arXiv:2304.01803v1 [math.MG] 4 Apr 2023

具有倍增测度的度量空间中环域的尖锐 Besov 容量估计

安德斯·比¨约恩*Department of Mathematics, Linköping University,*

SE-581 83 Linköping, Swedenanders.bjorn@liu.se, ORCID: 0000-0002-9677-8321

雅娜·比¨约恩*Department of Mathematics, Linköping University,*

SE-581 83 Linköping, Swedenjana.bjorn@liu.se, ORCID: 0000-0002-1238-6751

摘要。我们得到了完备度量空间中环带和单点集的 Besov 容量关于球的测度的精确估计。这些空间仅假设相对于环带中心是一致完美的，并且配备了倍增测度。

Key words and phrases：环带、Besov空间、电容器容量、倍增测度、分数阶 Sobolev 空间、度量空间、范数容量、点态维数、一致完美、Sobolev–Slobodetski˘ı 空间。

Mathematics Subject Classification (2020)：主分类：31C45；次分类：30L99、31C12、31C15、31E05、46E36。

1. 引言

容量与函数空间密切相关，因为函数空间中函数的各种性质，例如拟连续性和勒贝格点，都是通过容量来度量的。容量也反映了其定义所在空间的度量性质和测度论性质。例如，众所周知，$\mathbf{R}^n$ 中球形电容器的 p-容量在 $0 < 2r \le R$ 条件下会以如下方式反映空间的维数，

$$\operatorname{cap}_p(B(x,r),B(x,R)) \simeq \begin{cases} r^{n-p} & \text{if } 1 \le p < n, \\ (\log(R/r))^{1-p} & \text{if } 1 \le p = n, \\ R^{n-p} & \text{if } p > n. \end{cases} \tag{1.1}$$

容量在精细位势理论中也发挥着重要作用，并出现在著名的 Wiener 判据中，该判据刻画了各种方程的边界正则性，例如 $\Delta_p u = 0$ (Maz′ya [29] 和 Kilpel¨ainen–Mal´y [22], 中的 p-容量，如 (1.1) 所示，以及分数阶 p-拉普拉斯方程 $(-\Delta_p)^s u = 0$ (Kim–Lee–Lee [23],使用了来自 [9]的分数阶 Besov 容量。

本文研究配备倍增测度的完备度量空间 $Y = (Y,\ d\ \nu$。与（1.1）类似，我们主要关注（厚）环域的估计，即球 $B(x_0,\ r)$内的容量$B(x_0,\ R)$，其中 $0 < 2r \le R$。

在全文中，我们假设 $1 \le p < \infty$。我们还固定一个点 x_0，并令 $B_r = B(x_0, r)$ 表示半径为 r、中心为 x_0 的开球。

以下是我们的主要结果。

定理 1.1。假设 Y 是一个在 x_0 处一致完美的完备度量空间，并配备了一个倍增测度 ν。令 $p>1$ 和 $0<\theta<1$。那么，对所有 $0<2r\le R\le \frac14 \operatorname{diam} Y$，

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(B_r,B_R)\simeq\left(\int_r^R\left(\frac{\rho^{\theta p}}{\nu(B_\rho)}\right)^{1/(p-1)}\frac{d\rho}{\rho}\right)^{1-p} \tag{1.2}$$

and

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(\{x_0\},B_R)\simeq\left(\int_0^R\left(\frac{\rho^{\theta p}}{\nu(B_\rho)}\right)^{1/(p-1)}\frac{d\rho}{\rho}\right)^{1-p}, \tag{1.3}$$

其中“$\simeq$”中的比较常数与 x_0、 r 和 R 无关。

这里，$\operatorname{cap}_{\theta,\,p}$ 是针对有界集 $E\Subset\Omega$ 定义的 Besov 电容器容量，其定义如下：

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(E,\Omega)=\inf_u\int_Y\int_Y\frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{\theta p}}\frac{d\nu(y)\,d\nu(x)}{\nu(B(x,d(x,y)))}, \tag{1.4}$$

其中，下确界取遍所有满足以下条件的 u： 使 $0\le u\le 1$ 处处成立， $u=1$ 在 E 的某个邻域内成立，且 $\operatorname{supp} u\Subset\Omega$，见定义 3.2。

配备勒贝格测度或加权测度 $w\,dx$ 的欧几里得空间及其子集，甚至配备奇异倍增测度的情形，均是我们结果的特例。我们强调，我们不假设 Y 上的上梯度满足任何庞加莱不等式（如 Gogatishvili–Koskela–Zhou [17，第 4] 节和 Koskela–Yang–Zhou[25] 中所述）。因此，我们的结果适用于许多非连通空间以及可求长曲线很少的空间，包括分形。

为了表述接下来的两个结果，我们需要以下指数集：

$$\begin{aligned}
\underline{Q}_0&=\left\{q>0:\frac{\nu(B_r)}{\nu(B_R)}\lesssim\left(\frac{r}{R}\right)^q\text{ for }0<r<R\le1\right\},\\
\underline{S}_0&=\{s>0:\nu(B_r)\lesssim r^s\text{ for }0<r\le1\},\\
\overline{S}_0&=\{s>0:\nu(B_r)\gtrsim r^s\text{ for }0<r\le1\},\\
\overline{Q}_0&=\left\{q>0:\frac{\nu(B_r)}{\nu(B_R)}\gtrsim\left(\frac{r}{R}\right)^q\text{ for }0<r<R\le1\right\}.
\end{aligned}$$

这些集合由 Bj¨orn–Bj¨orn–Lehrb¨ack[5] 引入，用于刻画测度在 x_0 处的局部行为。例如，对于 $\mathbf{R}^n$ 中的勒贝格测度，

$$\underline{Q}_0=\underline{S}_0=(0,n]\quad\text{and}\quad\overline{S}_0=\overline{Q}_0=[n,\infty).$$

上述定义中的下标 0 表示这些不等式要求对较小的半径成立。容易验证（见 [5，引理 2.4 和 2.5]），指数集也可以等价地用 $0<r\le\Theta R\le R_0$ 对任意固定的 $0<\Theta<1$ 和 $R_0>0$ 来定义，尽管此时“.”和“$\gtrsim$”中的隐含比较常数将依赖于 Θ 和 R_0。

这些集合全都是区间。之所以将它们称为集合，是因为它们可能包含端点，也可能不包含端点。

$$\underline{q}_0=\sup\underline{Q}_0,\quad \underline{s}_0=\sup\underline{S}_0,\quad \overline{s}_0=\inf\overline{S}_0\quad\text{and}\quad\overline{q}_0=\inf\overline{Q}_0. \tag{1.5}$$

注意，如果 ν 是倍增的，则 $\overline{q}_0<\infty$；如果 Y 在 x_0 处也一致完美，则 $\underline{q}_0>0$（见 Heinonen [19，习题 13.1]）。

当 $p>1$ 和 $\theta p<\underline{q}_0$ 或 $\theta p>\overline{q}_0$时，定理 1.1 给出了容量 $\operatorname{cap}_{\theta,p}(B_r,B_R)$ 关于 $\nu(B_r)$ 或 $\nu(B_R)$ 的精确估计。当 $p=1$时，

定理 1.1 无法使用，但我们可以利用 Bj$_{\theta,p}(B_r, B_R)$ 提供的结果，得到关于 cap 的以下类似估计。Bj¨orn–Bj¨orn–Lehrb¨ack [5], 的结果涵盖所有$p \geq 1$。临界情形 $\theta p = \max \underline{Q}_0$ 和 $\theta p = \min \overline{Q}_0$ 将在定理 9.1中讨论。另请参阅备注 9.2 和 9.3。

定理 1.2. 假设 Y 是一个在 x_0 处一致完美的完备度量空间，并配备了一个倍增测度 ν。设 $0 < \theta < 1$ 和 $0 < R_0 \leq \frac{1}{4} \operatorname{diam} Y$，其中 R_0 有限。

(a) 若 $\theta p < \underline{q}_0$，则

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(B_r, B_R) \simeq \frac{\nu(B_r)}{r^{\theta p}} \quad \textit{whenever } 0 < 2r \leq R \leq R_0. \tag{1.6}$$

(b) 如果 $\theta p > \overline{q}_0$，那么

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(B_r, B_R) \simeq \frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}} \quad \textit{whenever } 0 < 2r \leq R \leq R_0. \tag{1.7}$$

在这两种情况下，“$\simeq$”中的比较常数取决于 R_0。

此外，(1.6) 中的下界 $p \in \underline{Q}_0$蕴含(1.7) 中的下界 $p \in \overline{Q}_0$。如果 $p > 1$，那么(1.7) 成立当且仅当 $\theta p > \overline{q}_0$。

在 Ahlfors 正则空间中，估计式 (1.6) 和 (1.7) 由 Lehrb¨ack–Shan-mugalingam [27], 给出，并用于证明这类空间之间保持Besov范数的同胚是拟对称的。

在许多情况下，单点集的容量为零还是为正很重要。在下述结果中，我们用指数集 $\overline{S}_0$ and $\underline{S}_0$ 刻画这些情形。

定理 1.3。假设 Y 是一个完备度量空间，在 x_0 处一致完美，并配备了倍增测度 ν。设 $0 < \theta < 1$。

(a) 若 $\theta p > \overline{s}_0$，则

$$C_{\theta,p}(\{x_0\}) > 0 \quad \textit{and} \quad \operatorname{cap}_{\theta,p}(\{x_0\}, B_R) > 0 \textit{ for every } 0 < R < \tfrac{1}{2} \operatorname{diam} Y,$$

其中，容量 $C_{\theta,\,p}$ 按照定义 3.2 中的方法，通过 Besov 范数定义3.2。

(b) 若 $\theta p \notin \overline{S}_0$ （特别是若 $\theta p < \overline{s}_0$），或者若 $p > 1$ 且 $\theta p \in \underline{S}_0$，则

$$C_{\theta,p}(\{x_0\}) = 0 \quad \textit{and} \quad \operatorname{cap}_{\theta,p}(\{x_0\}, B_R) = 0 \textit{ for every } R > 0.$$

在 Anttila [1], 中，数值 $\overline{s}_0$ 和 $\underline{s}_0$ 被称为 μ 在 x_0处的上、下局部维数，而注 9.2 中的 $\overline{q}$ 被称为 μ 在 x_0 处的逐点 Assouad 维数。（关于为何 $\overline{s}_0$ 和 $\underline{s}_0$ 在 [1] 中的定义等价于 (1.5) 中的定义，见 [5, 引理 2.4] 。）在 [6]中，$\overline{s}_0$ 在确定 p-调和 Green 函数及其梯度的尖锐可积性性质方面发挥了决定性作用。

在 $\mathbf{R}^n$上，通过 (1.4) 中的能量积分定义的空间通常称为分数阶 Sobolev 空间，并且是足够良好的区域上 Sobolev空间的迹（Jonsson–Wallin [20]）。因此，它们适合作为各种 Dirichlet 问题的边界值，并出现在椭圆型微分方程的边界正则性结果中（Kristensen–Mingione [26]）。

它们在非局部问题中也发挥着重要作用，例如分数阶p-拉普拉斯方程（$-\Delta_p$）$^s u = 0$。在过去二十年中，这类问题受到了广泛关注，例如 Kim–Lee–Lee [23], Korvenp¨a¨a–Kuusi–Lindgren [24]以及 Lindgren–Lindqvist[28], 等人的研究。

近期，Capogna–Kline–Korte–Shanmugalingam–Snipes [12],Eriksson-Bique–Giovannardi–Korte–Shanmugalingam–Speight [15], Gogatishvili–Koskela–Shanmugalingam [16], Gogatishvili–Koskela–Zhou [17] 以及 Koskela–Yang–Zhou [25]等研究了度量测度空间中的类似问题及相关的 Besov 空间。在度量空间背景下，Bourdon–Pajot [11], Bj¨orn–Bj¨orn–Gill–Shanmugalingam [4] 以及 Bj¨orn–Bj¨orn–Shanmugalingam [8], 研究了 Besov 空间作为Sobolev型空间迹的作用，这也将是我们的主要工具之一。

我们对上述估计的处理方法基于将 Besov 函数从 Y 延拓到 Y的双曲填充，并结合 Bj¨orn–Bj¨orn–Lehrb¨ack [5], [6] 关于与 Sobolev 空间相关的 p- 容量的估计。更确切地说，我们利用了 Y 上函数的 Besov半范数与其延拓到 Y的一致化双曲填充后的Dirichlet能量之间的比较，这一结果见 [8]。这些构造和比较在第 5节中完成。

然而，由于 [8] 中的结果仅适用于有界空间，因此对于无界 Y必须格外谨慎。第 7 节通过用适当选取的有界子集替换 Y 来处理这一问题，使得 ν 的限制仍然是倍增的。即使 Y 是有界的，它也仅与 Y的一致化双曲填充的边界双Lipschitz等价，这反过来会对我们估计中允许的半径 r 和 R 施加严格限制。因此，在第 6 节中，我们展示了如何用精心构造的扩展空间替换 Y，从而使所涉及的容量具有可比性，并且所有半径 $\le \frac{1}{4}\operatorname{diam} Y$ 均可处理。

在此过程中，我们在第3 节和第4节证明了度量空间中 Besov容量的多种基本性质，涵盖倍增测度和非倍增测度，并且在某些情况下还包括 $\theta \ge 1$。最后，我们在第8 节和第9节证明了定理1.1–1.3。

如上所述，我们利用双曲填充得到主要结果。若能找到更直接的证明，将会很有意思。另一方面，我们的方法表明，这些结果与 [5] 和 [6]中的Sobolev空间相应结果之间存在直接对应关系。

致谢。A. B. 和 J. B. 得到了瑞典研究理事会的资助，资助编号分别为 2020-04011 和 2018-04106。作者于2022年秋季参加非线性偏微分方程的几何方面项目期间访问Mittag-Leffler研究所，本研究的部分工作即在此期间完成。感谢该研究所的热情接待与支持。

2. 预备知识

本节中，我们假设 $X = (X, d)$ 是一个配备了 Borel 测度 μ 的度量空间，并且对每个球 $B \subset X$ 都有 $0 < \mu(B) < \infty$ 。为避免病态情形，我们还假设本文所讨论的所有度量空间至少包含两个点。

按照惯例，我们将 μ以及其他测度扩展为定义在所有集合上的外测度。这至少在命题 3.3(ii) 中会用到。

如果一个度量空间中的所有闭有界集都是紧集，则称该空间为适当空间。我们用以下记号表示 X 中的球:

$$B(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\} \quad \text{and let } \lambda B(x,r) = B(x,\lambda r).$$

本文中的所有球都是开集。在度量空间中，中心和/或半径不同的球可能表示同一个集合。不过，我们约定每个球都有预先指定的中心和半径。

当空间 X 在 x 处一致完美时，存在一个常数 $\kappa > 1$，使得

$$B(x,\kappa r) \setminus B(x,r) \ne \varnothing \quad \text{whenever } B(x,\kappa r) \ne X. \tag{2.1}$$

事实上，由此可知，只要 $B(x,r) \neq X$， $B(x,\kappa r) = X$，则 $B(x,\kappa r) \setminus B(x,r) = X \setminus B(x, r) \neq \varnothing$ 成立。

如果空间 X 在每个 x 处都以相同的常数 κ具有一致完美性，则称其具有一致完美性。这个定义与 Heinonen [19, 第 11 节中的定义一致。1], 关于这一假设的历史，可参见其中的讨论。我们不知道以前是否有人使用过逐点一致完美性。注意，如果 X 是连通的，那么 X 对任意 $\kappa > 1$ 都具有一致完美性。

如果存在一个倍增常数 $C_\mu > 1$ 使得测度 μ 满足

$$0 < \mu(2B) \leq C_\mu \mu(B) < \infty \quad \text{for all balls } B.$$

类似地，如果存在常数 C、$\hat{\kappa} > 1$ 使得测度 μ 在 x处满足反倍增条件，则称其在 x处是反倍增的。

$$\mu(B(x, \hat{\kappa} r)) \geq C\mu(B(x,r)) \quad \text{for all } 0 < r < \operatorname{diam} X/2\hat{\kappa}. \tag{2.2}$$

根据测度的连续性，估计 (2.2) 在 $r = \operatorname{diam} X/2\hat{\kappa} < \infty$ 时也成立，正如 Bj¨orn–Bj¨orn–Lehrb¨ack [5] 所要求的那样。如果 μ 是倍增的，则不难看出， X 在 x 处一致完美，当且仅当 μ 在 x 处反倍增。（对于必要性，我们可以任选$\hat{\kappa} > \kappa$；对于充分性，可以任选 $\kappa > 2\hat{\kappa}$。）如果 μ 是倍增的且 X 是连通的，则 μ 在任意 x 处都以任意$\hat{\kappa} > 1$反倍增。

全文中，我们记 $a \lesssim b$ ，如果存在一个隐含常数 $C > 0$使得 $a \leq Cb$，类似地 $a \gtrsim b$ 如果 $b \lesssim a$，并且 $a \simeq b$ 如果 $a \lesssim b \lesssim a$。隐含的比较常数可以依赖于标准参数。我们将在每种情况下仔细说明这种依赖关系。关于定理1.1 和 1.2中的依赖关系，请参见备注8.2 和 9.3。

有时，在同时处理多个不同空间时，我们会写作 B^X, d_X, $\overline{Q}_0^X$, $\overline{q}_0^X$ 等，以表示这些概念是相对于度量空间 X 而定义的。

3. Besov 空间与容量

本节假设 $Y = (Y, d)$ 是一个配备了 Borel 测度 ν 的真度量空间，且对每个球 $B \subset Y$，都有 $0 < \nu(B) < \infty$ 。我们还假设 $\theta > 0$，并强调本节允许 $\theta \geq 1$ 。

对于可测的 $u\colon Y \to [-\infty, \infty]$ （其在 ν-几乎处处意义下有限），我们将 Besov 半范数定义为

$$[u]_{\theta,p} = [u]_{\theta,p,Y} = \left(\int_Y \int_Y \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{\theta p}} \frac{d\nu(y)\, d\nu(x)}{\nu(B(x, d(x,y)))} \right)^{1/p}.$$

此处及下文中，当 $y = x$ 时，应将被积函数理解为零。

Besov 空间 $B_p^\theta(Y)$ 由满足以下条件的函数 u 构成：其 Besov 范数

$$\|u\|_{B_p^\theta(Y)}^p := [u]_{\theta,p}^p + \|u\|_{L^p(Y)}^p < \infty. \tag{3.1}$$

该空间是一个巴拿赫空间，参见 Bj¨orn–Bj¨orn–Shanmugalingam[8] 中的注释9.8。（范数（3.1）与 [8], 中的范数等价，但下文的范数容量$C_{\theta,\ p}$ 与 [8] 中的范数容量完全一致。）

我们将注意力限制在具有两个指标的 Besov 空间（即“$q = p$”）上。这类 Besov 空间通常称为分数阶 Sobolev 空间或 Sobolev–Slobodetski˘ı 空间，不过在度量空间文献中，Besov 空间似乎是最常用的名称。

假设 ν 是倍增的，Gogatishvili–Koskela–Shanmugalingam [16, 定理5.2和（5.1）] 给出了使用等价半范数的等价定义。

当 ν 也满足反倍增条件（或等价地，满足一致完美性）时，Gogatishvili–Koskela–Zhou[17, 中的定理 4.1 和命题 4.1], 给出了其他等价定义，例如，此处考虑的 Besov空间 $B_p^\theta(Y)$ 与相应的 Hajlasz–Besov 空间一致。根据 [16, 引理 6.1 和 6.2], 它还与 Yang [31]中已经研究过的分数阶 Hajlasz 空间有关。关于精确定义以及度量空间 $\mathbf{R}^n$ 和 Ahlfors 正则度量空间上的理论早期参考文献，请参阅这些论文。

我们关注两种 Besov 容量：范数容量和电容器容量。

定义 3.1。 $E \subset Y$ 的 Besov 范数容量为

$$C_{\theta,p}(E) = C_{\theta,p}^Y(E) = \inf_u \|u\|_{B_p^\theta(Y)}^p, \tag{3.2}$$

其中，下确界取遍所有满足以下条件的 $u \in B_p^\theta(Y)$： $u = 1$ 在 E 的某个邻域内成立，且 $0 \le u \le 1$ 处处成立。这样的 u 称为 $C_{\theta,\,p}(E)$ 的容许函数。

通过截断可知，也可以等价地将下确界取遍所有满足 $u \ge 1$ 在 E的某个邻域内成立的 u。按照惯例，要求 $u \ge 1$ 或$0 \le u \le 1$ 处处成立，意指存在 u 的一个代表满足这些要求。 $E \Subset \Omega$ 表示 $\overline{E}$ 是 Ω 的紧子集。

定义 3.2。设 $\Omega \subset Y$ 是一个有界开集，且 $E \Subset \Omega$。Besov 电容器容量定义为

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(E,\Omega) = \operatorname{cap}_{\theta,p}^Y(E,\Omega) = \inf_u [u]_{\theta,p}^p,$$

其中，下确界取遍所有满足 $0 \le u \le 1$ 处处成立、 $u = 1$ 在 E 的一个邻域内成立且 $\operatorname{supp} u \Subset \Omega$ 的 u 。这样的 u 称为 $\operatorname{cap}_{\theta,p}(E)$ 的容许函数。

Sobolev空间对应的容量在 [2] 中分别称为 Sobolev 容量和变分容量。电容器容量也常称为“相对容量”。

关于度量空间中的 Besov容量的论文似乎并不多。Nuutinen [30] 和 Heikkinen–Koskela–Tuominen [18] 在假设 ν 具有倍增性的条件下，对使用 Haj lasz–Besov 范数定义的范数容量进行了深入研究。在 [18], 中，他们还考察了相应的 Triebel–Lizorkin 范数容量，后来 Karak[21]对其进行了研究。Bj¨orn–Bj¨orn–Shanmugalingam [8]使用了 Besov 范数容量 $C_{\theta,\,p}$。Bourdon [10] ($p > Q$ 和 $\theta = 1/p$)、Costea [14] ($p > Q$)以及 Lehrb¨ack–Shanmugalingam [27]研究了 Ahlfors Q-正则情形下的 Besov 电容器容量 $\operatorname{cap}_{\theta,\,p}$。

当半范数被等价半范数取代时，我们的主要估计保持不变（隐含常数可能有所变化）。然而，一些基本性质，例如次可加性，不能直接移植，尽管证明往往可以沿用，因此我们在此将其列出。

命题 3.3. 设 $E, E_1, E_2, \ldots \subset Y$。则以下性质成立：
(i) 若 $E_1 \subset E_2$，则 $C_{\theta,\,p}(E_1) \le C_{\theta,\,p}(E_2)$，(ii) $\nu(E) \le C_{\theta,\,p}(E)$，(iii) 若 $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ 是 X 的紧子集，则

$$C_{\theta,p}\left(\bigcap_{i=1}^\infty K_i\right) = \lim_{i\to\infty} C_{\theta,p}(K_i),$$

(iv) $C_{\theta,\,p}$ 是可数次可加的，即如果 $E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ 则

$$C_{\theta,p}(E) \le \sum_{i=1}^\infty C_{\theta,p}(E_i).$$

单调性 (i) 是显然的，而(ii) 直接由定义可得。性质(iii) 源于以下事实：$C_{\theta,\ p}$ 是外容量（根据定义），即

$$C_{\theta,p}(E) = \inf_{\substack{G \supset E \\ G \text{ open}}} C_{\theta,p}(G),$$

关于紧集的初等性质，见 Nuutinen [30, 第 3]。至于 (iv)，Nuutinen [30] 仅得到了拟次可加性，因为他是在一个更一般的情形下进行研究的，在该情形中，可数次可加性并非总是成立。因此我们给出一个证明。

证明 (iv)。我们可以假设右端有限。令 $\varepsilon > 0$。对每个 $i = 1$、2、.....，选取 u_i，使其是 $C_{\theta,\ p}(E_i)$ 的容许函数，并满足

$$[u_i]_{\theta,p}^p + \|u_i\|_{L^p(Y)}^p < C_{\theta,p}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

令 $u = \sup_i u_i$。则 $u = 1$ 位于 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的一个邻域内。此外，对 x、$y \in Y$，

$$|u(x) - u(y)|^p \le \sup_i |u_i(x) - u_i(y)|^p \le \sum_{i=1}^{\infty} |u_i(x) - u_i(y)|^p$$

类似地，$|u(x)|^p = \text{上确界}_i\, |u_i(x)|^p \le \sum_{i=1}^{\infty} |u_i(x)|^p$。因此

$$\begin{aligned} C_{\theta,p}(E) &\le ([u]_{\theta,p}^p + \|u\|_{L^p(Y)}^p) \le \sum_{i=1}^{\infty} ([u_i]_{\theta,p}^p + \|u_i\|_{L^p(Y)}^p) \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \Big(C_{\theta,p}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} C_{\theta,p}(E_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即可完成证明。 □

命题 3.4. 设 $\Omega \subset \Omega' \subset Y$为开且有界集，$E, E_1, E_2, \ldots \Subset \Omega$。则以下性质成立：

（i）若 $E_1 \subset E_2 \subset \Omega$，则容量$_{\theta,\ p}(E_1, \Omega') \le$ 容量$_{\theta,\ p}($ $E_2, \Omega)$；（ii）若 $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ 是 Ω 的紧子集，则

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i, \Omega \Big) = \lim_{i \to \infty} \operatorname{cap}_{\theta,p}(K_i, \Omega),$$

（iii）容量$_{\theta,\ p}$ 是可数次可加的，即若 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 则

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(E) \le \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}_{\theta,p}(E_i, \Omega).$$

再次，（i）是显然的，而（ii）则由紧集的基本性质推出，因为容量$_{\theta,\ p}$ <style id='15}>是外容量（按定义）。（iii）的证明类似于命题3.3（iv）的证明。

在阿尔福斯 Q-正则情形下，若 $p > Q > 1$，这些事实已在 Costea [14] 中陈述，并附有评论指出，其证明与 Costea [13,定理 31]中的证明基本相同。他对 (iii) 的证明使用了自反性。我们的证明大为简短，同时还涵盖 $1 \le p \le Q$ 情形以及非阿尔福斯正则情形。

4. 当 ν 为倍增时的容量估计

在本节中，我们假设 Y 是一个配备了倍增测度 ν 的完备度量空间，并且 $0 < \theta < 1$。

注意到 Y 是适当的，参见 Bj¨orn–Bj¨orn[2, 命题 3。1]本节中的比较常数与 x_0 的选取无关，它们仅取决于θ、 p 以及 C_ν，除非另有说明。

我们的下一个目标是推导以下结果，这一结果将在后文中发挥重要作用。注意，当 $R < \frac{1}{4}\operatorname{diam} Y$时， $B_{2R} \neq Y$。

命题 4.1. 假设 Y 在 x_0 处是一致完美的，常数为 κ。固定$0 < \Theta < 1$。若 $0 < \Theta R \le 2r \le R$ 且 $B_{2R} \neq Y$，则

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(B_r, B_R) \simeq \frac{\nu(B_r)}{r^{\theta p}} \simeq \frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}},$$

比较常数还取决于 κ 和 Θ。

我们将命题的证明分为4.1 两部分。我们先讨论下界，该下界在 $\theta \ge 1$时也成立。

命题 4.2. 假设 Y 在 x_0 上一致完美，常数为 κ，且 $0 < 2r \le R$ 满足 $B_{2R} \neq Y$。那么

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(B_r, B_R) \gtrsim \frac{\nu(B_r)}{R^{\theta p}},$$

比较常数也依赖于 κ。

证明。设 u 是 $\operatorname{cap}_{\theta,\,p}(B_r, B_R)$ 的容许函数。由于 $B_{2R} \neq Y$，由一致完美性可知，存在 $z \in B_{2\kappa R} \setminus B_{2R}$。由于对于所有 $x \in B(z, R)$ 和 $y \in B_r$，有 $B(z, R) \cap B_R = \varnothing$ 和 $d(x, y) \le (2\kappa + 2)R$，因此我们得到，

$$[u]_{\theta,p}^p \ge \int_{B(z,R)} \int_{B_r} \frac{1}{((2\kappa+2)R)^{\theta p}} \frac{d\nu(y)\, d\nu(x)}{\nu(B(x, (2\kappa+2)R))} \gtrsim \frac{\nu(B_r)}{R^{\theta p}}.$$

对所有适用于 $\operatorname{cap}_{\theta,p}(B_r, B_R)$ 的 u 容许的函数取下确界，即得证明。 □

为证明命题4.1 中的上界，我们将使用以下简单引理；在证明引理4.5时也会用到。

引理 4.3。假设 $0 \le \eta \le 1$ 是 Y 上的 M-Lipschitz 函数。如果 $x \in Y$，则

$$I(x) := \int_Y \frac{|\eta(x) - \eta(y)|^p}{d(x, y)^{\theta p}} \frac{d\nu(y)}{\nu(B(x, d(x, y)))} \lesssim M^{\theta p}.$$

证明。令 $B^j = B(x, 2^j/M)$。由于对于 $y \in B^j \setminus B^{j-1}$ 和 $0 < \theta < 1$， $\nu(B(x, d(x, y))) \simeq \nu(B^j)$，我们得到

$$\begin{aligned} I(x) &\simeq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{B^j \setminus B^{j-1}} \frac{|\eta(x) - \eta(y)|^p}{d(x, y)^{\theta p}} \frac{d\nu(y)}{\nu(B^j)} \\ &\lesssim \sum_{j=-\infty}^{0} \int_{B^j \setminus B^{j-1}} \frac{M^p d(x, y)^{(1-\theta)p}\, d\nu(y)}{\nu(B^j)} + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B^j \setminus B^{j-1}} \frac{d(x, y)^{-\theta p}\, d\nu(y)}{\nu(B^j)} \\ &\lesssim \sum_{j=-\infty}^{0} M^{\theta p} 2^{j(1-\theta)p} + \sum_{j=1}^{\infty} M^{\theta p} 2^{-j\theta p} \simeq M^{\theta p}. \end{aligned}$$

□

由此得到以下估计。

命题 4.4。假设 $0 < 2r \le R$。那么

$$\mathrm{cap}_{\theta,p}(B_r, B_R) \lesssim \min\left\{ \frac{\nu(B_r)}{r^{\theta p}}, \frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}} \right\}.$$

证明。设 u 是一个 $3/R$-Lipschitz 函数，且对 $\mathrm{cap}_{\theta,p}(B_{R/2}, B_R)$ 是容许的。x 和 y 中的倍增性质与对称性意味着

$$[u]_{\theta,p}^p \simeq \int_{B_R} \int_Y \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{\theta p}} \frac{d\nu(y)}{\nu(B(x, d(x,y)))}\, d\nu(x).$$

对引理 4.3 中的估计在 $x \in B_R$ 上积分可得

$$\mathrm{cap}_{\theta,p}(B_r, B_R) \le \mathrm{cap}_{\theta,p}(B_{R/2}, B_R) \lesssim \frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}}.$$

将最后一个估计中的 R 替换为 $2r$，可得

$$\mathrm{cap}_{\theta,p}(B_r, B_R) \le \mathrm{cap}_{\theta,p}(B_r, B_{2r}) \lesssim \frac{\nu(B_r)}{r^{\theta p}}.$$ □

命题的证明4.1。这直接由命题4.2 和4.4以及倍增性质得出。

□

引理 4.5. 假设 $\Omega \subset Y$ 是开且有界的，并令 $E \Subset \Omega$。如果 $C_{\theta,p}(E) = 0$，则 $\mathrm{cap}_{\theta,p}(E, \Omega) = 0$。

证明。由于 $E \Subset \Omega$，存在一个 Lipschitz 函数 $0 \le \eta \le 1$，使得 $\eta = 1$ 在 E 的一个邻域内成立，并且 $\eta = 0$ 在 $Y \setminus \Omega$ 的一个邻域内成立。令 M 为 η 的 Lipschitz 常数，并令 $\varepsilon > 0$。由于 $C_{\theta,p}(E) = 0$，存在一个对$C_{\theta,p}(E)$容许的函数 u，满足 $\|u\|^p_{B^\theta_p(Y)} < \varepsilon$。令 $v = u\eta$。那么

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &= |u(x)\eta(x) - u(x)\eta(y) + u(x)\eta(y) - u(y)\eta(y)| \\ &\le u(x)|\eta(x) - \eta(y)| + |u(x) - u(y)|. \end{aligned}$$

因此，根据引理 4.3,

$$\begin{aligned} [v]^p_{\theta,p} &\le 2^p \int_Y u(x)^p \int_Y \frac{|\eta(x)-\eta(y)|^p}{d(x,y)^{\theta p}} \frac{d\nu(y)}{\nu(B(x,d(x,y)))} + 2^p [u]^p_{\theta,p} \\ &\lesssim M^{\theta p} \|u\|^p_{L^p(Y)} + [u]^p_{\theta,p} \le (M^{\theta p} + 1)\|u\|^p_{B^\theta_p(Y)} < (M^{\theta p} + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $v = 1$ 位于 E 的邻域内，且 $v = 0$ 位于 $Y \setminus \Omega$ 的邻域内，我们可知

$$\mathrm{cap}_{\theta,p}(E, \Omega) \le [v]^p_{\theta,p} \lesssim (M^{\theta p} + 1)\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$，证明即告完成。 □

注意，引理 4.5 的逆命题一般不成立；例如，考虑一个紧的 Y，此时 $\mathrm{cap}_{\theta,p}(Y, Y) = 0$（因为 $u \equiv 1$ 是容许的），而 $C_{\theta,p}(Y) \ge \nu(Y) > 0$。尽管如此，我们将证明以下刻画。

命题 4.6. 假设 $\Omega \subset Y$ 是开且有界的，并且满足 $\nu(Y \setminus \Omega) > 0$。设 $E \Subset \Omega$。则 $C_{\theta,p}(E) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{cap}_{\theta,p}(E, \Omega) = 0$。

下面这个简单的观察将作为一种庞加莱 ′型不等式。我们将利用它证明命题4.6 以及下面的引理 4.9 。

引理 4.7。若 $u = 0$ 位于有界可测集 Ω 之外，且 $K \subset Y \setminus \Omega$ 是一个有界可测集，满足 $\nu(K) > 0$，则对于每个 $z \in K$，

$$\int_Y |u|^p \, d\nu \le R^{\theta p} \frac{\nu(B(z,R))}{\nu(K)} [u]^p_{\theta,p},$$

其中

$$R = \operatorname{diam} K + \sup\{d(x,y) : x \in K \ \text{and} \ y \in \Omega\}.$$

证明。由于 $u = 0$ 位于Ω之外，特别是位于 K中，并且对于所有 $x \in K$ 和 $y \in \Omega$， $B(x, d(x,y)) \subset B(z,R)$，我们看到

$$\begin{aligned}\int_Y |u|^p \, d\nu &= \frac{1}{\nu(K)} \int_K \int_\Omega |u(x) - u(y)|^p \, d\nu(y) \, d\nu(x) \\ &\le R^{\theta p} \frac{\nu(B(z,R))}{\nu(K)} \int_K \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{\theta p}} \frac{d\nu(y)}{\nu(B(x,d(x,y)))}.\end{aligned}$$

□

命题 4.6 的证明。一个方向已在引理 4.5 中证明，因此假设 $\operatorname{cap}_{\theta,p}(E,\Omega) = 0$。根据假设，存在一个紧集 $K \subset Y \setminus \Omega$，使得 $\nu(K) > 0$。令 $z \in K$ 和 $\varepsilon > 0$。那么，存在一个对于 $\operatorname{cap}_{\theta,p}(E,\Omega)$ 容许的 u，满足 $[u]^p_{\theta,p} < \varepsilon$。由于 u 对于 $C_{\theta,p}(E)$ 也是容许的，引理 4.7 意味着。

$$C_{\theta,p}(E) \le \left(1 + R^{\theta p} \frac{\nu(B(z,R))}{\nu(K)}\right) \varepsilon,$$

并令 $\varepsilon \to 0$ 得到 $C_{\theta,\,p}(E) = 0$。 □

作为命题的直接推论4.6 并结合单调性，我们得到如下刻画。

推论 4.8。以下条件等价。 :
(a) $C_{\theta,p}(\{x_0\}) = 0$, (b) $\operatorname{cap}_{\theta,p}(\{x_0\}, B_r) = 0$ 对每个 $r > 0$, (c) $\operatorname{cap}_{\theta,p}(\{x_0\}, B_r) = 0$ 对某个 $0 < r < \frac{1}{2} \operatorname{diam} Y$。

如果 $Y = [-1,1]$（具有勒贝格测度）， $x_0 = 0$ 和 $r > 1 = \frac{1}{2}\operatorname{diam} Y$，那么$u \equiv 1$ 对于 $\operatorname{cap}_{\theta,p}(\{x_0\}, B_r)$ 是容许的，因此 $\operatorname{cap}_{\theta,p}(\{x_0\}, B_r) = 0$。另一方面，根据定理 1.3，当 $\theta p > 1$ 时，$C_{\theta,p}(\{x_0\}) > 0$ 。这表明 (c) 中的范围是尖锐的。

当 Ω 是一个球时，以下结果比引理提供了更精确的信息 4.5。

引理 4.9. 假设 $E \subset B_r$。那么

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}(E, B_{2r}) \lesssim (1 + r^{-\theta p}) C_{\theta,p}(E).$$

此外，若 Y 在 x_0 处一致完美，常数为 κ 和 $Y \setminus B_{3\kappa r} \ne \varnothing$，则

$$C_{\theta,p}(E) \lesssim (1 + r^{\theta p}) \operatorname{cap}_{\theta,p}(E, B_{2r}),$$

比较常数还依赖于 κ。

证明。 设 u 是 $C_{\theta,p}(E$的容许函数，并设 $0 \le \eta \le 1$ 是一个 $(2/r)$-Lipschitz 函数，使得 $\eta = 1$ 在 B_r 的某个邻域内成立，且 $\eta = 0$ 在 $Y \setminus B_{2r}$的某个邻域内成立。设 $v = u\eta$。则 v 是 $\operatorname{cap}_{\theta,p}(E, B_{2r}$的容许函数，并且如引理 4.5 的证明中所述，

$$|v(x) - v(y)| \le u(x)|\eta(x) - \eta(y)| + |u(x) - u(y)|.$$

因此，由对称性和引理 4.3,

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{\theta,p}(E,B_{2r}) \le [v]_{\theta,p}^p &\lesssim \int_{B_{2r}}\int_Y \frac{|v(x)-v(y)|^p}{d(x,y)^{\theta p}}\frac{d\nu(y)\,d\nu(x)}{\nu(B(x,d(x,y)))}\\ &\lesssim r^{-\theta p}\int_{B_{2r}}|u|^p\,d\nu + [u]_{\theta,p}^p.\end{aligned}$$

对所有满足 u 且适用于 $C_{\theta,\,p}(E)$ 的函数取下确界，即得该引理陈述中的第一个不等式。

对于第二个不等式，注意到每个满足 u 且适用于 $\operatorname{cap}_{\theta,p}(E,B_{2r})$ 的函数也适用于 $C_{\theta,p}(E)$。接下来，利用 x_0 处的一致完美性可找到 $z\in B_{3\kappa r}\setminus B_{3r}$。引理 4.7 结合 $\Omega = B_{2r}$, $K = B(z,r)$ 和 $R=(3\kappa+3)r$，以及 $\nu(B(z,R)) \lesssim \nu(B(z,r))$，从而推出

$$C_{\theta,p}(E) \le \int_Y |u|^p\,d\nu + [u]_{\theta,p}^p \lesssim (1+r^{\theta p})[u]_{\theta,p}^p.$$

对所有满足 u 且适用于 $\operatorname{cap}_{\theta,\,p}(E,B_{2r})$ 的函数取下确界，即得证明。 □

我们通过比较相对于不同底层空间的容量来结束本节。由于半范数$[u]_{\theta,\,p}$ 是非局部的，因此不能忽略 u 为零的集合。

引理 4.10. 设 $X\subset Y$ 为紧集，$\Omega\subset X$ 为开集且 $E\Subset\Omega$。假设

$$\nu(B(x,r)\cap X)\simeq \nu(B(x,r)) \quad \textit{for all } x\in X \textit{ and } 0<r<2\operatorname{diam} X, \tag{4.1}$$

并且对几乎处处的 $x\in\Omega$,

$$\int_{Y\setminus X} I(x,y)\,d\nu(y) \lesssim \int_{X\setminus\Omega} I(x,y)\,d\nu(y), \tag{4.2}$$

其中

$$I(x,y)=\frac{1}{d(x,y)^{\theta p}\,\nu(B(x,d(x,y)))}.$$

Then

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}^X(E,\Omega)\simeq \operatorname{cap}_{\theta,p}^Y(E,\Omega)$$

其中比较常数还依赖于(4.1)和 (4.2)中的隐含比较常数。

证明. 注意到 u 是相对于 $\operatorname{cap}_{\theta,\,p}^X(E,\Omega)$ 容许的，当且仅当其零延拓到 $Y\setminus X$ 后相对于 $\operatorname{cap}_{\theta,\,p}^Y(E,\Omega)$ 容许。因此，只需证明对于任意相对于 $\operatorname{cap}_{\theta,\,p}^Y(E,\Omega)$ 容许的 u，有 $[u]_{\theta,\,p,\,X}\simeq[u]_{\theta,\,p,\,Y}$。考虑这样一个函数 u。

根据（4.1），$[u]_{\theta,\,p,\,X}\lesssim[u]_{\theta,\,p,\,Y}$。反过来，$x$ 和 y中的倍增性质与对称性，结合（4.1）和（4.2），可推出

$$\begin{aligned}[u]_{\theta,p,Y}^p &\simeq [u]_{\theta,p,X}^p + \int_\Omega u(x)^p\int_{Y\setminus X} I(x,y)\,d\nu(y)\,d\nu(x)\\ &\lesssim [u]_{\theta,p,X}^p + \int_\Omega u(x)^p\int_{X\setminus\Omega} I(x,y)\,d\nu(y)\,d\nu(x) \simeq [u]_{\theta,p,X}^p.\end{aligned}$$

□

5. 双曲填充及其上的容量

在本节中，我们设 Z 为一个紧度量空间，其 $0 < \operatorname{diam} Z < 1$，并配备一个倍增测度 ν。令 $x_0 \in Z$ 为固定值。

在依据 Bj¨orn–Bj¨orn–Lehrb¨ack[5] and [6]的结果，精确估计电容器容量时，双曲填充将是我们的主要工具之一。我们按照 Bj¨orn–Bj¨orn–Shanmugalin-gam [8] 中的双曲填充构造如下：固定两个参数 α、$\tau > 1$，并令 X 为使用这些参数构造的 Z的一个双曲填充。更确切地说，固定 $z_0 \in Z$ 并令 $A_0 = \{z_0\}$。注意 $Z = B^Z(z_0, 1)$。通过使用佐恩引理或豪斯多夫极大原理进行递归构造，对于每个正整数 n，我们都可以选取一个极大的 α^{-n}-分离集 $A_n \subset Z$，使得当 $m \ge n \ge 0$时，$A_n \subset A_m$。若对于任意不同的 z、$z' \in A$，都有 $d_Z(z, z') \ge \alpha^{-n}$，则称集合 $A \subset Z$是 α^{-n}-分离的。于是，球 $B^Z(z, \frac{1}{2}\alpha^{-n})$、$z \in A_n$ 两两不相交。由于 A_n是极大的，球 $B^Z(z, \alpha^{-n})$、$z \in A_n$覆盖 Z。

我们定义“顶点集”

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad \text{where } V_n = \{(z, n) : z \in A_n\}.$$

顶点 $v = (x, n)$ 和 $v' = (y, m)$ 在 Z 的双曲填充 X 中构成一条边（记为 $[v, v']$），当且仅当 $|n - m| \le 1$ 且

$$\begin{aligned} \tau B^Z(x, \alpha^{-n}) \cap \tau B^Z(y, \alpha^{-m}) &\ne \varnothing, \quad \text{if } m = n, \\ B^Z(x, \alpha^{-n}) \cap B^Z(y, \alpha^{-m}) &\ne \varnothing, \quad \text{if } m = n \pm 1. \end{aligned}$$

双曲填充 X，视为边长为单位长度的度量空间，是一个格罗莫夫双曲空间。其以参数 $\varepsilon = \log \alpha$ 进行的一致化 X_ε 由一致化度量给出。

$$d_\varepsilon(x, y) = \inf_\gamma \int_\gamma e^{-\varepsilon d(\cdot, v_0)}\, ds = \inf_\gamma \int_\gamma \alpha^{-d(\cdot, v_0)}\, ds,$$

其中，$d(\cdot, v_0)$ 表示双曲填充中到根 $v_0 = (z_0, 0)$ 的图距离，ds 表示弧长，且下确界取遍 X 中连接 x 与 y 的所有路径。我们令

$$\overline{X}_\varepsilon = X_\varepsilon \cup \partial_\varepsilon X$$

是 X_ε 的完备化，并按 [8, 第 10], 节中的方式赋予其测度 μ_β。

$$\beta = \varepsilon(1 - \theta)p.$$

粗略地说，μ_β 是通过将测度 $\nu(B(x, \alpha^{-n}))$均匀分散到与顶点$(x, n) \in V$相邻的边上得到的。注意，$e^\varepsilon = \alpha$，而且出现在 [8], 各处的 σ在我们的情形中是

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\log \alpha} = 1.$$

根据[8, 命题 4.4], Z 和 $\partial_\varepsilon X$ 是双Lipschitz等价的（因为 $\sigma = 1$），因此我们将它们视为相同的集合。不过，它们的度量不同。更准确地说，根据 [8, 命题 4.4],

$$C_1 d_Z(x, y) \le d_\varepsilon(x, y) \le C_2 d_Z(x, y) \quad \text{for all } x, y \in Z, \tag{5.1}$$

其中 $C_1 = 1/2\tau\alpha$、$C_2 = 4\alpha^{(l+1)}/\varepsilon$ 和 l 是满足 $\alpha^{-l} \le \tau - 1$ 的最小非负整数。

显然， Z 在 x_0 处是一致完美的，当且仅当 $\partial_\varepsilon X$ 在 x_0 处是一致完美的（常数 κ 和 κ_ε 可比）。此外，若 $\Omega \subset Z$ 是开集且 $E \Subset \Omega$，则

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}^{Z}(E,\Omega) \simeq \operatorname{cap}_{\theta,p}^{\partial_\varepsilon X}(E,\Omega). \tag{5.2}$$

然而请注意，由于（5.1），如果 E 和 Ω 是相对于 Z的球，那么它们通常并非相对于 $\partial_\varepsilon X$的球；在估计环域的容量时，需要将这一点考虑在内。

我们将需要 $\overline{X}_\varepsilon$ 上的牛顿（Sobolev）空间及其 Sobolev 容量和凝集容量，现将其引入；更多细节见 [2] 或 [8] 。

某性质对 $\overline{X}_\varepsilon$ 中 p-几乎每条曲线都成立，如果该性质不成立的曲线族 Γ 的 p-模数为零；也就是说，存在 $\rho \in L^p(\overline{X}_\varepsilon)$，使得对每个 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $\int_\gamma \rho\, ds = \infty$ 。可测函数 $g\colon \overline{X}_\varepsilon \to [0,\infty]$ 是 $u\colon X \to [-\infty,\infty]$ 的 p-弱上梯度，如果对 p-几乎所有可求长曲线 $\gamma\colon [0,l_\gamma] \to X$，

$$|u(\gamma(0)) - u(\gamma(l_\gamma))| \le \int_\gamma g\, ds,$$

其中，只要左侧各项中至少有一项为无穷大，左侧即为 ∞ 。如果 u 在 $L^p(\overline{X}_\varepsilon)$ 中有一个 p-弱上梯度，那么它有一个最小 p-弱上梯度 $g_u \in L^p(\overline{X}_\varepsilon)$，其意义是：对于 u 的每个 p-弱上梯度 $g \in L^p(\overline{X}_\varepsilon)$，都有 $g_u \le g$ 几乎处处成立。

对于可测的 $u\colon X \to [-\infty,\infty]$，我们令

$$\|u\|_{N^{1,p}(\overline{X}_\varepsilon)} = \left(\int_{\overline{X}_\varepsilon} |u|^p \, d\mu + \inf_g \int_{\overline{X}_\varepsilon} g^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

其中，下确界取遍 u 的所有 p-弱上梯度。$\overline{X}_\varepsilon$ 上的牛顿空间是

$$N^{1,p}(\overline{X}_\varepsilon) = \{u : \|u\|_{N^{1,p}(\overline{X}_\varepsilon)} < \infty\}.$$

注意， $N^{1,p}$ 中的函数处处逐点定义，而不仅仅是定义到几乎处处相等的等价类。

$E \subset \overline{X}_\varepsilon$ 的 Sobolev 容量是

$$C_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E) = \inf_u \|u\|^p_{N^{1,p}(\overline{X}_\varepsilon)},$$

其中，下确界取遍所有满足在 E 上 $u = 1$ 的 $u \in N^{1,p}(\overline{X}_\varepsilon)$。相对于开集 $\Omega \subset \overline{X}_\varepsilon$ ，$E \subset \Omega$ 的电容器容量为

$$\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E,\Omega) = \inf_u \int_{\overline{X}_\varepsilon} g_u^p \, d\mu,$$

其中，下确界取遍所有满足 $u = 1$ 于 E 上且在 Ω 外满足 $u = 0$的 $u \in N^{1,p}(\overline{X}_\varepsilon)$。对于这两种容量，我们都称这样的 u 为容许的。

根据 [8, 定理 10.3]， μ_β 是倍增的，并且在 $\overline{X}_\varepsilon$上满足 1-Poincar´e 不等式；也就是说，存在 C、$\lambda > 0$，使得对于每个球 $B = B^{\overline{X}_\varepsilon}(x,r)$，以及所有可积函数 u 和 u 在 λB上的 1-弱上梯度 g ，

$$\fint_B |u - u_B| \, d\mu_\beta \le Cr \fint_{\lambda B} g \, d\mu_\beta, \tag{5.3}$$

其中

$$u_B := \fint_B u \, d\mu_\beta = \frac{1}{\nu(B)} \int_B u \, d\mu_\beta.$$

由于 $\overline{X}_\varepsilon$ 是测地空间，1-Poincar´e 不等式中的膨胀常数可以取为 $\lambda = 1$；此外，$\overline{X}_\varepsilon$ 满足一个具有膨胀常数 $\lambda = 1$的 (p,p)-Poincar´e 不等式（即在两边都使用取平均的 L^p-范数的 (5.3)），参见例如 [2, 定理 4.39]。因此，根据 Bj¨orn–Bj¨orn–Shanmugalingam[7, 推论 1.3] 以及 [2, 定理 6.7 (vii) 和 6.19(vii)] 可知，$C_p^{\overline{X}_\varepsilon}$和 $\mathrm{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}$是外容量。

另一个推论是，对于每个 $r \le 2\mathrm{diam}_\varepsilon \overline{X}_\varepsilon$ 和 $x \in Z$,

$$\mu_\beta(B^{\overline{X}_\varepsilon}(x,r)) \simeq r^{\beta/\varepsilon}\nu(B^Z(x,r)) = r^{(1-\theta)p}\nu(B^Z(x,r)). \tag{5.4}$$

由（5.1）和（5.4）可知，指数集对于 Z 和$\partial_\varepsilon X$是相同的，并且对于 $q > 0$,

$$q \in \underline{Q}_0^Z \quad \Longleftrightarrow \quad q + \frac{\beta}{\varepsilon} = q + (1-\theta)p \in \underline{Q}_0^{\overline{X}_\varepsilon},$$

其他指数集也类似。这里我们考虑$x_0 \in Z$附近的指数集。此外，如果 Z 在 x_0处一致完美，那么由倍增性质可知，ν 和 μ_β 的所有指数集均非空，参见[5, (2.3)]。因此

$$\underline{q}_0^Z = \underline{q}_0^{\overline{X}_\varepsilon} - \frac{\beta}{\varepsilon} = \underline{q}_0^{\overline{X}_\varepsilon} - (1-\theta)p, \tag{5.5}$$

对于其他指数也类似。特别是,

$$p < \underline{q}_0^{\overline{X}_\varepsilon} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta p < \underline{q}_0^Z. \tag{5.6}$$

现在，我们已准备好用 $\partial_\varepsilon X$ 上的容量来估计 $\overline{X}_\varepsilon$ 上的容量，目的是稍后将其转换为原空间 Z 上的容量。本节中的比较常数与 x_0 的选择无关，且仅依赖于 θ、p、C_ν、α 和 τ，另有说明的除外。

引理 5.1. 假设 $E \subset B_R^{\partial_\varepsilon X}$。那么

$$\mathrm{cap}_{\theta,p}^{\partial_\varepsilon X}(E, B_{2R}^{\partial_\varepsilon X}) \lesssim \mathrm{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E, B_{2R}^{\overline{X}_\varepsilon}).$$

证明. 由于两个容量都是外容量，我们可以假设 E 在 Z中是开集。设 $u \in_{N^{1,p}}(\overline{X}_\varepsilon)$ 是 $\mathrm{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E, B_{3R/2}^{\overline{X}_\varepsilon})$ 的容许函数。则其限制 $u|_Z$ 是 $\mathrm{cap}_\theta^{\partial_\varepsilon X}{}_{,p}(E, B_{2R}^{\partial_\varepsilon X})$ 的容许函数，并由 [8, 定理 11.3],

$$\mathrm{cap}_{\theta,p}^{\partial_\varepsilon X}(E, B_{2R}^{\partial_\varepsilon X}) \le [u|_Z]_{\theta,p,\partial_\varepsilon X}^p \lesssim \|g_u\|_{L^p(\overline{X}_\varepsilon)}^p.$$

对所有 $\mathrm{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E, B_{3R/2}^{\overline{X}_\varepsilon})$ 的 u 容许函数取下确界可得

$$\mathrm{cap}_{\theta,p}^{\partial_\varepsilon X}(E, B_{2R}^{\partial_\varepsilon X}) \lesssim \mathrm{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E, B_{3R/2}^{\overline{X}_\varepsilon}) \simeq \mathrm{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E, B_{2R}^{\overline{X}_\varepsilon}),$$

其中，最后一个比较由 [2, 引理 11.22] 得出。 □

下面的引理说明函数值如何从 Z 传播到双曲填充中。这一性质对于得到引理 5.1 的反向估计至关重要。

引理 5.2。设 $u \in B_p^\theta(Z)$ 满足 $u = b$ 属于 $B^{\partial_\varepsilon X}(x, Lr)$，其中 $L = 1 + \alpha($ $1 + \varepsilon + C_2\varepsilon)$ 且 C_2 如 (5.1)中所示。设 U 是 u 在 X_ε上的延拓，定义为

$$U((z,n)) := \fint_{B^Z(z,\alpha^{-n})} u\, d\nu, \quad \text{if } (z,n) \in V \subset X, \tag{5.7}$$

关于 d_ε 延拓为分段线性函数（相对于 d_ε），使其适用于 X_ε 中的每条边，然后通过此方式

$$U(x) := \limsup_{r\to 0} \fint_{B_{X_\varepsilon}(x,r)} U\,d\mu_\beta \quad \textit{for } x \in \partial_\varepsilon X. \tag{5.8}$$

那么 $U \equiv b$ 属于 $B^{\overline{X}_\varepsilon}(x,r)$。

证明。设 $y \in B^{\overline{X}_\varepsilon}(x,r)\setminus Z$。那么 y 属于一条边 $[v_1,v_2]$，其中 $v_1=(x_1,n_1)$ 和 $v_2=(x_2,n_2)$ 是双曲填充中的顶点。可以假设 $n_1 \le n_2 \le n_1+1$。那么对于 $j=1$，有 2，因为 $\alpha = e^\varepsilon$，

$$d_\varepsilon(y,v_j) \le \int_0^1 \alpha^{-n_1}\,dt = \alpha^{-n_1} \quad \text{and} \quad d_\varepsilon(v_j,x_j) = \frac{\alpha^{-n_j}}{\varepsilon} \le \frac{\alpha^{-n_1}}{\varepsilon}.$$

由于还有

$$r > d_\varepsilon(y,x) \ge \operatorname{dist}_\varepsilon(y,Z) \ge \int_{n_2}^\infty \alpha^{-t}\,dt \ge \frac{\alpha^{-n_1-1}}{\varepsilon},$$

对于所有 $z \in B^Z(x_j,\ \alpha^{-n_j})$，$j=1$，2，利用（5.1），还可得

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(x,z) &< d_\varepsilon(x,y)+d_\varepsilon(y,v_j)+d_\varepsilon(v_j,x_j)+C_2\alpha^{-n_j} \\ &< r+\alpha^{-n_1}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}+C_2\right) < r+\alpha\varepsilon r\left(1+\frac{1}{\varepsilon}+C_2\right) = Lr, \end{aligned}$$

因此 $u(z) = b$ 由假设成立。由（5.7）可知 $U(x_j) = b$，$j=1$，2，从而也有 $U(y) = b$。对于 $y \in B^{\overline{X}_\varepsilon}(x,\ r)\cap Z$，结论由（5.8）得出。 □

定理 5.3。假设 Z 在 x_0 上一致完美，常数为 κ，并且$E \subset B_R^{\partial_\varepsilon X}$。如果 $B_{3R}^{\partial_\varepsilon X} \ne Z$，则

$$\operatorname{cap}_{\theta,p}^{\partial_\varepsilon X}(E, B_{2R}^{\partial_\varepsilon X}) \simeq \operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E, B_{2R}^{\overline{X}_\varepsilon}), \tag{5.9}$$

其中比较常数还取决于 κ。

证明。“$\lesssim$”不等式由引理 5.1得出，因此只需证明“$\gtrsim$”不等式。由于两个容量都是外容量，我们可以假设 E 在 Z中是开集。令 u为 $\operatorname{cap}_{\theta,p}^{\partial_\varepsilon X}(E, B_{2R}^{\partial_\varepsilon X})$ U 的容许函数，该函数到 X_ε 上的延拓由（5.7）和（5.8）给出。于是由 [8, 定理 12。1] 可知，在 $\partial_\varepsilon X$ 中几乎处处有

$$\int_{\overline{X}_\varepsilon} g_U^p\,d\mu_\beta \lesssim [u]_{\theta,p,\partial_\varepsilon X}^p. \tag{5.10}$$

由于 E 是开集，由此很容易得到（例如由引理 5.2 和（5.8）可得） $U \equiv 1$ 在 E上成立。此外，$0 \le U \le 1$ 在 $\overline{X}_\varepsilon$上成立。

接下来令 $\eta\colon\ \overline{X}_\varepsilon \to [0,1]$ 是一个 $2/R$-Lipschitz 截断函数，其支集 $\operatorname{supp}\eta \Subset B_{2R}^{\overline{X}_\varepsilon}$ 满足 $\eta = 1$ 属于 $B_R^{\overline{X}_\varepsilon}$。那么，根据 [2, 定理 2.15],

$$g_{\eta U} \le \eta g_U + U g_\eta \le g_U + \frac{2U}{R}.$$

由于 ηU 是 $\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E, B_{2R}^{\overline{X}_\varepsilon})$ 的容许函数，我们有

$$\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E, B_{2R}^{\overline{X}_\varepsilon}) \le \int_{B_{2R}^{\overline{X}_\varepsilon}} g_{\eta U}^p\,d\mu_\beta \lesssim \int_{B_{2R}^{\overline{X}_\varepsilon}} g_U^p\,d\mu_\beta + \frac{1}{R^p}\int_{B_{2R}^{\overline{X}_\varepsilon}} U^p\,d\mu_\beta. \tag{5.11}$$

由（5.10）可知，因此只需利用右侧的第一个积分来估计（5.11）中的最后一项。为此，令 $B = B^{\overline{X}_\varepsilon}_{4\kappa_\varepsilon R}$，其中 κ_ε 是 $\partial_\varepsilon X$ 在 x_0处的一致完美性常数。我们将利用

$$\frac{\mu_\beta(B \setminus \operatorname{supp} U)}{\mu_\beta(B)} \ge \Theta > 0,$$

其中，Θ 与 U 和 B 无关，且只取决于 ε、κ_ε 和C_{μ_β}。我们将其验证推迟到证明的末尾，先说明如何由此得出证明结论。由闵可夫斯基不等式可得

$$\left(\fint_B U^p \, d\mu_\beta\right)^{1/p} \le \left(\fint_B |U - U_B|^p \, d\mu_\beta\right)^{1/p} + U_B, \tag{5.12}$$

其中

$$\begin{aligned} U_B &:= \fint_B U \, d\mu_\beta = \fint_{B \setminus \operatorname{supp} U} |U - U_B| \, d\mu_\beta \\ &\le \frac{\mu_\beta(B)}{\mu_\beta(B \setminus \operatorname{supp} U)} \fint_B |U - U_B| \, d\mu_\beta \le \frac{1}{\Theta} \left(\fint_B |U - U_B|^p \, d\mu_\beta\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

将此代入（5.12），并对 p，p）-庞加莱´不等式应用于 μ_β，可得

$$\int_B U^p \, d\mu_\beta \lesssim \fint_B |U - U_B|^p \, d\mu_\beta \lesssim R^p \int_B g_U^p \, d\mu_\beta.$$

结合（5.10）和（5.11），最后这个估计意味着

$$\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(E, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{2R}) \lesssim \int_{B^{\overline{X}_\varepsilon}_{2R}} g_U^p \, d\mu_\beta + \int_B g_U^p \, d\mu_\beta \lesssim [u]^p_{\theta,p,\partial_\varepsilon X}. \tag{5.13}$$

对所有 u 适用于 $\operatorname{cap}_\theta^{\partial_\varepsilon X}{}_{,\,p}(E,\ B^{\partial_\varepsilon X}_{2R})$ 取下确界，可得（$\gtrsim$）中的“5.9”不等式。

还需证明 $\Theta > 0$。由一致完美性以及$B^{\partial_\varepsilon X}_{3R} \ne Z$这一事实，可得某个 $x \in B^{\partial_\varepsilon X}_{3\kappa_\varepsilon R} \setminus B^{\partial_\varepsilon X}_{3R}$。于是 $u = 0$ 在 $B^{\partial_\varepsilon X}(x, R)$ 中，因此由引理 5.2，$U = 0$ 在 $B^{\overline{X}_\varepsilon}(x, R/L)$ 中。由此以及 μ_β的倍增性质可知

$$\frac{\mu_\beta(B \setminus \operatorname{supp} U)}{\mu_\beta(B)} \ge \frac{\mu_\beta(B^{\overline{X}_\varepsilon}(x, R/L))}{\mu_\beta(B)} \ge \Theta > 0,$$

其中 Θ 仅取决于 ε、κ_ε 和 C_{μ_β}。 □

由于我们关注 Z 中环域的 Besov 容量，接下来将其与 $\overline{X}_\varepsilon$ 中环域的容量联系起来。

定理 5.4。假设 Z 在 x_0 处一致完美，常数为 κ。令$0 < 2r \le R$ 和 $L = \alpha(1 + \varepsilon + C_2\varepsilon)$ 如引理 5.2中所示。假设 $B^{\partial_\varepsilon X}_{3R/2} \ne Z$。则

$$\operatorname{cap}^{\partial_\varepsilon X}_{\theta,p}(B^{\partial_\varepsilon X}_r, B^{\partial_\varepsilon X}_R) \gtrsim \operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{r/L}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_R), \tag{5.14}$$

其中比较常数也依赖于 κ。

证明。我们按照定理 5.3 的证明进行，将 $E = B^{\partial_\varepsilon X}_r$和 $2R$ 替换为 R。引理 5.2 表明，在 (5.7) 和 (5.8) 中构造的函数 U 满足$U \equiv 1$ 在 $B^{\overline{X}_\varepsilon}_{r/L}$ 中，因此是 $\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{r/L}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_R)$ 的容许函数，也就是说，我们可以在 (5.13) 中用 $B^{\overline{X}_\varepsilon}_{r/L}$ 替换 E。对所有作为 $\operatorname{cap}_\theta^{\partial_\varepsilon X}{}_{,p}(B^{\partial_\varepsilon X}_r, B^{\partial_\varepsilon X}_R)$ 容许函数的 u 取下确界，即得 (5.14)。

□

6. 扩大 Y

本节中，我们假设 Y 是一个紧度量空间，配备倍增测度 ν，并固定 $x_0 \in Y$。

我们的目标是将 Y 嵌入到一个合适的较大度量空间 Z 中。我们将递归地进行此操作，但本节只进行第一步。

由于 Y 是紧的，存在一点 x_1，使得 $d(x_1, x_0) = \max_{x \in Y} d(x, x_0)$。令 $Y' = (Y', d', \nu')$ 为 $Y = (Y, d, \nu)$ 的一个副本，其中我们将 x_1 与其副本视为同一点，但不将任何其他点视为同一点。赋予 $\widehat{Y} = Y \cup Y'$ 测度

$$\hat{\nu}(A) = \nu(A \cap Y) + \nu'(A \cap Y')$$

和度量 $\hat{d}$ 使得

$$\hat{d}(x,y) = \begin{cases} d(x, x_1) + d'(y, x_1), & \text{if } x \in Y \text{ and } y \in Y', \\ d(x,y) & \text{if } x, y \in Y, \\ d'(x,y) & \text{if } x, y \in Y'. \end{cases}$$

引理 6.1. 测度 $\hat{\nu}$ 在 $\widehat{Y}$ 上是倍增的，倍增常数为 $C_{\hat{\nu}} \le 2C_\nu$，并且满足

$$\nu(B^Y(x,r)) \le \hat{\nu}(B^{\widehat{Y}}(x,r)) \le 2\nu(B^Y(x,r)) \quad \text{if } x \in Y \text{ and } r > 0. \tag{6.1}$$

此外，如果 Y 在 x_0 处以常数 κ 一致完美，那么 $\widehat{Y}$ 在 x_0 处以常数 $\hat{\kappa} = \max\{\kappa, 2\}$ 一致完美。

证明。式（6.1）由构造可直接推出。若 $x \in Y'$，则有类似的公式。因此，$\hat{\nu}$ 是倍增的，且 $C_{\hat{\nu}} \le 2C_\nu$。

至于一致完美性，设 $r > 0$ 满足 $B^{\widehat{Y}}_{\hat{\kappa} r} \neq \widehat{Y}$。于是 $\hat{\kappa} r \le 3d(x_0, x_1)$，因此 $r \le \frac{3}{2} d(x_0, x_1)$。若 $r \le d(x_0, x_1)$，则 $x_1 \in Y \setminus B^Y_r$，从而存在

$$y \in B^Y_{\kappa r} \setminus B^Y_r \subset B^{\widehat{Y}}_{\hat{\kappa} r} \setminus B^{\widehat{Y}}_r .$$

另一方面，如果 $d(x_0, x_1) < r \le \frac{3}{2} d(x_0, x_1)$，那么 $B^Y_{\hat{\kappa} r} \setminus B^Y_r$ 包含 x_0 在 Y' 中的副本。 □

引理 6.1 中的常数 2 是最优的，以下例子可以说明这一点：设 $Y = [-1, 0] \cup \{1\}$ 满足 $x_0 = 0$ 且 $x_1 = 1$。此时 Y 在 0 处以任意常数 $\kappa > 1$，但 Y 在 0 处仅以常数 $\kappa \ge 2$ 一致完美。

从现在起，我们也将距离 d 和测度 ν 称为 $\widehat{Y}$.

引理 6.2. 设 $\Omega \subset B_{d(x_0,x_1)/2}$ 为开集，且 $E \Subset \Omega$。则

$$\operatorname{cap}^Y_{\theta,p}(E, \Omega) \simeq \operatorname{cap}^{\widehat{Y}}_{\theta,p}(E, \Omega),$$

其中比较常数仅依赖于 θ、p 和 C_ν。

证明。引理 6.1 表明，引理 4.10 中的 (4.1) $Y \subset Y$ 对这些空间成立 ν。根据

$$\nu(\widehat{Y} \setminus Y) \simeq \nu(B(x_1, \tfrac{1}{2} d(x_0, x_1)) \simeq \nu(Y \setminus \Omega)$$

由于对所有 $x \in \Omega$、$y \in Y \setminus Y$ 和 $y' \in Y \setminus \Omega$，

$$d(x,y) \simeq d(x_0, x_1) \quad \text{and} \quad d(x, y') \le \tfrac{3}{2} d(x_0, x_1),$$

该结论由引理 4.10 得出。 □

7. 从无界空间到有界空间

在本节中，我们设 Y 为配备倍增测度 ν 的度量空间，并固定 $x_0 \in Y$。

引理 7.1. 设 $Y_0 = \{x_0\}$ 和 $\delta > 0$。对于 $n = 0, 1, ..., $ 令

$$Y_{n+1} = \bigcup_{x \in Y_n} B(x, 2^{-n}\delta) \quad and \quad Y' = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n}.$$

另外，令 $\nu' := \nu|_{Y'}$。

则有以下结论:

(a) $B_\delta^Y \subset Y' \subset \overline{B_{2\delta}^Y}$, (b) ν' 是倍增的，且满足 $C_{\nu'} \le C_\nu^6$, (c) 对所有 $x \in Y'$ 和 $0 < r < 2\operatorname{diam} Y'$,

$$\nu'(B^{Y'}(x,r)) \le \nu(B^Y(x,r)) \le C_d^5 \nu'(B^{Y'}(x,r)),$$

(d) 如果 Y 在 x_0 处以常数 κ一致完美，那么 Y' 在 x_0 处以常数 $\kappa' = \max\{\kappa, 2\}$一致完美。

证明。 这一点 (a)由构造可知。

(c) 第一个不等式显然成立。由 (a)， $r < 2$ 直径 $Y' \le 8\delta$。令 $r' = 2^{3-k}\delta$，其中 $k \ge 0$ 是满足 $\frac{1}{2}r < r' \le r$的整数。于是存在 $x' \in Y_k$使得 $d(x,x') < 2^{1-k}\delta = \frac{1}{4}r'$。因此 $B^Y(x', \frac{1}{8}r') \subset Y_{k+1} \subset Y'$，从而

$$\begin{aligned}\nu(B^Y(x,r)) &\le \nu(B^Y(x',4r')) \le C_\nu^5 \nu(B^Y(x',\tfrac{1}{8}r')) \\ &= C_\nu^5 \nu'(B^{Y'}(x',\tfrac{1}{8}r')) \le C_\nu^5 \nu'(B^{Y'}(x,r)).\end{aligned}$$

(b) 令 $x \in Y'$ 以及 $r > 0$。如果 $r < 2$ 直径 Y'，则由 (c)，

$$\nu'(B^{Y'}(x,2r)) \le \nu(B^Y(x,2r)) \le C_\nu \nu(B^Y(x,r)) \le C_\nu^6 \nu'(B^{Y'}(x,r)).$$

如果相反 $r \ge 2$ 直径 Y'，那么令 $\tilde{r} =$ 直径 Y'，

$$\nu'(B^{Y'}(x,2r)) = \nu'(B^{Y'}(x,2\tilde{r})) \le C_\nu^6 \nu'(B^{Y'}(x,\tilde{r})) \le C_\nu^6 \nu'(B^{Y'}(x,r)).$$

(d) 设 $r > 0$ 满足 $B_{\kappa' r}^{Y'} \ne Y'$。则 $Y \setminus B_{\kappa' r}^Y \supset Y' \setminus B_{\kappa' r}^{Y'} \ne \varnothing$ 且$\kappa' r \le 2\delta$。因此，如果 $\kappa' r \le \delta$那么存在 $z \in B_{\kappa' r}^Y \setminus B_r^Y = B_{\kappa' r}^{Y'} \setminus B_r^{Y'}$。所以不妨设 $\delta < \kappa' r \le 2\delta$。由于 $B_{\kappa' r}^{Y'} \ne Y' \supset Y_1 = B_\delta^{Y'}$我们得到 $Y_2 \setminus Y_1 \ne \varnothing$。因此存在 $x_1 \in Y_1$和 $x_2 \in Y_2 \setminus Y_1$，满足 $d(x_1, x_2) < \frac{1}{2}\delta$。

反设 $B_{\kappa' r}^{Y'} \setminus B_r^{Y'} = \varnothing$。由于 $r \le \delta < \kappa' r$ 我们必须有 $d(x_1, x_0) < r$，因此也有

$$d(x_2, x_0) \ge \kappa' r \ge 2r > 2d(x_1, x_0).$$

因此，

$$\tfrac{1}{2}\delta > d(x_1,x_2) \ge d(x_2,x_0) - d(x_1,x_0) > \tfrac{1}{2}d(x_2,x_0) \ge \tfrac{1}{2}\kappa' r > \tfrac{1}{2}\delta,$$

矛盾。因此 $B_{\kappa' r}^{Y'} \setminus B_r^{Y'} \ne \varnothing$。 □

下面的引理表明，对于电容器容量，可以有效地用有界空间 Y' 替代空间 Y（后者可能无界）。

引理 7.2. 设 Y' 为引理 7.1 中以参数 $\delta > 0$构造的空间。假设 Y 在 x_0 处是一致完美的，其常数为 κ。设 $R = \delta/2\kappa$，$\Omega \subset B_R^Y$为开集，且 $E \Subset \Omega$。则

$$\mathrm{cap}_{\theta,p}^{Y'}(E,\Omega) \simeq \mathrm{cap}_{\theta,p}^{Y}(E,\Omega),$$

其中比较常数仅依赖于 θ、p、C_ν 和 κ。

一致完美性的假设不能省略，因为 $\mathrm{cap}_{\theta,p}^{Y'}(E,\Omega) = 0$ 当 $Y' \setminus \Omega = \varnothing$时。

证明。我们将使用引理4.10。若 $Y' = Y$，则无需证明，因此假设 $Y' \neq Y$。于是 $B_{2\kappa R}^Y = B_\delta^Y = Y_1 \neq Y$。由 Y的一致完美性，存在某个 $z \in B_{2\kappa R}^Y \setminus B_{2R}^Y \subset Y_1$。于是 $B^Y(z,\ R) \subset Y_2 \setminus \Omega \subset Y' \setminus \Omega$。令 $x \in \Omega$ 且$y \in Y'$。则

$$d(x,y) \le 2\delta + R = (4\kappa+1)R,$$

因此，利用 $\nu' = \nu|_{Y'}$ 由引理 7.1可知是倍增的，我们得到

$$\begin{aligned}\nu'(B^{Y'}(x,d(x,y))) &\lesssim \nu'(B^{Y'}(x,R))\\ &\le \nu'(B^{Y'}(z,2(\kappa+1)R)) \simeq \nu'(B^{Y'}(z,R)) = \nu(B^Y(z,R)).\end{aligned}$$

于是，令 $I(x,\ y)$ 如引理 4.10中所述，

$$\int_{Y'\setminus\Omega} I(x,y)\,d\nu(y) \gtrsim \int_{B^Y(z,R)} \frac{d\nu(y)}{R^{\theta p}\nu(B^Y(z,R))} = R^{-\theta p}.$$

另一方面，对于 $y \in A^j := B_{2^{j+1}\delta}^Y \setminus B_{2^j\delta}^Y$, $j = 0, 1, ...,$ 我们有

$$d(x,y) \simeq 2^j R \quad \text{and} \quad \nu(B^Y(x,d(x,y))) \gtrsim \nu(A_j).$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{Y\setminus Y'} I(x,y)\,d\nu(y) &\le \sum_{j=0}^{\infty}\int_{A^j} I(x,y)\,d\nu(y)\\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2^jR)^{\theta p}} \simeq R^{-\theta p} \lesssim \int_{Y'\setminus\Omega} I(x,y)\,d\nu(y).\end{aligned}$$

应用引理 4.10，再结合引理 7.1(c)，即可完成证明。

□

8. 定理1.1的证明

引理 8.1。设 $0 < \Theta_1 < \Theta_2 < \infty$ 和 $r > 0$。若 ν 是倍增的，则

$$\int_{\Theta_1 r}^{\Theta_2 r}\left(\frac{\rho^{\theta p}}{\nu(B_\rho)}\right)^{1/(p-1)}\frac{d\rho}{\rho} \simeq \left(\frac{r^{\theta p}}{\nu(B_r)}\right)^{1/(p-1)}$$

其中比较常数仅依赖于 Θ_1、Θ_2、θ、p 和 C_ν。

证明。根据 ν 的倍增性质，对于所有 $\Theta_1 r \le \rho \le \Theta_2 r$，我们有 $\nu(B_\rho) \simeq \nu(B_r)$。现在通过直接计算积分即可得出结论。

□

注 8.2。定理 1.1 中的比较常数与 x_0 的选择无关。它们仅取决于 θ、 p、 C_ν 以及一致完美性常数 κ。在下文的证明中，常数 C_1 和 C_2 （因此最终的比较常数也）取决于 α 和 τ。为了避免定理 1.1中的这种依赖，例如可以令 $\alpha = \tau = 2$。我们选择不固定 α 和 τ，以表明我们的证明并不依赖于对它们的固定。

定理的证明1.1。设 $0 < C_1 < 1 < C_2$ 为 (5.1) 中出现的常数，它们仅依赖于 α、τ 和 $\varepsilon = \log \alpha$。我们可以假设 $\kappa \geq 2$。为了使用第5节中的双曲填充和容量结果，我们需要根据 Y 是否有界，使用第6 节或第7节中的结果。

如果 Y 有界，我们就递归地使用第6 节中的构造 N 次（其中 N 只依赖于 C_2/C_1），并将 Y 替换为其适当的扩张 Z，使得 $B^Z_{5C_2R/C_1} \neq Z$。注意， ν 的倍增常数仅增大一个只依赖于 N的因子。

另一方面，如果 Y是无界的，我们令 $Z = Y'$，其中 Y' 如引理7.1 中所述，并且 $\delta = 5\kappa C_2 R/C_1$。我们还将限制测度记为$\nu$。由引理7.1，在这种情况下， ν 的倍增常数仅增大了 6 次幂。注意，由一致完美性条件可得 $B^Z_{5C_2R/C_1} \subsetneq Z$ 。

一致完美性常数 $\kappa \geq 2$ 在两种情况下都保持不变。由于（1.2）和（1.3）中的左、右两边按相同的方式缩放，因此不失一般性，我们可以假设 $0 <$ 直径 $Z < 1$。

若 Y有界，则我们对6.2 号引理应用 $E = B_r$ 和 $\Omega = B_R$，对 Y的连续扩张重复应用数次。若 Y 无界，则改用7.2号引理。两种情况下，我们都可得到

$$\operatorname{cap}^Y_{\theta,p}(B_r, B_R) \simeq \operatorname{cap}^Z_{\theta,p}(B^Z_r, B^Z_R), \tag{8.1}$$

因此，只需估计后者的容量。我们分两种情况讨论。

若 $2C_2 r \geq C_1 R$，则命题4.1 给出

$$\operatorname{cap}^Z_{\theta,p}(B^Z_r, B^Z_R) \simeq \frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}},$$

根据引理8.1 ，这与（1.2）中的积分可比。

若 $2C_2 r \leq C_1 R$，我们按照第 5 节构造 Z 的双曲填充 X，其参数为 α 和 τ；再用参数 $\varepsilon = \log \alpha$ 将其一致化，并赋予测度 μ_β，满足 $\beta = \varepsilon(1-\theta)p$，如第 5 节所示。由于 $B^Z_{5C_2R/C_1} \neq Z$，我们看到 $B^{\partial_\varepsilon X}_{5C_2R} \neq Z$，因而 $\operatorname{diam} \overline{X}_\varepsilon \geq \operatorname{diam} \partial_\varepsilon X \geq 5C_2R$。随后结合（5.1）、（5.2）以及 [2, 引理 11.22]，应用定理 5.3，即可得出

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}^Z_{\theta,p}(B^Z_r, B^Z_R) &\lesssim \operatorname{cap}^{\partial_\varepsilon X}_{\theta,p}(B^{\partial_\varepsilon X}_{C_2 r}, B^{\partial_\varepsilon X}_{C_1 R}) \\ &\lesssim \operatorname{cap}^{\overline{X}_\varepsilon}_p(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2 r}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1 R}) \simeq \operatorname{cap}^{\overline{X}_\varepsilon}_p(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2 r}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2 R}).\end{aligned} \tag{8.2}$$

同样，由定理 5.4、（5.1）、（5.2）以及 [2, 引理 11。22]可得

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}^Z_{\theta,p}(B^Z_r, B^Z_R) &\gtrsim \operatorname{cap}^{\partial_\varepsilon X}_{\theta,p}(B^{\partial_\varepsilon X}_{C_1 r}, B^{\partial_\varepsilon X}_{C_2 R}) \\ &\gtrsim \operatorname{cap}^{\overline{X}_\varepsilon}_p(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1 r/L}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2 R}) \simeq \operatorname{cap}^{\overline{X}_\varepsilon}_p(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1 r/L}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1 R/L}),\end{aligned} \tag{8.3}$$

其中 L 与定理5.4中相同。

接下来，由 5.4 中 μ_β 与 ν 的比较可得

$$\left(\frac{\rho^p}{\mu_\beta(B^{\overline{X}_\varepsilon}_\rho)}\right)^{1/(p-1)} \simeq \left(\frac{\rho^{\theta p}}{\nu(B_\rho)}\right)^{1/(p-1)}.$$

结合 Bj¨orn–Bj¨orn–Lehrb¨ack[6, 定理 4。2] 以及 μ_β 的倍增性质可知

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2r}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2R}) &\simeq \left(\int_{C_2r}^{C_2R}\left(\frac{\rho^p}{\mu_\beta(B^{\overline{X}_\varepsilon}_\rho)}\right)^{1/(p-1)}\frac{d\rho}{\rho}\right)^{1-p}\\ &\simeq \left(\int_r^R\left(\frac{\rho^{\theta p}}{\nu(B_\rho)}\right)^{1/(p-1)}\frac{d\rho}{\rho}\right)^{1-p}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1r/L}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1R/L}) \simeq \left(\int_r^R\left(\frac{\rho^{\theta p}}{\nu(B_\rho)}\right)^{1/(p-1)}\frac{d\rho}{\rho}\right)^{1-p},$$

结合 (8.1)–(8.3)，即可得出 (1.2) 的证明。令 (1.2) 中的 $r \to 0$，即可立即得到 $\operatorname{cap}^Y_{\theta,p}(\{x_0\}, B_R)$ 的估计，因为 $\operatorname{cap}^Y_{\theta,p}$ 是外容量。 □

9. 定理 1.2 和 1.3 的证明

定理的证明 1.2。 上界直接由命题4.4得出。对于下界，我们首先构造 Z，如定理 1.1的证明中所示。由于 (1.6) 和 (1.7) 中的左右两边具有相同的缩放方式，因此不失一般性，可以假设 $0 <$ 直径 $Z < 1$。

如 (8.3) 所示，我们得到

$$\operatorname{cap}^Z_{\theta,p}(B^Z_r, B^Z_R) \gtrsim \operatorname{cap}^{\partial_\varepsilon X}_{\theta,p}(B^{\partial_\varepsilon X}_{C_1r}, B^{\partial_\varepsilon X}_{C_2R}) \gtrsim \operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1r/L}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2R}), \tag{9.1}$$

其中 L 与定理 5.4中的定义相同。在 (a) 中，由 (5.6) 可得 $p < \underline{q}_0^{\overline{X}_\varepsilon}$。因此，根据 Bj¨orn–Bj¨orn–Lehrb¨ack [5, 定理 1.1], (5.4) 以及倍增性质,

$$\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1r/L}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2R}) \gtrsim \frac{\mu_\beta(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1r/L})}{(C_1r/L)^p} \simeq \frac{\nu(B_r)r^{(1-\theta)p}}{r^p} = \frac{\nu(B_r)}{r^{\theta p}}. \tag{9.2}$$

在 (b) 中，我们则有 $p > \overline{q}_0^{\overline{X}_\varepsilon}$，而 [5, 定理 1.1], 结合 (5.4) 和倍增性质可得

$$\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_1r/L}, B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2R}) \gtrsim \frac{\mu_\beta(B^{\overline{X}_\varepsilon}_{C_2R})}{(C_2R)^p} \simeq \frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}}. \tag{9.3}$$

将（9.2）和（9.3）代入（9.1），并利用（8.1），即可证明（1.6）和（1.7）中的下界。

下面讨论估计的锐性。令 $0 < 2r < R \le \frac{1}{4}\operatorname{diam} Y$。如果（1.6）中的下界成立，则由命题4.4,

$$\frac{\nu(B_r)}{r^{\theta p}} \lesssim \operatorname{cap}^Y_{\theta,p}(B_r, B_R) \lesssim \frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}},$$

这立即推出$\theta p \in Q_0^Y$。（1.7）的证明类似，只需利用命题4.4中的上界 $\nu(B_r)/r^{\theta p}$。

最后，若 $p > 1$，那么定理 5.3结合 (5.1)、(5.2)、(8.1)、(1.7) 和 (5.4)，可得

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_p^{\overline{X}_\varepsilon}(B^{\overline{X}_\varepsilon}_r, B^{\overline{X}_\varepsilon}_R) &\gtrsim \operatorname{cap}^{\partial_\varepsilon X}_{\theta,p}(B^{\partial_\varepsilon X}_r, B^{\partial_\varepsilon X}_R) \gtrsim \operatorname{cap}^Z_{\theta,p}(B^Z_{r/C_2}, B^Z_{R/C_1})\\ &\simeq \operatorname{cap}^Y_{\theta,p}(B_{r/C_2}, B_{R/C_1}) \gtrsim \frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}} = \frac{\nu(B^Z_R)}{R^{\theta p}} \simeq \frac{\mu_\beta(B^{\overline{X}_\varepsilon}_R)}{R^p}.\end{aligned}$$

将 Bj¨orn–Bj¨orn–Christensen 定理 [3], 应用于 $\overline{X}_\varepsilon$，则可推出 $p > \overline{q}_0^{\overline{X}_\varepsilon}$，这等价于 $\theta p > \overline{q}_0^Y$。 □

在临界情形下，我们有如下与定理相对应的结果 1.2。

定理 9.1. 假设 Y 是一个在 x_0 处一致完美的完备度量空间，并配备了一个倍增测度 ν。设 $p > 1$、$0 < \theta < 1$ 和 $0 < R_0 \le \frac{1}{4} \operatorname{diam} Y$，其中 R_0 有限。

那么，对于 $0 < 2r \le R \le R_0$，以下结论成立：比较常数取决于 R_0，但独立于 x_0、r 和 R。

(a) 若 $\theta p = \max \underline{Q}_0^Y$，则

$$\frac{\nu(B_r)}{r^{\theta p}} \left(\log \frac{R}{r} \right)^{1-p} \lesssim \operatorname{cap}_{\theta,p}^Y(B_r, B_R) \lesssim \frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}} \left(\log \frac{R}{r} \right)^{1-p}. \tag{9.4}$$

(b) 若 $\theta p = \min \overline{Q}_0^Y$，则

$$\frac{\nu(B_R)}{R^{\theta p}} \left(\log \frac{R}{r} \right)^{1-p} \lesssim \operatorname{cap}_{\theta,p}^Y(B_r, B_R) \lesssim \frac{\nu(B_r)}{r^{\theta p}} \left(\log \frac{R}{r} \right)^{1-p}. \tag{9.5}$$

此外，如果 (9.4) 和 (9.5) 中的下界成立，则 $\theta p \le$ 上确界$\underline{Q}_0^Y$ 和$\theta p \ge$ 下确界 $\overline{Q}_0^Y$ 分别成立。

证明。 估计（9.4）直接由定理 1.1 得到，因为

$$\frac{R^{\theta p}}{\nu(B_R)} \lesssim \frac{\rho^{\theta p}}{\nu(B_\rho)} \lesssim \frac{r^{\theta p}}{\nu(B_r)}$$

由于 $\theta p =$ 最大值$\underline{Q}_0^Y$。估计（9.5）可类似证明。

对于最后一个断言，（9.4）中的下界和命题4.4 推出对所有 $\varepsilon > 0$ 都有

$$\frac{\nu(B_r)}{\nu(B_R)} \lesssim \frac{r^{\theta p} \operatorname{cap}_{\theta,p}^Y(B_r, B_R)}{\nu(B_R)} \left(\log \frac{R}{r} \right)^{p-1} \lesssim \left(\frac{r}{R} \right)^{\theta p} \left(\log \frac{R}{r} \right)^{p-1} \lesssim \left(\frac{r}{R} \right)^{\theta p - \varepsilon},$$

其中，最后一个“。”中的隐含常数取决于 ε。因此，对每个 $\varepsilon > 0$，都有 $\theta p - \varepsilon \in \underline{Q}_0^Y$，这表明 $\theta p \le$ 上确界$\underline{Q}_0^Y$。蕴含关系（9.5） $\Rightarrow \theta p \ge$ 下确界 $\overline{Q}_0^Y$ 可类似证明。 □

注 9.2。 如果 Y 是无界的，则定理 1.2 和 9.1 在 $R_0 = \infty$ 若$\underline{Q}_0$、$\underline{q}_0$、$\overline{Q}_0$ 和 $\overline{q}_0$ 分别替换为

$$\underline{Q} = \left\{ q > 0 : \frac{\mu(B_r)}{\mu(B_R)} \lesssim \left(\frac{r}{R} \right)^q \text{ for } 0 < r < R < \infty \right\}, \quad \underline{q} = \sup \underline{Q},$$

$$\overline{Q} = \left\{ q > 0 : \frac{\mu(B_r)}{\mu(B_R)} \gtrsim \left(\frac{r}{R} \right)^q \text{ for } 0 < r < R < \infty, \right\}, \quad \overline{q} = \inf \overline{Q}.$$

注记 9.3。 定理 1.2 和 9.1 中的比较常数与 x_0 的选择无关，但取决于 θ，p，C_ν，R_0 以及一致完美性常数 κ。

在定理 1.2(a) 中，它们还取决于 $q \in (\theta p, \underline{q}_0)$ 的选择，该选择来自 [5, 命题 6 的证明。1] 这导致估计（9.2），并且还取决于 $q \in \underline{Q}_0$ 的定义中出现的比较常数。

类似地，在定理 1.2(b) 中，这些常数还取决于 $q \in (\overline{q}_0, \theta p)$ 的选择，该选择来自 [5, 命题 6 的证明。1] 这导致估计（9.3），并且还取决于 $q \in \overline{Q}_0$ 的定义中出现的比较常数。

在定理 9.1 中，依赖关系类似，但取决于 $q = \theta p$。在注记 9.2中，依赖关系则改为取决于 $\underline{Q}$ 和 $\overline{Q}$。

定理 1.3 的证明。设 $Z = Y'$，其中 Y' 与引理 7.1 中的定义相同，且满足 $\delta = \frac{1}{5}$。于是$0 < \operatorname{diam} Z < 1$。（若 Y 有界，则也可令 Z 为 Y 的一个缩放版本。）接着，令 X_ε 为第 5 节中为 Z 构造的一致化双曲填充。根据推论 4.8，只需证明对于 $C_{\theta,\,p}^{Y}(\{x_0\})$，命题 (a) 和 (b) 成立；而根据命题 13.2]，它与 $C_p^{\overline{X}_\varepsilon}(\{x_0\})$ 可比。

如式（5.5）所示，可得 $p >$ 下确界 $\overline{S}_0^{\overline{X}_\varepsilon}$ 在 (a) 中，而 $p \notin \overline{S}_0^{\overline{X}_\varepsilon}$ 或 $1 < p \in \underline{S}_0^{\overline{X}_\varepsilon}$在 (b) 中。因此，[5] 中的命题 8.2 表明 $C_p^{\overline{X}_\varepsilon}(\{x_0\}) > 0$ 在 (a) 中，并且$C_p^{\overline{X}_\varepsilon}(\{x_0\}) = 0$ 在 (b) 中。

当 $p > 1$ 时，也可由定理 1.1 得出这些结论。 □

参考文献

1. Anttila, R., 测度的逐点 Assouad 维数，预印本，2022年。arXiv:2203.15301 3 2. Björn, A. 和 Björn, J.，《度量空间上的非线性势理论》，EMS 数学专著丛书 17，欧洲数学学会，苏黎世，2011年。6, 8, 13, 14, 15, 20 3. Björn, A., Björn, J. 和 Christensen, A.，弓形结上的 Poincar´e 不等式，预印本，2022年。arXiv:2202.07491 22 4. Björn, A., Björn, J., Gill, J. 和 Shanmugalingam, N.，康托尔集和树上的几何分析，《纯粹与应用数学杂志》725 (2017)，63–114。4 5. Björn, A., Björn, J. 和 Lehrbäck, J.，加权 $\mathbf{R}^n$ 空间和度量空间中环域的尖锐容量估计，《数学杂志》286 (2017)，1173–1215。2, 3, 4, 5, 12, 14, 21, 22, 23 6. Björn, A., Björn, J. 和 Lehrbäck, J.，体积增长、容量估计、p-抛物性及 p-调和 Green 函数的尖锐可积性性质，即将发表于《数学分析杂志》。3, 4, 12, 21 7. Björn, A., Björn, J. 和 Shanmugalingam, N.，度量空间上 Newton–Sobolev 函数的拟连续性与 Lipschitz 函数的稠密性，《休斯敦数学杂志》34 (2008)，1197–1211。14 8. Björn, A., Björn, J. 和 Shanmugalingam, N.，倍增度量测度空间及其双曲填充的延拓与迹结果，《纯粹与应用数学杂志》159 (2022)，196–249。4, 5, 6, 12, 13, 14, 15, 23 9. Björn, J.，分数阶拉普拉斯算子的边界估计与 Wiener 判据，预印本，2021年。arXiv:2107.04364v2 1 10. Bourdon, M.，准-M¨obius 同胚的代数刻画，《芬兰科学院数学辑刊》32 (2007)，235–250。6 11. Bourdon, M. 和 Pajot, H.，上同调 l_p 与 Besov 空间，《纯粹与应用数学杂志》558 (2003)，85–108。4 12. Capogna, L., Kline, J., Korte, R., Shanmugalingam, N. 和 Snipes,M.，p-调和函数的 Neumann 问题及度量测度空间中诱导的非局部算子，预印本，2022年。arXiv:2204.00571 4 13. Costea, Ş.，强 A_∞-权与尺度不变 Besov 容量，《伊比利亚美洲数学杂志》23 (2007)，1067–1114。7 14. Costea, Ş.，度量测度空间中的 Besov 容量与 Hausdorff 测度，《数学出版物》53 (2009)，141–178。6, 7 15. Eriksson-Bique, S., Giovannardi, G., Korte, R., Shanmugalingam, N.和 Speight, G.，有界几何度量空间区域上分数阶 Cheeger-Laplacian 解的正则性，《微分》306 (2022)，590–632。4

16. Gogatishvili, A., Koskela, P. 和 Shanmugalingam, N., 定义在度量空间上的Besov空间的插值性质, Math. Nachr. 283 (2010), 215–231. 4, 5, 6 17. Gogatishvili, A., Koskela, P. 和 Zhou, Y., 度量测度空间上Besov和Triebel–Lizorkin空间的刻画, Forum Math. 25 (2013), 787–819. 2, 4, 6 18. Heikkinen, T., Koskela, P. 和 Tuominen, H., Besov和Triebel–Lizorkin函数的逼近与拟连续性, Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), 3547–3573. 6 19. Heinonen, J., 度量空间上的分析讲义, 施普林格, 纽约, 2001. 2, 5 20. Jonsson, A. 和 Wallin, H., R^n子集上的函数空间, Math. Rep. 2:1, Harwood, 伦敦, 1984. 3 21. Karak, N., 度量空间中的Triebel–Lizorkin容量与Hausdorff测度, Math. Slovaca 70 (2020), 617–624. 6 22. Kilpeläinen, T. 和 Malý, J., 拟线性椭圆方程的Wiener检验与势估计, Acta Math. 172 (1994), 137–161. 1 23. Kim, M., Lee, K.-A. 和 Lee, S.-C., 非局部Dirichlet问题的Wiener 判据, 即将发表于 Comm. Math. Phys. 1, 3 24. Korvenpää, J., Kuusi, T. 和 Lindgren, E., 分数阶p-Laplace型方程解的等价性, J. Math. Pures Appl. 132 (2019), 1–26. 3 25. Koskela, P., Yang, D. 和 Zhou, Y., Besov和Triebel–Lizorkin空间及拟共形映射的逐点刻画, Adv. Math. 226 (2011), 3579–3621. 2, 4 26. Kristensen, J. 和 Mingione, G., 变分问题中的边界正则性, Arch. Ration. Mech. Anal. 198 (2010), 369–455. 3 27. Lehrbäck, J. 和 Shanmugalingam, N., 通过Besov函数研究紧Ahlfors正则度量测度空间之间的位势理论与拟对称映射：初步成果, 预印本, 2022年. arXiv:2210.01095 3, 6 28. Lindgren, E. 和 Lindqvist, P., 分数阶特征值, Calc. Var. Partial Differential Equations 49 (2014), 795–826. 3 29. Maz′ya, V. G., 拟线性椭圆方程解在边界点处的连续性, Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom. 25:13 (1970), 42–55 (俄文). 英译本：Vestnik Leningrad Univ. Math. 3 (1976), 225–242. 1 30. Nuutinen, J., 度量空间中的Besov容量, Ann. Polon. Math. 117 (2016), 59–78. 6, 7 31. Yang, D., 度量空间上Haj lasz–Sobolev空间的新刻画, Sci. China Ser. A 46 (2003), 675–689. 6