arXiv:2304.01808v1 [math.GT] 4 Apr 2023

论四维塞弗特流形的有限剩余刚性

JIMING MA 和 ZIXI WANG*

Abstract. 许多研究揭示了某些低维流形与其基本群的有限群完备化之间的联系及相关现象。我们聚焦于一些塞弗特四维流形，探讨其有限群完备化在多大程度上能够识别流形，并对单值化进行分类，给出它们具有有限剩余刚性的条件。

1. introduction引言

长期以来，研究者一直关注如何通过有限生成剩余有限群$\curlywedge G$ 的有限商群集合，或等价地，通过其有限生成完备化 G来区分该群。我们尤其关注这一问题在非球面流形基本群中的情形，以及这些基本群所对应的有限覆盖。令 $\mathscr{C}$ 表示某个剩余有限$\widehat{}$群的集合。若群 $G \in \mathscr{C}$ 能够在 $\mathscr{C}$中由 G 唯一识别（相差一个同构），则称其在 $\mathscr{C}$ 中具有有限剩余刚性 $\mathscr{C}$。否则，当刚性不成立时，称 G 为有限剩余灵活的。当 $\mathscr{C}$是所有有限生成剩余有限群的集合时，我们称有限剩余刚性处于绝对意义下。对于秩为 $n \geq 2$的自由群 F_n，其是否具有绝对有限剩余刚性仍是一个未解问题F_n [26, 29]。

在2018年国际数学家大会上，Reid 在低维拓扑条件下提出了有限剩余刚性问题 [29]。Bridson、Conder 和 Reid 证明，福克斯群在连通李群的所有格中具有有限剩余刚性 [5]。Wilton 和 Zalesskii 证明，对于具有瑟斯顿几何之一的三维流形，其几何类型可由其基本群的有限生成完备化区分 [40]。Bridson、McReynolds、Reid 和 Spitler 证明， $PSL(2, \mathbb{C})$ 中存在一些算术格，它们具有绝对意义下的有限剩余刚性 [6]。Jaikin-Zapirain 证明，有限生成完备化能够检测紧致可定向非球面三维流形的纤维性 [17]。Bridson 和 Reid [7], Boileau 与 Friedl [4] 分别独立证明，八字结群可由其基本群在所有结群中区分出来。然而，也存在不具有有限剩余刚性的三维流形。Funar [11] 基于 Stebe [34]的工作，给出了无穷多对互不同胚 $\mathbb{S}ol^3$ 但有限生成完备化同构的流形。Hempel [15]

Date: 2022年6月12日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 20 E18,57N16, 57M05。*Key words and phrases.* 塞弗特四维流形、有限生成完备化。Jiming Ma的研究部分得到了国家自然科学基金（NSFC）项目12171092的资助。

证明，存在几何类型为 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$、有限生成完备化同构的互不同胚闭塞弗epт纤维空间。Wilkes [39] 证明，除 Hempel 给出的情形外，三维闭可定向塞弗特纤维流形均具有有限剩余刚性。

考虑 Thurston 的四维几何，Stover [35] 证明了 $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$-流形的有限生成灵活性。Piwek、Popovi´c 和 Wilkes 证明，若将两个四维$\mathbb{E}^4$-轨形的基本群视为四维晶体群，则它们在彼此之间具有有限生成刚性 [28]。我们证明，按照 Thurston 的定义，大多数四维几何都可以通过有限群完备化加以区分，除了 $\mathbb{H}^4$ 和 $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$[20]。我们将这类几何中的八种类型与四维塞弗特流形联系起来，并具体说明了纤维化类型如何形成特定的几何结构[37]。随后，我们着重研究如何通过有限群完备化区分四维塞弗特流形。第一步是以更简化的方式修改纤维表示。

定理 1。 设 M 是一个具有非平凡单值化的 *4* 维 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^2$ 流形。那么总能找到 $\pi_1(M)$ 的一组生成元，使得相应的单值化除一个矩阵外全部都是平凡的。

当所有单值化都平凡时，我们证明了 $\mathrm{SL}_2 \times \mathbb{E}$ 的有限剩余刚性，并给出了 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^2$-流形彼此有限剩余同构的条件。

定理 2. 具有 $\mathrm{SL}_2 \times \mathbb{E}$ 的闭可定向塞弗特四维流形是有限剩余刚性的。对于两个具有平凡单值化的 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^2$-几何闭可定向塞弗特四维流形 M 和 N，当且仅当存在一个有限生成整数 $k \in \mathbb{Z}$与有限剩余同构相关，使得 M 和 N 的塞弗特不变量分别为(m_i, a_i, b_i) 和 (m_i, ka_i, kb_i) 时， $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$。

值得指出的是，当轨形包含的锥点多于 1 个时，我们在定理 2 中的结果与 Piwek 的研究有所重叠[27] 。鉴于投稿时间间隔很短，这是一项独立完成的工作。

2. Profinite completions

现在我们根据 Ribes 和 Zalesskii [30] 的著作，介绍一些关于有限生成群的基本结果。

定义 3. 对于偏序集 I，一个逆系统 是由一族集合 $\{X_i\}_{i\in I}$ 和一族映射 $\phi_{ij} : X_i \to X_j$ （当 $i \le j$ 时）组成的，它们满足：

(1) $\phi_{ii} = id_{X_i}$，(2) 若
$i \le j \le k$，则 $\phi_{jk}\phi_{ij} = \phi_{ik}$。

将逆系统记为(X_i, ϕ_{ij}, I)，其逆极限定义为

$$\varprojlim X_i = \{(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i |\ \phi_{ij}(x_i) = x_j\ if\ i \le j\}.$$

定义 4. 给定一个逆系统(X_i, ϕ_{ij}, I)，其中 X_i 是有限群，且 ϕ_{ij}是群同态，由此得到的逆极限 $\varprojlim X_i$ 称为有限生成群。对于离散群 G，其有限指数正规子群的集合 $\mathcal{N}$ 可以构成一个逆系统，规定当 $N_i, N_j \in \mathcal{N}$ 且 $N_i \subseteq N_j$时， $N_i \le N_j$。因此，这些群同态是自然满同态 $\phi_{ij} : G/N_i \to G/N_j$。我们将逆系统$(G/N_i, \phi_{ij}, \mathcal{N})$的逆极限称为 G 的有限生成完备化，并记作 $\widehat{G}$。

还有一个重要性质需要介绍:

定义 5. 若对每个非平凡的 $g \in G$，都存在某个有限指数正规子群 $N \triangleleft G$ 使得 $g \notin N$，则群 G 是剩余有限的 。

群 G 是剩余有限的，意味着 $\bigcap_{N_i\in\mathcal{N}} N_i = 1$；当且仅当 ι 时， G 是剩余有限的：对于每个$N_i \in \mathcal{N}$，由自然映射 $G \to G/N_i$ 诱导的映射 $G \to G$ 是单射。

考虑商群 G/N_i上的离散拓扑，可以将 G 上的拓扑视为由 $\prod_{N_i\in\mathcal{N}} G/N_i$上的乘积拓扑诱导的子拓扑。于是，有限生成完备化 G 是一个紧致、豪斯多夫且全不连通的群。在有限生成拓扑下， G 中的开子群H 意味着 H 作为拓扑群是闭的且指数有限；当且仅当 H 是包含 H的 G 的所有开子群的交集时，H 才是闭的。另一方面，考虑 G上的有限生成拓扑时，离散群与其有限生成完备化之间的联系如下:

命题 6. [30] 如果 G 是一个有限生成剩余有限群，那么 $\mathcal{X}$ 中具有有限指数的 G 的子群集合与 $\mathcal{Y}$ 中 $\widehat{G}$ 的所有开子群集合之间存在一一对应关系。将 G 与其在 $\widehat{G}$中的像等同起来，该对应关系由下式给出:

(1) 对于 $H \in \mathcal{X}$、 $H \longmapsto \overline{H}$,
(2) 对于 $Y \in \mathcal{Y}$、 $Y \longmapsto Y \cap G$。

此处$\overline{H}$ 表示在 $\widehat{G}$的有限生成拓扑下 H 的闭包。此外，如果K、 $H \in \mathcal{X}$ 和 $K \le H$, 那么 $[H : K] = [\overline{H} : \overline{K}]$; 当且仅当 $\overline{H}$ 在 $\widehat{G}$ 中正规时， H 在 G中正规; 最后，对于 $H \in \mathcal{X}$， $\overline{H} \cong H$。

当我们考虑 G 的有限商群，且其商映射是连续的时， $\widehat{\ }$ 显然， G 和 $\widehat{G}$ 具有相同的有限商群集合。令 $\mathcal{C}(G)$ 表示 G 的有限商群集合，则我们得到以下在 [30] 中证明的定理:

定理 7。 设 G_1 和 G_2 是两个有限生成抽象群，则 $G_1 \cong G_2$ 当且仅当 $\mathcal{C}(G_1) = \mathcal{C}(G_2)$。

有限生成完备化的同调和上同调保留了离散群的许多特征。Serre 在 [33] 中定义了良性:

定义 8. 如果对于任意有限 G-模 A，自然的上同调群同态 $H^n(G;A) \longrightarrow H^n(G;A)$ 是由 $\iota : G \longrightarrow G$ 诱导的，并且对于任意维数 n 都是一个同构，则称有限生成群 G 是良好的。

这里给出了一些示例以作说明。研究表明，有限生成的福克斯群是良性的，并且一个良性群被另一个良性群扩张后所得的群本身也是良性的。良性的一个应用如下 [13]:

引理 9. 设 G 是一个剩余有限的良群，且 $\phi : H \to G$ 是一个满射同态，其核 K是剩余有限且有限生成的群。那么 H 是剩余有限的。

这个引理提供了一种高效的方法，用于构造大量剩余有限群的扩张，并为塞弗特四维流形提供了我们所需的结果。

推论 10。设 M 是以双曲 *2*-轨形为底空间的 ***Seifert 4***-流形。那么 $\pi_1(M)$ 是剩余有限的。

3. Seifert fibred 4-manifolds

人们熟悉的是以二维轨形为底空间的三维塞弗特纤维空间，它们是圆丛。它们由纤维丛的轨形特征数和欧拉数分类，并与 Thurston 的三维几何相关联 [31]。***Seifert*** 四维流形 M 的概念类似，指的是以闭二维轨形 B 为底空间的纤维丛 $\pi : M \to B$ 的全空间，其中一般纤维是二维环面 T^2 或克莱因瓶 K [37]。Ue 还对塞弗特四维流形进行了刻画，并说明了它们与 Thurston 意义下四维几何之间的联系。当纤维 $\pi_1(T^2)$ 允许 $\pi_1^{orb}(B)$ 的非平凡作用时，与三维情形相比便有了更大的灵活性；这一区别体现在 $\pi_1(T^2)$ 与 $\pi_1(S^1)$ 的外自同构群之间。纤维的变化也使正合列和上同调的处理更加繁复。Ue 对 Seifert 四维流形的明确刻画，为后续研究提供了有用的细节。

轨形 B 可由其底空间 $|B|$ 及奇异点来描述，包括由不同类型离散作用所对应的圆锥点、反射点和角反射点。局部而言，奇异点 $p \in B$ 有一个足够小的邻域 $D = \mathbb{D}^2/G$，它是单位圆盘在固定 p的离散子群 $G < O(2)$作用下的商空间。然后$\pi^{-1}(D)$被识别为 $T^2 \times D^2/G$，使得 G 在 $T^2 \times D^2$ 上自由作用。 G在$T^2 \times D^2$和 D^2 上的作用与自然投影 $T^2 \times D^2 \to D^2$相容。我们将 $T^2 \times D^2$ 中的点识别为（x，y，z），使得（x，y）$\in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 且 $z \in \mathbb{C}$、$|z| \leq 1$。

如果 G 是平凡的，我们称点 $p \in B$ 为一个非奇异点，而总空间中 D 的原像就是 $T^2 \times D^2$。

若 $G = \mathbb{Z}_m$ 是由作用 ρ 在 $T^2 \times D^2$ 上生成的，满足 $\rho(x, y, z) = (x - \frac{a}{m}, y - \frac{b}{m}, e^{\frac{2\pi i}{m}} z)$，其中 $g.c.d.(m, a, b) = 1$。那么我们称 p 为 B 的一个圆锥点，而围绕 p 的纤维称为一个类型为 (m, a, b) 的多重环面。

如果 $G = \mathbb{Z}_2$ 其中生成元 ι 通过 $\iota(x, y, z) = (x + \frac{1}{2}, -y, z)$ 作用于 $T^2 \times D^2$。在这种情况下，底空间 $|B|$ 是一个带边界的曲面，其中边界的每个连通分支都构成 B 的一个反射圆。此时，p 位于一个反射圆上，并且 $\pi^{-1}(D)$ 是克莱因瓶 K 上的一个扭曲 D^2-纤维丛。在这种情况下，即使 B 的底空间不是闭曲面，我们仍将其称为闭轨形。

若 $G = D_{2m} = \langle \iota, \rho | \iota^2 = \rho^m = 1, \iota\rho\iota^{-1} = \rho^{-1} \rangle$ 是二面体群，其生成元 ι 和 ρ 在 $T^2 \times D^2$ 上的作用分别为 $\iota(x, y, z) = (x + \frac{1}{2}, -y, z)$ 和 $\rho(x, y, z) = (x, y - \frac{b}{m}, e^{\frac{2\pi i}{m}} z)$，且 $g.c.d.(m, b) = 1$。则称 p 为角度为 π/m 的角反射点，而 p 上方的纤维称为类型为 $(m, 0, b)$ 的多重克莱因瓶。这意味着底轨形含有反射圆，且每个圆上都包含有限多个角反射点。今后，我们不专门讨论含反射圆的塞弗特四维流形，因为它们各自都有一个规范二重覆盖，而该覆盖是一个不含反射圆的 Seifert 4-流形。

我们仍需描述整体纤维化，这需要一些类似于三维情形的不变量。假设底轨形 B 没有反射圆，则使用 Ue [37]定义的四维塞弗特不变量：

(1) 沿着 $\pi_1(|B|)$ 的标准生成元 $s_i, t_i (i = 1, 2, \ldots, g)$ 的单值化矩阵 $monodromy\ matrices\ A_i, B_i \in SL(2, \mathbb{Z})$，满足 $\prod_{i=1}^{g} [A_i, B_i] = I$；其中 B 的底空间 $|B|$ 是亏格为 g 的可定向曲面。

(1') 沿着 $\pi_1(|B'|)$ 的标准生成元 $v_i (i = 1, 2, \ldots, g')$ 的单值化矩阵 $monodromy\ matrices\ A'_i \in GL_2(\mathbb{Z})$；其中 B' 的底空间 $|B'|$ 是亏格为 g' 的不可定向曲面。

(2) 元组 (m_i, a_i, b_i) 用于描述底轨形圆锥点 $p_i (i = 1, \ldots\ldots, t)$ 上的纤维类型。

(3) 障碍 $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$。令 q_i 为以非奇异点 p_i 为中心的子午线圆的提升，则 (a', b') 是将 $\cup q_i$ 延拓至 $\pi^{-1}(B - \cup$（p_i 的圆盘邻域）$)$ 中截面的障碍。

(4) 当所有单值化都是平凡的时，我们可以将欧拉数定义为 $e = (a' + \Sigma a_i/m_i, b' + \Sigma b_i/m_i) \in \mathbb{Q}^2$，这与三维 Seifert 纤维空间中有理欧拉数的定义类似。详细内容见 [37]。

现在，M 的基本群可由四维塞弗特不变量表示为 B 的轨形基本群被 $\mathbb{Z}^2$ 扩张。具体而言，基本

M 的群为

$$\pi_1(M)=\langle x_1,\cdots,x_r,u_1,\cdots,v_g,l,h \mid u_j(l,h)u_j^{-1}=(l,h)A_j, v_j(l,h)v_j^{-1}=(l,h)B_j$$
$$x_i^{m_i}l^{a_i}h^{b_i}=1,\ x_1\cdots x_r\prod[u_j,v_j]=l^ah^b,[x_i,l]=[x_i,h]=[l,h]=1\rangle$$

其中， l， h 是一般纤维 T^2 的生成元，而 u_1，$\cdots$，v_g 是 B亏格生成元的提升。显然，该表示并不唯一，因为同一个塞弗特 4-流形的两组塞弗特不变量之间存在某种变换。

通过使用四维 Seifert 不变量对闭可定向四维 Seifert 纤维化流形进行分类，Ue 将这些流形与 Thurston 几何联系起来：

定理 11。 [37]设 M 是一个以 *2*-轨形 *B* 为底空间的闭可定向 *4*-流形，且其具有塞弗特纤维化，则

(1) B 是球面型或坏的，当且仅当 M 具有几何结构 $\mathbb{S}^3\times\mathbb{E}$ 或 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{E}^2$;

(2) B 是平坦的，当且仅当 M 具有 $\mathbb{E}^4$、 $\mathbb{N}il^4$、 $\mathbb{N}il^3\times\mathbb{E}$ 或 $\mathbb{S}ol^3\times\mathbb{E}$中的一种几何结构，但有两个平坦流形除外，它们不是 ***Seifert*** [16];

(3) B 是双曲的，当且仅当 M 具有几何结构 $\widetilde{\mathbb{S}L_2}\times\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{H}^2\times\mathbb{E}^2$之一，或者$M$ 是非几何的。

定理 12. [37] 设 M、 N 是底轨形为非球面的闭可定向塞弗特四维流形，且其基本群同构，则 M 与 N微分同胚。此外，若 M和 N的底轨形是双曲的，或者 M和 N具有几何结构 $\mathbb{N}il^4$ 或 $\mathbb{S}ol^3\times\mathbb{E}$，则 M 与 N之间的微分同胚保持纤维结构。

然而，需要说明的是，当底轨形为平坦、球面型或坏轨形时，塞弗特 4-流形的 Seifert 纤维化结构可能并不唯一；几何结构为 $\mathbb{E}^4$ 和 $\mathbb{N}il^3\times\mathbb{E}$ 的例子见 [36]。此外，还存在一些底轨形为双曲型的四维塞弗特流形，它们不具有任何四维几何结构。从用塞弗特不变量表示塞弗特纤维化四维流形的角度出发，当底轨形可定向时，我们使用定理 B [38]:

定理 13。 设 M 是一个以无反射圆的双曲 *2*-轨形为底空间的 *4* 维塞弗特流形。则该 ***Seifert*** 纤维化结构恰好满足以下三个条件之一。

(1) M 允许 $X=\mathbb{H}^2\times\mathbb{E}^2$几何，其中所有单值化矩阵都是同一个公共矩阵 Q 的幂，而该矩阵与 $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$中共轭。此外，若所有单值化都平凡，则有理欧拉数为 $e=(0,0)\in\mathbb{R}^2$;

(2) M具有 $X=\widetilde{\mathrm{SL}_2}\times\mathbb{Z}$几何结构，其中所有单值化都平凡，而有理欧拉数为 $e\neq(0,0)$。

(3) M 无法具有 *Thurston* 意义下的任何几何结构。

乍一看，欧拉数仅在平凡单值化情形下才有定义，这一点相当奇怪。实际上，这一条件是合理的，因为欧拉数应当反映扩张的有限覆盖是否分裂，而这确实是三维塞弗特纤维空间中所发生的情况。然而，对于四维情形，当欧拉数与非平凡作用相结合时，上述性质并不能得到保证。例如，假设我们有一个具有几何结构 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^2$ 的塞弗特流形 M，其单值化矩阵除一个之外均为平凡矩阵，而唯一的非平凡单值化矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，其指数为 4。我们可以形式上将其欧拉数定义为 $e = (a - \Sigma \frac{a_i}{m_i},\ b - \Sigma \frac{b_i}{m_i})$。当我们取 M 的一个四重覆盖 M'，使得 M' 的轨形 B' 相对于单值化的生成元而言是 B 的四重覆盖时，然而， M 的欧拉数为 $(I + A + A^2 + A^3)e$，这实际上是平凡的，因为 A 的指数为 4，并且 $I + A + A^2 + A^3 = 0$。

另一方面，希尔曼也从几何群论的角度重新表述了 M 具有几何结构这一条件，我们遵循[16]中的定义和结果。

定理 14。 [16, 推论 9.2。1] 设 M 是基本群为 π的光滑闭四维流形，那么 M 与一般纤维为 T^2 或克莱因瓶、底空间为双曲 *2*-轨形的塞弗特纤维空间同伦等价，当且仅当 $h(\sqrt{\pi}) = 2$, $[\pi : \sqrt{\pi}] = \infty$ 且 $\chi(M) = 0$。

4. Mapping class group of surface

由于塞弗特不变量（包括单值化和纤维类型）都取决于生成元和标架的选择，因此有必要修改表示。当轨形不含奇异点时， $\pi_1^{\mathrm{orb}}(B) \cong \pi_1(\Sigma_g)$。考虑亏格为 g、具有 n 个边界连通分支的曲面$S = \Sigma_{g,\ n}$，其映射类群

$$\mathrm{Mod}(S, \partial S) = \pi_0(\mathrm{Homeo}^+(\Sigma_g)),$$

由所有保持边界固定且保向的同胚的同伦类组成，即 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g) = \mathrm{Homeo}^+(S, \partial S)/\mathrm{Homeo}^0(S, \partial S)$，其中 $\mathrm{Homeo}^0(S, \partial S)$ 是包含恒等映射的 $\mathrm{Homeo}^+(S, \partial S)$ 的连通分支。考虑固定 n 个点的曲面同胚会更方便，由此得到映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$。映射类群的生成元集与德恩扭转密切相关；关于这一主题，我们主要参考 Farb-Margalit 的精彩著作 [9] 。下述定理说明了我们为何关注映射类群。

定理15 (德恩-尼尔森-贝尔**).** 同态

$$\sigma : \mathrm{Mod}^{\pm}(S_g) \to \mathrm{Out}(\pi_1(S_g))$$

当 $g \geq 1$ 时是一个同构。

因此，我们可以将 Mod(S_g) 看作 Out($\pi_1(S_g)$) 的一个指数为 2 的子群。环带 $A = S^1 \times I$ 及其映射类群 Mod(A) 在我们考虑曲面的映射类群时发挥着重要作用。首先，我们有：

定理 16. 环带的映射类群 $\mathrm{Mod}(A) \cong \mathbb{Z}$。

Mod(A) 中的每个元素都对应于 $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，其 $n \in \mathbb{Z}$确定了万有覆盖空间 $A = \mathbb{R} \times I$ 上的一个线性变换 ˜；该变换投影后保持环带的边界。当 $n = -1$ 时，元素 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 确定了 Mod(A) 中的一个生成元 ϕ，这就是所谓的 Dehn 扭转。

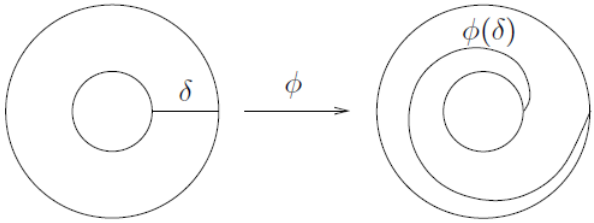


FIGURE 1. 环带上的 Dehn 扭转 [9]

我们可以将 Dehn 扭转推广到曲面上：将环带视为曲面的子流形，并通过每个元素对简单闭曲线的作用来理解 $Mod(\Sigma_g)$。下面介绍 Dehn 的一个重要结果。

定理 17. 映射类群 $\mathrm{Mod}(T^2)$ 作用于 $H_1(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$，这诱导出一个同构

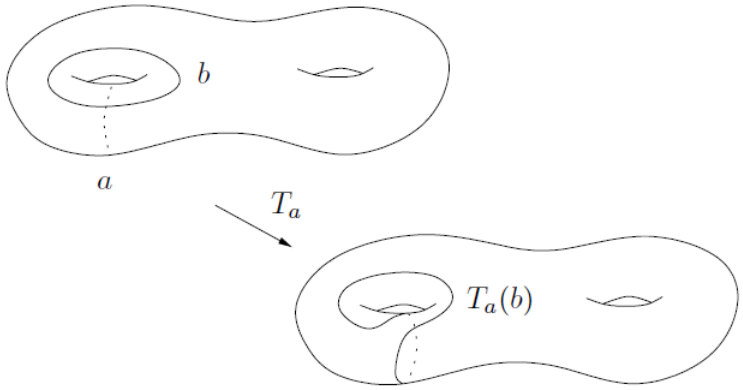
$$\mathrm{Mod}(T^2) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

设 T: $S^1 \times I \to S^1 \times I$, $(\theta, t) \mapsto (\theta - 2\pi t, t)$ 是环带上的同胚，其生成 $Mod(A)$。对于闭曲面 S 和一条简单闭曲线 α，取 α 在 S 中的管状邻域 N 以及一个保定向同胚 ϕ: $A \to N$，我们可以构造一个同胚 $T_\alpha : S \to S$，使得

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}, & if\ x \in N, \\ x, & if\ x \notin N. \end{cases}$$

T_α 的构造依赖于 N 和 ϕ 的选择，而根据 N 在同胚意义下的唯一性，其同伦类不依赖于 N。它也不依赖于

α的同伦类的表示。在我们使用 a 表示 α的同伦类之后，可以明确地将 T_a 视为 Mod(S) 的一个元素，称为沿 a的德恩扭转。它在拓扑上等价于沿 α切割 S，旋转一个边界的管状邻域的 2π，然后重新粘合。



沿着 a 剪开，对 T_a [9] 进行扭转并重新粘合

若 b 和 a 是 S中的互不相交的简单闭曲线，即 $i(a,b) = 0$，则 $T_a(b) = b$；若 $i(a,b) > 1$，也有一种直观的方式来理解 T_a [9]；若 a 不与一点或任何边界分量同伦，则只要 a 不与一点或某个边界分量同伦，$T_a \in$Mod(S) 就是非平凡的。

下面的定理说明了 Mod(S) 的生成集。

定理 18 (Dehn-Lickorish). Mod(S_g) 由有限多个德恩扭转生成。

Dehn 于 1937年 首先证明了 Mod(S_g) 由 $2g(g-1)$ 个德恩扭转生成。随后 Lickorish 独立证明了 Mod(S_g) 可由 $3g-1$ 个德恩扭转生成，如下图 [18] 所示。1979 年，Humphiries 证明了 Mod(S_g) 可由 $2g+1$ 个德恩扭转生成，而 Mod(S_g) 的一个生成集所需的德恩扭转最少数量确实为 $2g+1$。

我们更关注 Mod(S_g) 对曲面第一同调群的作用。设 $\phi \in$ Homeo$^+$(S_g) 诱导出一个同构 $\phi_*: H_1(S_2g;\mathbb{Z}) \to H_1(S_2g;\mathbb{Z})$。如果 $\phi \sim \psi$ 在 Mod(S_g) 中等价，那么自然有 $\phi_* = \psi_*$。因此，Mod(S_g) 中的每个元素都作用于 $H_1(S_g;\mathbb{Z})$，这意味着存在一个表示 Φ: Mod(S_g) $\to$ Aut($H_1(S_g;\mathbb{Z})$)。我们还考虑 $H_1(S_g;\mathbb{R})$ 上的自然辛结构，使得 $\{x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n\}$ 构成 $\mathbb{R}^{2g}$ 的一组基。于是，对偶空间 $(\mathbb{R}^{2g})^\star$ 上的标准辛形式是 2-形式 $\omega = \sum_{i=1}^{g} dx_i \wedge dy_i$。对于任意两个向量 $v = (v_1, w_1, \cdots, v_g, w_g)$ 和 $v' =$

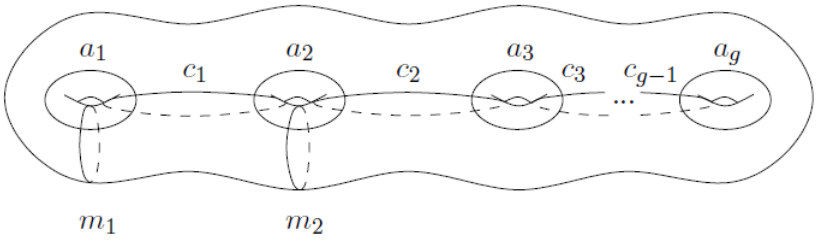


FIGURE 3. $3g-1$ 生成德恩扭转S_g [9]

$(v_1',\ w_1',\ \cdots,\ v_g',\ w_g')$ 在 $\mathbb{R}^{2g}$ 中，我们可以计算

$$w(v,v') = \sum_{i=1}^{g}(v_i w_i' - v_i' w_i).$$

那么，在确定基之后， w 就是唯一的非退化交替双线性形式。线性辛群 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{R})$ 是保持 w 不变的 $\mathbb{R}^{2g}$ 线性变换群。这个定义也可以用矩阵形式表示。

$$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(2g,\mathbb{R}) : A^{\star}\omega = \omega\} = \{A \in \mathrm{GL}(2g,\mathbb{R}) : A^T J A = J)\},$$

其中， J 是 $2g \times 2g$ 整数矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是我们可以定义整数辛矩阵 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) = \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(2g,\mathbb{Z})$，其矩阵显然具有行列式 1。

现在回到表示 $\Phi\colon \mathrm{Mod}(S_g) \to \mathrm{Aut}(H_1(S_g;\mathbb{Z})) \cong \mathrm{GL}(2g,\mathbb{Z})$，使得每个元素 $f \in \mathrm{Mod}(S_g)$ 都保持 $H_1(S_g;\mathbb{R})$中的格 $H_1(S_g;\mathbb{Z})$不变，因此$\Phi(\mathrm{Mod}(S_g)) \subset \mathrm{SL}(2g,\mathbb{Z})$。另一方面，$f$也保持 $H_1(S_g;\mathbb{R})$上的 2-形式不变，该 2-形式由曲面上的简单闭曲线的代数交数定义。因此， $\Phi(\mathrm{Mod}(S_g)) \subset \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{R})$，这意味着我们实际关注的是辛表示

$$\Phi : \mathrm{Mod}(S_g) \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}).$$

$\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z})$ 的基本辛矩阵定义如下。设 σ 是 $\{1,2,\cdots,2g\}$ 的一个交错排列，它对每个 $2i$ 的元组进行置换，并且 $2i-1$ 对于 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ g$。

那么基本辛矩阵

$$\mathrm{SE}_{ij} = \begin{cases} I_{2g} + e_{ij} & if\ i = \sigma(j), \\ I_{2g} + e_{ij} - (-1)^{i+j} e_{\sigma(j)\sigma(i)} & if\ i \neq \sigma(j), \end{cases}$$

矩阵 e_{ij} 是这样一个矩阵：当 $i \neq j$ 时，(i, j) 项等于 1，其余各项均为 0。接下来的定理给出了整数辛矩阵的一个生成集。

定理 1 **9** ([23]). $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ 由所有基本辛矩阵 $\{\mathrm{SE}_{ij}\}$ 生成 .

Burkhardt 于 1890 年初给出了 $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ 的另一组生成元。设 $\mathbb{Z}^4$ 是由 x_1, y_1, x_2, y_2 张成的向量空间，则 $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ 可由以下四类变换生成。

$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 + y_1, y_1, x_2, y_2)$,

$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (y_1, -x_1, x_2, y_2)$,

$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 - y_2, y_1, x_2 - y_1, y_2)$,

$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_2, y_2, x_1, y_1)$.

当 $g > 2$ 时，我们可以添加与最后一类相似的变换，从而构成 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ 的一个生成集。

5. Equivalence of monodromies for $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^2$-manifolds

在构建四维几何与有限生成完备化的联系过程中涉及某些几何群性质之后，我们可以考察塞弗特四维流形的有限剩余刚性。实际上，基于 Funar[11]和 Hempel[15] 的工作，人们提出了反例，其基本群包含 $\mathbb{Z}$作为直因子。但我们仍然关注基于双曲 2-轨形的塞弗特四维流形，其基本群包含唯一的 $\mathbb{Z}^2$ 正规子群，并且该子群在有限生成完备化 [20]之间的同构下保持不变。Ue 定义的四维塞弗特不变量的有效表达取决于某人的基本群的生成元选择，其中包括轨形亏格对纤维的作用，这种作用表示为单值化矩阵。我们计算了 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^2$-流形的单值化等价性，并给出定理 1，从而总能找到 $\pi_1(M)$的一组生成元，确保相应的单值化除一个矩阵外全部平凡。

定理1的证明。根据假设， M 具有以双曲 2-轨形为基底的 Seifert 四维结构。我们可以假设该 2-轨形是曲面 Σ_g ，因为锥点不会影响亏格。非平凡单值化意味着，在作为纤维基本群的 $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ 上存在一种相应的非平凡 $\mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma_g)]$- 模结构。于是单值化矩阵 A_i, B_i 都是某个公共矩阵 Q 的幂，该矩阵是周期性的，且共轭于

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$（在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中）。固定 $\pi_1(\Sigma_g)$ 的一组生成元 $\{x_1, y_1, \cdots, x_g, y_g\}$ 后，我们假设这些矩阵都属于第一类，使得 $A_i = Q^{a_i}$ 和 $B_i = Q^{b_i}$ 是阶为 4 的 Q 的幂。于是，单值化矩阵与上同调群之间存在自然对应。

$$\begin{array}{ccc} \{\text{The monodromy matrices of } M\} & \longrightarrow & H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{2g} \\ (A_1, B_1, \cdots, A_g, B_g) & \longmapsto & (a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g) \end{array}$$

通过选取 Σ_g 的另一组生成元，存在 $\phi \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$，使得$\phi(x_1)$ $\phi(y_1)$ $\cdots$， $\phi(x_g)$ $\phi(y_g)$ 生成 $\pi_1(\Sigma(g))$。随后，与它们的单值化相关的幂 $(a_1', \cdots, b_g')$ 和 $(a_1, \cdots, b_g)$ 满足：存在一个辛矩阵 $P \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，使得

$$(a_1', \cdots, b_g')^T = P \cdot (a_1, \cdots, b_g)^T,$$

这确实是不同生成元下单值化等价的等价条件。于是，对 M 的单值化重新分类已转化为计算 $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 在 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 作用下的轨道。由于曲面群上同调的有限循环系数群，Burkhardt 给出的第一类和第二类变换保证，任意五元组 $(a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{2g}$ 都可以变换为 $(a_1', 0, \cdots, a_g', 0)$，使所有 $b_i = 0$。也就是说，存在 $P_1 \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，使得 $P_1 \cdot (a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g)^T = (a_1', 0, \cdots, a_g', 0)$。接着，第三类和第四类变换使除第一项外的每一项都等于 0；也就是说，存在 $P_2 \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，使得 $P_2 \cdot (a_1', 0, \cdots, a_g', 0)^T = (a_1'', 0, \cdots, 0, 0)$. □

该定理表明，可能的单值化仅限于一个非常狭窄的范围，这意味着非平凡的 $\mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma_g)]$-模 $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ 具有相当严格的约束。

6. Profinite completion and Seifert 4-manifolds

现在我们转而讨论所有单值化矩阵均为平凡矩阵且 M 允许 $\widetilde{\mathrm{SL}_2 \times \mathbb{E}}$ 几何的情形。有理欧拉数正是在这种情形下定义的，它也依赖于纤维的框架。我们证明，有限生成完备化可以确定有理欧拉数，且仅差一个自然的 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$-作用。

$\widetilde{\text{定理}}$ 20. 设 M 和 N 是两个具有 $\mathrm{SL}_2 \times \mathbb{E}$ 几何且有限生成完备化同构的塞弗特四维流形。那么，分别存在 $\pi_1(M)$和 $\pi_1(N)$的生成元组，使得相应的 $e(M) = e(N) = (0, c) \in \mathbb{Q}^2$。

证明。我们将 M 和 N 的底轨形分别记为 B_1 和 B_2 。已证明，有限生成完备化之间的同构 ϕ: $\pi_1(M) \to \pi_1(N)$ 将 $\widehat{\sqrt{\pi_1}}(M)$ 映至 $\widehat{\sqrt{\pi_1}}(N)$，因为幂零根 $\sqrt{\pi_1}(M)$ 是 $\pi_1(M)$ 中唯一的极大正规 $\widehat{\mathbb{Z}^2}$- 子群；这一点在 profinite 类比中同样成立。因此， $\pi_1(M)$ 实际上是由 $\mathbb{Z}^2$ 对 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(B_1)$ 的一个扩张，而 ϕ 诱导了幂零根之间的同构 $\phi: \widehat{\sqrt{\pi_1}(M)} \to \widehat{\sqrt{\pi_1}(N)}$，以及它们的商群之间的同构 $\bar{\phi}: \pi_1^{\mathrm{orb}}(B_1) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(B_2)$。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}^2} & \longrightarrow & \widehat{\pi_1(M)} & \longrightarrow & \widehat{\pi_1^{\mathrm{orb}}(B_1)} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\phi}} & & \\ 1 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}^2} & \longrightarrow & \widehat{\pi_1(N)} & \longrightarrow & \widehat{\pi_1^{\mathrm{orb}}(B_2)} & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

福克斯群彼此之间具有有限生成商刚性，这基于 [5], 的工作；这项工作 $\bar{\phi}$ 实际上证明了： $\pi_1^{\mathrm{orb}}(B_1) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(B_2)$ 诱导出同胚$B_1 \cong B_2$ ，因为它们都是非球面。

固定生成元后， $\pi_1(M)$的群表示具有如下形式:

$$\pi_1(M) = \langle u_1, v_1, \cdots, u_g, v_g, x_1, \cdots, x_r, l, h \mid x_1 \cdots x_r \prod [u_1, v_1] \cdots [u_g, v_g] = l^a h^b, \\ x_i^{m_i} l^{a_i} h^{b_i} = 1, \ < l, h > \in Z(\pi_1(M)) \rangle$$

其中， u_1、 $\cdots$、 v_g分别对应 B_1中的亏格，而 x_1、 $\cdots$、 x_r与 B 中的锥点有关，其纤维类型由塞弗特不变量（m_i、 a_i、 b_i）描述。若我们选取不同的纤维标架，作为$\sqrt{\pi_1}(M)$的另一组生成元，使得 $\sqrt{\pi_1}(M) = \langle l', h' \rangle$且（$l'$、 h'） $=$（l、 h）P，其中 $P \in$属于SL(2,$\mathbb{Z}$)。那么，根据基本线性变换，相对塞弗特不变量满足（a_i'、 b_i'）^{T} $=P \cdot$（a_i、 b_i）^{T}。由于有理欧拉数的定义只依赖于塞弗特不变量，因此很容易看出

$$e'(M) = (a' - \sum \frac{a_i'}{m_i}, b' - \sum \frac{b_i'}{m_i}) = e(M) \cdot P^T.$$

那么，我们总能找到一个适当的矩阵 $P \in$ SL(2,$\mathbb{Z}$)，使得在 $(l, h) \cdot P^T$ 的标架下， $e(M)$ 中只有一个非平凡项，这是由于$e(M)$ 的有理性，因此我们有

$$e(M) \equiv (0, b) \in \mathbb{Q}^2 \bmod \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

另一方面，假设 M' 是 M 的指数最小的覆盖空间 d ，且 M'是某个曲面上的 Seifert 4-流形。那么， M'的底轨形 B'实际上是 B 的一个指数为 d的曲面覆盖。我们选择与 $\sqrt{\pi_1}(M)$中的标架相一致的 $\sqrt{\pi_1}(M')$的标架，然后得到

$$e(M') = d \cdot e(M) = (0, z) \in \mathbb{Z}^2.$$

在有限生成群世界中，$\pi_1(M')$是 $\pi_1(M)$的一个指数为 d的闭正规子群。因此， $\pi_1(N)$中必定存在一个指数为 d的正规子群 $\pi_1(N')$，使得 $\pi_1(M') \cong \pi_1(N')$。根据第一贝蒂数 b_1的有限生成群不变性， $\pi_1(N)$总存在一组生成元，使得相应的塞弗特不变量满足 $e(N') = e(M') = (, z) \in \mathbb{Z}^2$，这证明了

$$e(M) = \frac{1}{d} \cdot e(M') = \frac{1}{d} \cdot e(N') = e(N) \in \mathbb{Q}^2.$$

□

当所有单值化都平凡时，有限生成群之间的同构会诱导轨形基本群上同调的一个作用。设 M 是一个具有平凡单值化、且底空间为双曲 2-轨形 B的 $\mathrm{SL}_2\times\mathbb{E}$-流形或 $\mathbb{H}^2\times\mathbb{E}^2$-流形，则其基本群是由 $\mathbb{Z}^2$ 被 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(B)$ 中心扩张得到的群。以下分析正是 Wilkes 关于三维塞弗特纤维空间 [39]的结果在四维塞弗特版本中的对应，并基于经典群上同调理论。群 Q 被群 N 中心扩张，满足以下短正合列

$$1 \to N \to G \to Q \to 1,$$

使得 N 在 G 中的像位于 G的中心。我们称两个扩张 G 和 G'（它们都是由 N 对 Q 进行的中心扩张）作为扩张等价，当它们满足以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

由 N 对 Q进行扩张所得的等价类，与基本群同调中的 $H^2(Q, N)$ 元素一一对应。接着，设 $Q = \langle x_1, \cdots, x_n | r_1, \cdots, r_m \rangle$的群表示为 $F = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$，其中 $F = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$是由相同的 n个生成元生成的自由群，而 R是所有关系 $\{r_1, \cdots, r_m\}$的正规闭包，由此得到短正合列

$$1 \to R \to F \to Q \to 1,$$

并且重要的是，存在由Serre谱序列诱导的长正合列

$$0 \to H^1(Q; N) \to H^1(F; N) \to (H^1(R; N))^F \to H^2(Q; N) \to H^2(F; N)$$

其中，$(H^1(R; N))^F$ 是 $H^1(R; N)$ 中在 F 的共轭作用下保持不变的元素。

$$(H^1(R; N))^F \cong H^1(R/[R, F]; N)$$

最后一项 $H^2(F; N) = 0$，因为 F是自由群，所以同态 $(H^1(R; N))^F \to H^2(Q; N)$ 是满射。对于任意扩张 $\xi \in H^2(Q; N)$，我们总可以考虑它的原像 $\zeta \in H^1(R/[R, F]; N)$，这样表达起来更清晰。自同构群

分别通过 Q和 N对 $H^2(Q;N)$ 诱导左/右作用，这引出了我们问题的核心：在允许 Q 和 N存在非平凡同构的情况下，两个中心扩张何时作为群同构？这些条件在有限生成完备化以及转化为塞弗特不变量后是否仍然成立?

群 $Q=\pi_1^{\mathrm{orb}}(B)$ 是轨形基本群，且 $N\cong\mathbb{Z}^2$，接下来我们考虑中心扩张

$$1\to\mathbb{Z}^2\to\pi_1(M)\to Q\to 1$$

以及与 $H^2(Q;\mathbb{Z}^2)$ 的对应关系。根据 2-轨形群的良性，当系数为有限 $\mathbb{Z}[Q]$-模时， Q 的上同调与其有限生成完备化的上同调同构。幸运的是，有限生成完备化之间的同构 $\pi_1(M)\cong\pi_1(N)$ 保持幂零根不变，而幂零根正是纤维的有限生成完备化。另一方面，对于每个 $t\in\mathbb{Z}$， $\mathbb{Z}^2$ 都有唯一的 t^2-指数子群，其商群同构于 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2$ 。于是 $\widehat{\pi_1\ M}(\ )\cong\widehat{\pi_1\ N}(\ )$ 也在这些 t^2-指数正规子群之间诱导出同构

$$G=\widehat{\pi_1(M)}/\overline{\langle l^t,h^t\rangle}\cong\widehat{\pi_1(N)}/\overline{\langle l'^t,h'^t\rangle}\cong G'$$

其中 G,G' 是 $\widehat{Q}$ 以 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2$, 为核的中心扩张，它对应于上同调元素 $\xi_t,\xi_t'\in H^2(\widehat{Q},(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)\cong H^2(Q,(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)$。由 $\widehat{Q}$ 和 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2$ 的自同构所诱导的上同调作用将 ξ_t 映为 ξ_t'。此外，作为 Q 以 $\mathbb{Z}^2$ 为核的两个扩张， $\pi_1(M)$ 和 $\pi_1(N)$ 分别对应于两个元素 $\xi,\xi'\in H^2(Q,\mathbb{Z}^2)$，考虑 ξ_t 和 ξ_t' 作为 $H^2(Q,(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)$ 中的元素时，它们满足如下满射。

$$\begin{array}{ccc}H^2(Q,\mathbb{Z}^2) & \longrightarrow & H^2(Q,(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)\\ \xi & \longmapsto & \xi_t\end{array}$$

$\pi_1(M)$的群表示已在上一节给出，这同样适用于具有平凡单值的$\mathbb{H}^2\times\mathbb{E}^2$-流形。底轨形$B$的轨形基本群为 $Q=\pi_1^{\mathrm{orb}}(B)=\langle u_1,\cdots,v_g,x_1,\cdots,x_r|x_i^{m_i}=1,x_1\cdots x_r\prod[u_i,v_i]=1\rangle$。于是，短正合列 $1\to R\to F\to Q\to 1$ 对应于 Q的生成元和生成关系。实际上， $R/[R,F]$ 是由 $y_0=x_1\cdots v_g^{-1}$和 $y_i=x_i^{m_i}$张成的自由 $\mathbb{Z}$-模，使得 $\pi_1(M)$表示 $\pi_1(M)$的上同调元素 $H^2(Q,\ \mathbb{Z}^2)$在$(H^1(R;\ \mathbb{Z}^2))^F\cong\mathrm{Hom}(R/[R,F],\ A)$中有一个原像，因为

$$y_0\mapsto(a,b),\ \ y_i\mapsto(-a_i,-b_i).$$

需要指出的是，这种塞弗特四维流形之间的对应关系也适用于非平凡的单值化。回到群上同调，由阿贝尔核 A 对群G 的扩张与函数 $f\colon G\times G\to A$ 相关联，而该函数可证明是一个 2-余循环。

$$0\to A\to^i E\to^\pi G\to 1$$

给出一个集合论截面 $s: G \to E$ 使得 $\pi s = id_G$后， f的定义描述了 s 成为同态这一条件的缺失，即该扩张是分裂的。 f 的具体定义如下:

$$s(g)s(h) = i(f(g,h))s(gh)$$

对于任意 g, $h \in G$。然后，对于经典截面 $s: G \to E$，使其以规范方式将商群 G 中的每个生成元映射到 E，并将 1_G 映射到 1_E。然后， f的定义明确表明，在我们的问题中，与 $l^{a_i}h^{b_i}$ 在$A = \mathbb{Z}^2$ 中的$y_i = x_i^{m_i}$相对应的生成关系，以及与 $l^a h^b$ 相对应的 $y_0 = x_1 \cdots v_g^{-1}$，这对于进一步计算很有用。

现在我们通过以下结果考察 Q 的自同构，以说明特定条件的性质。

定理 21 ([5])。 假设 G 是一个有限生成的福克斯群。那么， G 的每个有限$\widehat{}$子群都共轭于 G的某个有限子群；此外，如果 G 的两个极大有限$\widehat{}$子群在 G中共轭，那么它们已经在 G 中共轭。

$\widehat{}$Then following 定理 depicts the 自同构 of Q.

命题 22 ([39])。 设 B 是一个双曲 *2*-轨形，且

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(B) = \langle x_1, \cdots, x_r, u_1, \cdots, v_g | x_i^{m_i} = 1, x_1 \cdots x_r \prod [u_i, v_i] = 1 \rangle,$$

$\frown$那么，其有限生成完备化 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(B)$ 的自同构群会将 a_i 映到$a_i^{k_i}$的某个共轭，使得 k_i 是与 m_i互素的某个整数。

最后，我们讨论在 $H^2(\widehat{Q},(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)$上诱导的作用，以及该作用如何延续到有限生成完备化中。

$\widehat{}$**命题 23**。 设 ϕ 是如上所述的 Q 的一个同构。那么，由 ϕ 诱导的 ϕ^* 在 $H^2(\widehat{Q},(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)$ 上的作用实际上是乘以某个有限生成整数 $\kappa \in \mathbb{Z}$，使得对于任意 $\kappa \equiv k_i$ 模 m_i, $1 \le i \le \kappa$ 。

证明。 本命题主要依赖于如下事实：设 $Q = \pi_1^{\mathrm{orb}}(B)$也具有如上的群表示。根据 Wilkes 的工作 [39], ，存在一个由自由 $\mathbb{Z}[Q]$-模构成的 $\mathbb{Z}$的投射分解。

$$C_3 \to C_2 \to C_1 \to C_0 \to \mathbb{Z}.$$

这一整 个构造基于 Q 的凯莱图及其自然的 $\mathbb{Z}[Q]$ 作用 .

假设 $F = F(x_i, u_i, v_i)$ 是由 Q and$R = \mathrm{Ker}(F \to Q)$ 的相同生成元生成的自由群，那么可通过设定 $C_0 = \mathbb{Z}Q$ 构造一个潜在的投射分解，其中 $C_0 = \mathbb{Z}Q$ 是由 Cay(Q) 中所有点生成的自由 $\mathbb{Z}$-模。由 Q 作用于 Cay(Q) 的左平移也提升到 C_0。并定义 $\epsilon : \mathbb{Z}Q \to \mathbb{Z}$ 为求值映射。

令 $C_1 = \mathbb{Z}Q\{\bar{x}_i, \bar{u}_j, \bar{v}_j\}$ 由 Cay(Q) 中所有起点为 1 的边生成。那么 C_1 是由所有 $\bar{x}_i$, $\bar{u}_j$, $\bar{v}_j$ 生成的自由 $\mathbb{Z}[Q]$-模，它实际上表示 Cay(Q) 中道路的所有线性组合。接着，部分映射将每条道路映射到其终点减去起点。容易验证 $\epsilon d_1 = 0$ 且 Ker(ϵ) $= Im(d_1)$。

令 $C_2 = \mathbb{Z}Q\{y_0, \cdots, y_r\}$ 由所有关系 $y_0 = x_1 \cdots x_r \prod[u_i, v_i], y_1 = x_1^{m_1} \cdots, y_r = x_r^{m_r}$ 生成。于是， C_2 可视为 Cay(Q) 中所有回路的集合，其中 Q 通过左平移作用。部分映射 d_2 : $C_2 \to C_1$ 将每个生成元映射为构成该回路的所有边之和，例如

$$\begin{aligned} d_2(y_i) =& \bar{x}_i + x_i \cdot \bar{x}_i + \cdots + x_i^{m_i - 1} \cdot \bar{x}_i \\ d_2(y_0) =& \bar{x}_1 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 x_2 \cdot \bar{x}_3 + \cdots + x_1 \ldots x_{r-1} \cdot \bar{x}_i \\ & + x_1 \ldots x_r \cdot \bar{u}_1 + \cdots - x_1 \ldots x_r [u_1, v_1] \cdots [u_g, v_g] \bar{v}_g. \end{aligned}$$

这也保持了 $ker(d_1) = Im(d_2)$。

经过一些计算，我们可以构造 $C_3 = \mathbb{Z}Q\{z_1, \cdots, z_r\}$，使得 z_i 对应于关系 y_i，而 $d_3(z_i) = (x_i - 1) \cdot y_i$ 与 $ker(d_2) = Im(d_3)$ 一起构成由 $\mathbb{Z}Q$-模组成的 $\mathbb{Z}$ 的投射分解。

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$根据 [39] 的工作，有限剩余模 C_i 构成由 $\mathbb{Z}[[Q]]$-模组成的 $\mathbb{Z}$ 的投射分解，其中有限剩余生成元与离散生成元相对应。于是， ϕ 诱导链映射 $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\phi_\sharp : C_i \to C_i$，以及上同调群的同态 ϕ^*。

为了使下面的图表交换，

$$\begin{array}{ccccccccc} \widehat{C_3} & \xrightarrow{d_3} & \widehat{C_2} & \xrightarrow{d_2} & \widehat{C_1} & \longrightarrow & \widehat{C_0} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi_\sharp} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_\sharp} & & \\ \widehat{C_3} & \xrightarrow{d_3} & \widehat{C_2} & \xrightarrow{d_2} & \widehat{C_1} & \longrightarrow & \widehat{C_0} \end{array}$$

$\widehat{}$当 $1 \le i \le r$ 时，我们会为某个 $g_i \in Q$ 选择 $\phi_\sharp(y_i) = k_i g_i \cdot y_i$，因为 ϕ 将 x_i 映射为 $\widehat{Q}$ 中 $x_i^{k_i}$的某个共轭。

在对 $\widehat{C_i} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ 应用函子 $\widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}[[\widehat{Q}]]} -$ 以计算 H^2(Hom$_{\widehat{\mathbb{Z}}[[\widehat{Q}]]}(\widehat{C_i}, (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)$ 后，我们得到以下交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}[[\widehat{Q}]]} \widehat{C_3} & \xrightarrow{0} & \widehat{\mathbb{Z}}\{y_0, \cdots, y_r\} & \xrightarrow{d_2'} & \widehat{\mathbb{Z}}\{\bar{x}_i, \bar{u}_j, \bar{v}_j\} & \xrightarrow{0} & \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}[[\widehat{Q}]]} \widehat{C_0} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi_\sharp} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_\sharp} & & \\ \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}[[\widehat{Q}]]} \widehat{C_3} & \xrightarrow{0} & \widehat{\mathbb{Z}}\{\bar{x}_i, \bar{u}_j, \bar{v}_j\} & \xrightarrow{d_2'} & \widehat{\mathbb{Z}}\{\bar{x}_i, \bar{u}_j, \bar{v}_j\} & \xrightarrow{0} & \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}[[\widehat{Q}]]} \widehat{C_0} \end{array}$$

$\widehat{}$随着 Q-作用的减弱以及满足以下条件的链映射

$$d_2'(y_i) = m_i x_i, \ d_2'(y_0) = x_1 + \cdots + x_r, \ \phi_\sharp(x_i) = k_i x_i, \ \phi_\sharp(y_i) = k_i y_i.$$

我们仍然不知道 $\phi_\sharp(y_0)$ 的形式，可以假设其为 $\phi_\sharp(y_0) = \kappa y_0 + \sum \mu_i y_i$其中 κ，$\mu \in \mathbb{Z}$。那么，根据上述图表的交换性，对每个满足以下条件的 $1 \leq i \leq r$

$$\kappa + m_i \mu_i = k_i.$$

然后，对于任意 $t \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(-,(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)$- 应用于该图，即可得到一个新的图示

$$\begin{array}{ccccc} \longleftarrow & (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2\{y_0^*, \cdots, y_r^*\} & \xleftarrow[d^2]{} & (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2\{\bar{x}_i^*, \bar{u}_j^*, \bar{v}_j^*\} & \longleftarrow \\ & \uparrow{\scriptstyle \phi^\sharp} & & \uparrow{\scriptstyle \phi^\sharp} & \\ \longleftarrow & (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2\{y_0^*, \cdots, y_r^*\} & \xleftarrow[d^2]{} & (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2\{\bar{x}_i^*, \bar{u}_j^*, \bar{v}_j^*\} & \longleftarrow \end{array}$$

水平映射使我们能够计算 $H^2(\widehat{Q},(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)$，而垂直映射则诱导上同调群之间的同态。现在，上链映射如下

$$\begin{aligned} \phi^\sharp(y_0^*) &= \kappa y_0^* \\ \phi^\sharp(y_i^*) &= \mu_i y_0^* + k_i y_i^* \\ d^2(\bar{x}_i^*) &= y_0^* + m_i y_i^* \\ d^2(\bar{u}_0^*) &= d^2(\bar{v}_0^*) = 0 \end{aligned}$$

因此，对于与某个 Seifert 4-流形相关联的任意 2-余循环 $\xi = (a,b)y_0^* - \sum (a_i, b_i) y_i^*$，我们有

$$\begin{aligned} \phi^*([\xi]) = \left[\phi^\sharp(\xi)\right] =& [(\kappa(a,b) - \sum \mu_i (a_i,b_i)) y_0^* - \sum k_i (a_i,b_i) y_i^*] \\ =& [\kappa((a,b)y_0^* - \sum (a_i,b_i) y_i^*) - \sum \mu_i (a_i,b_i)(y_0^* + m_i y_i^*)] \\ =& \kappa[\xi] \end{aligned}$$

□

现在，只需证明两个 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^2$-流形的有限生成完备化同构，当且仅当它们的塞弗特不变量分别为 (m_i, a_i, b_i) 和 (m_i, ka_i, kb_i)，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 是与上述有限生成整数相关的某个整数。

定理 2 的证明。 根据上述讨论，M 和 N 的基本群分别对应于 2-余循环 $\xi, \xi' \in H^2(Q, \mathbb{Z}^2)$。设 M 的塞弗特不变量为 $((m_i, a_i, b_i),(a,b))$，那么 ξ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}B}(C_2, \mathbb{Z}^2)$ 中的提升为

$$\xi = [(a,b)y_0^* - \sum (a_i, b_i) y_i^*],$$

这与 N 类似。而 ξ，ξ' 对应于 $\xi_{i,\ n} \in H^2(\widehat{Q},\ (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)$。我们用 $\phi\colon \widehat{\pi_1\ M}(\ ) \to \widehat{\pi_1\ N}(\ )$ 表示该同构，因此存在一系列满射 $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Z}}^2) \to \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$

使得每个 $\phi|_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ 都与一系列矩阵 $\{A_t \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})\}$相关联。然后， $\phi|_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ 和$_ \frown \frown \phi$：$Q \to Q$ 诱导了上同调上的作用，使得存在满足条件 $A_t \cdot \kappa\xi_{t,1} = \xi_{t,2}$ 的 $\kappa \in \mathbb{Z}$。

对于具有 $\mathrm{SL}_2 \times \mathbb{E}$– 几何的流形，我们可以定义一个群同态，将 2-余循环与欧拉数联系起来。令 s 足够大，使得 $t = se\prod m_i$，然后我们定义 E： $H^2(\hat{Q}, (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2) \to (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2$，满足

$$E((p,q)y_0^* - \sum(p_i,q_i)y_i^*) = (p,q)\prod m_i - \Sigma(p_i,q_i)\prod_{j\neq i} m_j.$$

容易看出， $E(\kappa\xi) = \kappa E(\xi)$，并且它们与 $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Z}}^2)$ 的作用也可交换。根据前面的讨论，我们总能为 $\pi_1(M)$ 和 $\pi_1(N)$ 找到生成集，使得$e(M) = e(N) = (0,c) \in \mathbb{R}$，且 $E(\xi_t,2) = (0,c)\prod m_i$ 模 t。接着，我们对 $\sqrt{\pi_1(M)}$ 的生成元（l,h）作交替变换，使其由 $\bar{\phi}^{-1}\cdot(l,h)$ 生成。现在， $E(A_t\ \kappa\xi_t,1) = A_t A_t^{-1}\cdot\kappa(0,c)\cdot\prod m_i = (0,c)\cdot\prod m_i = E(\xi_t,2)$ 模 t。于是，对于任意 s， $\kappa - 1 \equiv 0$ 模 s 成立，当且仅当 $\kappa = 1$，从而得到有限剩余刚性。

实际上，我们总可以在 $\pi_1(N)$ 中选择纤维生成元，以减小 A_t。由于 $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Z}}^2)$ 是剩余有限的，现在可以将 $\phi|_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ 构造成恒等映射。于是，对于任意 $t \in \mathbb{N}$，链映射满足$\kappa\xi_{t,\ 1} = \xi_{t,\ 2}$。取 $t = \prod m_i$，则在 $H^2(\widehat{Q}, (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2)$ 中有 $\kappa\xi_{t,\ 1} = \xi_{t,\ 2}$。设 $k \in \mathbb{Z}$ 为满足 $k \equiv \kappa \mod \prod m_i$ 的整数。那么 M_2 的塞弗特不变量必为 $(m_i,\ ka_i,\ kb_i)$。□

关于有限剩余刚性，仍有许多类型的塞弗特四维流形尚未得到解决，因为纤维的单值化并非平凡，导致π_1–纤维具有非平凡的模结构；这也是我们下一阶段的研究工作。

数据可用性声明

本手稿没有相关数据。

References

1. I. Agol. 虚拟 Haken 猜想。附录由 Agol、Daniel Groves 和 Jason Manning 撰写。《数学文献》18 (2013), 1045–1087。 2. M. Asada 关于曲面群的无中心商群。《代数学通讯》29(7) (2001), 2871–2875。 3. M. Aschenbrenner、S. Friedl 和 H. Wilton. 三维流形群。EMS 数学讲座丛书。欧洲数学学会（EMS），苏黎世，(2015)。 4. M. Boileau 和 S. Friedl. 三维流形群的有限群完备化、纤维化性与 Thurston 范数。《接下来是什么？： William P. Thurston 的数学遗产》，《数学年刊研究》205 (2020), 21–44。 5. M. R. Bridson、M. D. E. Conder 和 A. W. Reid. 通过有限商群确定福克斯群。《以色列数学杂志》214 (2016), no. 1, 1–41。 6. M. R. Bridson、D. B. McReynolds、A. W. Reid 和 R. Spitler. 绝对有限生成刚性与双曲几何。《数学年刊》(2) 192 (2020), no. 3, 679–719。

7. M. R. Bridson 和 A. W. Reid. 有限剩余刚性、纤维化与八字结。《接下来是什么？： William P. Thurston 的数学遗产》，《数学年刊研究》205 (2020), 45–64。 8. M. Dehn. 群论与拓扑学论文集。Springer-Verlag，纽约，(1987)。译自德文并附有导言。 9. B. Farb 和 D. Margalit. 映射类群入门。普林斯顿大学出版社 (2012)。 10. R. Filipkiewicz. 四维几何。博士论文，华威大学 (1984)。 11. L. Funar. 拓扑量子场论不变量无法区分的环面丛。几何与拓扑 17 (2013), no. 4, 2289–2344。 12. M. Gromov. 双曲群。《群论论文集》，Springer (1987)。 13. F. Grunewald、A. Jaikin-Zapirain 和 P. A. Zalesskii. Bianchi 群的上同调良性与有限生成完备化。Duke Math. J. 144 (2008), 53–72。 14. F. Grunewald 和 P. A. Zalesskii. 群的亏格。《代数学杂志》326 (2011), 130–168。 15. J. Hempel. 一些具有相同有限商群的三维流形群。arXiv:1409.3509。 16. J. A. Hillman. 四维流形、几何与纽结。几何与拓扑专著 5 (2002, 2014 年修订)。 17. A. Jaikin-Zapirain. 紧三维流形的纤维化识别。几何与拓扑 24 (2020), 409– 420。 18. W. B. R. Lickorish. 二维流形同胚变换群的一组有限生成元。Proc. Cambridge Philos. Soc., 60:769–778, (1964)。 19. W. L¨uck. 用有限维类比物逼近 L^2-不变量。Geom. Funct. Anal. 4 (1994), 455–481。 20. J. Ma 和 Z. Wang 通过有限生成完备化区分几何。Geometriae Dedicata 216(52), 2022, DOI:10.1007/s10711-022-00712-8。 21. A. I. Malcev. 关于无限矩阵群的同构矩阵表示。（俄文），Mat. Sb. 8 (1940), 405–422 & Amer. Math. Soc. Transl. (2) 45 (1965), 1–18。 22. G. A. Margulis. 半单李群的离散子群。Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 17 (1991)。Springer-Verlag，柏林。 23. J. Mennicke. 关于 Siegel 模群理论。Math. Ann., 159:115–129, (1965)。 24. G. J. Nery. 环面丛基本群的有限群亏格。《代数学通讯》48 (2020), no. 4, 1567–1576。 25. N. Nikolov 和 D. Segal. 有限生成有限群 I：强完备性与一致界。《数学年刊》(2) 165 (2007), no. 1, 171–238。 26. G. A. Noskov、V. N. Remeslennikov 和 V. A. Romankov. 无限群。《代数、拓扑、几何》第17卷（俄文），(1979) 65–157, 308。苏联科学院全联盟科学与技术信息研究所，莫斯科。 27. P. Piwek. 2-轨形群中心扩张的有限剩余刚性性质。预印本。arXiv:2304.01105。 28. P. Piwek、D. Popovi´c 和 G. Wilkes. 通过有限商群区分晶体群。《代数学杂志》565 (2021), 548–563。 29. A. W. Reid. 有限剩余刚性。《2018 年国际数学家大会论文集——里约热内卢》第 II 卷，特邀报告，1193–1216，World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018。 30. L. Ribes 和 P. Zalesskii. 有限群。《数学成果》40，Springer-Verlag (2000)。 31. P. Scott. 三维流形几何。《伦敦数学会会报》15 (1983), 401–487。 32. D. Segal. 多循环群。剑桥大学出版社 (1983)。 33. J. Serre. 伽罗瓦上同调。Springer-Verlag (1997)。 34. P. F. Stebe. 某些福克斯群的共轭可分性。Trans. Amer. Math. Soc. (1972), 163, 173–188。 35. M. Stover. 在 $PU(n,\ 1)$ 中不具有限剩余刚性的格。Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), no. 12, 5055–5062。

36. 上江正明. 关于具有欧几里得底轨道空间的四维塞弗特纤维化. 拓扑盛会（1988），471–523，学术出版社，马萨诸塞州波士顿。37. 上江正明. Thurston 意义下的几何四维流形与塞弗特四维流形 I. 日本数学会杂志 42（1990），第 3 期，511–540。38. 上江正明. Thurston 意义下的几何四维流形与塞弗特四维流形 II. 日本数学会杂志 43（1991），第 1 期，149–183。39. G. Wilkes. 塞弗特纤维空间的有限剩余刚性. 几何奉献 188（2017），141–163。40. H. Wilton 和 P. Zalesskii. 利用有限商群区分几何. 几何与拓扑 21（2017），345–384。41. D. T. Wise. 具有拟凸层级的群的结构. Electron. Res. Announc. Math. Sci. 16（2009），44–55。
School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai, 200433, P. R. China*Email address*: majiming@fudan.edu.cnSchool of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Zhejiang, 321004, P. R.China*Email address*: zxwang22@zjnu.edu.cn