arXiv:2304.01839v1 [math.MG] 4 Apr 2023

瑟斯顿几何中的$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$与$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$线段等视曲面*

G´eza Csima

布达佩斯科技与经济大学数学研究所几何系，匈牙利布达佩斯 M˝uegyetem rkp. 3., H-1111，csgeza@math.bme.hu

2023年4月5日

摘要

本文研究属于 8 种瑟斯顿几何的$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$与$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$几何中的线段等视曲面。基于 [10], 中首次描述的过程，我们能够隐式地给出任意线段的等视曲面。我们大量借鉴了 [41, 42]中发表的计算结果。作为特例，我们研究了这两种几何中的泰勒斯球，称为*Thaloid*。本文将采用 E. Moln´ar 在 [20] 中描述的 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$与 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$射影模型。

1 引言

在瑟斯顿几何中，具有常曲率的几何（欧氏$\mathbf{E}^3$, 双曲$\mathbf{H}^3$, 球面$\mathbf{S}^3$）已得到广泛研究，但另外五种几何——$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$、$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$、$\mathbf{Nil}$、$\mathbf{SL}_2\mathbf{R}$、$\mathbf{Sol}$ ——迄今仅从微分几何和拓扑学的角度进行了深入研究。然而，一些经典概念

*2010年数学主题分类：53A20、53A35、52C35、53B20。关键词和短语：瑟斯顿几何、$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 几何、$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 几何、平移与测地曲线、内角和、等视曲线与曲面、Thaloid

可以通过突出这些几何的美感及其内在结构来加以表述，例如：测地曲线和球面、等距曲面、平移曲线和平移球面、格、测地三角形和平移三角形及其曲面、它们的内角和、由一条线段张成给定角的点的轨迹（等视曲面），以及与常曲率几何中已知结论相似的命题。这些问题尚未成为关注的焦点。

本文探讨 8 种 Thursten 几何（见 [32] 和 [45]）中的 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 空间和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 空间。这主要是因为这两种空间在计算和结果上都呈现出显著的对称性。因此，在接下来的章节中，我们将在介绍适当的记号后，同时考察这两种空间。第 2 节将介绍这两种几何。

在 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 几何中，我们提出这样一个问题：空间中哪些点能看到给定截段所张的给定角，也就是这些点的轨迹是什么。为此，我们需要了解在这些几何中如何连接两点。基本上有三种选择。在相应几何的模型中设想的欧几里得线段虽实用且易于处理，但在某些几何中并无真正的几何意义，例如在$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 中，因此下文不再讨论它。

我们的第二种选择是测地曲线，通常将其定义为任意两个（足够接近的）点之间局部弧长最短的曲线。参数化测地曲线 $g(x(t)\ y(t)\ z(t))$ 的方程组可由黎曼几何的列维-奇维塔理论确定。我们可以假设测地曲线的起点是原点，因为通过适当的平移，我们可以将其变换为任意起点。上述过程将测地曲线表示为一个二阶微分方程的解。

目前为止，第三种也是最后一种选择是平移曲线。在瑟斯顿空间中，可以通过平移以自然的方式引入平移曲线（见 [21, 40]），这些平移将每个点映射到任意一点。考虑原点处的一个单位向量。在开头假定的平移通过其切映射将该向量带到任意一点。如果一条曲线 $t \to (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 在每一点处的切向量恰好是平移后的向量，那么这条曲线就称为 平移曲线。这一假设导出一个一阶微分方程组，因此平移曲线比测地线简单。

我们可以提出这样一个问题：这些曲线是否可能彼此不同？一般而言，答案是肯定的（某些特殊情况除外）：在$\mathbf{Nil}$、$\mathbf{SL}_2\mathbf{R}$ 和$\mathbf{Sol}$ 几何中，它们确实彼此不同。此外，在这些几何中，它们发挥着重要作用，而且往往显得比测地线

更自然（例如参见 [30, 31]）。在其余五种瑟斯顿几何$\mathbf{E}^3$, $\mathbf{S}^3$, $\mathbf{H}^3$, $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$, 中，平移曲线与测地曲线彼此重合。此外，在$\mathbf{E}^3$, $\mathbf{S}^3$和$\mathbf{H}^3$, 中，三种曲线完全相同；而在$\mathbf{SL}_2\mathbf{R}$中，平移曲线在模型中看起来像欧几里得直线，详见 [20]。从现在起，连接两点时，使用相应的平移曲线（或测地曲线），而非欧几里得线段。第 2 节将回顾在 [21]中确定的这些曲线。

在第 3 节中，我们准备了将任意点变换回模型原点的变换矩阵，并回顾了文献 [10], 中所述等视曲线和等视曲面的定义，其中使用的是三角形。采用这种方法，我们可以避免定向带来的问题。文献 [41] 已研究 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 中三角形的内角和。我们可以借鉴这项研究，并使用其中提供的角度计算方法来计算单个内角。总体而言，这种方法似乎能有效确定线段等视曲面的隐式方程。我们将在第 3 节更准确地回顾这一过程；该过程此前已应用于文献 [10] 中的 $\mathbf{Nil}$ 。我们将在 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 中，利用各自的模型将这些曲面可视化；Thaloids 也将作为一种特殊情形加以分析。

2 在 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 几何及其平移曲线上

在 [22] E. Moln´ar 已经证明，齐性三维空间可以在射影三维球 $\mathcal{PS}^3(\boldsymbol{V}^4,\boldsymbol{V}_4,\mathbb{R})$ 中得到统一的诠释。在这项工作中，我们将使用 $S^2\times R$ 和 $H^2\times R$ 的这一射影模型。我们将使用笛卡尔齐次坐标单形 $E_0(e_0)$,$E_1^\infty(e_1)$,$E_2^\infty(e_2)$, $E_3^\infty(e_3)$, $(\{e_i\}\subset V^4$ ，其单位点为 $E(e=e_0+e_1+e_2+e_3))$，它们分别由原点 E_0 和坐标轴的理想点确定。此外，$y=cx$ 与 $0<c\in\mathbb{R}$（或 $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$）定义射影三维球 $\mathcal{PS}^3$ 中的点 $(x)=(y)$（或射影空间 $\mathcal{P}^3$ 中的点，其中相反射线 (x) 和 (−x) 被视为相同）。对偶系 $\{(\boldsymbol{e}^i)\},(\{\boldsymbol{e}^i\}\subset\boldsymbol{V}_4)$，其中 $e_i\boldsymbol{e}^j=\delta_i^j$ 是克罗内克符号，描述了单形平面，尤其是无穷远平面 $(\boldsymbol{e}^0)=E_1^\infty E_2^\infty E_3^\infty$；一般而言，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\frac{1}{c}$ 定义 $\mathcal{PS}^3$ 中的一个平面 $(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{v})$（或 $\mathcal{P}^3$ 中的一个平面）。因此，$0=x\boldsymbol{u}=y\boldsymbol{v}$ 定义了点 $(x)=(y)$ 与平面 $(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{v})$ 的关联，也记作 $(x)I(\boldsymbol{u})$。因此，$S^2\times R$ 可以在仿射三维空间 A^3 中直观呈现。

（因此在 $\mathbf{E}^3$ 中），而 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 的点构成一个开圆锥体，其描述如下:

$$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}=\left\{X(\mathbf{x}=x^i\mathbf{e}_i)\in\mathcal{P}^3:-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2<0<x^0,x^1\right\} \quad (2.1)$$

在此背景下，E. Moln´ar [20] 推导出了在平移作用下任意点处不变的著名无穷小弧长平方表达式，如下所示。

$$\begin{gathered}\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}:\ (ds)^2=\frac{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}{x^2+y^2+z^2}\\ \mathbf{H}^2\times\mathbf{R}:\ (ds)^2=\frac{1}{(x^2-y^2-z^2)^2}\left\{(x^2+y^2+z^2)(dx)^2+\right.\\ +2x(dx)(-2y(dy)-2z(dz))+(x^2+y^2-z^2)(dy)^2+\\ \left.+2yz2(dy)(dz)+(x^2-y^2+z^2)(dz)^2\right\}\end{gathered} \quad (2.2)$$

在这两种几何中，我们引入一种新的坐标系，以便更简洁地表示弧长平方和平移曲线。我们引入$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 的极坐标参数化，以及$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$的柱坐标参数化，其中 $\boldsymbol{V}^4$

$$\begin{gathered}\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}:\ x_0=1,\ x_1=e^t\cos\theta,\ x_2=e^t\sin\theta\cos\phi,\ x_3=e^t\sin\theta\sin\phi\\ -\pi<\phi\leq\pi,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ t\in\mathbb{R}\end{gathered} \quad (2.3)$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}:\quad x_0=1,\quad x_1=e^t\text{双曲余弦 }r,\quad x_2=e^t\text{双曲正弦 }r\text{余弦 }\phi,\quad x_3=e^t\text{双曲正弦 }r\text{余弦 }\phi\\ -\pi<\phi\leq\pi,\ 0\leq r,\ t\in\mathbb{R}\end{gathered} \quad (2.4)$$

其中（θ，ϕ）和（r，ϕ）分别是 $\mathbf{S}^2$ 和 $\mathbf{H}^2$, 的通常极坐标；此外，t 是实分量，即直积 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 中所谓的纤维坐标。令 $x=\frac{x_1}{x_0}$、$y=\frac{x_2}{x_0}$、$z=\frac{x_3}{x_0}$，并将 t 设为 0，描述了 2.3中的单位球面，以及 2.4 中双叶双曲面 $x^2-y^2-z^2=1$ 的 $x>0$ 部分。后一曲面可称为 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 中的单位双曲面。在这两种几何中，$t=\infty$ 将是无穷远处的理想平面（$\mathbf{e}^0$），$t=-\infty$ 将是在 $\mathbf{E}^3$ 模型极限中的原点（$\mathbf{e}_0$）。因子为 e^a 的中心相似变换意味着沿 $\mathbb{R}$ 分量平移 a，并且与 $\mathbf{S}^2$ 和 $\mathbf{H}^2$. 的任意等距变换交换。

那么，使用新的坐标后，弧长平方会更加简单。

$$\begin{gathered}\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}:\ (ds)^2=(dt)^2+(d\theta)^2+\sin^2(\theta)(d\phi)^2\\ \mathbf{H}^2\times\mathbf{R}:\ (ds)^2=(dt)^2+(dr)^2+\sinh^2(r)(d\phi)^2\end{gathered} \quad (2.5)$$

我们可以假设，在两种几何中，平移曲线的起点都是 (1，1，0，0) 点，因为它是上述坐标系的原点。下文中，令函数 $S(t)$ 和 $C(t)$ 在 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 中分别为$\sin(t)$ 和 $\cos(t)$，在 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 中分别为$\sinh(t)$ 和 $\cosh(t)$。然后，由 [21] 给出的平移曲线为：

$$\begin{aligned} x(\tau) &= e^{\tau\sin(v)}C(\tau\cos(v)),\\ y(\tau) &= e^{\tau\sin(v)}S(\tau\cos(v))\cos(u),\\ z(\tau) &= e^{\tau\sin(v)}S(\tau\cos(v))\sin(u),\\ -\pi < u \le \pi,\ &-\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

在上述平移曲线的参数方程中，τ 表示弧长参数；v 表示由曲线的初始方向向量与$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$中单位球面（$x^2+y^2+z^2=1$）原点处(1,1,0,0)的切平面，以及$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$中单位双曲面（$x^2-y^2-z^2=1$）在 A_1处的切平面所形成的角；u 表示由 y 轴与上述初始方向在该切平面上的投影所形成的角（见图1和图2左侧）。

注2.1 *1.* 很容易看出，平移曲线位于一个平面内（见图*1*和图*2*右侧），其方程为：

$$\sin(u)y-\cos(u)z=0 \tag{2.7}$$

2. 将导数中的 τ 替换为*0*，即可得到*2.6*在原点处的切向量，导数为 τ.

$$\mathbf{t}=(\sin(v),\cos(v)\cos(u),\cos(v)\sin(u)) \tag{2.8}$$

定义2.2 点 $d(P_1,P_2)$ 之间的距离定义为上述（见 *2.6*）从 P_1 到 P_2的平移曲线的弧长。

定义2.3 半径为 $R>0$ 且中心位于原点的球面（记作S_O（R）），根据*2.6*分别以通常的经度和纬度参数 u 和 v表示，由以下方程确定：

$$S_O(R):\begin{cases} x(\tau)=e^{R\sin v}C(R\cos v),\\ y(\tau)=e^{R\sin v}S(R\cos v)\cos(u),\\ z(\tau)=e^{R\sin v}S(R\cos v)\sin(u). \end{cases} \tag{2.9}$$

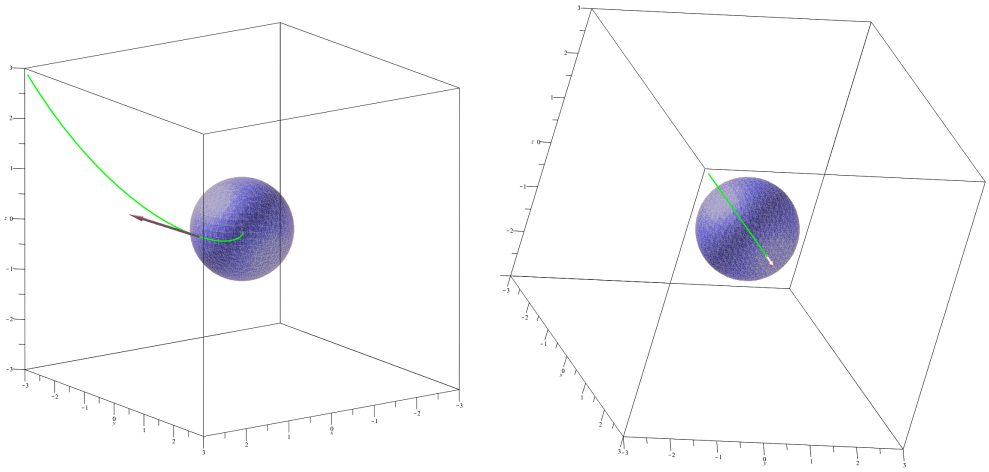


图1：$\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$中的平移曲线

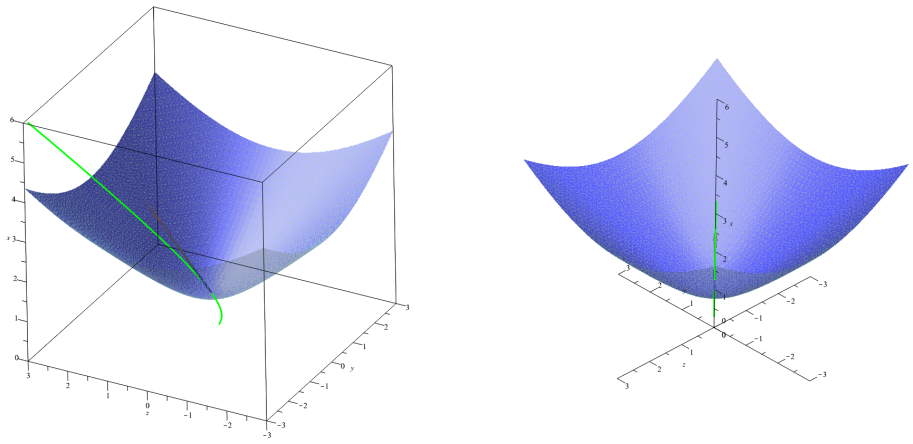


图2：$\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ 中的平移曲线

定义 2.4 在 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 空间中，以 O 为中心、 R 为半径的球面的内部称为球体，记作 $B_O(R)$，即 $Q \in B_O(R)$ 当且仅当 $0 \leq d(O,Q) \leq R$。

2.9 中的参数化使我们能够创建 $S_O(R)$ 的隐式方程：

$$\frac{\log^2(x^2 \pm (y^2+z^2))}{4} + \text{arcC}^2\left(\frac{x}{x^2 \pm (y^2+z^2)}\right) = R^2, \tag{2.10}$$

其中 $\pm$ 和弧C(x) 在$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ $-$ 中为 $+$ 和反余弦(x)，在$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$. 中为反双曲余弦$(x)$。

3 等视曲面

3.1 变换矩阵

下面，我们将描述一系列来自 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 等距变换群的变换，使它们的复合将任意点$P(1,x,y,z)$移回模型的原点，也就是两种几何中的 E_0 $(1,1,0,0)$。这对我们很重要，因为正如弧长平方公式（见 2.5）所示，此时角以其实际大小呈现，而且我们也选择该点作为每条平移曲线的起点。

首先，我们执行一个所谓的纤维平移 $\mathcal{T}$，将点平移到$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 中的单位球面上，并平移到$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$中的单位双曲面上。我们提醒亲爱的读者，$\pm$对于$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$而言是 $+$，而对于$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$而言是。

$$\mathcal{T} = diag\left\{1, \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}, \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}, \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}\right\} \tag{3.1}$$

$$P^{\mathcal{T}} = \left(1, \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}\right) \tag{3.2}$$

然后绕 x 轴旋转，使像的最后一个坐标为零：

$$\mathcal{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} & -\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ 0 & 0 & \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$P^{\mathcal{T}\mathcal{R}_x} = \left(1, \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}, \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}, 0\right) \tag{3.4}$$

可以验证，从 E_0 到 P的平移曲线所在的平面在 $\mathcal{R}_x$ 作用下发生变化，并变为平面 $z = 0$（见 2.7）。然后绕 z 轴旋转，使像的倒数第二个坐标也为零。在这一变换过程中，平移曲线所在的平面保持不变。

$$\mathcal{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}} & -\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}} & 0 \\ 0 & \pm\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$$P^{\mathcal{T}\mathcal{R}_x\mathcal{R}_z} = (1, 1, 0, 0) \tag{3.6}$$

最后，为了使变换后的平移曲线与原平移曲线所在的平面重合，我们应用 $\mathcal{R}_x$ 变换的逆变换。

$$\mathbf{T} = \mathcal{T}\mathcal{R}_x\mathcal{R}_z\mathcal{R}_x^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{x^2 \pm (y^2+z^2)} & -\frac{y}{x^2 \pm (y^2+z^2)} & -\frac{z}{x^2 \pm (y^2+z^2)} \\ 0 & \pm\frac{y}{x^2 \pm (y^2+z^2)} & \frac{xy^2 + z^2\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}{(x^2 \pm (y^2+z^2))(y^2+z^2)} & \frac{xyz - yz^2\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}{(x^2 \pm (y^2+z^2))(y^2+z^2)} \\ 0 & \pm\frac{z}{x^2 \pm (y^2+z^2)} & \frac{xyz - yz^2\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}{(x^2 \pm (y^2+z^2))(y^2+z^2)} & \frac{xz^2 + y^2\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}{(x^2 \pm (y^2+z^2))(y^2+z^2)} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

3.2 等视曲面

众所周知，在欧氏平面中，线段所张的角为给定角度 α **(**$0 < \alpha < \pi$**)** 的点的轨迹，除端点外，是以该线段为公共弦的两段弧的并集。如果该 α 等于 $\frac{\pi}{2}$，则得到泰勒斯圆。将线段替换为另一条一般曲线，便得到等视曲线的欧氏定义：

定义 3.1（[47]）与曲线相交且夹角恒为 α （$0 < \alpha < \pi$）的切线交点的轨迹，称为给定曲线的 α –等视线。夹角为直角的等视曲线称为正交曲线。

注 3.2 有时我们会同时考虑 α–和 $\pi-\alpha$–等视线。因此，对于截段的情形，我们得到两个以该线段为公共弦的圆（不包括线段的端点）。下文将它们称为 α–等视圆。

尽管 Taylor 于 1884年提出了“等视曲线”这一名称（[45]），但在 [47]中可以找到更早研究成果的相关记载。在等视曲线鲜为人知的历史中，我们可以看到拉伊尔（1704年研究旋轮线）和夏斯勒（1837年研究圆锥曲线和外旋轮线）等先驱者的名字。 [47], 介绍了一张关于等视曲线和正交曲线的极具参考价值的表格，但遗憾的是没有准确注明来源。不过，近期仍有相关研究发表，显示这一课题至今仍受关注。 [2] 和 [3], 利用支撑函数研究了闭严格凸曲线的欧几里得等视曲线。论文[14, 49, 50] 探讨了等视曲线为圆或椭圆的欧几里得曲线。欧氏平面几何中的其他等视曲线也得到了深入研究，$\mathbf{E}^2$, 例如参见 [15, 48]。 [11] 和 [33]研究了圆锥曲线的等视曲线。Kunkli 等人也研究了贝塞尔曲线，参见 [13]。许多论文着重探讨等视线的性质，例如 [16, 17, 18],及其中的参考文献。此外，等视线还有一些推广，例如 Odehnal 在 [29] 中提出的等光学曲线，以及 Skrzypiec 在 [28, 34] 中提出的割线光学曲线。

我们可以将最初的问题扩展到空间中：“给定线段所张开的给定角的点的轨迹是什么？”或者与前一个问题等价地问：“对于给定的空间点 A 和 B，使三角形 $ABP\triangle$ 在 P 处的内角为给定角的点 P 的轨迹是什么？”我们用此定义欧几里得空间线段的 α–等视曲面。

定义 3.3 欧几里得空间线段 A_1A_2 的 α 等视曲面，是由满足以下条件的点 P 构成的轨迹：在由 A_1、A_2 和 P 构成的三角形中， P 处的内角为 α. 。如果 α 是直角，则称其为 A_1A_2. 的 ***Thaloid***。

很容易看出，在欧几里得空间中：

定理 3.4 在欧几里得空间中，给定线段所张角为给定角 $\alpha\,(0<\alpha<\pi)$ 或 $\pi-\alpha$ 的点的轨迹，是一个自交环面；该环面由将任意包含该截段的平面内所绘制的 α – 等视角圆绕截段所在直线旋转而得到。 □

注记 3.5 *1.* 上述定理中的环面同时包含给定角度及其补角所对应的等视曲面。在这种情况下，我们

可以轻松地沿自交线分离 $\alpha-$和 $\pi-\alpha-$等视曲面。具体而言，正视曲面是一个以该截段为直径的球面。我们可以将其称为这条线段的 *Thaloid*。

2. 对于其他空间曲线，没有必要考察以上述方式定义的等视曲面，因为如果曲线的曲率不恒为 *0*，那么就存在一个外部点，使得该曲线与该点无法置于同一个平面内。在这种情况下，需要对上述定义进行推广。

有关欧几里得几何中的其他等视曲面，请参见 [8, 9], ，其中我们将等视曲面的定义扩展到其他空间物体。等视曲线的概念可以扩展到其他常曲率平面（双曲平面$\mathbf{H}^2$和球面$\mathbf{S}^2$）。我们在 [5] 和 [6]中研究了这些问题。

定义 3.6 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 或$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ $\alpha-$空间中线段 A_1A_2 的等视曲面，是指满足以下条件的点 P的轨迹：由 A_1、A_2 和 P构成的三角形中，位于 P处的内角为 $\alpha.$。如果 α 是直角，则该曲面称为 A_1A_2.的 *Thaloid*。

我们在此强调，截段本身并不出现在我们的计算中，我们只处理端点。根据这些几何体的齐性，我们可以假设其中一个端点与原点 $A_1=E_0=$ **(1，0，0，0)** 重合，另一个端点为 $A_2=$**(1，** a**，** b**，** c**)**。考虑一个点 $P=$**(1，** x**，** y**，** z**)**，我们可以按照下面所述的过程确定角 $A_1PA_2\angle$。

首先，我们将$\mathbf{T}_P$应用于所有三个点（见 3.7）。此变换保持角 $A_1PA_2\angle$ 不变，并将 P 拉回原点，因此所讨论的角看起来是实际大小。

$$\begin{gathered}\mathbf{T}_P(P)=(1,1,0,0);\\ \mathbf{T}_P(A_1)=\left(1,\frac{x}{x^2\pm(y^2+z^2)},-\frac{y}{x^2\pm(y^2+z^2)},-\frac{z}{x^2\pm(y^2+z^2)}\right);\\ \mathbf{T}_P(A_2)=\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{ax\pm(by+cz)}{x^2\pm(y^2+z^2)}\\ \dfrac{zy(cx-az)-y^2(ay-bx)+z(bz-cy)\sqrt{x^2\pm(y^2+z^2)}}{(x^2\pm(y^2+z^2))(y^2+z^2)}\\ \dfrac{z^2(cx-az)-yz(ay-bx)-y(bz-cy)\sqrt{x^2\pm(y^2+z^2)}}{(x^2\pm(y^2+z^2))(y^2+z^2)}\end{pmatrix}^T\end{gathered}\tag{3.8}$$

为了确定 $A_1A_2P_\triangle$ 处的内角，我们需要从$\mathbf{T}_P(P)$ 出发、分别延伸至点 $\mathbf{T}_P(A_1)$ 和 $\mathbf{T}_P(A_2)$ 的平移曲线的切向量。 $= E_0$. 无需确定参数u, v, τ的精确值，只需计算向量 $\mathbf{t}$ （见 2.8）。

引理 *3.7* 设 *(1,* x, y, z*)* ($x, y, z \in \mathbb{R}$ 和 $x^2+y^2+z^2>0$ 是 $S^2\times R$； $x^2-y^2-z^2>0$, $x>0$ 是 $H^2\times R$ 中点 $P\in S^2\times R$ 或 $P\in H^2\times R$ 的齐次坐标。那么，从 *(1, 1,0,0)* 到 P 的平移曲线具有如下切线:

$$\tau\cdot\mathbf{t}_P=\left(\frac{1}{2}\ln(x^2\pm(y^2+z^2)),\ \frac{y\,\mathrm{arcC}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2\pm(y^2+z^2)}}\right)}{\sqrt{y^2+z^2}},\ \frac{z\,\mathrm{arcC}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2\pm(y^2+z^2)}}\right)}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) \tag{3.9}$$

其中 $\pm$ 和 *arcC(*x*)* 是 $+$ 和 *arccos(*x*)*，适用于 $S^2\times R$；而 *arccosh(*x*)* 适用于 $H^2\times R$，且 τ 是 P 与 E_0. □ 之间的距离

将上述切线公式应用于点 $\mathbf{T}_P(A_1)$ 和 $\mathbf{T}_P(A_2)$，得到构成 P. 处内角的向量。最后，我们可以使用通常的角度公式来确定该角，该公式由两个向量的点积导出。由于公式较长，结果仅以大幅简化后的形式呈现（使用适当的点积和叉积，以及球面／双曲余弦定理（边）），并在以下定理中引入一些记号。

定理 *3.8* 设 $A_1=$*(1, 1, 0, 0)* 和 $A_2=$*(1,* a, b, c*)* 是 $S^2\times R$ 或 $H^2\times R$ 中给定的点， α 是给定的角。若 $a_1=$*(1, 0, 0)*； $a_2=$*(*a, b, c*)*； $p=$*(*x, y, z*)*； A_1、A_2 和 P 沿对应的纤维线在该几何的单位曲面（$S^2\times R$ 中的球面及 $H^2\times R$ 中的双曲面）上的投影分别为$A_1'=A_1$、 A_2'和 P'； d_1和 d_2分别是 P' 到 A_1' 和 A_2' 的距离，且 γ 是 P' 处在 $A_1'A_2'P_\triangle'$ 中的内角（见 $S^2\times R$ 中的 *3* ）；则该 $\overline{A_1A_2}$ 线段的 α 等视曲面方程为

$$\cos(\alpha)=\frac{d_1d_2\cos(\gamma)+\ln\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{p}|}\cdot\ln\frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{p}|}}{\sqrt{\left(\ln^2\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{p}|}+d_1^2\right)\left(\ln^2\frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{p}|}+d_2^2\right)}}.\square \tag{3.10}$$

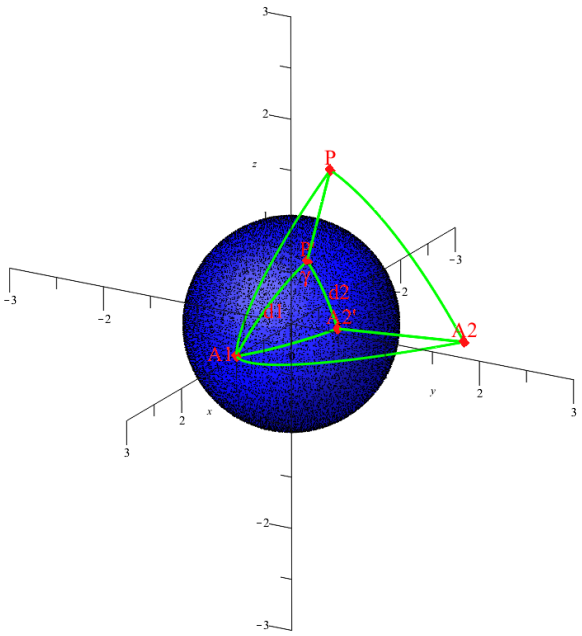


图 3：定理 3.8 的解释图，位于$\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$中，其中 $A_1(1,1,0,0)$,$A_2(2,3,1)$ 和 $P(1,1,2)$

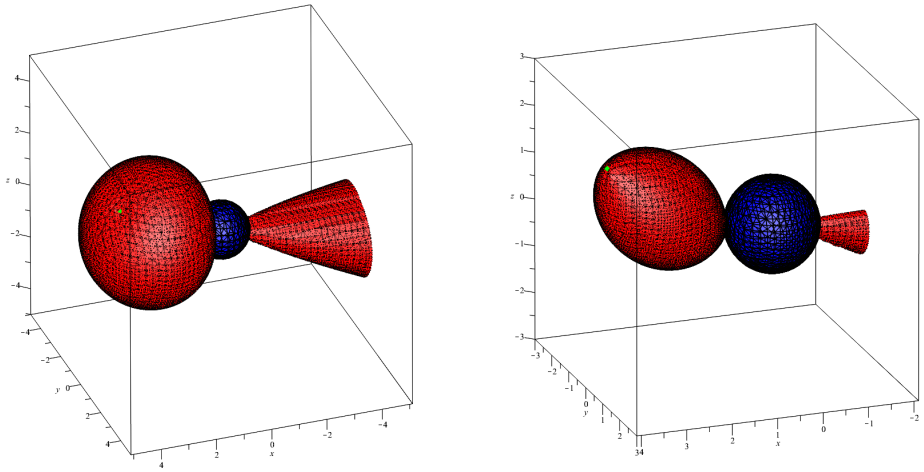


图 4：在 $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$几何中， $A_1(1，1，0，0)$ 和 $A_2(1，4，1，2)$ 线段的等视曲面，$\alpha = 80°$ （左）和 $\alpha = 120°$ （右）

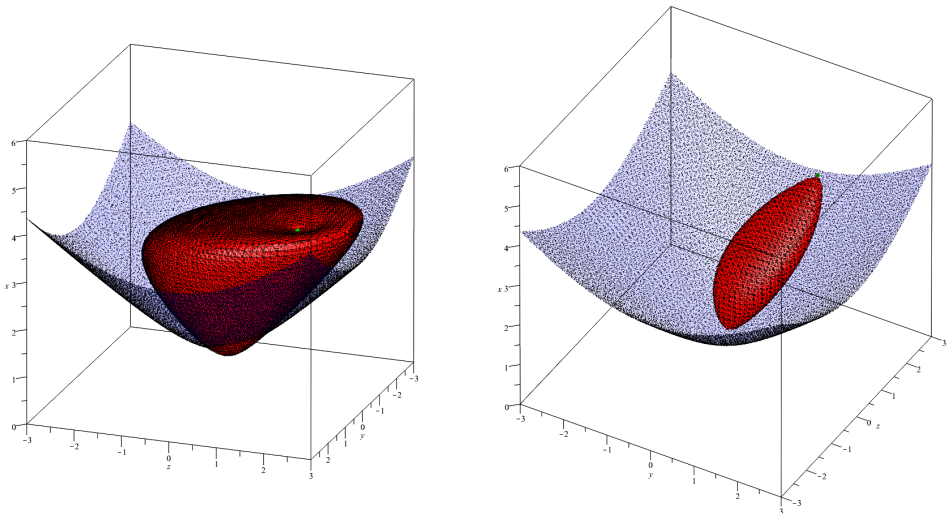


图5：$H^2 \times R$ 几何中 $A_1(1\ A_1, 1\ A_1, 0\ A_1, 0)$ 和 $A_2(1\ A_2, 4\ A_2, 1\ A_2, 2)$ 线段的等视曲面，$\alpha = 75°$（左）和 $\alpha = 120°$（右）

注3.9 如果 A_2 也位于该几何的单位曲面上，即 $|a_2| = 1$，那么将 P 限制在单位曲面 $(|\mathbf{p}| = 1)$ 上，将得到 S^2 或 H^2 几何以及 $\cos(\alpha) = \cos(\gamma)$ 方程。如前所述，$\cos(\gamma)$ 是由余弦定理得到的，因此只需利用距离 d_1、d_2 和 $d_0 = \mathrm{dist}(A_1; A_2)$的正弦和余弦（双曲）函数即可计算。

我们来考察一种特殊情况：线段的端点位于 x 轴上，即 $A_1 = (1, 0, 0, 0)$ 和 $A_2 = (1, a, 0, 0)$. 在这种情况下，线段沿着一条纤维线，在模型中看起来像一条欧几里得线段。将$\mathbf{T}$ 作用于 A_1 和 A_2,可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_P(A_1) &= \left(1, \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, -\frac{y}{x^2+y^2+z^2}, -\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right), \\ \mathbf{T}_P(A_2) &= \left(1, \frac{ax}{x^2+y^2+z^2}, -\frac{ay}{x^2+y^2+z^2}, -\frac{az}{x^2+y^2+z^2}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

根据引理 3.7，我们可以确定平移曲线的$\mathbf{t}_1$ 和$\mathbf{t}_2$ 切线，它们分别绘制到$\mathbf{T}_P(A_1)$和$\mathbf{T}_P(A_2)$

$$\mathbf{t}_1 = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2 \pm (y^2+z^2)}\right), -\frac{y\,\mathrm{arcC}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}\right)}{\sqrt{y^2+z^2}}, -\frac{z\,\mathrm{arcC}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}\right)}{\sqrt{y^2+z^2}} \right),$$

$$\mathbf{t}_2 = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{a^2}{x^2 \pm (y^2+z^2)}\right), -\frac{y\,\mathrm{arcC}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}\right)}{\sqrt{y^2+z^2}}, -\frac{z\,\mathrm{arcC}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}\right)}{\sqrt{y^2+z^2}} \right) \tag{3.12}$$

由于我们关注 Thaloid，其中$\mathbf{t}_1$ 和$\mathbf{t}_2$ 之间的角为$\frac{\pi}{2}$， 因此我们认为它们的点积为零:

$$\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{x^2 \pm (y^2+z^2)}\right)\ln\left(\frac{a^2}{x^2 \pm (y^2+z^2)}\right) + \mathrm{arcC}^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm (y^2+z^2)}}\right) = 0 \tag{3.13}$$

为了更好地理解上述隐式曲面的性质，我们来应用一个平移，它将 A_1A_2 拉回到 A_1.。在这种情况下，平移曲线 A_2 的参数化非常简单：$(e^t,$ 0，0)，其中 $t \in (0,\ \ln(a))$。于是中点的坐标为 $F = (1,\ \sqrt{a},\ 0,\ 0)$。将 A_1 映射到 F 的适当纤维平移为 $\mathcal{T} = \mathrm{diag}\ \{1, \sqrt{a}, \sqrt{a}, \sqrt{a}\}$，因此 $x = x'\sqrt{a}$，$y = y'\sqrt{a}$ 且 $z = z'\sqrt{a}$.。于是 3.13 有了不同的形式:

$$\frac{1}{4}\ln\left(a((x')^2 \pm ((y')^2+(z')^2))\right)\ln\left(\frac{(x')^2 \pm ((y')^2+(z')^2)}{a}\right) +$$

$$+\mathrm{arcC}^2\left(\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 \pm ((y')^2+(z')^2)}}\right) = 0 \iff$$

$$\frac{1}{4}\ln^2\left((x')^2 \pm ((y')^2+(z')^2)\right) + \mathrm{arcC}^2\left(\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 \pm ((y')^2+(z')^2)}}\right) = \frac{1}{4}\ln^2(a) \tag{3.14}$$

总结上述结果，我们得到:

引理 3.10 设 $(1,\ 1,\ 0,\ 0)$ $A_1 =$ 和 $(1,\ a,\ 0,\ 0)\,(a \in \mathbb{R}^+)$ $A_2 =$ 是 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 中给定的点。那么， A_1A_2 线段的 *Thaloid* 是一个球面，其中心为 $C = (1,\ \sqrt{a},\ 0,\ 0)$，半径为 $r = \ln(\sqrt{a})$。

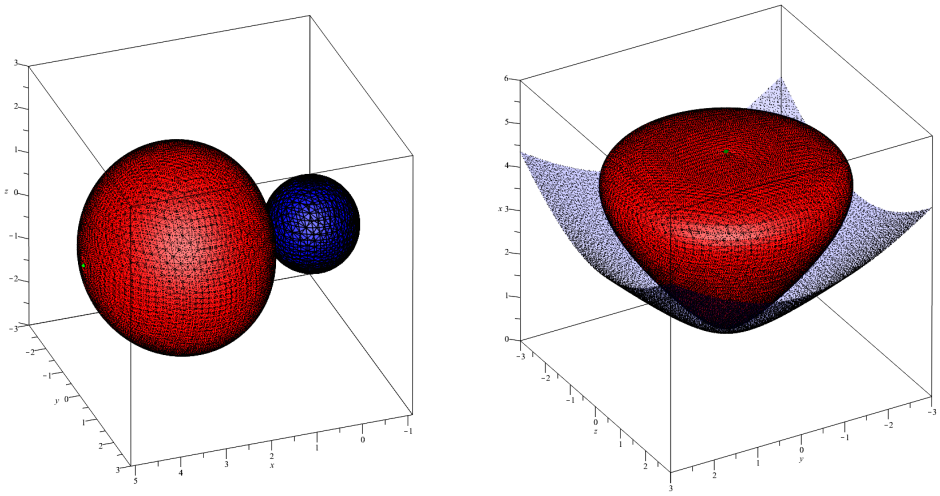


图 6：,和,的 $A_1(1,0,0,0)$ 与 $A_2(1,5,0,0)$ 线段在 $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ （左）和 $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ （右）几何中的 Thaloid

数据可用性声明

本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据库。

利益冲突声明

作者声明，其不存在与本研究内容相关的利益冲突。

参考文献

[1] Brodaczewska, K.：Nil 中的初等几何Nil。博士论文（自然科学博士）德累斯顿工业大学数学与自然科学学院（2014年）。

[2] Cie´slak, W. – Miernowski, A. – Mozgawa, W：《闭严格凸曲线的等光曲线》,数学讲义, **1481** (1991), 第 28–35 页。

[3] Cie´slak, W. – Miernowski, A. – Mozgawa, W：《闭严格凸曲线的等光曲线 II》，帕多瓦大学数学研讨会报告 96 (1996), 37–49。[4] Chavel, I.：《黎曼几何：现代导论》。剑桥高等数学研究丛书，(2006)。[5] Csima, G. – Szirmai, J.：《常曲率几何中圆锥曲线的等视曲线》，《数学通讯》19 (2014), 277–290。[6] Csima, G. – Szirmai, J.：《双曲平面中广义圆锥曲线的等视曲线》，《乌克兰数学杂志》71/12 (2020), 1929–1944。[7] Csima, G. – Szirmai, J.：《SL_2R 空间中平移三角形与测地三角形的内角和》，《Filomat》32/14 (2018), 5023–5036。[8] Csima, G. – Szirmai, J.：《四维向量空间欧几里得空间中的等光超曲面》，KoG, 17 (2013), 53–57。[9] Csima, G. – Szirmai, J.：《多面体的等视曲面》，《计算机辅助几何设计》47 (2016), 55–60。[10] Csima, G. – Szirmai, J.：《Nil 几何中的类平移等光曲面与平移三角形的角和》，投稿稿件，(2022), arXiv:2302.07653[11] Holzm¨uller, G.：《等角对应理论导论》，B.G. Teuber，莱比锡-柏林，(1882)。[12] Kobayashi, S. – Nomizu, K.：《微分几何基础》，I.，Interscience，Wiley，纽约 (1963)。[13] Kunkli, R. – Papp, I. – Hoffmann, M.：《贝塞尔曲线的等视线》，《计算机辅助几何设计》30 (2013), 78–84。[14] Kurusa, A.：《凸平面体是否由一条等视线确定？》，《代数与几何论文集》53 (2012), 281–294。[15] Loria, G.：《特殊代数与超越平面曲线》。第 1、2 卷，B.G. Teubner，莱比锡-柏林，(1911)。

[16] Michalska, M.：卵形线等视曲线面积凸性的一个充分条件，帕多瓦大学数学研讨会报告 110（2003），161–169。[17] Michalska, M. – Mozgawa, W.：三角形的 α 等视线及其与卵形线 α等视线的联系，帕多瓦大学数学研讨会报告，第133卷（2015），第159–172页。[18] Miernowski, A. – Mozgawa, W.：关于等视线凸性的某些几何条件，都灵数学研讨会论文集 55，第2期（1997），93–98。[19] Milnor, J.：李群上左不变度量的曲率，《数学进展》21，293–329（1976）。[20] Moln´ar, E.：八种三维齐性几何的射影诠释。《代数与几何论文集》38，第2期（1997），261–288。[21] Moln´ar, E. – Szil´agyi, B.：齐性几何中的平移曲线及其球面，《德布勒森数学出版物》78/2（3010年），327–346。[22] Moln´ar, E.：关于瑟斯顿几何的射影模型，以及关于 Nil 轨形与流形的一些相关注记。《西伯利亚电子数学汇刊》7（2010），491–498，http://mi.mathnet.ru/semr267。[23] Moln´ar, E. – Szirmai, J.：八种齐性三维几何中的对称性。《对称性：文化与科学》21/1-3（2010），87-117。[24] Moln´ar, E. – Szirmai, J.：Sol 格的分类。《奉献几何》161/1（2012），251-275。[25] Moln´ar, E. – Szirmai, J.：关于 Nil 晶体学，《对称性：文化与科学》17/1-2（2006），55–74。[26] Moln´ar, E. – Szirmai, J. – Vesnin, A.：沿二桥结与链环具有奇点的锥流形的射影度量实现，《几何学杂志》95（2009），91–133。[27] Moln´ar, E. – Szirmai, J. – Vesnin, A.：SL_2R中的平移球堆积，《几何学杂志》105(2)（2014），287–306。

[28] Mozgawa, W. – Skrzypiec, M.：割线光学曲线的 Crofton公式与凸性条件，比利时数学会公报—Simon Stevin 16，第3期（2009），435–445。[29] Odehnal, B.：圆锥曲线的等光学曲线，《几何学杂志》14，第1期（2010），29–43。[30] Pallagi, J., Schultz B., Szirmai J.：$S^2 \times$R空间中测地曲线、球面和等距曲面的可视化，KoG，14（2010），35–40。[31] Pallagi, J., Schultz B., Szirmai J.：$H^2 \times$R空间中的等距曲面，KoG，15（2011），3–6。[32] Scott, P.：三维流形的几何，伦敦数学会会报 15（1983），401–487。.[33] Siebeck, F. H.：关于一类与椭圆函数相关的四次曲线，《纯粹与应用数学杂志》57（1860），359–370；59（1861），173–184。¨Skrzypiec, M.：关于割线光学曲线的注记，《代数与几何论文集》49，第1期（2008），205–215。[34] Szirmai, J.：瑟斯顿几何中等球最密堆积的一个候选，《代数与几何论文集》55(2)（2014），441–452。[35] Szirmai, J.：由 Sol 几何中的平移曲线导出的四面体平分曲面与外接球。《纽约数学杂志》25（2019），107–122。[36] Szirmai, J.：Sol空间中由基本晶格实现的最密平移球堆积。《代数与几何论文集》51(2)（2010），353–373。[37] Szirmai, J.：Nil测地三角形及其内角和，《巴西数学会公报》（新辑）49（2018），761–773，DOI：10.1007/s00574-018-0077-9。[38] Szirmai, J.：与 Sol 几何中平移曲线相关的三角形角和，《巴贝什-博雅伊大学数学研究》67（2022），621–631，arXiv：1703.06646，doi：10.24193/subbmath.2022.3.14。[39] Szirmai, J.：Nil空间中的类晶格平移球堆积。《德布勒森数学出版物》80/3-4（2012），427–440，DOI：10.5486/PMD.2012.5117。

[41] Szirmai, J.，$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ 和$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$几何中的测地三角形内角和，《摩尔多瓦科学院学报A辑》，**93** 第2期（2020年），44–61.[42]Szirmai, J.：$\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$和$\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ 几何中的阿波罗尼奥斯曲面、四面体的外接球、梅涅劳斯定理和塞瓦定理，《数学季刊》，**73**（2022年），477–494，doi: 10.1093/qmath/haab038，arXiv: 2012.06155.[43] Szirmai, J.：Nil 几何中的梅涅劳斯定理和塞瓦定理，《智慧大学学报·数学》，（即将发表）（2023年），arXiv: 2110.08877.[44] Szirmai, J.：《瑟斯顿几何中的经典概念与问题》，已提交的手稿，（2022年），arXiv: 2203.05209.[45] Thurston, W. P.（Levy, S. 编），《三维几何与拓扑》。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，第**1** 卷（1997年）。[46] Szirmai, J. – Vr´anics, A：利用 Nil 几何中的类平移等分曲面构造全等平移球的格覆盖，《KoG》，**23**（2019年），6–17，doi: 10.31896/k.23.1, arXiv:1710.02394.[47] Yates, R. C.：《曲线及其性质手册》，J. W. Edwards，安娜堡，（1947年），138–140.[48]Wieleitener, H.：《特殊平面曲线》。舒伯特丛书第56卷，*G¨oschen'sche Verlagshandlung*。莱比锡，（1908年）。[49] Wunderlich, W.：具有等视角圆的曲线，《Aequat. math》。**6**（1971年），71-81.[50] Wunderlich, W.：具有等视角椭圆的曲线，《数学月刊》**75**（1971年），346-362。