精确。因此，如果 q 是保证积分精确所需的最小求积点数，我们就认为该求积公式是最优的。

注 3. 基于 p、 c 和 n_e 的某些组合，式（2.9）左侧可能变为奇数；因此，我们通过 $q = \lceil \frac{d+l+1}{2} \rceil$ 得到求积点的最优数量。在这种情况下，可以考虑更高的空间 $\mathcal{S}_k^{d+1}$ （~~U~~），按照例如 [5] 中所述的对奇数次样条空间进行积分的思路，以获得唯一的求积公式。然而，这会导致系统矩阵的过度积分。

3. 优化方法

3.1. 参数空间与损失函数

由于 $\mathcal{S}_k^d(U)$ 是有限维空间，其上的所有范数彼此等价，因此我们认为它配备了 L^2 范数。于是，对每个固定的 X， W，我们可以将 $I(\cdot; X, W)$ 视为定义在$\mathcal{S}_k^d(U)$上的线性泛函。在这种情况下，量化积分误差的自然方式是使用定义在 $\mathcal{S}_k^d(U)$ 上的对偶范数。虽然对偶范数通常难以计算，但由于我们将 L^2 视为$\mathcal{S}_k^d(U)$上的范数，因此可以得到一个易于数值计算的诱导对偶范数表达式。具体而言，若 $\mathcal{I}(f) := \int_\Omega f(x)\, dx$ 是 f 的精确积分，则有

$$||\mathcal{I} - I(\cdot; X, W)|| := \max_{f \in \mathcal{S}_k^d(U)} \frac{|\mathcal{I}(f) - I(f; X, W)|}{||f||_{L^2}} \,. \tag{3.1}$$

给定任意基 $\{v_i\}_{i=0}^n$属于 $\mathcal{S}_k^d(U)$，我们考虑由（2.5）给出的 Gram（亦称质量）矩阵，并利用 L^2 的希尔伯特空间结构及其对偶空间，将损失函数定义为：

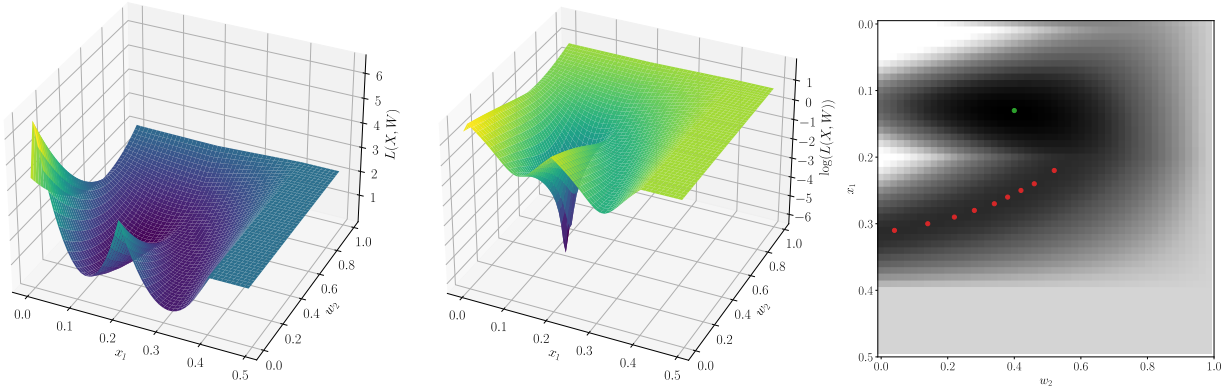
$$L(X, W) := \max_{f \in \mathcal{S}_k^d(U)} \frac{|e(f)|}{||f||_{L^2}} = \left(\sum_{i,j=0}^{n} (M^{-1})_{ij}\, e(v_i) e(v_j) \right)^{\frac{1}{2}} \,, \tag{3.2}$$

其中， $e(v_i)$ 是 v_i 基函数的积分误差，即对于固定的 X 和 W：

$$e(v_i) := |\mathcal{I}(v_i) - I(v_i; X, W)| . \tag{3.3}$$

如果基是正交归一的，那么 M 及其逆矩阵就是单位矩阵。一般而言，在一般基下，通常会使用 M^{-1} ，以确保损失与 L^2 范数保持一致。

一般来说，对于固定数量的求积点 q，对应点位置 $\{x_i\}_{i=1}^{q}$ 和权重 $\{w_i\}_{i=1}^{q}$，共有 $2q$ 个未知参数。优化问题是在满足式（2.8）所定义约束的前提下，最小化$L(X,W)$。由于（3.2）是可微的，我们首先将待计算的最优点数设为 $q = \lceil \frac{n}{2} \rceil$（参见 [8],），然后采用基于梯度下降的标准机器学习策略来求解该问题。然而，我们发现优化空间高度非凸，因此搜索通常会停滞在局部极小值处，并且高度依赖于 q 以及 x_i 和 w_i的初始值。图2展示了一个简单问题（$d = 1$、 $k = 0$ 和 $n_e = 5$）的优化空间。在这个空间中， q 等于3；但由于下文式（3.4）所述的对称约束以及式（2.8）中的基本约束，损失仅由 x_1和 w_2 决定。可以看出，即使在这个简单的空间中也存在多个局部极小值，而梯度下降能否有效找到解，取决于搜索的起始点。



（a）原始搜索空间。

（b）用于突出显示单个最优值。

（c）搜索空间的二维鸟瞰图。全局最优解以绿色标记，局部极小值以红色标记。

图 2. $d = 1$、 $k = 0$ 和 $n_e = 5$的优化空间示意图。

3.2. 基于动态规划的参数初始化

鉴于搜索参数的初始值与机器学习优化的收敛性密切相关，我们设计了一种基于动态规划 [23] 的方法，以完全确定性的方式初始化参数值。简而言之，针对给定问题的初始参数值将根据一个更简单的问题的最优求积公式计算得出。这样，我们就可以将一个问题的求解分解为一系列更简单问题，并递归求解。我们先讨论如何求解具有均匀单元的问题，然后在此基础上进一步解决具有非均匀单元的更一般问题。

3.2.1. 均匀单元

若任意两个连续的互异节点u_{j-1}和 u_j, $j = 1, \ldots, n_e$之间的距离为常数，我们就称剖分 U 为均匀剖分。在这种情况下，由于函数空间关于中心对称，我们可以为最优求积公式额外施加两个约束：

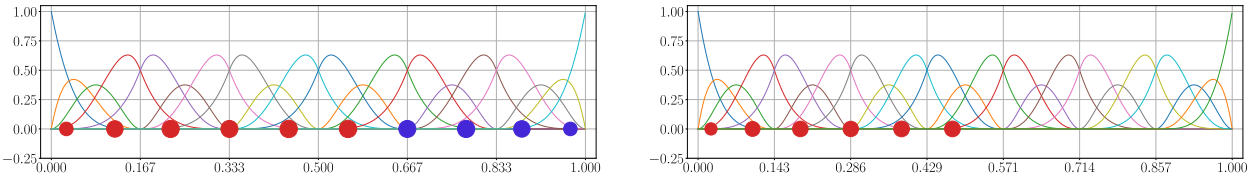
$$\begin{aligned} \{x_i\}_{i=1}^{\frac{q}{2}} &= \{1 - x_j\}_{j=q}^{\frac{q}{2}} , \\ \{w_i\}_{i=1}^{\frac{q}{2}} &= \{w_j\}_{j=q}^{\frac{q}{2}} . \end{aligned} \tag{3.4}$$

因此，需要拟合的参数数量为 $\phi_x = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ 个点和 $\phi_w = \lceil \frac{q}{2} \rceil - 1$ 个权重。给定空间$\mathcal{S}_k^d(\{u_j\}_{j=0}^{n_e})$，对于 $k > 0$，参数初始化将按如下方式进行：

$$\{x_i\}_{i=1}^{\phi_x} = \widetilde{x}_i \cdot \frac{n_e - 1}{n_e}, \tag{3.5}$$

$$\{w_i\}_{i=1}^{\phi_w} = \widetilde{w}_i \cdot \frac{n_e - 1}{n_e}, \tag{3.6}$$

其中 $\{\widetilde{x}_i\}_{i=1}^{\widetilde{q}}$ 和 $\{\widetilde{w}_i\}_{i=1}^{\widetilde{q}}$ 分别为空间 $\mathcal{S}_k^d(\{u_j\}_{j=0}^{n_e-1})$的最优求积点和权重。也就是说，在包含 n_e 个单元的剖分中搜索解时，初始值由包含 $n_e - 1$ 个单元的剖分的最优解线性缩放得到。基本情形为 $n_e = 2$，此时 x_i 的初始值在区间 $[0, 0.5]$内均匀分布，且所有权重均为 $w_i = \frac{1}{q}$。该过程如 图 3所示。即使最优求积点的数量随单元数量增加（固定 d 和 k），仍有 $\widetilde{q} \geq \frac{q}{2}$，因此始终可以应用该过程。



(a) $d = 4$, $k = 1$, $n_e = 6$ 的最优求积点。　(b) $d = 4$、$k = 1$、$n_e = 7$ 的初始参数值。

图 3. 基于少一个单元的空间的最优求积公式进行参数初始化，同时保持次数和连续性不变。红色圆圈表示初始化时进行缩放的点，蓝色圆圈表示该求积公式中其余的点。每个圆圈的面积与其权重成正比 w_i。

对于零连续空间（即 $k = 0$），可以通过以下方式获得更好的初始化：

$$x_1 = \frac{1}{2q}, \qquad \{x_i\}_{i=2}^{\phi_x} = x_{i-1} + \frac{1}{q}, \tag{3.7}$$

$$\{w_i\}_{i=1}^{\phi_w} = \frac{1}{q}. \tag{3.8}$$

在这种情况下，主要优势在于初始化不依赖于其他空间的求积公式，因此我们可以直接对任意数量的单元运行优化，而无需先求解单元数较少时的问题。

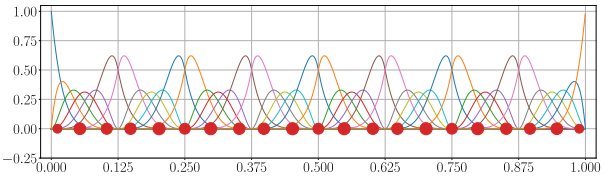
3.2.2. 非均匀单元

当我们的单元域构成非均匀剖分时，由于函数空间不再关于中心对称，我们无法利用式（3.4）来减少优化参数的数量。在这种情况下，我们根据具有均匀剖分且次数、 d、 k 和 n_e相同的空间的最优规则，初始化 x_i 和 w_i 。因此，给定具有非均匀剖分的空间 $\mathcal{S}_k^d(\{u_j\}_{j=0}^{n_e})$ （即 $u_j - u_{j-1}$ 不是常数），以及相应的、具有均匀剖分的空间 $\mathcal{S}_k^d(\{\widetilde{u}_j\}_{j=0}^{n_e})$ 及其最优求积公式 $\{\widetilde{x}_i\}_{i=1}^{q}$， $\{\widetilde{w}_i\}_{i=1}^{q}$，我们按如下方式计算每个 $\widetilde{x}_i \in [\widetilde{u}_j, \widetilde{u}_{j+1}]$ 的初始参数值：

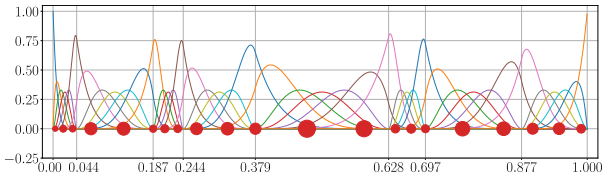
$$x_i = (\widetilde{x}_i - \widetilde{u}_j) \cdot \frac{u_{j+1} - u_j}{\widetilde{u}_{j+1} - \widetilde{u}_j} + u_j, \tag{3.9}$$

$$w_i = \widetilde{w}_i \cdot \frac{u_{j+1} - u_j}{\widetilde{u}_{j+1} - \widetilde{u}_j}. \tag{3.10}$$

基本上，我们计算长度尺度，其定义为 $\frac{u_{j+1}-u_j}{\widetilde{u}_{j+1}-\widetilde{u}_j}$，针对均匀剖分中的每个单元进行计算，然后将该尺度线性应用于属于该单元的最优点和权重。图 4 直观地展示了一个空间的示例，该空间由 8个元素构成随机非均匀划分。



(a) 均匀划分的最优求积点，其中 $d = 6$、$k = 1$、$n_e = 8$。



(b) 随机非均匀剖分的初始参数值，剖分包含 $d = 6$、$k = 1$、$n_e = 8$。

图 4. 基于具有均匀划分的空间上的最优求积公式，为具有相同次数、连续性和单元数量的非均匀划分进行参数初始化。图中以基函数作为参考，圆圈表示求积公式的求积点及其权重。每个圆圈的面积与其权重 w_i 成正比。

3.3. 优化循环

设置初始值后，我们使用 Yogi 优化器 [26] 开始常规的梯度下降搜索。优化器唯一需要调整的参数是学习率。我们发现，这项调整应由问题复杂度驱动，该复杂度由 q表示，因为参数数量越多，损失函数对微小数值变化就越敏感，从而影响搜索空间的平滑性。我们还观察到，仅采用反线性缩放时，搜索有时会因在解附近跳动而停滞，因此我们选择反对数线性缩放，将学习率设为 $\frac{10^{-2}}{q \cdot \log(q)}$。

另一方面，由于在实践中很难通过梯度下降方法得到精确解（这是由浮点运算导致的），因此当 $L(X, W) < 10^{-20}$ 时，我们就认为该求积公式是最优的。若 $L(X, W) < 10^{-25}$，或达到 10,000 次梯度下降迭代（亦称训练轮次）的上限，搜索即会停止。

4. 数值结果

4.1. 实现细节

所提出的方法已使用 Python 编程语言完整实现，并大量依赖 JAX [27] 和 Optax [28] 库。所有实验均在一台笔记本电脑上完成，该电脑配备 Intel(R) Core(TM) i7-1250U CPU、32 GB 随机存取存储器，运行 Linux 内核 v5.19。实验所用的 Python 版本为 3.10。

为支持可复现研究，本文以开源软件的形式提供了复现下文所述实验结果所需的全部源代码。我们还提供了一张表，其中列出了双精度下、适用于最高至 $d = 16$ 且任意 k、均匀划分最多包含 $n_e = 50$ 个单元的空间的最优求积规则。所有这些内容均可从以下地址下载：
https://gitlab.bcamath.org/tteijeiro/spline-integration

4.2. 一般实验

首批实验旨在评估所提方法的通用性，涵盖均匀划分和非均匀划分。为此，我们对样条空间的所有 $k < d \leq 16$ 组合以及具有 $2 \leq n_e \leq 50$的均匀划分，穷举搜索最优求积规则，共计 6664 种情况。所有情况下，我们均成功获得最优性，因此 $L(X, W) < 10^{-20}$。图 5 展示了按单元数量统计的收敛至最优规则所需训练轮次的分布。尽管随着单元数量增加，问题难度明显上升，但该方法展现出的可扩展性相当理想：每条规则所需训练轮次的总体中位数为 522，且 90% 的规则所需训练轮次少于 1700，即可满足 $L(X, W) < 10^{-25}$ 的停止准则。值得注意的是，在 $n_e = 2$ 这一情形下未采用递归参数初始化，所需训练轮次通常更多，这表明所提初始化技术具有优势。

为在非均匀划分上测试该方法，我们随机生成了 3000 个函数空间，其 (d, k) 取值如下：(4, 0)，(5, 0)，(6, 1)，(7, 1)，(8, 2) 和 (9, 2)，且单元数量可变

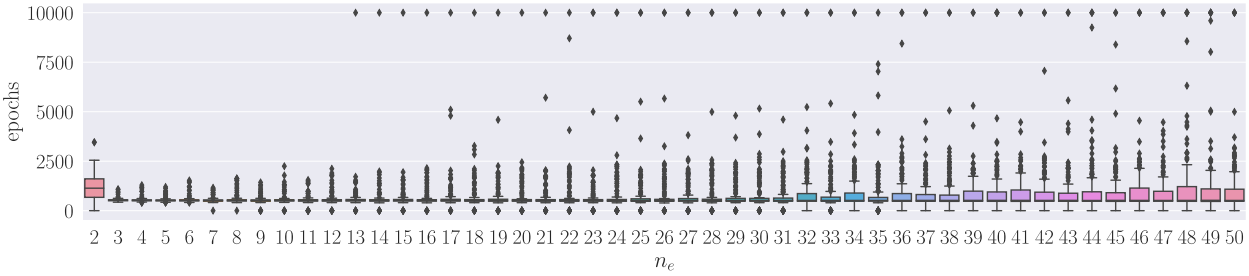
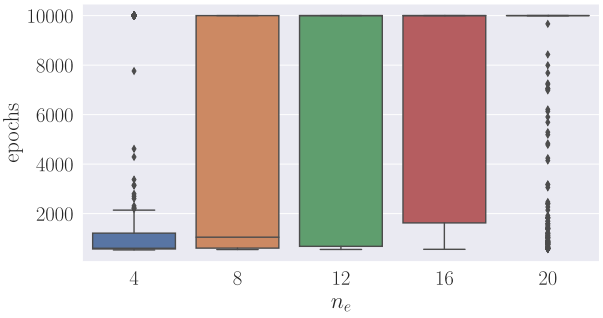
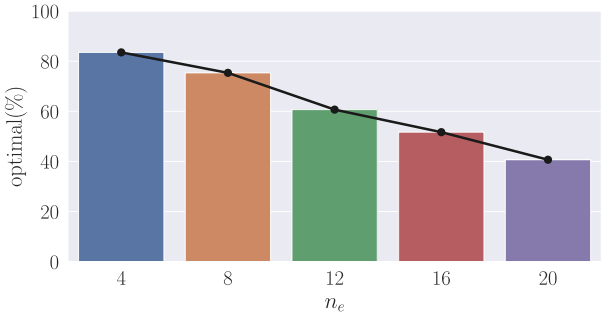


图 5. 不同单元数量下收敛至解所需训练轮次数的分布箱线图。每个箱体覆盖分布的四分位数，须线延伸至四分位距的 1.5 倍。其余数据点均作为离群值单独绘出。每个箱体内的黑色水平线表示中位数。

$n_e = 4$、8、12、16、20。对于 d、k 和 n_e 的每种组合，我们通过在区间 $[0, 1]$ 内从均匀分布中随机抽取 $n_e - 1$ 个值并排序，生成 100 个独立的剖分。然后，对于这 3000 个函数空间中的每一个，我们按照第 3.2.2 节和第 3.3 节所述的方法初始化并优化参数 x_i 和 w_i 。与均匀划分不同，在这种情况下，优化循环并非在所有情况下都能收敛到最优求积公式。图 6 展示了不同单元数量下的结果。图 6a 描绘了训练轮次数的分布，其总体上远高于均匀划分的情况。此外，超过 50% 的空间达到了 10000 轮的上限。图 6b 按单元数量展示了该方法能够找到最优求积规则的剖分比例，即 $L(X、W) < 10^{-20}$。成功率的下降基本呈线性，因此该方法不能被视为普遍适用于 $n_e > 8$。未来的工作将着重于刻画划分节点必须满足的其他约束，以提高收敛性。



(a) 不同单元数量下运行的优化训练轮次数分布箱线图，非等参分析中，不同单元数量对应的优化训练轮次均匀划分。

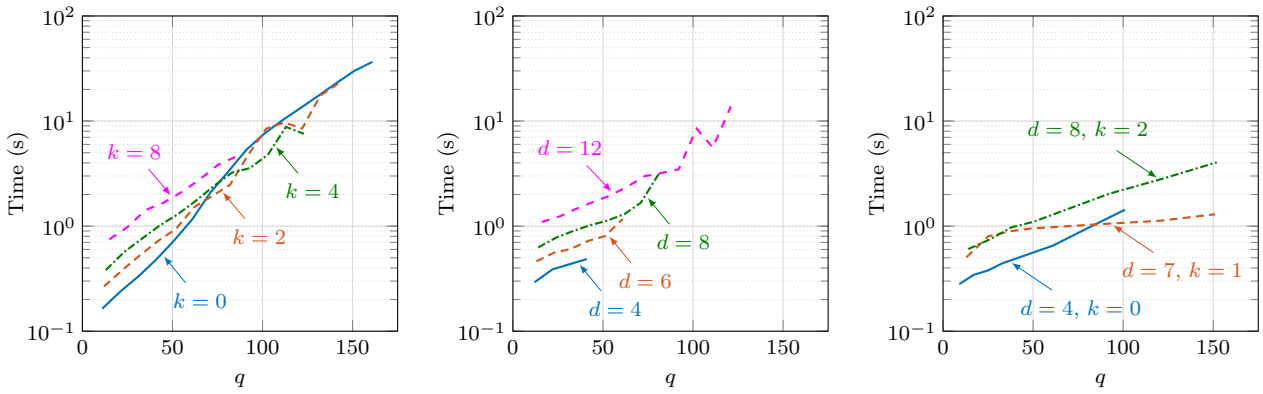


(b) 根据单元数量，找到最优求积公式的非均匀划分所占百分比单元。

图 6. 针对不同单元数的非均匀划分寻找最优规则的结果。

4.3. 计算需求

为了评估我们方法的计算需求，我们考察了寻找求积公式所需的时间与规则复杂度之间的关系。规则复杂度以待优化的求积点数量（q）衡量，且仅考虑均匀划分。不过，q 由样条空间决定，而两个不同的空间可能对应相同的 q。因此，我们将分别评估 c、d和 n_e 的影响，以便更全面地了解该方法在实践中的扩展性。图 7 展示了三幅图，显示了随着 q增大，计算求积公式所需时间的变化。图 7a 中，通过提高空间 d 的最高次数来增加点数 q，同时每条曲线均保持 $n_e = 20$ 的数量和 c不变。另一方面，图 7b 中，通过减小 c来提高 q，每条曲线均保持相同的 $n_e = 20$ 和固定的 d。最后，图 7c 中每条曲线的次数和连续性均保持不变，并将 n_e 从 4 增至 50，以增加 q。所有图表的时间轴均采用对数刻度。



（a）通过增加 d来增加 q 。　（b）通过减少 k来增加 q 。　（c）通过增加 n_e来增加 q 。

图 7。 计算时间的变化 根据.....在均匀划分上计算求积公式所需的参数数量 量 q。由于 q 由 d、 k和 n_e决定，因此我们分别展示这些变量各自的影响。

总体而言，参数数量越多，所需时间增长越快，呈指数级增长。不过，由函数空间复杂度增加（次数更高或连续性更低）导致的增长，远快于由单元数量增加导致的增长。事实上，对于具有 $d = 7$ 和 $c = 1$ 的空间，增长基本呈线性。这是因为在该空间中，第 3.2.1 节中所述的初始化方法已经能够给出最优求积规则，无需进行任何梯度下降迭代。从实践角度来看，我们可以看到，具有 $d = 7$、 $c = 1$ 和 $n_e = 50$ 的实际空间，其求积公式约 1 秒即可计算完成；而具有 $d = 16$、 $c = 0$ 和 $n_e = 20$ 的过于复杂的空间，计算时间最长可达 36 秒。需要重申的是，这些实验是在普通笔记本电脑的中央处理器上进行的，因此，使用性能更强的硬件可以显著缩短计算时间。

4.4. 最优与逐单元高斯求积公式

本文比较采用最优求积规则和经典 EWG 求积公式时数值积分的计算成本。为此，我们考察在等几何分析离散意义下构造质量矩阵和刚度矩阵时，一维、二维和三维参数空间中所需求积点的总数。对于二维和三维空间，当所求偏微分方程的系数沿不同空间方向为常数时，可以先在一维中构造系统矩阵，再通过一维矩阵的张量积得到高维矩阵（例如，参见 [29, 30]）。在这种情况下，高维空间中的数值积分成本与一维空间相同。然而，当系数沿不同方向在区域内变化时——电磁学和地球科学中的问题就可能出现这种情况（例如，参见 [31, 32]）——我们通过对高维基函数积分来构造系统矩阵。因此，所需求积点的数量（即积分成本）会随空间维数呈幂次增长，此时采用所提出的最优求积规则所带来的优势更为显著。表 1 展示了在不同维数的一些相关空间中，以$\mathcal{S}^{2p}_{p-2}(U)$ 中的函数作为被积函数时，按照 备注 2所示可节省的具体计算量。所有测试的 p 和 n_e 取值所对应的改进情况见 图 8。

5. 案例研究

为研究所提出的样条空间最优求积规则的准确性，我们考虑两个案例，即拉普拉斯算子的特征值问题和曲梁的特征频率分析。

表 1。 使用等几何分析离散构造刚度矩阵和质量矩阵时，最优高斯求积规则与逐单元高斯求积规则所需求积点数量的比较。我们报告了一维、二维和三维空间中一些选定多项式次数和单元数量的结果。

维数	次数	单元数量	求积点数量		相对节省量为使用最优规则
	p	n_e	EWG 规则	最优求积规则	
1D	2	20	60	41	31.7%
		50	150	101	32.7%
	4	20	100	62	38.0%
		50	250	152	39.2%
	8	20	180	104	42.2%
		50	450	254	43.6%
2D	2	20	3,600	1,681	53.3%
		50	22,500	10,201	54.7%
	4	20	10,000	3,844	61.6%
		50	62,500	23,104	63.0%
	8	20	32,400	10,816	66.7%
		50	202,500	64,516	68.1%
3D	2	20	216,000	68,921	68.1%
		50	3,375,000	1,030,301	69.5%
	4	20	1,000,000	238,328	76.2%
		50	15,625,000	3,511,808	77.5%
	8	20	5,832,000	1,124,864	80.7%
		50	91,125,000	16,387,064	82.0%

5.1. 拉普拉斯算子的特征值问题

我们考虑一维拉普拉斯算子的特征值问题。给定 Ω：$[0,1] \subset \mathbb{R}$ 作为我们的计算域，其边界为 $\partial\Omega$，我们写出

$$\begin{cases} \text{Find } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ and } u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ such that} \\ \qquad \Delta u + \lambda u = 0\,, \qquad \text{in } \Omega\,, \\ \qquad\qquad u = 0\,, \qquad \text{on } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

考虑 $H^1(\Omega)$ 梯度协调函数空间。我们定义由 $H_0^1(\Omega)$ 中在边界上取零的函数构成的索博列夫空间 $H^1(\Omega)$。取 $v \in H_0^1(\Omega)$ 作为任意检验函数，构建式（5.1）的弱形式如下：求 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 和 $u \in H_0^1(\Omega)$，使得对所有 $v \in H_0^1(\Omega)$，

$$a(v,u) = \lambda b(v,u)\,, \tag{5.2}$$

其中

$$a(v,u) := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega\,, \tag{5.3}$$

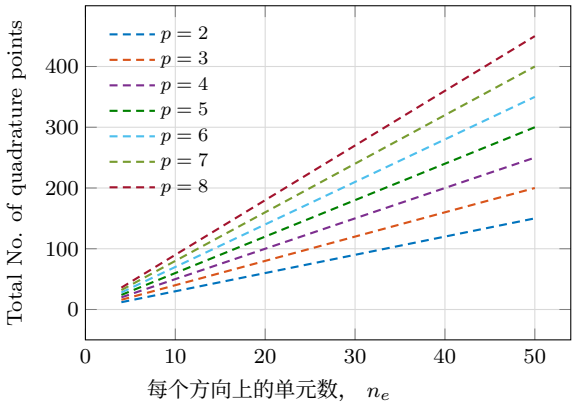
$$b(v,u) := \int_\Omega v u \, d\Omega\,. \tag{5.4}$$

接着，采用由节点序列 $U = \{u_j\}_{j=0}^{n_e}$ 和基函数 $\{v_i\}_{i=0}^{n}$ 张成的等几何分析离散 $\mathcal{S}_c^p(U)$，定义离散空间 $\mathcal{V}^h := \mathcal{S}_c^p(U)$。由此得到离散特征值问题：求 $\lambda^h \in \mathbb{R}^+$ 和 $u^h \in \mathcal{V}^h \subset H_0^1(\Omega)$，使得对于所有 $v^h \in \mathcal{V}^h \subset H_0^1(\Omega)$，

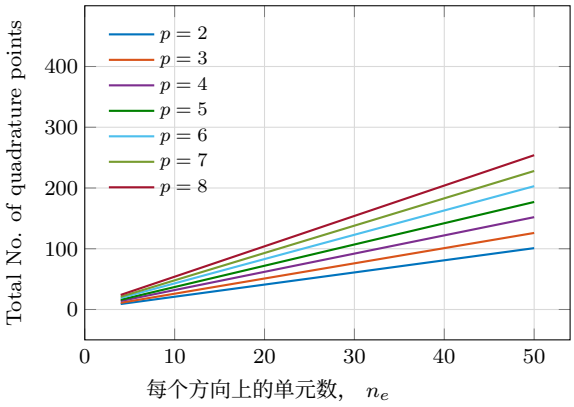
$$a\left(v^h, u^h\right) = \lambda^h b\left(v^h, u^h\right)\,, \tag{5.5}$$

其中 λ^h 和 u^h 表示近似特征对。方程（5.5）导出以下矩阵形式的广义特征值问题：

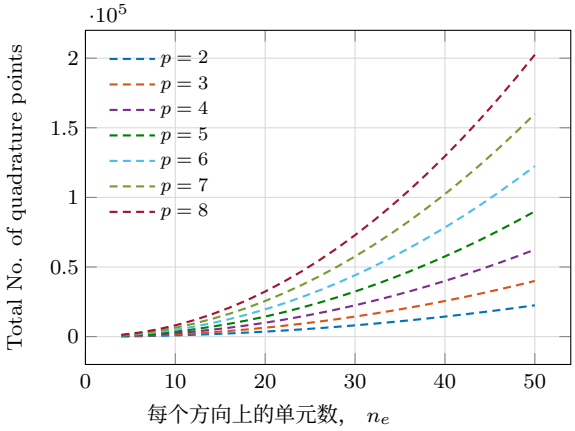
$$K\mathcal{U}^h = \lambda^h M\mathcal{U}^h\,, \tag{5.6}$$



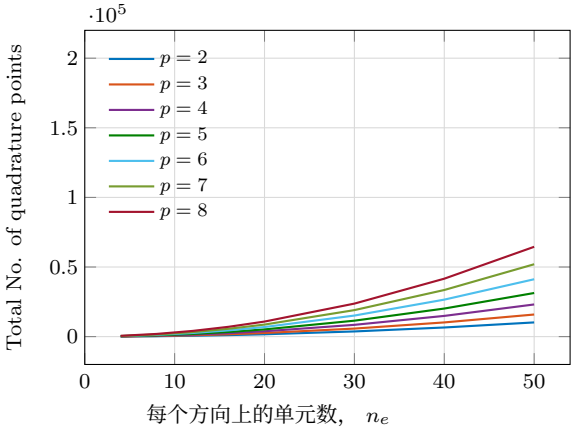
(a) 一维 EWG 规则。



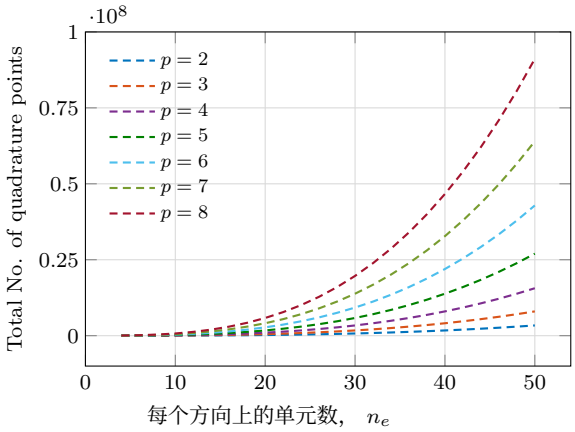
(b) 一维最优求积规则。



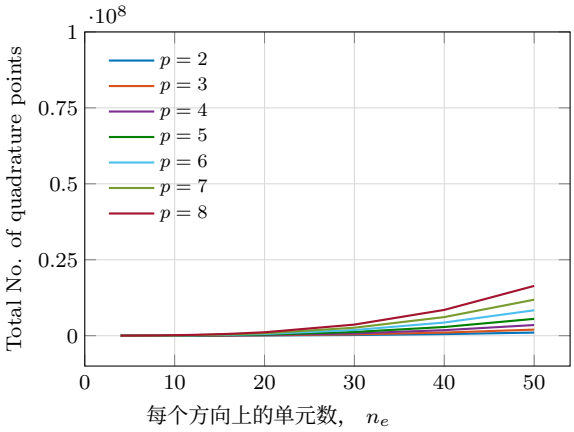
(c) 二维 EWG 规则。



(d) 二维最优求积规则。



(e) 三维 EWG 规则。



(f) 三维最优求积规则。

图 8. 不同维度下最优求积规则与 EWG 求积规则所需求积点总数的比较。

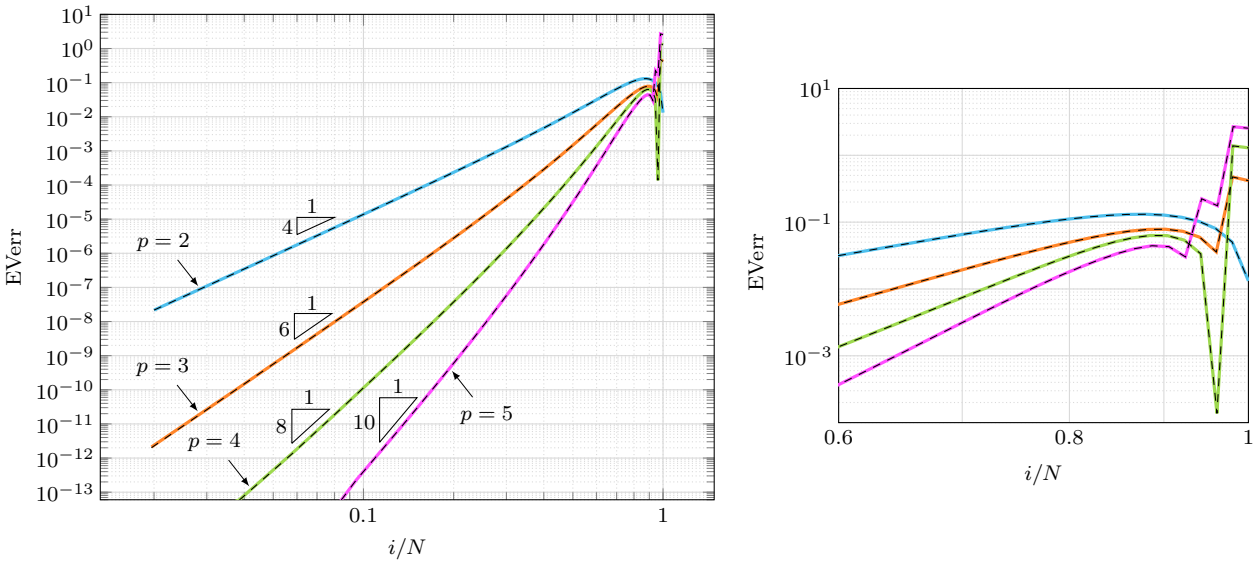
其中 $\mathcal{U}^h$ 表示特征向量。我们分别使用积分（2.4）和（2.5）获得刚度矩阵和质量矩阵， K 以及 M。在下文中，我们在构造系统矩阵时，分别采用所提出的最优求积规则和经典逐单元高斯求积规则，并考察式（5.6）的特征解。对于前者，我们基于样条空间 $\mathcal{S}^{2p}_{p-2}(U)$ 创建求积规则，并将其作为被积函数（参见备注 2）。在所有测试中，我们表明，构造矩阵时，最优求积规则在计算开销更低的同时，具有与经典 EWG 求积公式相同的精确阶数（见 第 4.4 节）。

5.1.1. 均匀区域

我们首先考虑具有 $n_e = 50$ 均匀单元且基函数多项式次数为 $p = 2$，3，4，5 的等几何分析离散。对于每个特征对，我们引入特征值误差

$$\mathrm{EVerr} := \frac{\lambda_i^h - \lambda_i}{\lambda_i}, \tag{5.7}$$

其中 $\lambda_i = i^2\pi^2$， $i = 1, 2, \ldots, N$，是解析特征值， N是自由度总数（在此一维测试算例中等于 $n - 2$）。图 9以对数刻度展示了求解（5.6）时，在具有 $n_e = 50$ 均匀单元的区域中，特征值误差随归一化模态编号 i/N 的变化。结果表明，即使在离群效应会降低近似质量的高频区域，采用最优规则和 EWG 规则得到的谱近似仍然相同。由于该区域由均匀单元构成， $\mathcal{O}(2p)$的理论收敛阶得以保持（参见）。



(a) 完整频谱。

(b) 谱的高频部分。

图9. 采用 $n_e = 50$ 均匀单元对拉普拉斯算子离散化后求解特征值问题时，特征值误差随归一化模态编号 i/N 的变化（对数刻度）。实线表示使用所提出的最优规则时的特征值误差。虚线（与实线完全重合）表示使用经典 EWG 求积公式时的特征值误差。两种方法得到的谱近似完全相同（即使在离群效应会降低近似质量的高频区域也是如此），并且符合理论收敛率。

5.1.2. 细网格均匀区域

在下一个测试中，我们考虑更细的区域（即单元数更多的区域），但不为其构造任何最优规则。在有限元分析和等几何分析中，为了降低近似误差，采用细网格是一种常见做法。在这种情况下，我们从第4.2节所述规则中选取一个最优规则。然后，将区域划分为若干宏单元块，使每个块中的单元数等于该最优规则所对应的单元数。这遵循细化等几何分析（rIGA）的术语 [33]，，其中我们引入零连续性基函数，将区域划分为宏单元。由于每个块中的系统矩阵是分别构造的，因此，对于任意给定的细网格，我们都可以利用最优规则的优势，其中包含$n_e > 50$ 个单元。此外，在网格中使用 C^0 分隔处有助于减少自由度之间的连接，从而降低采用直接求解器进行矩阵分解时的求解成本（更多详情见 [29, 33] ）。图10展示了一个区域中的一组三次基函数示例，该区域包含$n_e = 64$ 个单元，并被划分为四个块，每块含有16个单元。

为评估采用 rIGA 框架对结果的影响，我们考虑一个均匀划分的 128 单元域，并研究拉普拉斯算子特征值问题的特征解精度——

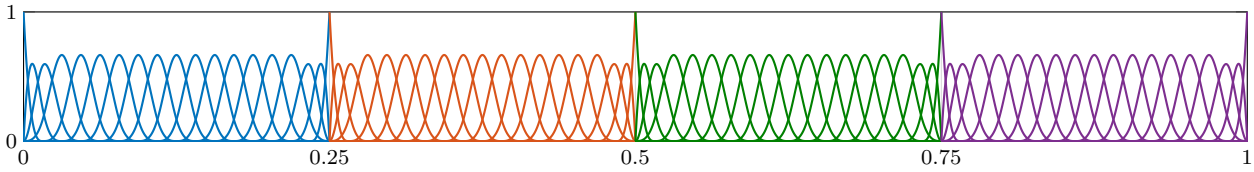
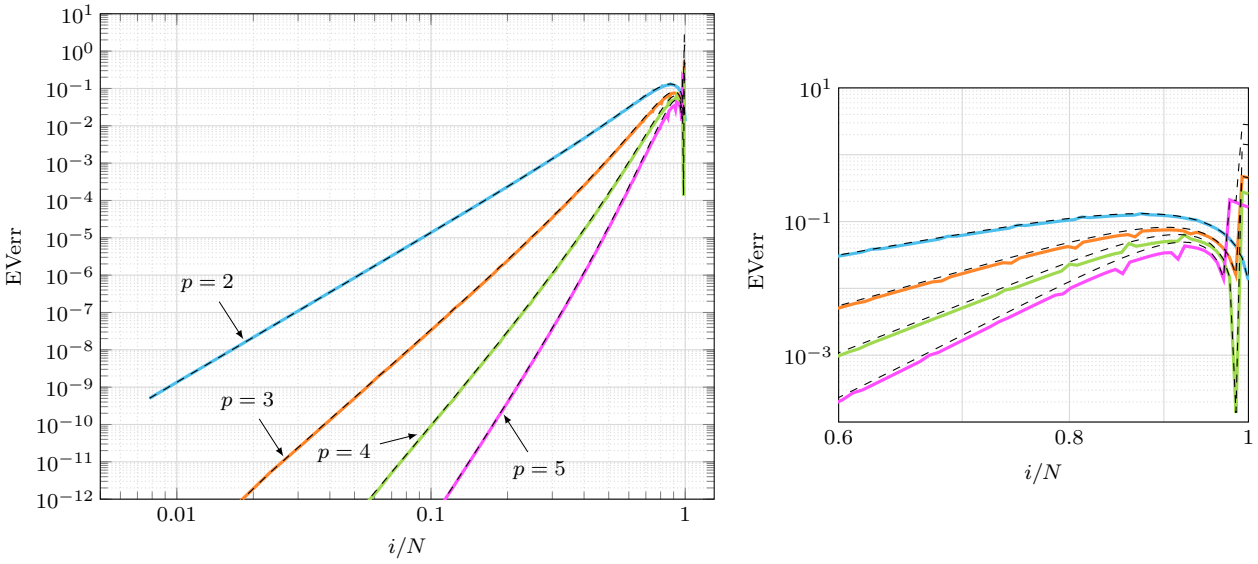


图10。 一个由 $n_e = 64$ 个单元组成、采用三次基函数离散的区域。我们将该区域划分为四个块，每块包含 16 个单元，并按照 rIGA 离散的方式，在每个块中使用为 $\mathcal{S}_1^6(\{u_j\}_{j=0}^{16})$ 生成的最优求积公式。相邻块共享 C^0 分隔基函数。

子。 图11 展示了特征值误差随归一化模态编号的变化 i/N。我们注意到，与 IGA 对应系统相比，rIGA 离散系统具有更多自由度。这是因为分隔处的连续性降低会增大样条空间的维数。因此，为了与采用 EWG 求积规则构造的 IGA 离散系统进行真正的比较，我们采用 $N = N_{\text{IGA}}$ 进行模态编号归一化。本文考虑每块包含 16 个单元，以及多项式次数 $p = 2,\ 3,\ 4,\ 5$。采用最优规则和 EWG 规则时，谱的低频部分的特征解精度相同。然而，在高频区域，将最优规则纳入 IGA 框架后，谱近似略有改善，尤其是在较高次数时。这一改善主要源于 rIGA 对谱近似的影响（更多详情见 [29, 34] ）。



（a）完整频谱。　　（b）谱的高频部分。

图11。 采用 $n_e = 128$ 个均匀单元离散拉普拉斯算子特征值问题所得解的特征值误差与归一化模态编号 i/N 的关系。实线和虚线分别对应最优求积公式和 EWG 规则。使用所提出的最优求积公式进行积分时，我们采用每块包含 16 个单元的 rIGA 框架，并将 $N = N_{\text{IGA}}$ 用于模态编号归一化。在此情形下，高频区域的谱近似略好，尤其是在次数较高时。

5.1.3 非均匀区域

作为最后一项测试，我们考虑特征值问题（5.1）等几何分析离散中的非均匀单元。考虑一个包含 20 个非均匀单元的区域（针对该区域，我们的优化已适当收敛至最优求积规则）。具体而言，我们考虑在以下非等距节点序列上的解：

$$U = [0.000, 0.009, 0.035, 0.056, 0.104, 0.231, 0.282, 0.345, 0.379, 0.512,$$
$$0.558, 0.577, 0.613, 0.649, 0.719, 0.771, 0.914, 0.927, 0.948, 0.981, 1.000]. \tag{5.8}$$

图 12 显示了将 $p = 2$、3、4 作为基函数的多项式次数时的特征值误差。再次表明，使用最优规则或 EWG 规则进行系统构造时，谱近似的精度相同。然而，由于区域的非均匀性，特征值误差曲线明显偏离理论收敛率。

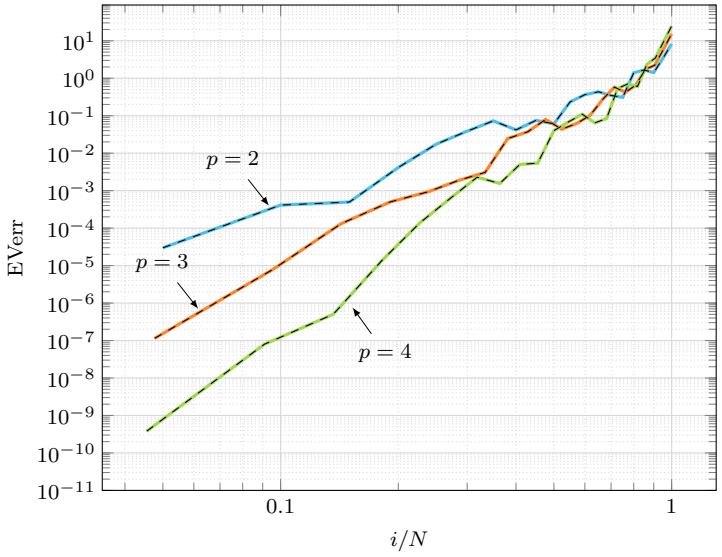


图 12. 采用 $n_e = 20$ 非均匀单元离散拉普拉斯算子后，求解特征值问题时，特征值误差随归一化模态编号的变化。实线和虚线（分别对应最优求积公式和 EWG 规则）完全重合，但由于区域的不均匀性，其收敛率偏离理论收敛率。

5.2. Tschirnhausen 梁的特征频率分析：一种曲线几何

在第二个案例研究中，我们考察所提出的最优求积规则在曲线几何上进行积分时的性能。为此，我们研究具有曲率变化的平面自由曲面几何 Tschirnhausen 梁的特征频率分析。

5.2.1. 几何表示

给定参数域 $\hat{\Omega}$: $[0, 1] \subset \mathbb{R}$我们用 B 样条曲线 C: $\hat{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ 表示梁中线的几何形状，其中 $n + 1$ 控制点 $P_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \ldots, n$。对于任意参数 $x \in \hat{\Omega}$ 以及由式（2.3）给出的 B 样条基函数，有

$$C(x) = \sum_{i=0}^{n} v_i^p(x) P_i \,. \tag{5.9}$$

我们考虑二次基函数（即 $p = 2$），其定义在节点向量 $\Xi = \{0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1\}$上。图 13 展示了 Tschirnhausen 梁的中线及其相应的控制点，这些控制点列于 表 2中。我们采用Tschirnhausen 曲线的代数公式（参见例如 [35, 36]），然后通过曲线拟合过程 [24]生成控制点。

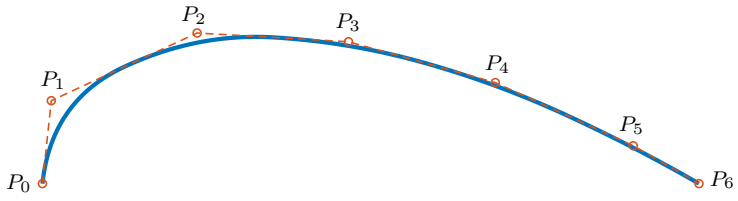


图 13. Tschirnhausen 梁中线（蓝色）的几何表示，其中包含七个控制点（红色圆点）。

表 2. Tschirnhausen 梁的控制点。

控制点	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
x-分量	0.0000	0.0122	0.2121	0.4196	0.6208	0.8099	0.9000
y-分量	0.0000	0.1137	0.2065	0.1945	0.1385	0.0519	0.0000

5.2.2. 特征频率分析

我们采用Timoshenko曲梁公式；但为简洁起见，省略具体细节（完整公式参见例如 [37, 38] ）。在此背景下，梁的每个节点分量具有三个自由度，即中线的切向位移和法向位移，分别为 u和 w，以及横截面的横向转动 φ。我们将计算域 Ω 假设为从直线参数域 $\hat{\Omega}$ 映射到曲线几何的映射。引入 $\mathfrak{u} := \{u, w, \varphi\}$，其中 $\mathfrak{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$为自由度向量，并令 $\mathfrak{v} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ 为我们的测试空间。我们将与曲梁频率分析相关的特征值问题写成如下弱形式：求 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 和$\mathfrak{u} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$，使得对于所有 $\mathfrak{v} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$，

$$\mathcal{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{u}) = \lambda \mathcal{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{u}) \,, \tag{5.10}$$

其中 $\lambda^{1/2}$ 为特征频率。我们定义双线性形式

$$\mathcal{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{u}) := \int_\Omega \varepsilon(\mathfrak{v}) \cdot \sigma(\mathfrak{u}) \, d\Omega \,, \tag{5.11}$$

$$\mathcal{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{u}) := \int_\Omega \mathfrak{v} \cdot \Gamma \mathfrak{u} \, d\Omega \,, \tag{5.12}$$

with

$$\varepsilon(\mathfrak{u}) = \left\{ u' - \kappa w \,,\, w' + \kappa u - \varphi \,,\, \varphi' \right\} , \tag{5.13}$$

$$\sigma(\mathfrak{u}) = \operatorname{diag}\left\{ EA \,,\, k_s GA \,,\, EI \right\} \varepsilon(\mathfrak{u}) \,, \tag{5.14}$$

$$\Gamma = \operatorname{diag}\left\{ \rho A \,,\, \rho A \,,\, \rho I \right\} , \tag{5.15}$$

其中，κ 为中线的曲率，ρ 为材料密度，E 和 G 分别为梁材料的弹性模量和剪切模量，A 为横截面面积，I 为横截面的截面二次惯性矩，k_s 为剪切修正系数。

在 IGA框架中，通常使用定义几何体的同一组基函数来离散解场 u、w和 φ。引入$\hat{\mathbb{V}}^h := \left(\mathcal{S}_c^p(U)\right)^3$作为参数域中的离散空间。我们将物理域中的离散空间定义为

$$\mathbb{V}^h := \left\{ \mathfrak{v}^h \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \colon \iota(\mathfrak{v}^h) \in \hat{\mathbb{V}}^h \right\} , \tag{5.16}$$

其中，$\iota(\cdot)$是到参数空间的拉回映射（例如，参见 [31]）。因此，我们将特征值问题（5.10）的离散形式写为如下形式：求 $\lambda^h \in \mathbb{R}^+$ 和$\mathfrak{u}^h \in \mathbb{V}^h$，使得对所有$\mathfrak{v}^h \in \mathbb{V}^h$，

$$\mathcal{A}(\mathfrak{v}^h, \mathfrak{u}^h) = \lambda^h \mathcal{B}(\mathfrak{v}^h, \mathfrak{u}^h) \,, \tag{5.17}$$

从而得到与式（5.6）相同的矩阵形式，而自由度总数 N 增加至 $3(n-2)$。在构造由双线性形式（5.11）和（5.12）给出的刚度矩阵和质量矩阵时，我们在曲区域 Ω 上进行积分，并注意到式（5.13）中的导数也以曲线坐标系表示。令

$$J := \left\| \frac{dC(x)}{dx} \right\| \tag{5.18}$$

ˆ 为雅可比行列式，它是几何体导数的欧几里得范数，我们记作 $d\Omega = J\,d\hat{\Omega}$ 和 $(\cdot)' = \frac{1}{J}\frac{d}{d\hat{x}}(\cdot)$，以便在直线参数域 ˆΩ 中计算导数和积分。在此记号下，我们按如下方式计算几何体的曲率：

$$\kappa := \frac{1}{J}\left\| \frac{dC(x)}{dx} \times \frac{d^2C(x)}{dx^2} \right\|. \tag{5.19}$$

下文将比较构造系统矩阵时采用最优求积规则和 EWG 求积规则所得 Tschirnhausen 曲梁的特征值误差（见 图 14）。我们采用 $n_e = 50$ 均匀单元和多项式次数 $p = 2$、3、4、5 对相应的特征值问题进行离散化。最优求积规则与 EWG 规则所得结果之间的差异，源于曲率的变化以及积分中的几何项（5.11）和（5.12）的纳入。尽管如此，在此情形下，这两种规则都不是精确的，因为它们是依据（2.4）和（2.5）构造的，未将积分中的几何项考虑在内（参见 [8, 第 3 节。2] 以及 [9, 第 2]）。最后需要指出的是，采用典型的等几何分析离散时，该曲梁谱的低频区域表现出较大的频率误差（例如，见 [36, 39]）。

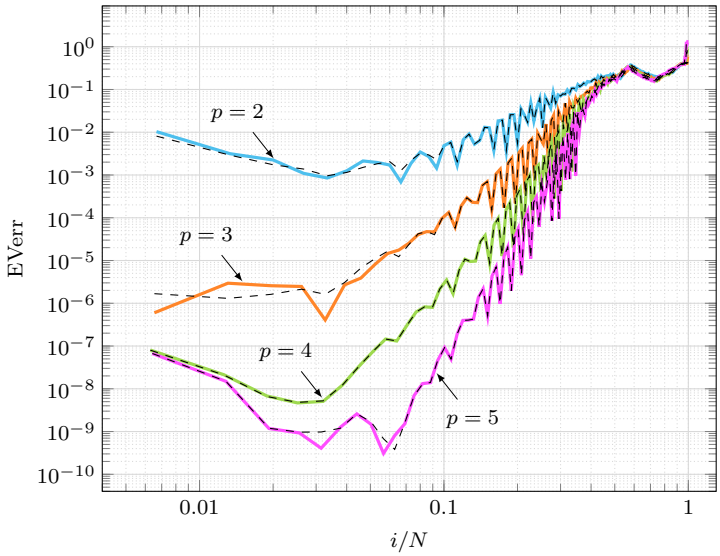


图 14. 采用 $n_e = 50$ 均匀单元和不同多项式次数离散的 Tschirnhausen 梁特征频率误差分析。最优规则与 EWG 规则的结果（分别以实线和虚线表示）之间的差异源于曲率变化。

6. 结论

我们开发并验证了一种用于在B样条空间中寻找最优求积规则的新型机器学习方法。该方法已显示出良好的计算可扩展性，并且对于任意次数和连续性，它在均匀单元上的求积结果普遍收敛于最优求积规则。我们还将该方法用于实际等几何分析问题中的系统矩阵构造，以评估其准确性。具体而言，我们求解了拉普拉斯算子的特征值问题和平面曲梁的特征频率问题。结果表明，该方法与逐单元高斯积分得到的结果相当，但所需积分点最多可减少44%。对于高维基函数上的积分，这种节省更加显著：在二维空间中可达68%，在三维空间中可达82%。最后，尽管我们已证明该方法适用于某些包含非均匀单元的划分，但未来的研究方向之一是提出一种普遍适用于这类情形的策略。

致谢

本研究获得了Euskampus基金会通过Mi-siones Euskampus 2.0计划中的ORLEG-IA项目提供的资助，还获得了“BCAM Severo Ochoa”卓越认证（CEX2021-001142-S / MICIN / AEI / 10.13039/501100011033）、西班牙科学与创新部项目PID2019-108111RB-I00、PDC2021-121093-I00和TED2021-132783B-I00的资助，以及巴斯克政府通过BERC 2022—2025计划和教育部授予的MATHMODE重点研究组（IT1456-22）提供的资助。T. Teijeiro获得了RYC2021-032853-I资助，该资助由MCIN/AEI/10.13039/501100011033和欧盟NextGenerationEU/PRTR提供。

参考文献

[1] T. J. R. Hughes、J. A. Cottrell、Y. Bazilevs，等几何分析：计算机辅助设计、有限元、非均匀有理B样条、精确几何体与网格细化，《计算机方法与应用力学和工程》

194 2005 4135 4195 10.1016/j.cma. ( ) – 。

2004.10.008
doi: 。[2] F. Calabr`o、G. Sangalli、M. Tani，通过加权求积快速构造等几何伽辽金矩阵，《计算机方法与应用力学和工程》316 (2017年) 606–622。doi:10.1016/j.cma.2016.09.013。[3] M. Barto˘n、V. Puzyrev、Q. Deng、V. Calo，通过加权高斯求积公式高效组装B样条的质量矩阵和刚度矩阵，《计算与应用数学杂志》

371 2020 112626 10.1016/j.cam.2019. ( ) 。doi: 。

112626
[4] M. Barto˘n、V. M. Calo，通过同伦延拓计算样条的高斯求积：适用于 C^2 三次样条的求积公式，《计算与应用数学杂志》296 (2016年) 709–723。doi:10.1016/j.cam.2015.09.036。[5] M. Barto˘n、V. M. Calo，奇数次样条空间的最优求积公式及其在张量积等几何分析中的应用，《计算机方法与应用力学和工程》

305 2016 217 240 10.1016/ ( ) – 。

j.cma.2016.02.034
doi: 。[6] M. Barto˘n、V. M. Calo，适用于二次和三次样条空间的高斯–伽辽金求积公式及其在等几何分析中的应用，《计算机辅助设计》82 (2017年) 57–67。doi:10.1016/j.cad.2016.07.003。[7] A. J. Sommese、C. W. Wampler，《工程与科学中多项式方程组的数值解》，世界科学出版社，新加坡，2005年。[8] T. J. R. Hughes、A. Reali、G. Sangalli，适用于基于NURBS的等几何分析的高效求积，《计算机方法与应用力学和工程》199 (2010) 301–313。doi:10.1016/j.cma.2008.12.004。[9] F. Auricchio、F. Calabr`o、T. J. R. Hughes、A. Reali、G. Sangalli，一种为基于NURBS的等几何分析获得近乎最优求积公式的简单算法，《计算机方法与应用力学和工程》249-252 (2012) 15–27。doi:10.1016/j.cma.2012.04.014。[10] D. Schillinger、S. J. Hossain、T. J. R. Hughes，适用于等几何分析中二次和三次样条的约化贝´zier单元求积公式，《计算机方法与应用力学和工程》

277 2014 1 45 10.1016/j.cma. ( ) – 。

2014.04.008
doi: 。[11] R. R. Hiemstra、F. Calabr`o、D. Schillinger、T. J. R. Hughes，适用于等几何分析中张量积样条和层次细化样条的最优与约化求积公式，《计算机方法与应用力学和工程》316 (2017年) 966–1004。doi:10.1016/j.cma.2016.10.049。[12] P. J. Barendrecht、M. Barto˘n、J. Kosinka，适用于等几何分析中细分曲面的高效求积公式，《计算机方法与应用力学和工程》340 (2018年) 1–23。doi:10.1016/j.cma.2018.05.017。[13] Z. Zou、T. J. R. Hughes、M. A. Scott、R. A. Sauer、E. J. Savitha，等几何壳体分析的伽辽金形式：利用格雷维尔求积和高阶单元缓解锁定，《计算机方法与应用力学和工程》380 (2021年) 113757。doi:10.1016/j.cma.2021.113757。[14] C. Giannelli、T. Kandu˘c、M. Martinelli、G. Sangalli、M. Tani，层次B样条的加权求积，《计算机方法与应用力学和工程》400 (2022年) 115465。doi:10.1016/j.cma.2022.115465。[15] 蒙特卡罗积分 I，载于：《基于物理的渲染》，爱思唯尔，

2004, 631 660 10.1016/B978-012553180-1/ 页码 – 。

50016-8
doi: 。[16] M. Kanagawa、B. K. Sriperumbudur、K. Fukumizu，模型设定不当情形下基于核的求积公式的收敛保证，载于：D. Lee、M. Sugiyama、U. Luxburg、I. Guyon、R. Garnett（编），《神经信息处理系统进展》第29卷，Curran Associates, Inc.，2016年。doi:10.5555/3157382.3157466。[17] M. Munkhoeva、Y. Kapushev、E. Burnaev、I. Oseledets，用于核近似的基于求积的特征，载于：S. Bengio、H. Wallach、H. Larochelle、K. Grauman、N. Cesa-Bianchi、R. Garnett（编），《神经信息处理系统进展》第31卷，Curran Associates, Inc.，2018年。doi:10.5555/3327546.3327589。[18] A. O’Hagan，贝叶斯–埃尔米特求积，《统计规划与推断杂志》

29 1991 245 260 10.1016/ ( ) – 。doi: 。

0378-3758(91)90002-V
[19] T. Karvonen、S. Sarkka，通过高斯过程构造经典求积公式，载于：2017年IEEE第27届信号处理机器学习国际研讨会（MLSP），电气电子工程师学会，东京，2017年，页码1–6。doi:10.1109/MLSP.2017.8168195。[20] M. Kanagawa、P. Hennig，自适应贝叶斯求积方法的收敛保证，载于：H. Wallach、H. Larochelle、A. Beygelzimer、F. d'Alch´e-Buc、E. Fox、R. Garnett（编），《神经信息处理系统进展》第32卷，Curran Associates, Inc.，2019年。doi:10.5555/3454287.3454847。[21] J. A. Rivera、J. M. Taylor、 ´A. J. Omella、D. Pardo，利用神经网络求解偏微分方程的求积公式，《计算机方法与应用力学和工程》

393 2022 114710 10.1016/j.cma.2022. ( ) 。doi: 。

114710
[22] M. V. Narkhede、P. P. Bartakke、M. S. Sutaone，神经网络权重初始化策略综述，《人工智能评论》55 (2022年) 291–322。doi:10.1007/s10462-021-10033-z。[23] R. Bellman，动态规划，《科学》153 (1966) 34–37。doi:10.1126/science.153.3731.34。

[24] L. Piegl、W. Tiller，《NURBS书》，Springer-Verlag，1996年。[25] A. Hashemian、D. Garcia、D. Pardo、V. M. Calo，二次特征值问题的细化等几何分析，《计算机方法与应用力学和工程》399 (2022年) 115327。doi:10.1016/j.cma.2022.115327。[26] M. Zaheer、S. Reddi、D. Sachan、S. Kale、S. Kumar，非凸优化的自适应方法，载于：S. Bengio、H. Wallach、H. Larochelle、K. Grauman、N. Cesa-Bianchi、R. Garnett（编），《神经信息处理系统进展》第31卷，Curran Associates, Inc.，2018年。[27] J. Bradbury、R. Frostig、P. Hawkins、M. J. Johnson、C. Leary、D. Maclaurin、G. Necula、A. Paszke、J. VanderPlas、S. Wanderman-Milne、Q. Zhang，JAX：用于组合变换的Python + 2018 http: NumPy程序，。网址：。//github.com/google/jax。[28] I. Babuschkin、K. Baumli、A. Bell、S. Bhupatiraju、J. Bruce、P. Buchlovsky、D. Budden、T. Cai、A. Clark、I. Danihelka、A. Dedieu、C. Fantacci、J. Godwin、C. Jones、R. Hemsley、T. Hennigan、M. Hessel、S. Hou、S. Kapturowski、T. Keck、I. Kemaev、M. King、M. Kunesch、L. Martens、H. Merzic、V. Mikulik、T. Norman、G. Papamakarios、J. Quan、R. Ring、F. Ruiz、A. Sanchez、R. Schneider、E. Sezener、S. Spencer、S. Srinivasan、W. Stokowiec、L. Wang、G. Zhou、F. Viola，DeepMind JAX生态系统，2020年。网址： http://github.com/deepmind。[29] A. Hashemian、D. Pardo、V. M. Calo，广义厄米特征值问题的细化等几何分析，《计算机方法与应用力学和工程》381 (2021年) 113823。doi:10.1016/j.cma.2021.113823。[30] V. Puzyrev、Q. Deng、V. Calo，等几何分析的色散优化求积公式：修正内积、其色散特性及最优混合方案，《计算机方法与应用力学和工程》320 (2017年) 421–443。doi:10.1016/j.cma.2017.03.029。[31] D. Garcia、D. Pardo、V. M. Calo，流体力学和电磁学中的细化等几何分析，《计算机方法与应用力学和工程》356 (2019年) 598–628。doi:10.1016/j.cma.2019.06.011。[32] A. Hashemian、D. Garcia、J. A. Rivera、D. Pardo，利用细化等几何分析生成海量2.5维井孔电磁测量数据集，《计算机与地球科学》 155 2021 104808 10.1016/j.cageo.2021. ( ) 。doi: 。104808。[33] D. Garcia、D. Pardo、L. Dalcin、M. Paszy´nski、N. Collier、V. M. Calo，连续性的价值：细化等几何分析与快速直接求解器，《计算机方法与应用力学和工程》 316 2017 586 605 10. ( ) – 。doi: 。1016/j.cma.2016.08.017。[34] V. Puzyrev、Q. Deng、V. Calo，具有可变连续性的等几何分析的谱近似性质，《计算机方法与应用力学和工程》334 (2018年) 22–39。doi:10.1016/j.cma.2018.01.042。[35] R. T. Farouki，《毕达哥拉斯－霍多格拉夫曲线：代数与几何不可分》，Springer Berlin Heidelberg，2008年。[36] S. F. Hosseini、A. Hashemian、A. Reali，曲线重新参数化在自由形状曲梁等几何振动分析中的应用，《计算机与结构》209 (2018) 117–129。doi:10.1016/j.compstruc.2018.08.009。[37] A.-T. Luu、N.-I. Kim、J. Lee，自由形状铁木辛柯曲梁的等几何振动分析，《力学》50 (2014年) 169–187。doi:10.1007/s11012-014-0062-3。[38] S. F. Hosseini、A. Hashemian、B. Moetakef-Imani、S. Hadidimoud，包含大变形非线性效应的自由形状铁木辛柯曲梁等几何分析，《力学学报》 34 2018 728 743 10.1007/ ( ) – 。s10409-018-0753-4。doi: 。[39] S. F. Hosseini、A. Hashemian、A. Reali，关于用于几何体构造和等几何空间曲梁精确模拟的节点布置技术研究，《计算机方法与应用力学和工程》360 (2020年) 112705。doi:10.1016/j.cma.2019.112705。