arXiv:2304.01840v1 [math.OC] 4 Apr 2023

一种用于计算马尔可夫链的 Gittins 指数和最优停止的 A $(2/3)n^3$ 快速枢轴算法

José Niño-Mora 马德里卡洛斯三世大学统计系
28903赫塔费（马德里），西班牙jose.nino@uc3m.es,
http://alum.mit.edu/www/jnimoraORCID：
0000-0002-2172-3983

发表于*INFORMS*《计算学报》，第19卷，第596–606页，2007年
DOI： 10.1287/ijoc.1060.0206

摘要

本文提出一种新的快速枢轴算法，通过执行 $(2/3)n^3 + O(n^2)$ 次算术运算，计算 n Gittins 指数值，适用于具有 n 个状态的赌博机，涵盖折扣和无折扣情形。该算法的复杂度优于以往算法，并与通过高斯消元法求解相应线性方程组的复杂度相当。该算法还适用于马尔可夫链的最优停止问题，并为此提出一种新颖的 Gittins 指数解法。该算法借鉴了 Gittins 和 Jones（1974）通过校准定义指数的方法、Kallenberg（1986）关于采用参数线性规划的提议、Dantzig 的单纯形法、Varaiya 等人（1985）的算法，以及作者此前的研究。本文阐明了参数单纯形表的结构。算法利用特殊结构减少枢轴步骤的计算量：与传统枢轴操作相比，运算次数减少至三分之一；与近期的状态消去算法相比，运算次数减少至原来的 $3/2$ 。计算研究表明，相较于其他算法，该算法显著节省了时间。

关键词： 动态规划，马尔可夫，有限状态；Gittins 指数；多臂老虎机；最优停止；马尔可夫链；单纯形法；算法分析；计算复杂度**MSC（2020）：** 60G40；90C40；90C39

1. 引言

考虑以下最优停止问题。一个状态为 $X(t)$ 的马尔可夫链根据转移概率 p_{ij}，在有限或可数状态空间 N 中演化。在每个离散时间段 $t \geq 0$，必须根据目前为止的信息决定让链继续运行还是停止。当链处于状态 i 时继续运行，可获得即时奖励 R_i，但需支付费用ν 。若停止该链，则可获得终端奖励 Q_i 。在可数状态情形下，我们假设R_i和 Q_i均一致有界。随时间获得的奖励按因子 $0 < \beta \leq 1$ 折现。我们希望找到一个最优停止规则，使所得奖励的预期折现总值减去所付费用达到最大。我们可以将此问题表述为

$$\max_{\tau \geq 0} \mathsf{E}_i^{\tau} \left[\sum_{t=0}^{\tau-1} (R_{X(t)} - \nu)\beta^t + Q_{X(\tau)}\beta^{\tau} \right], \tag{1}$$

其中，$\mathsf{E}_i^{\tau}[\cdot]$ 表示从 i 开始的期望；为避免符号过多， τ 既表示停止规则，也表示相应的停止时刻 $0 \leq \tau \leq +\infty$。

最优停止的一个重要应用领域是计算金融，其中若干基本问题被表述为1的特殊情形，例如确定卖出股票的最优时机，或行使永久美式期权。虽然现行模型是连续型的，但人们正日益关注数值上更易处理的马尔可夫链近似，本文的结果适用于此类近似。参见Duan 等人 (2003)。

现在考虑问题（1）的特殊情形，即终端奖励为零的情形， $Q_j \equiv 0$:

$$\max_{\tau \geq 0} \mathsf{E}_i^{\tau} \left[\sum_{t=0}^{\tau-1} (R_{X(t)} - \nu)\beta^t \right]. \tag{2}$$

Gittins 和 Jones （1974年）指出——在问题（2）的改写形式中， ν 发挥每个被动期补贴的作用——可以为每个状态 i 赋予一个量 ν_i^*，现称为*Gittins* 指数，使得当且仅当 $\nu_i^* \leq \nu$ 时，在状态 i 停止是最优的 $\nu_i^* \leq \nu$。这种指数结果最早由 Bradt 等人 （1956）在贝叶斯伯努利赌博机的经典情形中得出。Whittle （1980）强调并利用了 Gittins 指数的另一种解释：它是最优停止问题中的一个临界常数终端奖励——可以将问题（2）改写为获得终端奖励 $\nu/(1-\beta)$ 的形式。

Gittins 和 Jones （1974年）进一步证明，这样的指数为解决多臂赌博机问题提供了一种高效方法。该问题涉及对一组赌博机进行最优动态努力分配，其中每次必须选择一台进行操作：始终选择指数最大的赌博机。 Gittins （1979）证明了

$$\nu_i^* = \max_{\tau > 0} \frac{\mathsf{E}_i^{\tau} \left[\sum_{t=0}^{\tau-1} R_{X(t)}\beta^t \right]}{\mathsf{E}_i^{\tau} \left[\sum_{t=0}^{\tau-1} \beta^t \right]}, \tag{3}$$

使得 ν_i^* 表示从 i 开始时，单位期望贴现时间内可实现的期望贴现奖励最大速率。相应的未折扣吉廷斯指数 通过将 $\beta = 1$ 设置为上述值获得。

本文提出两项主要贡献：（i）我们证明，问题（1）可归约为（2），因此可通过 Gittins 指数求解；（ii）对于有限数量的赌博机

n 个状态，我们提出一种基于参数化版本的丹齐格单纯形法的高效算法，通过执行 $(2/3)n^3 + O(n^2)$ 次算术运算来计算 Gittins 指数，其复杂度优于以往的算法。这样的复杂度似乎不太可能进一步降低，因为它与通过高斯消元法求解相应线性方程组的复杂度相当。

接下来，我们回顾求解（1）和（2）的既有算法方法。马尔可夫链的最优停止是一项基础问题，长期以来受到广泛关注。例如，参见Sonin (1999)及其中的参考文献。传统方法基于构建贝尔曼方程，再通过值迭代、策略迭代或线性规划（LP）方法求解，而所需的迭代次数事先并不明确。相比之下，Sonin(1999)提出了一种基于状态消去思想的单遍算法，可递归地求解一个 n状态问题，所需迭代次数为 n 。

关于指数，Varaiya 等人 (1985)提出了一种 n步算法，执行（$1/3$）n^4+$O(n^3)$次算术运算。Bertsimas 和 Niño-Mora 在Klimov (1974)的指数算法中，也将其阐明为Bertsimas and Niño-Mora (1996)提出的自适应贪心算法的特例，该算法求解底层的多面体线性规划公式化。

Chen 和 Katehakis （1986年）指出，固定状态的指数可以通过求解一个含有 $n+1$ 个变量和 n 个约束的线性规划问题来计算。Kallenberg （1986年）提出，按照 Saaty 和 Gass （1954）的方法，通过求解参数线性规划问题来计算该指数。这种方法涉及n 次参数化版本的 Dantzig 单纯形法的主元操作，该方法需要 $2n^3 + O（n^2）$ 次算术运算。

近年来，Katta 和 Sethuraman （2004年）以及 Sonin （2005年）提出了基于状态消去的指数算法，其运算次数为 $n^3 + O（n^2）$ 。

本文提出的新算法借鉴了 Gittins （1979）、Kallenberg （1986年）、Dantzig 单纯形法、Varaiya 等人 （1985年）以及 Niño-Mora （2001、2002年、2006a）的工作。我们阐明了参数化单纯形表的结构。利用其特殊结构，降低了主元步骤的计算开销；与采用常规枢轴操作相比，运算次数减少了三分之二；与状态消除算法相比，运算次数减少了 3/2 倍。这种快速枢轴算法既适用于折扣 Gittins 指数，也适用于未折扣 Gittins 指数。计算研究表明，与常规枢轴算法和状态消除算法相比，该算法在实际应用中可显著节省时间。

我们还给出了该算法的一个变体，可高效计算其他用途所需的额外量。我们曾在Niño-Mora (2006b)中将这一变体用作两阶段方法的第一阶段，以高效计算切换指数，该指数由Asawa 和 Teneketzis (1996年)提出，适用于具有切换成本的多臂老虎机。

第2 节说明，最优停止问题（1）可以通过 Gittins 指数求解。第3节介绍所研究的多臂老虎机模型，回顾 Gittins 指数的一种便捷定义，并讨论Varaiya 等人（1985年）的算法。第4 节阐明用于计算该指数的线性规划参数单纯形表的结构，并给出传统枢轴算法。第5 节利用特殊结构来减少枢轴步骤的计算量。第6 节介绍新的快速枢轴算法。第7 节讨论其与状态消去算法的关系。第8 节回顾未折扣吉廷斯指数的概念，并说明如何用快速枢轴算法计算该指数。第9 节报告计算研究的结果。第10 节作总结。

2. Gittins指数解与最优停止

本节假设马尔可夫链的状态空间 N 是有限或可数无限的；若为后者，则奖励 R_i 和 Q_i 均有界。考虑折扣情形1下的最优停止问题（ $0 < \beta < 1$。从开始，按照停止规则 τ i 所获得奖励的折扣值由以下奖励度量

$$f_i^\tau(\mathbf{R},\mathbf{Q}) \triangleq \mathsf{E}_i^\tau\left[\sum_{t=0}^{\tau-1} R_{X(t)}\beta^t + Q_{X(\tau)}\beta^\tau\right], \tag{4}$$

其中，我们明确写出了延续奖励$\mathbf{R}$ $= (R_j)_{j\in N}$ 和终止奖励$\mathbf{Q}$ $= (Q_j)_{j\in N}$的依赖关系。相应的折扣工作量由工作测度给出

$$g_i^\tau \triangleq \mathsf{E}_i^\tau\left[\sum_{t=0}^{\tau-1}\beta^t\right]. \tag{5}$$

因此，我们可以将最优停止问题（1）重新表述为

$$\max_{\tau\geq 0} f_i^\tau(\mathbf{R},\mathbf{Q}) - \nu g_i^\tau. \tag{6}$$

现在我们作出如下关键观察：上述折扣最优停止问题可以直接重新表述为一个无限时域马尔可夫决策过程 （MDP），在每个状态和时间段都有两个可用动作： $a = 1$ （主动动作）和 $a = 0$ （被动动作）。在前一种情况下，如果在状态 i下采取主动动作，则会获得奖励 R_i ，并且状态按照转移概率p_{ij}发生变化；如果改为采取被动动作，则会获得奖励（$1-\beta$）Q_i，且状态保持不变。请注意，纳入被动奖励的比例因子 $1-\beta$ 体现了这样一个事实：获得 Q_i 的一次性终止奖励，等价于在无限时域内每个时间段获得（$1-\beta$）Q_i 的折扣养老金。

此时，读者可能会担心，这种无限时域马尔可夫决策过程表述不同于传统的引入终止状态的表述，因此允许在使用被动动作之后再采取主动动作，而这在（1）中是不允许的。然而，马尔可夫决策过程理论消除了这种表面上的矛盾：由于我们假设奖励有界，该理论保证此类无限时域马尔可夫决策过程中存在一个最优策略，该策略是马尔可夫平稳的，因此与停止规则一致（包括永不停止的可能性）。

接下来，我们将在重新表述的无限时域问题中进一步运用马尔可夫决策过程理论。考虑折扣状态—动作占用测度：对于任意停止规则 τ （现将其视为重新表述模型中的马尔可夫决策过程策略）、初始状态 i、动作 a 和状态 j，令

$$x_{ij}^{a,\tau} \triangleq \mathsf{E}_i^\tau\left[\sum_{t=0}^{\infty} 1_{\{a(t)=a, X(t)=j\}}\beta^t\right]$$

表示从 i 出发，在策略 τ 下于状态 j 执行动作 a 所耗费的预期折扣总时间。众所周知，对于固定的 i，奖励和工作量度 $x^{a}{}_{,ij}{}^{\tau}$ 对于 $(j,a) \in N\times\{0,1\}$ 满足一个线性方程组。将 $\mathbf{x}_i^{a\,\tau} = {}_,(x^{a}{}_{,ij}{}^{\tau})_{j\in N}$写成行向量，以 $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵，并以 $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ 表示在状态 i 所在位置为 1 的单位坐标行向量，则该方程组为

$$(1-\beta)\mathbf{x}_i^{0,\tau} + \mathbf{x}_i^{1,\tau}(\mathbf{I}-\beta\mathbf{P}) = \mathbf{e}_i. \tag{7}$$

我们可以将奖励和工作测度表示为占用量的线性函数 s:

$$
\begin{aligned}
f_i^\tau(\mathbf{R},\mathbf{Q}) &= \sum_{j\in N} R_j x_{ij}^{1,\tau} + \sum_{j\in N}(1-\beta)Q_j x_{ij}^{0,\tau} = \mathbf{x}_i^{1,\tau}\mathbf{R} + (1-\beta)\mathbf{x}_i^{0,\tau}\mathbf{Q}, \\
g_i^\tau &= \sum_{j\in N} x_{ij}^{1,\tau} = \mathbf{x}_i^{1,\tau}\mathbf{1}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

接下来，我们利用上述内容证明，在1的折扣情形和无折扣情形中，都可以消除终止奖励。

引理 2.1 在任何停止规则 τ 下，对于 $0<\beta\le 1$:

$$
f_i^\tau(\mathbf{R},\mathbf{Q}) = Q_i + f_i^\tau(\mathbf{R}-(\mathbf{I}-\beta\mathbf{P})\mathbf{Q},\mathbf{0}). \tag{9}
$$

证明。在折扣情形 $\beta<1$ 中，我们使用上述内容来书写

$$
\begin{aligned}
f_i^\tau(\mathbf{R},\mathbf{Q}) &= \mathbf{x}_i^{1,\tau}\mathbf{R} + (1-\beta)\mathbf{x}_i^{0,\tau}\mathbf{Q} \\
&= \mathbf{x}_i^{1,\tau}\mathbf{R} + \{\mathbf{e}_i - \mathbf{x}_i^{1,\tau}(\mathbf{I}-\beta\mathbf{P})\}\mathbf{Q} = Q_i + \mathbf{x}_i^{1,\tau}\{\mathbf{R}-(\mathbf{I}-\beta\mathbf{P})\}\mathbf{Q}\} \\
&= Q_i + f_i^\tau(\mathbf{R}-(\mathbf{I}-\beta\mathbf{P})\mathbf{Q},\mathbf{0}).
\end{aligned}
$$

在后一个恒等式中令 $\beta\uparrow 1$ 取极限，即可得到 $\beta=1$ 的结果。 □

现在考虑被动奖励为零且主动奖励向量经过修改的赌博机

$$
\hat{\mathbf{R}} \triangleq \mathbf{R}-(\mathbf{I}-\beta\mathbf{P})\mathbf{Q}, \tag{10}
$$

并令 $\hat{\nu}_i^*$ 为其 Gittins 指数。

接下来给出本节的主要结果。

定理 2.2 在问题 i 中，当状态 (1) 当且仅当 $\hat{\nu}_i^*\le\nu$ 时，停止是最优的。因此，最小的最优停止时刻是 $\tau^*=\min\left\{t\ge 0\colon \hat{\nu}_{X(t)}^*\le\nu\right\}$.

证明。上述讨论表明，问题（1）等价于一个不含终止奖励、形式为（2）的相应问题，其奖励 $\hat{R}_i$ 由（10）给出。由于后者可由所述 Gittins 指数策略求解，结论得证。 □

3. Gittins 指数与 VWB 算法

本文余下部分聚焦于一个状态数有限的赌博机 n 。本节回顾 Gittins 指数的一种便捷定义，以及 Niño-Mora （2001、2002年、2006a）提出的边际工作量、奖励和生产率度量等概念，以及 Varaiya 等人 （1985年）的指数算法，本文将其称为 VWB 算法。

鉴于第 2节，我们只需关注（2），其表述如下

$$
\max_{\tau\ge 0} f_i^\tau - \nu g_i^\tau. \tag{11}
$$

根据马尔可夫决策过程理论，对于任意延续费用 ν，方程（11）存在一个马尔可夫平稳且独立于初始状态的最优停止规则。我们用其延续集表示这类规则。因此，对于任意费用 ν ，都有一个与之对应的最小最优

表 1：通过 w_i^S 和 r_i^S 表述 VWB Gittins 指数算法。

算法 VWB：

set $S_0 := \emptyset$
for $k := 1$ **to** n **do**
  compute $w_i^{S_{k-1}}, r_i^{S_{k-1}}, \nu_i^{S_{k-1}} = r_i^{S_{k-1}} / w_i^{S_{k-1}}$, $i \in S_{k-1}^c$
  pick $i_k \in \arg\max \left\{ \nu_i^{S_{k-1}} : i \in S_{k-1}^c \right\}$
  $\nu_{i_k}^* := \nu_{i_k}^{S_{k-1}}$, $S_k := S_{k-1} \cup \{i_k\}$
end

继续集合 $S^*(\nu) \subseteq N$。后者由附属于每个状态 j 的*Gittins* 指数 ν_j^* 刻画，因此

$$S^*(\nu) = \left\{ j \in N : \nu_j^* > \nu \right\}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

对于动作 a 和继续集合 S，令 ha, Si 表示如下策略：第一期采取动作 a，之后采用 S-活跃策略（在 S 上继续，在 S^c, $N \backslash S$ 上停止）。对于状态 i，定义 (i, S)-边际工作量度量

$$w_i^S \triangleq g_i^{\langle 1,S \rangle} - g_i^{\langle 0,S \rangle}, \tag{12}$$

为从 i 开始，在之后采用 S-活跃策略的前提下，第一期选择继续而非停止所导致的工作消耗边际增量。进一步定义 (i, S)-边际奖励度量

$$r_i^S \triangleq f_i^{\langle 1,S \rangle} - f_i^{\langle 0,S \rangle} \tag{13}$$

为所获奖励的相应边际增量。我们将看到，边际工作负载为正，因此可以定义 (i, S)-边际生产率

$$\nu_i^S \triangleq \frac{r_i^S}{w_i^S}. \tag{14}$$

接下来，我们将使用上述量（可通过求解线性方程组轻松计算，下一节将对此进行说明）来表述表 1 中的 VWB 算法版本。该算法分 n 步执行，生成一个状态序列 i_k，其指数值依次不增，并生成相应的嵌套继续集合序列 $S_0 = \emptyset$, $S_k = \{i_1, \ldots, i_k\}$，其中 $k = 1, \ldots, n$。

在Varaiya 等人(1985年）中，表 $\nu_i^{S_{k-1}}$1 中的比率 按如下方式计算 $\nu_i^{S_{k-1}} = a_i^{(k)} / b_i^{(k)}$，其中 $a_i^{(k)}$ 和 $b_i^{(k)}$ 是通过求解以下线性方程组得到的：对于 $i \in N$,

$$a_i^{(k)} = \beta R_i + \beta \sum_{j \in S_{k-1}} p_{ij} a_j^{(k)}$$
$$b_i^{(k)} = \beta + \beta \sum_{j \in S_{k-1}} p_{ij} b_j^{(k)}.$$

利用下一节的结果和少量代数运算可得，这些量与上文的 $w_i^{S_{k-1}}$和 $r_i^{S_{k-1}}$相关，关系为

$$a_i^{(k)} = \begin{cases} \beta r_i^{S_{k-1}}/(1-\beta) & \text{if } i \in S_{k-1} \\ \beta r_i^{S_{k-1}} & \text{if } i \in S_{k-1}^c \end{cases} \quad \text{and} \quad b_i^{(k)} = \begin{cases} \beta w_i^{S_{k-1}}/(1-\beta) & \text{if } i \in S_{k-1} \\ \beta w_i^{S_{k-1}} & \text{if } i \in S_{k-1}^c. \end{cases}$$

接下来，我们评估算法 VWB 的计算复杂度。

Prop命题 3.1 算法 *VWB* 执行 $(1/3)n^4 + O(n^3)$ 次算术运算。

证明。计算量主要来自在第 k 步求解两个规模为 k 的线性方程组，每个方程组需要 $(2/3)k^3 + O(k^2)$ 次算术运算，因此总计为

$$2\sum_{k=2}^{n} \left\{ (2/3)k^3 + O(k^2) \right\} = (1/3)n^4 + O(n^3).$$

□

4. 线性规划公式化与参数单纯形表

本节旨在借助马尔可夫决策过程理论，将 (11) 公式化为参数线性规划问题，并阐明其单纯形表的结构。

引入变量 x_j^a，对应于占用测度 $x^{a,\ ij}$ 在第 2节中，我们使用 (11) 对 (7) 进行重新公式化，得到如下参数线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{x}^1(\mathbf{R} - \nu\mathbf{1}) \\ &\text{subject to} \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{x}^0 & \mathbf{x}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\beta)\mathbf{I} \\ \mathbf{I} - \beta\mathbf{P} \end{bmatrix} = \mathbf{e}_i \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{x}^0 & \mathbf{x}^1 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{15}$$

注意，在15中的线性规划里，我们将变量写成行向量而非列向量，这与线性规划理论中的惯例相反。这样做是为了便于记号，因为这样我们就可以避免在下文中使用诸如 $\mathbf{P}^\intercal$ 这样的转置矩阵。

为了分析这类线性规划问题，我们首先注意到，其基本可行解（BFS）与继续集合 $S \subseteq N$ 相对应。因此，我们将称其为 S-活跃基本可行解。对于每个这样的 S，我们将上述向量和矩阵分解为

$$\mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_S^a & \mathbf{x}_{S^c}^a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{iS} & \mathbf{e}_{iS^c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{SS} & \mathbf{P}_{SS^c} \\ \mathbf{P}_{S^cS} & \mathbf{P}_{S^cS^c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_S & \mathbf{0}_{SS^c} \\ \mathbf{0}_{S^cS} & \mathbf{I}_{S^c} \end{bmatrix},$$

wh例如，$\mathbf{I}_S$ 是以 $S \times S$ 为索引的单位矩阵，并引入矩阵 s

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}^S \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{SS} & \mathbf{P}_{SS^c} \\ \mathbf{0}_{S^cS} & \mathbf{I}_{S^c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{S^c} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_S & \mathbf{0}_{SS^c} \\ \mathbf{P}_{S^cS} & \mathbf{P}_{S^cS^c} \end{bmatrix}, \\ &\mathbf{B}^S \triangleq \mathbf{I} - \beta\mathbf{P}^S, \quad \mathbf{N}^S \triangleq \mathbf{I} - \beta\mathbf{P}^{S^c}, \quad \mathbf{H}^S \triangleq \left\{ \mathbf{B}^S \right\}^{-1}, \quad \mathbf{A}^S \triangleq \mathbf{N}^S\mathbf{H}^S. \end{aligned} \tag{16}$$

注意，$\mathbf{P}^S$ （分别是$\mathbf{P}^{S^c}$）是在 S-活跃（分别是 S^c-活跃）策略下的转移概率矩阵。此外，$\mathbf{B}^S$ 是与基矩阵（15）中对应于 S-活跃 BFS 的基，

基变量（对应于矩阵行）为 $\left[\mathbf{x}_S^1\ \mathbf{x}_{S^c}^0\right]$，而$\mathbf{N}^S$ 是（15）中的非基行矩阵，其对应的非基变量 $\left[\mathbf{x}_S^0\ \mathbf{x}_{S^c}^1\right]$。

接下来，我们使用这一框架来表示关注的绩效度量，即在 S-活跃策略下。首先，我们将线性规划（15）中的约束重新表述为

$$\left[\begin{bmatrix}\mathbf{x}_S^1 & \mathbf{x}_{S^c}^0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}\mathbf{x}_S^0 & \mathbf{x}_{S^c}^1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{B}^S\\ \mathbf{N}^S\end{bmatrix}=\mathbf{e}_i. \tag{17}$$

通过将非基变量（即 $\left[\mathbf{x}_{iS}^{0,S}、\mathbf{x}_{iS^c}^{1,S}\right]=\mathbf{0}$，）设为零，并求解线性方程组来计算基变量，我们得到 $x^{a}{}_{,\ ij}^{\ S}$ 在 S-活跃策略下对应的占用量，即相应的 S-活跃基可行解。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_S^1 & \mathbf{x}_{S^c}^0\end{bmatrix}\mathbf{B}^S=\mathbf{e}_i\Longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{iS}^{1,S} & \mathbf{x}_{iS^c}^{0,S}\end{bmatrix}=\mathbf{e}_i\mathbf{H}^S. \tag{18}$$

现在，我们用（18）表示工作测度（参见（8））向量 $\mathbf{g}^S=(g_i^S)_{i\in N}$：

$$g_i^S=\sum_{j\in S}x_{ij}^{1,S}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{iS}^{1,S} & \mathbf{x}_{iS^c}^{0,S}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}=\mathbf{e}_i\mathbf{H}^S\begin{bmatrix}\mathbf{1}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}\Longrightarrow\mathbf{g}^S=\mathbf{H}^S\begin{bmatrix}\mathbf{1}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}. \tag{19}$$

同理，我们表示奖励度量（参见（8））向量 $\mathbf{f}^S=(f_i^S)_{i\in S}$：

$$f_i^S=\sum_{j\in S}R_jx_{ij}^{1,S}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{iS}^{1,S} & \mathbf{x}_{iS^c}^{0,S}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}=\mathbf{e}_i\mathbf{H}^S\begin{bmatrix}\mathbf{R}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}\Longrightarrow\mathbf{f}^S=\mathbf{H}^S\begin{bmatrix}\mathbf{R}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}. \tag{20}$$

此外，我们使用（**12**）和 $\mathbf{g}_{S^c}^S=\mathbf{0}$：来表示边际工作负荷 $\mathbf{w}^S=(w_i^S)_{i\in N}$

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_S^S&=\mathbf{g}_S^S-\beta\mathbf{g}_S^S=(1-\beta)\mathbf{g}_S^S\\ \mathbf{w}_{S^c}^S&=\mathbf{1}_{S^c}+\beta\mathbf{P}_{S^cN}\mathbf{g}^S-\mathbf{g}_{S^c}^S=\mathbf{1}_{S^c}+\beta\mathbf{P}_{S^cS}\mathbf{g}_S^S.\end{aligned} \tag{21}$$

注意，（21）意味着 $\mathbf{w}^S>\mathbf{0}$，即 边际工作负荷为正，如前所述。现在，我们使用（19），重新表述（21）中的第一个等式，得到

$$\begin{bmatrix}\mathbf{w}_S^S\\ -\mathbf{w}_{S^c}^S\end{bmatrix}=\mathbf{N}^S\mathbf{g}^S-\begin{bmatrix}\mathbf{0}_S\\ \mathbf{1}_{S^c}\end{bmatrix}=\mathbf{N}^S\mathbf{H}^S\begin{bmatrix}\mathbf{1}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{0}_S\\ \mathbf{1}_{S^c}\end{bmatrix}=\mathbf{A}^S\begin{bmatrix}\mathbf{1}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{0}_S\\ \mathbf{1}_{S^c}\end{bmatrix}. \tag{22}$$

最后，我们根据其定义（**13**）得到边际奖励向量 $\mathbf{r}^S=(r_i^S)_{i\in N}$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_S^S&=\mathbf{f}_S^S-\beta\mathbf{f}_S^S=(1-\beta)\mathbf{f}_S^S\\ \mathbf{r}_{S^c}^S&=\mathbf{R}_{S^c}+\beta\mathbf{P}_{S^cN}\mathbf{f}^S-\mathbf{f}_{S^c}^S=\mathbf{R}_{S^c}+\beta\mathbf{P}_{S^cN}\mathbf{f}^S.\end{aligned} \tag{23}$$

现在，我们利用（20），将（23）重新表述为

$$\begin{bmatrix}\mathbf{r}_S^S\\ -\mathbf{r}_{S^c}^S\end{bmatrix}=\mathbf{N}^S\mathbf{f}^S-\begin{bmatrix}\mathbf{0}_S\\ \mathbf{R}_{S^c}\end{bmatrix}=\mathbf{N}^S\mathbf{H}^S\begin{bmatrix}\mathbf{R}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{0}_S\\ \mathbf{R}_{S^c}\end{bmatrix}=\mathbf{A}^S\begin{bmatrix}\mathbf{R}_S\\ \mathbf{0}_{S^c}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{0}_S\\ \mathbf{R}_{S^c}\end{bmatrix}. \tag{24}$$

下一个结果将上述引入的边际工作负载和边际奖励度量刻画为相应线性规划问题的约化成本。它还将参数线性规划问题（15）的约化成本加以刻画。

Prop命题 4.1 线性规划中 S-活动 *BFS* 的非基变量的约化成本

$$\max\left\{\mathbf{x}^1\mathbf{R}\colon \begin{bmatrix}\mathbf{x}^0 & \mathbf{x}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-\beta)\mathbf{I}\\ \mathbf{I}-\beta\mathbf{P}\end{bmatrix}=\mathbf{e}_i,\quad \begin{bmatrix}\mathbf{x}^0 & \mathbf{x}^1\end{bmatrix}\geq\mathbf{0}\right\},$$

$$\max\left\{\mathbf{x}^1\mathbf{1}\colon \begin{bmatrix}\mathbf{x}^0 & \mathbf{x}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-\beta)\mathbf{I}\\ \mathbf{I}-\beta\mathbf{P}\end{bmatrix}=\mathbf{e}_i,\quad \begin{bmatrix}\mathbf{x}^0 & \mathbf{x}^1\end{bmatrix}\geq\mathbf{0}\right\}$$

and

$$\max\left\{\mathbf{x}^1(\mathbf{R}-\nu\mathbf{1})\colon \begin{bmatrix}\mathbf{x}^0 & \mathbf{x}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-\beta)\mathbf{I}\\ \mathbf{I}-\beta\mathbf{P}\end{bmatrix}=\mathbf{e}_i,\quad \begin{bmatrix}\mathbf{x}^0 & \mathbf{x}^1\end{bmatrix}\geq\mathbf{0}\right\}$$

分别由以下各式给出：(24)、(22)以及

$$\begin{bmatrix}\mathbf{r}_S^S-\nu\mathbf{w}_S^S\\ -\mathbf{r}_{S^c}^S+\nu\mathbf{w}_{S^c}^S\end{bmatrix}. \tag{25}$$

因此，这些线性规划的目标函数可分别表示为

$$\mathbf{x}^1\mathbf{R}=f_i^S-\sum_{j\in S}r_j^Sx_j^0+\sum_{j\in S^c}r_j^Sx_j^1, \tag{26}$$

$$\mathbf{x}^1\mathbf{1}=g_i^S-\sum_{j\in S}w_j^Sx_j^0+\sum_{j\in S^c}w_j^Sx_j^1 \tag{27}$$

and

$$\mathbf{x}^1(\mathbf{R}-\nu\mathbf{1})=f_i^S-\nu g_i^S-\sum_{j\in S}(r_j^S-\nu w_j^S)x_j^0+\sum_{j\in S^c}(r_j^S-\nu w_j^S)x_j^1. \tag{28}$$

证明。结论可由线性规划理论中约化成本的表示推出，如式 (22) 和 (24) 所示；同时也可利用以当前基本可行解的取值和约化成本表示线性规划目标函数的方式。注意，目标函数为 $\mathbf{x}^1\mathbf{R}$ 的线性规划所得到的结论，通过适当选取$\mathbf{R}$，即可推出其他线性规划的相应结论。□

下一个结论直接由命题 4.1推出，给出了测度g_i^τ、 f_i^τ以及目标函数 $f_i^\tau-\nu g_i^\tau$相对于 S-活跃策略的表示。这些恒等式最初由Niño-Mora (2001)通过代数论证得到。

命题 4.2

(a) $g_i^\tau=g_i^S-\sum_{j\in S}w_j^Sx_{ij}^{0,\tau}+\sum_{j\in S^c}w_j^Sx_{ij}^{1,\tau}.$

(b) $f_i^\tau=f_i^S-\sum_{j\in S}r_j^Sx_{ij}^{0,\tau}+\sum_{j\in S^c}r_j^Sx_{ij}^{1,\tau}.$

(c) $f_i^\tau-\nu g_i^\tau=f_i^S-\nu g_i^S-\sum_{j\in S}(r_j^S-\nu w_j^S)x_{ij}^{0,\tau}+\sum_{j\in S^c}(r_j^S-\nu w_j^S)x_{ij}^{1,\tau}.$

接下来，我们利用命题 4.1 中对约化成本的刻画，给出参数线性规划问题（ S）中活跃的基本可行解的必要且充分最优性检验，因此也适用于S工资问题（ ν）中的活跃策略。11。

命题 4.3 对于每个初始状态 S，活跃的基本可行解都是线性规划问题 (15) 的最优解——因此， S工资问题 ν中的活跃策略也是 (11) 的最优策略——当且仅当 $i \in N$ *iff*

$$\max\left\{\nu_j^S : j \in S^c\right\} \le \nu \le \min\left\{\nu_j^S : j \in S\right\}. \tag{29}$$

证明。“若”部分是线性规划理论中的充分最优性检验，用于检查非基变量的约化成本是否非负。不等式 (29) 可通过重新表述这一条件得出，依据命题 4.1(c)、边际工作负载的正性 w_j^S以及边际生产率的定义 ν_j^S。

“仅当”部分可通过考察线性规划 (15) 的一个变体得出，其中将右端项 $\mathbf{e}_i$替换为一个正的初始状态概率行向量 $\mathbf{p} = (p_j)_{j\in N} > \mathbf{0}$。该线性规划的约化成本最优性检验与右端项为$\mathbf{e}_i$的线性规划相同。然而，该线性规划是非退化的，因此最优性检验对它也是必要条件。证明完毕。□

表 2： S-活跃 BFS 的增广单纯形表，可在 a_{jj}^S上执行枢轴操作。

	$\mathbf{x}_S^1$	x_j^0	$\mathbf{x}_{S^c\setminus\{j\}}^0$		
$\{\mathbf{x}_S^0\}^\top$	$\mathbf{A}_{SS}^S$	$\mathbf{A}_{Sj}^S$	$\mathbf{A}_{S,\ S^c\setminus\{j\}}^S$	$\mathbf{w}_S^S$	$\mathbf{r}_S^S$
x_j^1	$\mathbf{A}_{jS}^S$	$\boxed{a_{jj}^S}$	$\mathbf{A}_{j,\ S^c\setminus\{j\}}^S$	$-w_j^S$	$-r_j^S$
$\{\mathbf{x}_{S^c\setminus\{j\}}^1\}^\top$	$\mathbf{A}_{S^c\setminus\{j\}\ S}^S$	$\mathbf{A}_{S^c\setminus\{j\}\ j}^S$	$\mathbf{A}_{S^c\setminus\{j\}\ S^c\setminus\{j\}}^S$	$-\mathbf{w}_{S^c\setminus\{j\}}^S$	$-\mathbf{r}_{S^c\setminus\{j\}}^S$
x_j^0	$\mathbf{0}_{jS}$	1	$\mathbf{0}_{j,\ S^c\setminus\{j\}}$	0	0

现在，我们已经具备了表示参数化单纯形表所需的全部要素，用于表示 S-活跃 BFS，如表2所示。请注意，该单纯形表相对于传统单纯形表进行了转置，因此，非基变量$\mathbf{x}_S^0$ 和$\mathbf{x}_{S^c}^1$ 对应于行，而基变量$\mathbf{x}_S^1$和$\mathbf{x}_{S^c}^0$ 对应于列。此外，它还包含非基变量约化成本的两列，分别对应于命题4.1中的前两个线性规划问题。

实际上，表2 表示一个增广单纯形表，可用于对元素 a_{jj}^S进行$j \in S^c$枢轴操作，即将变量 x_j^0 移出当前基，并将 x_j^1 纳入基。为实施所需的枢轴操作做好准备，单纯形表还包含一行额外的行，对应于基变量 x_j^0。

执行这一步枢轴操作后，即可得到 $S\cup\{j\}$-活跃 BFS 对应的单纯形表，如表3和4所示。

表 3：通过枢轴操作得到的 $S\cup\{j\}$-活动 BFS 的单纯形表部分$\mathbf{A}^{S\cup\{j\}}$ 。

	$\mathbf{x}_S^1$	x_j^1	$\mathbf{x}_{S^c\setminus\{j\}}^0$
$\{\mathbf{x}_S^0\}^\top$	$\mathbf{A}_{SS}^S - \frac{\mathbf{A}_{Sj}^S\mathbf{A}_{jS}^S}{a_{jj}^S}$	$\frac{\mathbf{A}_{Sj}^S}{a_{jj}^S}$	$\mathbf{A}_{S,S^c\setminus\{j\}}^S - \frac{\mathbf{A}_{Sj}^S\mathbf{A}_{j,S^c\setminus\{j\}}^S}{a_{jj}^S}$
x_j^0	$-\frac{\mathbf{A}_{jS}^S}{a_{jj}^S}$	$\frac{1}{a_{jj}^S}$	$-\frac{\mathbf{A}_{j,S^c\setminus\{j\}}^S}{a_{jj}^S}$
$\{\mathbf{x}_{S^c\setminus\{j\}}^1\}^\top$	$\mathbf{A}_{S^c\setminus\{j\},S}^S - \frac{\mathbf{A}_{S^c\setminus\{j\},j}^S\mathbf{A}_{jS}^S}{a_{jj}^S}$	$\frac{\mathbf{A}_{S^c\setminus\{j\},j}^S}{a_{jj}^S}$	$\mathbf{A}_{S^c\setminus\{j\},S^c\setminus\{j\}}^S - \frac{\mathbf{A}_{S^c\setminus\{j\},j}^S\mathbf{A}_{j,S^c\setminus\{j\}}^S}{a_{jj}^S}$

表 4：通过枢轴操作得到的 $S \cup \{j\}$-活动 BFS 的单纯形表部分$\mathbf{w}^{S\cup\{j\}}$、$\mathbf{r}^{S\cup\{j\}}$。

$\{\mathbf{x}_S^0\}^\top$	$\mathbf{w}_S^S + \frac{w_j^S}{a_{jj}^S}\mathbf{A}_{Sj}^S$	$\mathbf{r}_S^S + \frac{r_j^S}{a_{jj}^S}\mathbf{A}_{Sj}^S$
x_j^0	$\frac{w_j^S}{a_{jj}^S}$	$\frac{r_j^S}{a_{jj}^S}$
$\{\mathbf{x}^1_{S^c\setminus\{j\}}\}^\top$	$-\mathbf{w}^S_{S^c\setminus\{j\}} + \frac{w_j^S}{a_{jj}^S}\mathbf{A}^S_{S^c\setminus\{j\}\,j}$	$-\mathbf{r}^S_{S^c\setminus\{j\}} + \frac{r_j^S}{a_{jj}^S}\mathbf{A}^S_{S^c\setminus\{j\}\,j}$

我们还必须进一步阐明与 $\emptyset$-活跃基本可行解相对应的初始表。令 $S = \emptyset$，由（16）可直接得到

$$\mathbf{B}^\emptyset = (1-\beta)\mathbf{I}, \quad \mathbf{N}^\emptyset = \mathbf{I} - \beta\mathbf{P}, \quad \mathbf{H}^\emptyset = \frac{1}{1-\beta}\mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^\emptyset = \frac{1}{1-\beta}(\mathbf{I} - \beta\mathbf{P}). \tag{30}$$

此外，利用（30）、（22）和（24），我们可由下式得到初始约化成本

$$\mathbf{w}^\emptyset = \mathbf{1} \quad \text{and} \quad \mathbf{r}^\emptyset = \mathbf{R}. \tag{31}$$

现在可以给出 常规枢轴 （CP）指数算法，如表5所示。该算法实现了 Kallenberg （1986年）提出的参数单纯形法。在表 5 中，我们采用类似算法的记法，用上标计数器（k）替代上标集合 S_k。请注意，该算法仅适用于折扣情形 $\beta < 1$，因为 $\mathbf{A}^{(0)}$ 的计算需要除以 $1-\beta$。

接下来，我们评估 CP 算法的计算复杂度。

命题 4.4 *CP* 算法执行 $2n^3 + O(n^2)$ 次算术运算。

证明。经计数可知，该算法执行 $n^3 + O(n^2)$ 次乘法和除法，以及同数量级的加法和减法，由此可得结论。□

5. 利用特殊结构

本节旨在利用特殊结构，减少枢轴步骤中执行的运算次数。

5.1 更新边际生产率

我们首先说明，无需更新单纯形表中的边际奖励 r_j^S。只需更新所需的边际工作量度量 w_j^S，再用它们更新所需的边际生产率 ν_j^S。尽管下一个结果已由 Niño-Mora (2002年证明，但为使本文自成一体，我们在此给出一个新证明，并借助从表 2 中的单纯形表到表 3–4 中的单纯形表的主元步骤来推导。2 到表 3–4。

命题5.1 对于 $i \in N$ 和 $j \in S^c$，$\nu_i^{S\cup\{j\}} = \nu_j^S - \dfrac{w_i^S}{w_i^{S\cup\{j\}}}(\nu_j^S - \nu_i^S)$。

表 5：**CP** 吉廷斯指数算法。

ALGORITHM CP:

$S_0 := \emptyset$, $\mathbf{A}^{(0)} := \dfrac{1}{1-\beta}(\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})$, $\mathbf{w}^{(0)} := \mathbf{1}$, $\mathbf{r}^{(0)} := \mathbf{R}$

for $k := 1$ **to** n **do**

pick $i_k \in \arg\max\left\{r_i^{(k-1)}/w_i^{(k-1)} : i \in S_{k-1}^c\right\}$; $\nu_{i_k}^* := r_{i_k}^{(k-1)}/w_{i_k}^{(k-1)}$, $S_k := S_{k-1} \cup \{i_k\}$

if $k < n$ **then**

$p^{(k)} := a_{i_k i_k}^{(k-1)}$, $a_{i_k i_k}^{(k-1)} := 1$, $\mathbf{v}^{(k)} := (1/p^{(k)})\mathbf{A}_{Ni_k}^{(k-1)}$, $\mathbf{h}^{(k)} := -\mathbf{A}_{i_k N}^{(k-1)}$

$\mathbf{A}^{(k)} := \mathbf{A}^{(k-1)} + \mathbf{v}^{(k)}\mathbf{h}^{(k)}$, $\mathbf{A}_{Ni_k}^{(k)} := \mathbf{v}^{(k)}$, $\mathbf{A}_{i_k N}^{(k)} := (1/p^{(k)})\mathbf{h}^{(k)}$

$\mathbf{w}_{S_k^c}^{(k)} := \mathbf{w}_{S_k^c}^{(k-1)} - w_{i_k}^{(k-1)}\mathbf{A}_{S_k^c i_k}^{(k)}$, $\mathbf{w}_{S_{k-1}}^{(k)} := \mathbf{w}_{S_{k-1}}^{(k-1)} + w_{i_k}^{(k-1)}\mathbf{A}_{S_{k-1} i_k}^{(k)}$, $w_{i_k}^{(k)} := w_{i_k}^{(k-1)}/p^{(k)}$

$\mathbf{r}_{S_k^c}^{(k)} := \mathbf{r}_{S_k^c}^{(k-1)} - r_{i_k}^{(k-1)}\mathbf{A}_{S_k^c i_k}^{(k)}$, $\mathbf{r}_{S_{k-1}}^{(k)} := \mathbf{r}_{S_{k-1}}^{(k-1)} + r_{i_k}^{(k-1)}\mathbf{A}_{S_{k-1} i_k}^{(k)}$, $r_{i_k}^{(k)} := r_{i_k}^{(k-1)}/p^{(k)}$

end { if }

end { for }

证明。从情况 $i \in S$开始。根据表4 和 $\nu_i^{S\cup\{j\}} = r_i^{S\cup\{j\}}/w_i^{S\cup\{j\}}$，我们有

$$\nu_i^{S\cup\{j\}} = \frac{\nu_i^S w_i^S + \nu_j^S \frac{w_j^S}{a_{jj}^S} a_{ij}^S}{w_i^S + \frac{w_j^S}{a_{jj}^S} a_{ij}^S} = \nu_j^S - \frac{w_i^S}{w_i^S + \frac{w_j^S}{a_{jj}^S} a_{ij}^S}(\nu_j^S - \nu_i^S) = \nu_j^S - \frac{w_i^S}{w_i^{S\cup\{j\}}}(\nu_j^S - \nu_i^S).$$

现在考虑情形 $i = j$。然后，再由表 4 可得

$$\nu_j^{S\cup\{j\}} = \frac{r_j^S/a_{jj}^S}{w_j^S/a_{jj}^S} = \frac{r_j^S}{w_j^S} = \nu_j^S.$$

Fi最后，考虑情形 $i \in S^c \setminus \{j\}$。然后，再次利用表 4 可得

$$\nu_i^{S\cup\{j\}} = \frac{\nu_i^S w_i^S - \nu_j^S \frac{w_j^S}{a_{jj}^S} a_{ij}^S}{w_i^S - \frac{w_j^S}{a_{jj}^S} a_{ij}^S} = \nu_j^S - \frac{w_i^S}{w_i^S - \frac{w_j^S}{a_{jj}^S} a_{ij}^S}(\nu_j^S - \nu_i^S) = \nu_j^S - \frac{w_i^S}{w_i^{S\cup\{j\}}}(\nu_j^S - \nu_i^S),$$

正如所需。至此，证明完成。 □

5.2 缩减表

我们接下来阐明在每个枢轴步骤中需要更新的最少信息，这些信息将存储在约化单纯形表中。为此，我们首先注意到基

逆矩阵 $\mathbf{H}^S$ 很容易划分并表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^S &= \begin{bmatrix}\mathbf{H}^S_{SS} & \mathbf{H}^S_{SS^c}\\ \mathbf{H}^S_{S^cS} & \mathbf{H}^S_{S^cS^c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\mathbf{I}_S-\beta\mathbf{P}_{SS})^{-1} & \frac{\beta}{1-\beta}(\mathbf{I}_S-\beta\mathbf{P}_{SS})^{-1}\mathbf{P}_{SS^c}\\ \mathbf{0}_{S^cS} & \frac{1}{1-\beta}\mathbf{I}_{S^c}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{H}^S_{SS} & \frac{\beta}{1-\beta}\mathbf{H}^S_{SS}\mathbf{P}_{SS^c}\\ \mathbf{0}_{S^cS} & \frac{1}{1-\beta}\mathbf{I}_{S^c}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{32}$$

现在我们使用 (32) 对矩阵 $\mathbf{A}^S$ 进行划分和表示

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^S &= \begin{bmatrix}\mathbf{A}^S_{SS} & \mathbf{A}^S_{SS^c}\\ \mathbf{A}^S_{S^cS} & \mathbf{A}^S_{S^cS^c}\end{bmatrix} = \mathbf{N}^S\mathbf{H}^S = \begin{bmatrix}(1-\beta)\mathbf{I}_S & \mathbf{0}_{SS^c}\\ -\beta\mathbf{P}_{S^cS} & \mathbf{I}_{S^c}-\beta\mathbf{P}_{S^cS^c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{H}^S_{SS} & \frac{\beta}{1-\beta}\mathbf{H}^S_{SS}\mathbf{P}_{SS^c}\\ \mathbf{0}_{S^cS} & \frac{1}{1-\beta}\mathbf{I}_{S^c}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}(1-\beta)\mathbf{H}^S_{SS} & \beta\mathbf{H}^S_{SS}\mathbf{P}_{SS^c}\\ -\beta\mathbf{P}_{S^cS}\mathbf{H}^S_{SS} & \frac{1}{1-\beta}(\mathbf{I}_{S^c}-\beta\mathbf{P}_{S^cS^c})-\frac{\beta^2}{1-\beta}\mathbf{P}_{S^cS}\mathbf{H}^S_{SS}\mathbf{P}_{SS^c}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}(1-\beta)\mathbf{H}^S_{SS} & \mathbf{A}^S_{SS^c}\\ \mathbf{A}^S_{S^cS} & \frac{1}{1-\beta}(\mathbf{I}_{S^c}-\beta\mathbf{P}_{S^cS^c}+\beta\mathbf{A}^S_{S^cS}\mathbf{P}_{SS^c})\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{33}$$

根据 (33) 及上述讨论，可以清楚地看出，只需保留约化单纯形表中表明的 S-活跃 BFS 的信息（见表6）。

表6： S-活跃 BFS 的约化单纯形表。

	$\mathbf{x}^1_S$		
$\{\mathbf{x}^1_{S^c}\}^\top$	$\mathbf{A}^S_{S^cS}$	$\mathbf{w}^S_{S^c}$	$\boldsymbol{\nu}^S_{S^c}$

要从表 $S\cup\{j\}$-活跃 BFS 的单纯形表求得约化单纯形表，我们首先计算主元元素 a^S_{jj}。注意，根据 (33),

$$a^S_{jj} = \frac{1-\beta p_{jj}+\beta\mathbf{A}^S_{jS}\mathbf{P}_{Sj}}{1-\beta}. \tag{34}$$

然后我们再次使用 (33) 来计算所需的向量

$$\mathbf{A}^S_{S^c\setminus\{j\},j} = -\frac{\beta}{1-\beta}\left\{\mathbf{P}_{S^c\setminus\{j\},j}-\mathbf{A}^S_{S^c\setminus\{j\},S}\mathbf{P}_{Sj}\right\}. \tag{35}$$

因此，我们可以轻松计算 $S\cup\{j\}$-活跃 BFS 的约化单纯形表，如表7–8所示。

表7： $S\cup\{j\}$-活跃 BFS 的约化单纯形表： $\mathbf{A}^{S\cup\{j\}}$ 部分。

	$\mathbf{x}^1_S$	x^1_j
$\{\mathbf{x}^1_{S^c\setminus\{j\}}\}^\top$	$\mathbf{A}^S_{S^c\setminus\{j\},S}-\frac{\mathbf{A}^S_{S^c\setminus\{j\},j}\mathbf{A}^S_{jS}}{a^S_{jj}}$	$\frac{\mathbf{A}^S_{S^c\setminus\{j\},j}}{a^S_{jj}}$

表8： $S \cup \{j\}$-活跃 BFS 的约化单纯形表：$\mathbf{w}^{S\cup\{j\}}$ 和 $\boldsymbol{\nu}^{S\cup\{j\}}$ 部分。

$$\{\mathbf{x}^1_{S^c\setminus\{j\}}\}^\top \quad \boxed{\mathbf{w}^S_{S^c\setminus\{j\}} - \frac{w^S_j}{a^S_{jj}}\mathbf{A}^S_{S^c\setminus\{j\},j} \quad \nu^S_j - \frac{w^S_j}{w^{S\cup\{j\}}_i}(\nu^S_j - \nu^S_i),\ i \in S^c \setminus \{j\}}$$

6. 快速枢轴算法

基于上述内容，我们可以直接得到快速枢轴算法 FP(EO)，如表 9 所示；再次说明，例如，我们将 $w_i^{S_k}$写作 $w_i^{(k)}$ 。输入 EO 是一个布尔变量，当赋值为 `true`/1 时，算法会生成扩展输出。在某些情况下，这一功能非常有用；除了 Gittins 指数 ν_i^*之外，还可能需要边际工作量和边际生产率度量 $w_i^{S_k}$以及 $\nu_i^{S_k}$与算法生成的继续集合 S_k 相对应的量。因此，例如，这些量被用于Niño-Mora (2006b) 中，作为一种快速算法的输入，该算法计算切换指数（由Asawa 和 Teneketzis(1996年) 提出）。

接下来，我们评估 FP(EO) 算法的计算复杂度。

命题 6.1

(a) FP(0) 算法执行 $(2/3)n^3 + O(n^2)$ 次算术运算。(b) FP(1) 算法执行 ($4/3)n^3 + O(n^2)$ 次算术运算。

证明。(a) 算法的第 k 步执行约 $(k+1)(2(n-k)+1)$ 次乘法和除法，总计为

$$\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)\,(2(n-k)+1) + O(n) = (1/3)n^3 + (3/2)n^2 + O(n).$$

Th加法和减法的次数也相同，由此得出结果 t.

(b) 计数可知，该算法执行 $(2/3)n^3 + (5/2)n^2 + O(n)$ 次乘法和除法，以及同样次数的加法和减法，由此得出结果。□

我们也可以不按所述方式计算边际生产率 ν_i^S，而是更新边际奖励 r_i^S，使用更新公式

$$\mathbf{r}^{S_k}_{S_k^c} := \mathbf{r}^{S_{k-1}}_{S_k^c} - r^{S_{k-1}}_{i_k}\mathbf{A}^{S_k}_{S_k^c i_k},$$

然后计算 $\nu_i^{S_k} = r_i^{S_k}/w_i^{S_k}$ 对于 $i \in S_k^c$。这种替代方案的复杂度与所提出方案的复杂度相同。

请注意，FP(0) 算法既适用于折扣指数，也适用于无折扣指数。通过在所述计算中令 $\beta = 1$ ，即可计算后者。

7. 与状态消去算法的关系

Katta 和 Sethuraman (2004年) 以及 Sonin (2005年) 提出了基于状态消去思想的 Gittins 指数算法，并讨论了这些算法在具有终止状态的赌博机中的应用。然而，任何具有正折扣因子的赌博机都可以轻易转换为这种情形。参见 Sonin (2005年)。表 10 给出了状态消去(SE) 算法的形式化描述。

上述讨论使我们能够阐明该算法与 CP 算法的关系，从而证明它可以计算 Gittins 指数。

表9：**FP(EO)** 吉廷斯指数算法。

ALGORITHM FP(EO):

$S_0 := \emptyset$, $\boldsymbol{w}^{(0)} := \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\nu}^{(0)} := \mathbf{R}$

for $k := 1$ **to** n **do**
  pick $i_k \in \arg\max\left\{\nu_i^{(k-1)} : i \in S_{k-1}^c\right\}$; $\quad \nu_{i_k}^* := \nu_{i_k}^{(k-1)}$, $S_k := S_{k-1} \cup \{i_k\}$
  if $k = 1$ **then**
    $\alpha^{(1)} := -\beta/(1-\beta p_{i_1 i_1})$, $\mathbf{A}_{S_1^c i_1}^{(1)} := \alpha^{(1)} \mathbf{P}_{S_1^c i_1}$
    if EO **then** $\mathbf{A}_{i_1 S_1^c}^{(1)} := -\alpha^{(1)} \mathbf{P}_{i_1 S_1^c}$ **end** { if }
  else if $k < n$ **or** {EO **and** $k = n$} **then**
    $\alpha^{(k)} := -\beta/\{1 - \beta(p_{i_k i_k} - \mathbf{A}_{i_k S_{k-1}}^{(k-1)} \mathbf{P}_{S_{k-1} i_k})\}$
    $\mathbf{A}_{S_k^c i_k}^{(k)} := \alpha^{(k)}\{\mathbf{P}_{S_k^c i_k} - \mathbf{A}_{S_k^c S_{k-1}}^{(k-1)} \mathbf{P}_{S_{k-1} i_k}\}$, $\mathbf{A}_{S_k^c S_{k-1}}^{(k)} := \mathbf{A}_{S_k^c S_{k-1}}^{(k-1)} - \mathbf{A}_{S_k^c i_k}^{(k)} \mathbf{A}_{i_k S_{k-1}}^{(k-1)}$
    if EO **then**
      $\mathbf{A}_{i_k S_k^c}^{(k)} = -\alpha^{(k)}\{\mathbf{P}_{i_k S_k^c} + \mathbf{P}_{i_k S_{k-1}} \mathbf{A}_{S_{k-1} S_k^c}^{(k-1)}\}$, $\mathbf{A}_{S_{k-1} S_k^c}^{(k)} := \mathbf{A}_{S_{k-1} S_k^c}^{(k-1)} + \mathbf{A}_{S_{k-1} i_k}^{(k-1)} \mathbf{A}_{i_k S_k^c}^{(k)}$
    end { if }
  end { if }
  $\mathbf{w}_{S_k^c}^{(k)} := \mathbf{w}_{S_k^c}^{(k-1)} - w_{i_k}^{(k-1)} \mathbf{A}_{S_k^c i_k}^{(k)}$, $\nu_i^{(k)} := \nu_{i_k}^* - \{w_i^{(k-1)}/w_i^{(k)}\}\{\nu_{i_k}^* - \nu_i^{(k-1)}\}, i \in S_k^c$
  if EO **then**
    $w_{i_k}^{(k)} := -\{\alpha^{(k)}(1-\beta)/\beta\} w_{i_k}^{(k-1)}$, $\mathbf{w}_{S_{k-1}}^{(k)} := \mathbf{w}_{S_{k-1}}^{(k-1)} + w_{i_k}^{(k)} \mathbf{A}_{S_{k-1} i_k}^{(k-1)}$
    $\nu_i^{(k)} := \nu_{i_k}^* - \{w_i^{(k-1)}/w_i^{(k)}\}\{\nu_{i_k}^* - \nu_i^{(k-1)}\}, i \in S_{k-1}$, $\nu_{i_k}^{(k)} := \nu_{i_k}^*$
  end { if }
end { for }

命题7.1 *SE* 算法可以计算 *Gittins* 指数。

证明。通过直接的代数运算可得，SE 算法计算的量与 CP 算法计算的量之间的关系为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{S_k^c S_k^c}^{(k)} &= \mathbf{I} - (1-\beta)\mathbf{A}_{S_k^c S_k^c}^{(k)} \\ \tilde{r}_{S_k^c}^{(k)} &= (1-\beta)\mathbf{r}_{S_k^c}^{(k)} \\ \boldsymbol{\beta}_{S_k^c}^{(k)} &= \mathbf{1}_{S_k^c} - (1-\beta)\mathbf{w}_{S_k^c}^{(k)}, \end{aligned} \tag{36}$$

对每个 k 均成立。因此，SE 算法计算出的指数与 CP 算法相同。证明至此完成。□

接下来，我们评估 SE 算法的计算复杂度。

命题7.2 *SE* 算法执行 $n^3 + O(n^2)$ 次算术运算。

证明。算法的第 k 步执行 $3(n-k) + (n-k)^2 + O(1)$ 次乘法和除法，

表10：**SE** Gittins 指数算法。

ALGORITHM SE:

$S_0 := \emptyset,\ \tilde{\mathbf{P}}^{(0)} := \beta\mathbf{P},\ \boldsymbol{\beta}^{(0)} := \beta\mathbf{1},\ \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} := (1-\beta)\mathbf{R}$

for $k := 1$ **to** n **do**
  pick $i_k \in \arg\max\left\{\tilde{r}_i^{(k-1)}/\{1-\beta_i^{(k-1)}\} : i \in S_{k-1}^c\right\}$
  $\nu^*_{i_k} := \tilde{r}_{i_k}^{(k-1)}/\{1-\beta_{i_k}^{(k-1)}\},\ S_k := S_{k-1}\cup\{i_k\}$
  if $k < n$ **then**
    $\tilde{\mathbf{P}}^{(k)}_{S_k^c i_k} := \{1/(1-\tilde{p}^{(k-1)}_{i_k i_k})\}\tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)}_{S_k^c i_k},\ \tilde{\mathbf{P}}^{(k)}_{S_k^c S_k^c} := \tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)}_{S_k^c S_k^c} + \tilde{\mathbf{P}}^{(k)}_{S_k^c i_k}\tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)}_{i_k S_k^c}$

    $\boldsymbol{\beta}^{(k)}_{S_k^c} := \tilde{\mathbf{P}}^{(k)}_{S_k^c S_k^c}\mathbf{1}_{S_k^c},\ \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}_{S_k^c} := \tilde{\mathbf{r}}^{(k-1)}_{S_k^c} + \tilde{r}^{(k-1)}_{i_k}\tilde{\mathbf{P}}^{(k)}_{S_k^c i_k}$
  end { if }
end { for }

总计

$$n^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{3(n-k) + (n-k)^2\right\} + O(n) = (1/3)n^3 + 2n^2 + O(n).$$

此外还需要进行 $2(n-k)^2 + 2(n-k) + O(1)$ 次加法和减法，因此

$$2\sum_{k=1}^{n-1}\left\{(n-k)^2 + (n-k)\right\} + O(1) = (2/3)n^3 + O(n).$$

由此得出所述的总运算次数。 □

8. 未折扣 Gittins 指数的计算

为了说明计算未折扣 Gittins 指数的意义，我们接下来简要讨论这一问题。记 $\nu^{\beta,*}_i$ 为折扣因子 $0<\beta<1$ 下的折扣 Gittins 指数。 Kelly (1981年) 证明了 $\nu^{\beta,*}_i$ 关于 β 单调不减。由（3）可知，$\nu^{\beta,*}_i$ 均有一个由活跃奖励的任意上界所确定的统一上界。因此，当 β 趋近于 1 时，存在唯一有限的极限指数：ν_i^*，$\lim_{\beta\nearrow 1}\nu^{\beta,*}_i$。

因此，考虑相应的泰勒级数展开是很自然的

$$\nu_i^{\beta,*} = \nu_i^* + \gamma_i^*(1-\beta) + o(1-\beta) \quad \text{as } \beta \nearrow 1,$$

其有效性已由 Katehakis 和 Rothblum (1996年证明。他们进一步表明，极限一阶指数和二阶指数 ν_i^* 以及 γ_i^* 在 平均准则下为多臂老虎机问题给出了最优策略：优先选择一阶指数最大的赌博机；若并列，则根据二阶指数打破平局。 Kelly (1981年) 也曾更早地给出过类似结果。

因此，计算 ν_i^* 很有意义。然而，若试图在 VWB、CP 或 SE 算法中令 β 趋近于 1，这些算法都会失效，因为它们涉及除以 $1-\beta$。相比之下，我们的 FP(0) 算法可以直接计算未折扣吉廷斯指数：只需在所述计算中令 $\beta = 1$ 即可。

9. 计算研究

众所周知，在当代计算机中，算法的算术运算次数未必是决定其运行时性能的首要因素。相反，自 20 世纪 90 年代以来，处理器性能与内存性能之间的差距不断扩大，使得计算瓶颈越来越多地由内存访问时间造成。关于这些问题的相关讨论，参见例如Dongarra 和 Eijkhout (2000）。因此，有必要检验我们改进后的 FP 算法复杂度是否能转化为更短的运行时间。

因此，我们进行了计算研究，使用本文所述算法的作者版 MATLAB 实现，在不同规模的随机实例上测量运行时间。实验在一台配备 4 GB 随机存取存储器的 HP xw9300 2.8 GHz AMD Opteron 工作站上运行，使用 Windows xp x64 系统上的 MATLAB R2006a 64 位版。

结果报告于表 11。对于每个所列的状态空间规模 n，均生成一个随机问题实例，并记录计算 $t^{\mathrm{FP}(0)}$, $t^{\mathrm{FP}(1)}$, t^{CP}，以及 t^{SE} （单位为秒） n Gittins 指数值所耗费的时间，分别对应 FP(0)、FP(1)、CP 和 SE 算法。表中还展示了加速比 $t^{\mathrm{FP}(1)}/t^{\mathrm{FP}(0)}$, $t^{\mathrm{CP}}/t^{\mathrm{FP}(0)}$,$t^{\mathrm{SE}}/t^{\mathrm{FP}(0)}$，以及 $t^{\mathrm{FP}(1)}/t^{\mathrm{CP}}$。

结果表明，FP(0) 算法相较于 FP(1) 算法和 SE 算法的理论加速比分别为 2 和 $3/2$ ，略微低估了实测加速比。结果还表明，FP(0) 算法相较于 CP 算法的理论加速比 3 严重高估了实测加速比；实测加速比仅略高于其相较于 SE 算法的加速比。此外，尽管 FP(1) 算法相较于 CP 算法的算术运算次数更少（$(4/3)n^3$ 对 $2n^3$），其性能却远逊于后者。总体而言，在这项实验中，FP(0) 算法明显胜出，其次是 SE 算法；SE 算法相较于 CP 算法仅有小幅提升。

理论加速比与实测加速比之间观察到的差异源于内存访问问题。性能分析表明，CP 算法的计算瓶颈在于矩阵 $\mathbf{A}^{(k)}$ 的更新。相比之下，FP(0)、FP(1) 和 SE 算法各有两个计算瓶颈，分别对应每一步中的主要矩阵更新。在我们的实现中，后者是在预分配矩阵的索引子矩阵上执行的，会产生代价高昂的非连续、随机步长内存访问模式。相比之下，矩阵 $\mathbf{A}^{(k)}$ 可作为连续内存块高效访问。

10. 结论

我们采用丹齐格单纯形法的参数化版本作为基础，设计了一种新算法，用于计算 n状态赌博机的 Gittins 指数，其运算次数提升至 $(2/3)n^3$，与通过高斯消元法求解线性方程组的运算次数相当。研究还表明，该算法优于其他方法。然而，直接使用索引子矩阵实现会导致代价高昂的非连续随机步长内存访问模式，这构成了其计算瓶颈。值得研究的是，能否通过数值线性代数中的先进方法减少这一瓶颈，例如采用可充分利用先进架构计算机的分块实现，正如 Dongarra 和 Eijkhout (2000) 所讨论的那样。针对可在非活跃时改变状态的 restless 赌博机，Niño-Mora (2006c) 开发了相应的基于单纯形法的算法。我们还针对马尔可夫链最优停止这一经典问题，提出了一种新颖的 Gittins 指数解，使该新算法也适用于这一问题。我们认为，这种方法为研究最优停止问题提供了新的工具，值得进一步探索。

表 11：指标算法的运行时间（秒）比较。

n	$t^{\mathrm{FP}(0)}$	$t^{\mathrm{FP}(1)}$	t^{CP}	t^{SE}	$\frac{t^{\mathrm{FP}(1)}}{t^{\mathrm{FP}(0)}}$	$\frac{t^{\mathrm{CP}}}{t^{\mathrm{FP}(0)}}$	$\frac{t^{\mathrm{SE}}}{t^{\mathrm{FP}(0)}}$	$\frac{t^{\mathrm{FP}(1)}}{t^{\mathrm{CP}}}$
1000	15.3	33.0	24.6	24.1	2.16	1.61	1.58	1.34
1500	49.3	113.3	82.3	80.6	2.30	1.67	1.63	1.38
2000	118.1	270.1	195.8	194.6	2.29	1.66	1.65	1.38
2500	230.1	520.6	379.9	377.3	2.26	1.65	1.64	1.37
3000	395.7	914.0	659.6	648.6	2.31	1.68	1.66	1.39
3500	627.4	1429.0	1051.6	1043.7	2.28	1.68	1.66	1.36
4000	937.6	2122.8	1568.6	1559.7	2.26	1.67	1.66	1.35
4500	1347.0	3064.6	2250.5	2217.0	2.28	1.67	1.65	1.36
5000	1832.7	4225.6	3092.6	3051.5	2.31	1.68	1.67	1.37
5500	2458.2	5629.6	4136.9	4058.7	2.29	1.68	1.65	1.36
6000	3195.3	7283.8	5402.2	5373.6	2.28	1.69	1.68	1.35

致谢

作者感谢匿名副编辑和两位审稿人提出的宝贵建议，这些建议促使论文得以改进。本研究获得了西班牙教育与科学部通过拉蒙-卡哈尔研究员奖和 MTM2004-02334号资助提供的支持，也获得了欧盟委员会卓越网络 Euro-NGI 以及马德里自治区-UC3M通过 UC3M-MTM-05-075号资助提供的支持。

参考文献

Asawa, M., D. Teneketzis. 1996年. 带有切换惩罚的多臂赌博机。*IEEE* 自动化控制汇刊 **41**1328–348。

Bertsimas, D., J. Niño-Mora. 1996年. 守恒律、扩展多面拟阵与多臂赌博机问题；一种针对可索引系统的多面体方法。数学运筹学 **21** 257–306。

Bradt, R. N., S. M. Johnson, S. Karlin. 1956年. 关于使 n观测值之和最大化的序贯设计。数学统计年刊 **27**1060–1074。

Chen, Y.-R., M. N. Katehakis. 1986年. 有限状态多臂赌博机问题的线性规划. *Math. Oper. Res.* **11**180–183.

Dongarra, J. J., V. Eijkhout. 2000. 数值线性代数算法与软件. *J. Comput.Appl. Math.* **123**489–514.

Duan, J.-C., G. Gauthier, J.-G. Simonato. 2003. 定价或有索取权的马尔可夫链方法. D. D. Yao, H. Zhang, X. Y. Zhou, 编, 随机建模与优化. Springer, New York. 333–362.

Gittins, J. C. 1979. 赌博机过程与动态分配指数。*J. Roy. Statist. Soc. Ser. B***41**148–177。附讨论。

Gittins, J. C., D. M. Jones. 1974年。用于实验序贯设计的动态分配指数。J. Gani, K. Sarkadi, I. Vincze, 编，《统计学进展》（欧洲统计学家会议，布达佩斯，*1972*年）。北荷兰，阿姆斯特丹，荷兰。241–266。Kallenberg, L. C. M. 1986年。关于 M. N. Katehakis 和 Y.-R. Chen 计算 Gittins 指数的一则注释。*Math. Oper. Res.* **11**184–186。Katehakis, M. N., U. G. Rothblum. 1996年。有限状态多臂赌博机问题：敏感折扣、平均回报和平均超越最优性。*Ann. Appl. Prob.* **6**1024–1034。Katta, A. -K., J. Sethuraman. 2004年。一则关于带有转折的赌博机的注释。*SIAM J. Discrete Math.* **18**110–113。Kelly, F. P. 1981年。折扣因子接近 1 的多臂赌博机：伯努利情形。*Ann.Statist.* **9**987–1001。Klimov, G. P. 1974年。分时服务系统 I。*Theory Probab. Appl.* **19** 532–551。Niño-Mora, J. 2001年。Restless 赌博机、部分守恒律与可指数化性。*Adv. in Appl.Probab.* **33**76–98。Niño-Mora, J. 2002年。Restless 项目与排队准入控制的动态分配指数：一种多面体方法。*Math. Program.* **93**361–413。Niño-Mora, J. 2006a。Restless 赌博机边际生产率指数、收益递减以及按订单生产/备货生产 $M/G/1$ 队列的最优控制。*Math. Oper. Res.* **31**50–84。Niño-Mora, J. 2006b。带切换成本的赌博机的 n^2 指数算法与计算研究。技术报告，马德里卡洛斯三世大学统计系，西班牙马德里。已提交。Niño-Mora, J. 2006c。二元动作马尔可夫决策过程：基于单纯形的分析、算法与路由应用。技术报告，马德里卡洛斯三世大学统计系，西班牙马德里。已提交。Saaty, T., S. Gass. 1954。参数化目标函数 I。*J. Operations Res. Soc. Amer.* **2** 316–319。Sonin, I. 1999。最优停止问题的消去算法。*Math. MethodsOper. Res.* **49**111–123。Sonin, I. 2005。马尔可夫链的广义 Gittins 指数及其递归计算。技术报告，北卡罗来纳大学夏洛特分校数学系，夏洛特，北卡罗来纳州。Varaiya, P. P., J. C. Walrand, C. Buyukkoc. 1985。多臂赌博机问题的扩展：折扣情形。*IEEE Trans. Automat. Control* **30** 426–439。Whittle, P. 1980。多臂赌博机与 Gittins 指数。*J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **42**143–149。