arXiv:2304.01855v1 [econ.TH] 4 Apr 2023

不平等与增长：一场包含生产与攫取的双人动态博弈

Julio Huato*

2005年2月15日

*圣弗朗西斯学院，纽约州布鲁克林。电子邮件：jhuato@sfc.edu。

目录

1 引言 4

2 博弈 7

2.1 框架.7 2.2 一阶条件.10 2.3 马尔可夫纳什均衡.12

3 分析 13

3.1 最优消费.13 3.2 分配冲突.14 3.3 博弈动态.15 3.4 协调博弈.18

4 文献 20

4.1 理论参考文献.21 4.2 关于不平等与增长的实证争论.22 4.3 关于合作的随想.24

5 结论 2 8

附录.38

摘要

本文将一个包含生产与攫取的双主体经济建模为非合作动态博弈，并求得其闭式马尔可夫纳什均衡。分析凸显了哪些参数条件会使经济从非侵略性或“合作性”均衡转向公开的分配冲突。模型纳入了反映攫取技术和破坏性作用的参数。该博弈的完整动态影响尚待探索，但这一模型为思考不同技术与经济条件在多大程度上有利于合作或分配冲突，提供了一个颇具前景的通用框架。

关键词： 微分博弈、动态博弈、增长、不平等、攫取。

JEL分类： O1,O5, P1

1 引言

对各种数据集开展的实证研究表明，在控制其他相关因素后，经济中的初始经济差距越大，后续经济绩效越低。[1]

受这些实证研究发现的启发，本文构建了一个包含生产与攫取的简单经济体双人微分博弈模型，解析求得其马尔可夫纳什均衡，并考察其含义。由此得以洞察这个人工经济体的动态特征。

尽管马尔可夫纳什均衡正则系统的非线性可能使其动态配置问题无法获得闭式解，但仍可通过数值方法求解。不过，这类数值解及其分析不在本文的讨论范围之内。

“生产”是指每个参与者都可以利用自己拥有的财富存量，通过简单的凹技术创造净新增财富流。“攫取 ”则定义为一系列需要付出代价的行动，旨在保护自己的财产和/或夺取他人的财产。

在这一语境下，所有权指对财富的占有或处置程度。在社会生活的实践中，法律与伦理规则，或者更确切地说，这些规则得到执行的程度，似乎决定了所有权。但本文所用的所有权概念并不要求获得法律或伦理上的认可。它完全取决于初始财产分配、生产与攫取的技术条件，以及约束效用最大化所产生的经济结果（影子价格和随时间推移而最优选择的行动）。[2] 因此，所有权被视为一个连续谱，其中存在不同程度的强制力。从这个角度看，攫取程度可以被解释为财富排他性的一种负向或反向度量；理论文献将所有权的强制力称为财富的排他性。[3]

---

[1]关于这一问题正在进行的实证争论，概要见第（4）节。[2]模型将以下因素作为参数：每位参与者的财富中易受攫取的比例、攫取支出的“生产率”，以及从受害者处夺走的财富中最终被侵夺者实际攫取的比例。这些参数都可以视为反映经济体中的制度条件（政治、法律或伦理条件），但模型并不要求如此；它们也可以完全由技术和经济因素决定。[3]本文的模型与“政治经济学”和“社会契

该模型凸显了攫取所导致的低效率，并由此描述了一种机制：初始财富分配失衡可能引发分配冲突、造成重大福利损失，进而导致经济绩效不佳。[4] 不过，这一结果并不令人意外。更重要的是，该模型提供了一种方法，用以考察不同经济环境（各自对应不同的激励制度）对同步增长的影响；这些经济环境可以通过边界条件以及技术参数之间的关系来表征。

在单期模型中，Grossman 和 Kim（1995年）提出，攫取有两种截然不同的形式：防御（他们称之为“防御工事”）和攻击（他们称之为“掠夺”）。他们对攫取函数的设定包含若干参数，用以刻画攫取行为的效能和破坏性（浪费性），具有一些吸引人的特点。攫取行为以反向（双曲线）的方式进入攫取函数。也就是说，参与者通过采取攫取行为而保有的自身财富数量，是该行为的递增且平滑的函数。另一方面，参与者1能够攫取的参与者2的财富数量，则是参与者1所采取攫取行为的递减且平滑的函数。此外，攫取的边际产出（以保留和夺取的财富表示）是递减的。本文提出的模型采用了 Grossman 和 Kim 的基本框架，但略作简化。[5] 从这个意义上说，该模型对这些作者的静态结果作了动态推广。

从福利分析的角度来看，自然的帕累托最优基准是合作动态博弈：参与者同意合作，并在开始博弈前分享由此获得的动态效率收益。[6] 在这种情况下，博弈实际上就变成了一个常规的最优控制

按照 Ferreira（1999）的分类，属于“冲突”因果机制。更一般地说，尽管这些区别在实践中很重要，但这里关注的并不是攫取行为是否合法、合乎法律（例如财政政策、征用权征收），还是以其他方式进行（例如公然抢劫）。[4]在动态博弈框架下，还有其他机制可以解释初始财富分配与经济绩效不佳之间的负相关关系。其中一种机制可能是参与者在时间偏好上的差异，即收益函数中设定的主观贴现率不同。[5]为确保得到马尔可夫纳什均衡闭式解，本文不再区分 Grossman 和 Kim（1995）所说的防御性行动与进攻性行动。[6] 文献中也称为“协调博弈”。第 4 节概述了这一广为人知的情形。

问题，类型与 Ramsey（1928年）和 Koopmans（1965年）模型中研究的问题相同。然而，使参与者能够事先达成有约束力的合作协议的制度环境必然是外生的。乍看之下，在假设参与者都是自利型参与者的情况下，合作情形似乎缺乏实际意义，因为促成合作的制度环境并未在模型中得到充分阐释。

将攫取的效能和破坏性参数化，其优势恰恰在于，这使我们能够阐明，在没有先验的 合作动机的情况下，两个处于策略互动中的自利型参与者（例如个人、阶级、国家）如何内生地产生此类条件。换言之，我们旨在探明：在给定初始财富分配的情况下，面对生产和攫取技术及经济学方面的约束，自利型参与者在何种条件下可能会选择放弃攫取行为，从而获得并分享合作的动态收益。Grossman 和 Kim（1995年）将这种博弈解称为非攻击性均衡。[7]

关于微分博弈中马尔可夫纳什均衡存在性的定理指出，哈密顿函数关于控制变量的凹性——这又要求即时效用函数和状态运动方程都具有凹性——足以确保至少存在一个符号正确的马尔可夫纳什均衡，例如目标泛函的“上确界”。[8] 然而，在实践中确定马尔可夫纳什均衡是一项棘手的任务。尤其是，状态变量与控制变量之间的非线性相互作用，使得求得马尔可夫纳什均衡闭式解极其困难。[9] 这无疑是在求解

[7]在 Grossman 和 Kim 的模型中，非攻击性均衡情形与协调或合作情形有明显区别，因为前者需要正的防御性支出，直到足以遏制所有进攻性支出，而后者完全不需要任何攫取支出。换言之，后者是帕累托最优的，而前者是帕累托次优的。然而，在本文的模型中，非攻击性均衡意味着攫取支出为零，实际上表现出与合作情形相同的帕累托优势性质。仅基于这一点，尽管会付出相当大的语义代价，本文将 非攻击性 和 合作 这两个术语互换使用。[8]关于存在性定理的陈述和证明，参见 Dockner 等人（2000）。[9]在双人博弈中，马尔可夫纳什均衡由双方每个瞬时（“静态”）最优问题的一阶条件得到，具体而言，是根据状态变量、协态变量和参数，同时求解关于双方策略的一阶条件。纳什均衡是一种策略，在假设另一位参与者同时选择其自身策略的情况下，使每位参与者的收益最大化。

微分博弈模型并从中推导出明确经济含义时最大的分析障碍。或许这正是迄今为止经济学理论家对这种方法兴趣有限的主要原因。

本文的独特贡献在于提出了一种模型：该模型既保留了 Grossman 和 Kim （ 1995 年）所提出的、攫取函数中行动与财富相互作用所具有的迷人非线性（并因此也保留了运动方程和哈密顿函数中的这种非线性），又具有一个独特的马尔可夫纳什均衡闭式解。尽管这个解表面上相当复杂，却能让我们深入理解攫取与增长的经济学。

第 2.1 节在微分博弈框架下，以更一般的形式建立模型。第 3 节分析均衡条件。第 4 节讨论相关文献。第 5 节作简要总结。

2 博弈

本节安排如下：第 2.1 小节建立模型。第 2.2 小节探讨在另一位参与者选择可行策略的前提下，单个参与者最优路径在每一时点所满足的条件。第 2.3 小节确定非合作博弈的一般马尔可夫纳什均衡。

2.1 框架

考虑一个单一商品经济，其中有两位效用最大化的博弈参与者 $i = 1,2$，时间跨度从现在 $t = 0$ 到终止时刻 $t = T$。对于每位参与者 i，其收益泛函是博弈存续期间（连续时间内）当前消费的瞬时效用（效用）之和：

$$W_i = \int_0^T u[c_i(t)]\, dt \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

最优策略。对于每位参与者，纳什均衡是对另一位参与者的纳什均衡策略的最佳回应。马尔可夫策略（也称“闭环”或“反馈策略”）是一种动态决策规则，在这种规则中，参与者对当前行动的选择完全取决于当前状态向量和当前时间。采用马尔可夫策略进行的博弈中的纳什均衡称为马尔可夫纳什均衡。

其中 $u'(c) > 0$ 和 $u''(c) < 0$。也就是说，假定效用 $u[c(t)]$ 是当前（瞬时）消费的连续、光滑、递增且严格凹的函数，并假定消费非负。为简单起见，不对未来效用进行贴现。[10]

每位参与者 $i = 1, 2$ 最初都被赋予一定数量的财富：

$$x_i(0) = x_{i0} \tag{3}$$

两位参与者的初始财富禀赋不必相等。事实上，正如下文将要说明的，参与者之间初始财富禀赋的差异是模型中的一个关键参数。

在每个时点，每位参与者都可以仅以现有财富为投入，按照以下生产函数创造新的财富：

$$y_i(t) = y[x_i(t)] \tag{4}$$

其中 $y'(x) > 0$ and $y''(x) < 0$。换言之，假设生产函数是现有财富存量的连续、光滑、递增且严格凹函数。在每个 $t \in [0, T]$，现有财富存量都作为生产函数的投入。假设用于当前消费及其他当前行动的所有财富支出，均从该时点生产的财富流量中扣除。

除了将产出用于消费和/或为下一瞬间进行生产外，每个参与者还可以采取攫取 行动，即瞬间支出财富，以保护自己的现有财富和/或夺取另一参与者的现有财富。另假设，在每个时点$t \in [0, T]$，在现有技术下，每个参与者现有财富存量中只有固定比例 $0 < \delta < 1$ 实际上会受到攫取。换言之，当前（瞬时）的生产流量、消费流量或攫取支出流量都不会受到攫取。

攫取行为表示为 $a_i(t)$，并假设其为非负值。[11]

[10]Ramsey（1928年）、Pigou（1932）和 Harrod（1948）认为，对未来世代效用进行折现在伦理上站不住脚。在本模型中，主观贴现不会改变总体结果，因为重新定义协态变量，使其以（宽泛地说）当前“效用单位”而非零时点现值“效用单位”表示后，贴现因子便可从哈密顿量中提取出来。唯一的区别在于协态变量的时间解释。[11]从此处开始，为简化符号表示，省略括号中的时间标记。

在 $t \in [0,T]$ 时，参与者 i 保留的自身财富比例（留存率）为：

$$p_i = \frac{1}{1+\theta a_j} \tag{5}$$

对于 $i \neq j = 1,2$，其中 $\theta > 1$ 是反映攫取行为效能的常数参数。显然，$0 \leq p_i \leq 1$。更具体地说，$\lim_{a_j \to 0} p_i = 1$ 且 $\lim_{a_j \to \infty} p_i = 0$。此外，$p_i$ 是 a_j 的单调递减函数：$dp_i/da_j = -\theta/(1+\theta a_j)^2 < 0$。

某一参与者能够有效攫取的另一参与者财富份额为：

$$\gamma(1-p_j) = \gamma\Big(\frac{\theta a_i}{1+\theta a_i}\Big) \tag{6}$$

对于 $i \neq j = 1, 2$，其中 $0 < \gamma < 1$ 是一个常数参数（回收比率），用于表示某个参与者因攫取而损失的财富中，实际被侵夺者攫取的部分。换言之，参与者 j 损失的财富中，只有比例γ 被参与者 i有效攫取。过程中，比例（$1-\gamma$）不知何故变成了无谓损失。由关于 p_i 的结果可知，$(1-p_j)$ 是 a_i的单调递增函数。

参与者 i 的财富存量的瞬时变化率如下：

$$\dot{x}_i = y(x_i) - c_i - a_i - \delta x_i + \delta x_i\Big(\frac{1}{1+\theta a_j}\Big) + \gamma\delta x_j\Big(\frac{\theta a_i}{1+\theta a_i}\Big) \tag{7}$$

其中 $\dot{x} \equiv dx/dt$。这称为参与者 i 财富的 运动方程。换言之，参与者财富的变化率等于当前生产的产出减去当前消费和攫取支出，再减去可被攫取的财富部分，加上自身财富留存的部分以及攫取的另一位参与者的财富部分。

运动方程可以用留存率表示，并进一步简化：

$$\dot{x}_i = y(x_i) - c_i - a_i - \delta x_i(1-p_j) + \gamma\delta x_j(1-p_i) \tag{8}$$

由于这是一个单一商品经济，在每个 $t \in [0,T]$ 交换该商品都毫无意义。然而，转移到下一瞬间的每单位财富，可能对每位

参与者而言代表不同数量的“效用单位”。换言之，每位参与者的财富的瞬时影子价格可能不同。若允许参与者之间进行跨期交换（即借贷），原则上，两位参与者可以跨期交易该商品，直至财富的瞬时影子价格相等。

为简化问题，并将注意力完全集中于攫取，该模型不允许参与者之间进行跨期交换。换一种方式表述这一假设：参与者 i 与参与者 j 的财富瞬时影子价格之间的任何差异，都只能转化为双方之间的攫取行为。

每位参与者的动态问题是选择一种策略（即在博弈存续期间为其控制变量设定一组时间路径 $\{c_i^*(t),\ a_i^*(t)\}_0^T$，使其收益泛函最大化），同时受其自身财富运动方程、边界条件、非负约束以及另一位参与者所选策略的约束。[12] 参与者 i 的个体最优策略是双方现有财富存量的函数。[13]

横截条件如下：

$$x_i(T)\lambda_i(T) = 0 \tag{9}$$

至少对其中一位参与者而言 $i = 1, 2$，其中 T 为外生给定或内生确定。换言之，横截条件表明，当参与者（至少一方）的财富或其瞬时影子价格为零时，博弈便告结束。若终止时刻给定，则必须使财富的终端瞬时影子价格降至零，因为财富在 T 之后便不再有用。若一位参与者失去全部财富，博弈就会转变为存活参与者所面临的常规 Ramsey 型最优控制问题。

2.2 一阶条件

假设参与者之间事先没有具有约束力的合作协议，即每位参与者都独立于另一方行事，以最大化其个人收益泛函（1）。

[12]假设状态变量和控制变量均为非负。[13]换言之，这是一个完全信息微分博弈。仅取决于系统当前状态的策略称为闭环控制变量或马尔可夫策略。

参与者 i 在每个 $t \in [0,T]$ 下的完整哈密顿函数为:

$$H_i = u(c_i) + \lambda_{ii}\Big[y(x_i) - c_i - a_i - \delta x_i\Big(\frac{\theta a_j}{1+\theta a_j}\Big) + \gamma\delta x_j\Big(\frac{\theta a_i}{1+\theta a_i}\Big)\Big] + \lambda_{ij}\Big[y(x_j) - c_j - a_j - \delta x_j\Big(\frac{\theta a_i}{1+\theta a_i}\Big) + \gamma\delta x_i\Big(\frac{\theta a_j}{1+\theta a_j}\Big)\Big] \quad (10)$$

与常规最优控制问题不同，在微分博弈框架中，可以为参与者 i 指定两个协态变量。其中一个， λ_{ii} ，刻画将 i 自身的运动方程放宽一个单位财富时，对目标泛函产生的边际影响。这是将参与者自身的一单位财富转移至下一时刻所对应的瞬时影子价格或总回报率，并以当前时刻的效用单位表示。简言之， λ_{ii} 称为自身瞬时影子价格。第二个协态变量 λ_{ij} 则刻画参与者 j 的财富动态约束发生单位变化时，对 i 的目标泛函产生的边际影响。本文将其称为交叉瞬时影子价格。

在每个 $t \in [0,T]$，保持参与者 j 所选策略[14] 不变时，参与者 i 的最优消费与攫取策略的一阶必要条件，与最大化 i 的哈密顿函数 (10) 所需的条件相同:

$$u'(c_i) = \lambda_i \quad (11)$$

$$\lambda_i - \lambda_i\gamma\delta x_j\Big[\frac{\theta}{1+\theta a_i} - \frac{\theta^2 a_i}{(1+\theta a_i)^2}\Big] = \lambda_j\delta x_j\Big[\frac{\theta}{1+\theta a_i} - \frac{\theta^2 a_i}{(1+\theta a_i)^2}\Big] \quad (12)$$

在 $t \in [0,T]$ 处且对于 $i \neq j = 1$，2. 这些条件的详细推导见附录。

注意，由于 x_i 通过 x_i 和 x_j的运动方程以相同的方式影响 H_i 和 H_j ，因此 $-\partial H_i/\partial x_i = -\partial H_j/\partial x_i = \lambda_{ii} = \lambda_{ji} = \lambda_i$。此外，$-\partial H_j/\partial x_j = -\partial H_i/\partial x_j = \lambda_{jj} = \lambda_{ij} = \lambda_j$。因此，根据哈密顿函数的构造和横截条件， $\lambda_{ii} = \lambda_{ji} = \lambda_i$和 $\lambda_{jj} = \lambda_{ij} = \lambda_j$。

由于效用函数和运动方程都具有严格凹性，因此哈密顿量的最大值，以及参与者 i 在每个时点的收益泛函，都满足二阶充分条件;

[14]严格来说，参与者 j 选择的策略受限于一组可行策略。在此模型中，在状态变量非负的前提下，参与者策略的可行性由其非负性决定。

在 c_i 和 a_i 中的运动方程均如此，因为——假设财富的瞬时价格非负——两个凹函数的线性组合本身也是凹函数。

2.3 马尔可夫纳什均衡

马尔可夫纳什均衡马尔可夫纳什均衡使两个参与者的一阶条件相协调，并在每个 $t \in [0,T]$ 满足各自的一阶必要条件。马尔可夫纳什均衡定义为：假设另一参与者也选择其自身的最优策略时，某参与者的最优消费与攫取策略。若马尔可夫纳什均衡存在，且参与者处于该均衡，则在给定一组参数和边界条件的情况下，他们都没有动机偏离该均衡。

通过同时求解由两个参与者关于控制变量（当前消费 c 和攫取支出a）的一阶条件构成的方程组，可以求得马尔可夫纳什均衡；这些控制变量以参数 δ，θ，γ、参与者的财富存量 x_i，x_j以及各自的瞬时影子价格 λ_i，λ_j 表示。

根据微分博弈中的庞特里亚金最大值原理，博弈动态配置的解——即两个参与者财富存量及其各自瞬时影子价格的最优时间路径——必须在每个 $t \in [0,T]$ 满足马尔可夫纳什均衡。

该博弈的一般马尔可夫纳什均衡如下：

$$c_i^* = u'^{-1}(\lambda_i) \tag{13}$$

$$a_i^* = \frac{\sqrt{\theta\delta x_j(\gamma\lambda_i - \lambda_j)/\lambda_i} - 1}{\theta} \tag{14}$$

对于 $i \neq j = 1$，2 以及每个 $t \in [0,T]$，其中 $u'^{-1}(\cdot)$ 表示边际效用函数的隐式反函数（假设其存在），根号运算符前的 $\pm$ 符号根据对控制变量和状态变量施加的非负性假设条件予以消除，星号表示时点最优性。马尔可夫纳什均衡方程的详细推导见附录。

3 分析

本节分析上一节推导出的马尔可夫纳什结果。第3.1小节阐释最优消费路径的条件。第3.2小节梳理非激进均衡与激进均衡的条件。第3.3小节考察博弈的一些定性动态。第3.4小节讨论广为人知的单主体最优控制情形。

3.1 最优消费

为考察一阶条件和马尔可夫纳什均衡（该均衡同时满足两个参与者的一阶条件）的含义，考虑在两个离散时点 t 和 s的消费之间的替代弹性：

$$\sigma[c_t] \equiv -\frac{u'(c_s)/u'(c_t)}{c_s/c_t}\frac{d(c_s/c_t)}{d\{u'(c_s)/u'(c_t)\}}$$

众所周知，当 s 与 t 之间的差距变得任意小时，这一弹性的极限为

$$\sigma[c(t)] = -\frac{1}{c(t)}\left(\frac{u'[c(t)]}{u''[c(t)]}\right)$$

这在附录中有所证明。该表达式表明，点弹性或瞬时替代弹性等于边际效用弹性的负值的倒数，$\epsilon(c) \equiv [u''(c)c]/u'(c)$，是衡量效用函数曲率的指标。因此，将其代入条件（11），即可推导出以下消费增长率$\hat{c} \equiv \dot{c}/c$ 的表达式：

$$\hat{c^*}_i = -\frac{1}{\epsilon}\hat{\lambda}_i = \sigma(c_i^*)\hat{\lambda}_i \tag{15}$$

注意，$\sigma(c_i) \geq 0$，因为效用随 c_i 增加且严格凹，即 $\epsilon \leq 0$。因此，在这种形式下，条件（11）表明，消费增长率与财富瞬时影子价格增长率之间的关系是非负的，其比例由当前消费与下一瞬间消费之间的瞬时替代弹性决定

这是现代经济增长理论中的一个著名结论。

就边际效用的弹性而言，条件（11）表明，如果效用函数的弯曲程度较大而非较小（即消费增加会导致边际效用迅速下降），且消费严格为正，那么参与者的消费增长率将落后于其自身财富的瞬时影子价格增长率。

3.2 分配冲突

另一方面，使用上文定义的留存率 p，该条件可简洁地化为：

(62)

$$\frac{a_i^*}{(p_i^*)^2 - p_i^*} = \delta x_j \Big(\frac{\lambda_j - \gamma \lambda_i}{\lambda_i} \Big) \tag{16}$$

为推导 $a_i \geq 0$ 成立时的参数条件，可以使用洛必达法则，求该表达式在 a_i 从右侧趋近于零时的极限：

$$\lim_{a_i^* \to 0^+} \Big(\frac{a_i^*}{(p_i^*)^2 - p_i^*} \Big) = -\frac{1}{\theta} \tag{17}$$

经过一些代数运算，我们得到关于 $a_i \geq 0$ 的以下条件：

$$\frac{\gamma \lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i} \geq \frac{1}{\theta \delta x_j} \tag{18}$$

这些结果的详细推导见附录。

换言之，在其他条件不变的情况下，随着以下因素增加到某一程度，参与者 i 在特定时点的最优攫取行为会从零开始增加：（1）参与者 i 自身财富的瞬时影子价格与交叉财富的瞬时影子价格之差；（2）回收比率；（3）攫取的效能；或（4） j 的财富中受攫取影响的比例。

均衡条件（14），或者等价地说，不平等（18）表明，在给定的 $t \in [0, T]$ 下，参与者 i 要将攫取行为从零提升至正值，需要以 $\gamma \lambda_i$ 与 λ_j 之间相对较大的差异作为 < 基础 id='3'> 可观的 激励。 δ 或 θ 的较大取值只能放大差异（$\gamma \lambda_i - \lambda_j$），但决定代数符号的正是这一差异本身

，即均衡条件（14）中平方根运算符内的参数。而对于 $a_i > 0$ 而言，该参数必须大于一。瞬时影子价格之间不够大的差异，不足以诱使参与者 i 将其财富的任何一部分用于攫取行为。

在该模型中，参数 δ、 θ 和 γ 可以视为反映外生技术条件。另一方面，给定回收比率后，比率 $(\gamma\lambda_i - \lambda_j)/\lambda_i$ 由瞬时影子价格的动态内生驱动。这就引出了一个问题：这种动态有何特征?

3.3 博弈动态

为了定性考察博弈的动态，考虑参与者 i 的欧拉方程：[15]

$$\dot{\lambda}_i = \lambda_i\Big[\delta\Big(\frac{\theta a_j^*}{1+\theta a_j^*}\Big) - y'(x_i)\Big] - \lambda_j\delta\gamma\Big(\frac{\theta a_j^*}{1+\theta a_j^*}\Big) \tag{19}$$

以留存率表示，瞬时影子价格的增长率可简化为：

$$\hat{\lambda}_i = \delta(1-p_j^*) - (\lambda_j/\lambda_i)\ \delta\gamma(1-p_j^*) - y'(x_i) \tag{20}$$

在经济增长文献中，欧拉方程被称为凯恩斯-拉姆齐规则。在此博弈的语境下，方程（19）或（20）可称为修正后的 凯恩斯-拉姆齐规则，其含义是：当前消费与下一瞬间消费之间的边际替代率，必须等于通过生产和/或攫取将当前财富转化为下一瞬间财富的边际转换率。在生产的情况下，边际产出按参与者自身的瞬时影子价格估值。在攫取的情况下，攫取所得的保留产出按参与者自身的瞬时影子价格估值，而攫取所得的掠夺产出则按交叉瞬时影子价格估值。

将方程（20）代入上述条件（15），参与者 i 的消费最优增长率可表示为 δ、 θ、 γ、 p_j、她的

[15]每位参与者的欧拉方程，是通过令参与者 i 财富的瞬时影子价格对时间的导数等于哈密顿函数对该参与者财富存量的偏导数的相反数而得到的。

自身边际产出 $y'(x_i)$，以及交叉财富瞬时影子价格与自身财富瞬时影子价格之比：

$$\hat{c}_i^* = \sigma(c_i^*)\Big\{\delta(1-p_j^*)\Big[\frac{\lambda_i - \gamma\lambda_j}{\lambda_i}\Big] - y'(x_i)\Big\} \tag{21}$$

显然，如果参与者 i 选择现在减少一小部分财富 dc_i，并通过生产或攫取将其转移，以便在下一瞬间获得更多财富用于消费，那么现在损失的“效用单位”将为$dc_i\ u'(c_i)$。另一方面，获得的“效用单位”将是“自身效用”增益之和 $dc_i\{[1+(y'(x_i)\ +\delta p_j]/[1+\delta]\}$ 加上“交叉效用” $dc_i[\delta\gamma(1-p_j)]$。[16]沿着最优路径，损失和获得的“效用单位”必须相等，否则该路径就不是最优路径。

方程（21）还意味着，瞬时影子价格之间的差异（以自身瞬时影子价格的比例表示）是促使参与者的最优策略从零攫取转为正攫取行动的关键因素；这一差异与消费动态直接相关，与边际产出和攫取规模成反比：[17]

$$\frac{\lambda_i - \gamma\lambda_j}{\lambda_i} = \frac{\hat{c^*}_i/\sigma(c_i^*) - y'(x_i)}{\delta(1-p_j^*)} \tag{22}$$

如果 $a_i \to 0$，方程（20）和（21）变为：

$$\hat{\lambda}_i|_{a_i\to 0} = -y'(x_i) \tag{23}$$

$$\hat{c}_i^*|_{a_i\to 0} = -\sigma(c_i^*)\ y'(x_i) \tag{24}$$

而方程（24）每位参与者一个，完全刻画了博弈经济中最优非侵略性时间路径的动态。换言之，博弈的结果与协调博弈或合作博弈的结果相同。[18]

[16]请记住，参与者 i 对自身财富的瞬时估值，与参与者 j 对 i 的财富的瞬时估值相同。因此，“交叉效用”并不只是指另一位参与者主观意义上的“效用单位”，也指一位参与者仿佛拥有与另一位参与者相同的消费水平时所获得的“效用单位”，就好像[17]在符合马尔可夫纳什均衡条件（即博弈的最优动态均衡路径）的任何静止状态或稳态下，比例（$\lambda_i - \gamma\lambda_j$）$/\lambda_i$也可作为每个时点财富分配中不平等程度的衡量指标。参见下文讨论。[18]参见第3.4节。

用于确定每位参与者财富的最优时间路径以及影子价格最优时间路径的正则系统由运动方程（7）、欧拉方程（19）、给定的初始条件 $x_i(0) = x_{i0}$，以及两位参与者的横截条件（9） $i = 1, 2$ 组成。对于马尔可夫纳什均衡，后者变为:

$$x_i(T)u'[c_i^*(T)] = 0 \tag{25}$$

该条件表明，如果终端点 T 处边际效用的瞬时值为正，那么参与者在该点保留正的财富存量就不是最优选择，因为她可以通过将其用于消费来提高目标泛函的值。

根据上述分析，显然，由 $\dot{c}_i^* = \dot{a}_i^* = \dot{x}_i = 0$定义的博弈稳态必须满足以下条件:

$$y'(x_i) = \delta(1 - p_j^*)\Big[\frac{\lambda_i - \gamma\lambda_j}{\lambda_i}\Big] \tag{26}$$

$$\hat{\lambda}_i = \hat{\lambda}_j - \hat{x}_j\Big(\frac{\gamma\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_j}\Big) \tag{27}$$

$$y(x_i) + \gamma\delta(1 - p_i^*) = c_i^* + a_i^* + \delta x_i(1 - p_j^*) \tag{28}$$

在整个博弈过程中，对每位参与者 $i = 1, 2$ 而言 $[0, T]$。

第一个条件由方程（21）得出，而方程（21）是将欧拉方程（19）代入一阶条件（11）后得到的。第二个稳态条件是对马尔可夫纳什解（14）求时间导数并令其等于零得到的。第三个条件则由财富运动方程（7）得出。

显然，至少对其中一位参与者而言， $c_i^* = a_i^* = x_i^* = 0$ 构成该博弈的一个稳态。更重要的是，由于假设$y'(x_i) < 0$ 且 $y''(x_i) > 0$，方程（26）意味着，在任何稳态下，参与者 i的财富存量与其财富的瞬时影子价格呈负相关。此外，方程（27）意味着，参与者 i自身瞬时影子价格的增长率与参与者j的财富存量呈正相关。[19]

换言之，在满足马尔可夫纳什均衡条件（即动态最优均衡）的稳态下，参与者的财富存量越高,

[19]这两个断言的详细证明见附录。

其财富的瞬时影子价格就越低，当前消费水平就越高。反之，参与者的财富存量越低，其财富的瞬时影子价格就越高，当前消费水平就越低。[20]

这一结果并不令人意外。在这个博弈中，除了（给定的）初始财富禀赋不同之外，参与者在其他方面完全相同。参数的取值对双方参与者均适用。双方参与者的效用、生产函数和攫取函数都相同，且均为光滑且严格凹的。此外，每位参与者的最优攫取行为仅取决于另一位参与者在 t 时的财富存量。

因此，在该博弈的动态解中，比例 $(\gamma\lambda_i - \lambda_j)/\lambda_i$ 是促使经济从非攻击性均衡转向公开分配冲突的决定性因素，它不仅反映了参与者各自的瞬时影子价格之间的差异，也反映了他们当前消费水平和财富存量的不平等。换言之，这一比例是该经济中财富不平等程度的衡量指标。

要明确确定该博弈的内部动态解，还需要进一步研究。鉴于该博弈微分方程正则系统的非线性，为了更详细地考察该博弈的比较动态学，可能需要计算具体的数值解，即根据效用函数和生产函数的具体形式以及边界条件进行求解。

3.4 协调博弈

本节总结了适用于以下情形的博弈结果：参与者在博弈开始前达成一项有约束力的合作协议，取消攫取支出，并通过协调各自的消费率来共同参与博弈。下文将考察这一情形。然而，这些结果同样适用于：(1) 微分博弈的退化情形，即边界条件和参数之间的关系无法保证式（18）中的严格不等式成立时，也就是当 $a_i = 0$ 时；以及 (2) 任一参与者单独来看，若另一参与者的财富存量或其自身的影子价格趋近于零。

[20]这是该博弈与下文 Ramsey 模型条件（36）相对应的条件。

经济的状态变量和控制变量如下：

$$x = \pi x_1 + (1-\pi)x_2 \tag{29}$$
$$c = \pi c_1 + (1-\pi)c_2 \tag{30}$$
$$a = \pi a_1 + (1-\pi)a_2 \tag{31}$$

其中，π 是经济中参与者 i 约定的权重，假设该权重在福利函数、财富分配和行动分配中保持不变。

假设福利函数简单地采用加法形式，双方参与者协调选择各自的控制轨迹，以最大化联合目标泛函：

$$W = \int_0^T u[c(t)]dt \tag{32}$$

对于 $t \in [0,T]$，需满足边界条件、非负约束以及以下运动方程：

$$\dot{x} = y(x) - c \tag{33}$$

对于参与者而言，最大化方程（32）等价于最大化哈密顿函数：

$$H = u(c) + \lambda[y(x) - c] \tag{34}$$

在每个 $t \in [0,T]$时，δ和 a_i均为零，因为双方约定 $i = 1$，2。

这是对 Ramsey 的增长模型（1928年）所作的简化版本，该模型已得到广泛研究。[21] 为供参考，泛函在每个时点取最大值的一阶条件为：

$$u'(c) = \lambda \tag{35}$$

经济中的财富总量随时间的变化路径由运动方程给出，而财富的瞬时影子价格随时间的变化路径由下式给出：

$$\dot{\lambda} = -\lambda y'(x) \tag{36}$$

[21]本文采用的额外简化假设（零折旧和零人口增长）使生产的黄金法则水平同时成为消费的最优水平和最大水平。

根据庞特里亚金最大值原理，消费和财富 $\{c^*(t)\ x^*(t)\}_0^T$ 的最优路径必须满足由方程（33）和（36）在一阶条件下构成的微分方程组。给定初始财富 $x(0) = x_0$ 的边界条件以及财富的终端瞬时影子价格 $\lambda(T) = 0$的边界条件，即可求解出财富及其影子价格的最优路径。

或许，通过对时点一阶条件中的协态变量求时间导数，代入状态变量和协态变量的微分方程，并使用瞬时替代弹性 $\sigma(c) \equiv -u'/(u''c)$，可以更直观地描述系统的动态变化，从而得到如下微分方程组：

$$\dot{c} = \sigma(c)\ c\ y'(x) \tag{37}$$
$$\dot{x} = y(x) - c \tag{38}$$

因此，与稳态（即 $\hat{c} = \hat{x} = 0$ ，此时消费水平 $\bar{c}$ 和财富存量 $\bar{x}$ 随时间保持不变）相对照，该经济体的消费和财富积累动态可概括如下：

$$\hat{c} > 0 \text{ if } y'(x) > 0 \text{ i.e. if } x < \bar{x} \tag{39}$$
$$\hat{c} < 0 \text{ if } y'(x) < 0 \text{ i.e. if } x > \bar{x} \tag{40}$$
$$\hat{c} = 0 \text{ if } y'(x) = 0 \text{ i.e. if } x = \bar{x} \tag{41}$$

$$\hat{x} > 0 \text{ if } y(x) > c \tag{42}$$
$$\hat{x} < 0 \text{ if } y(x) < c \tag{43}$$
$$\hat{x} = 0 \text{ if } y(x) = c \tag{44}$$

4 文献

本节讨论与本文模型相关的几小段文献。第4.1小节介绍本文模型的一些先驱模型。第4.2小节总结促成该模型的实证研究。第4.3小节以有关自利的经济主体之间合作概念的参考文献和思考结束本节。

4.1 理论参考文献

本文在理论上的关键先驱是 Grossman 和 Kim 于1995年提出的开创性双人静态博弈。本文模型沿用了 Grossman 和 Kim 将攫取函数设定为双曲函数的做法。不过，本文对攫取函数的设定进行了一个关键修改：不再区分防御行动和进攻行动。

改变 Grossman 和 Kim 对攫取函数的设定，可以从两个方面得到解释。首先，舍弃这种区分并不会造成太大损失。可以说，该设定的关键在于攫取函数平滑且具有凹性。第二个原因是便于处理。若将防御设定为一种独立于攻击的行为，那么决定攫取行为（防御和攻击）最优水平的个体最优一阶必要条件，除了取决于另一位参与者的财富外，还会取决于参与者自身的财富。这会使推导马尔可夫纳什均衡变成组合上的噩梦。另一方面，若不作这种区分，马尔可夫纳什条件就很容易确定。

毫无疑问，确定马尔可夫纳什均衡，是求解微分博弈模型并从中得出明确经济学洞见时最大的分析障碍。这或许是这种方法迄今为止鲜少受到经济学理论家关注的主要原因。然而，这一点颇为令人惊讶，因为微分博弈理论的早期理论成果和应用可追溯到20世纪50年代中期和20世纪60年代初。Isaacs（1965年）汇编了开创性论文。Friedman（1971年）系统而全面地介绍了微分博弈的数学，包括马尔可夫纳什均衡存在性定理（当时称为“鞍点解”）。Intriligator（1971年）向经济学专业的学生介绍了微分博弈。Dockner 等人（2000年）给出了该存在性定理的现代版本。

对攫取函数进行更简单（更易处理）的设定，似乎要么缺乏吸引力，要么已被其他作者尝试过。Lancaster（1973年）和 Hoel（1978年）采用微分博弈方法，着重阐明 Lancaster 所说的“资本主义的动态无效率”。他们的设定使其模型得以得出优雅而直接的“开关式”解。他们通过排除经济体系之外的攫取及其设定所引发的非线性，来实现简化。他们

假定“工人”和“资本家”是参与者，在劳动力市场和产品市场中进行常规交换。由于他们对“资本主义”的定义是：资本家拥有全部物质财富，而工人只有自己的劳动力，因此，Lancaster 和 Hoel 的论文与我的研究相似，因为它们都表明，不平等最终会导致动态福利损失。不同之处在于，在他们的模型中，工人与资本家之间的不平等并未转化为攫取，而是造成了当前消费（进而储蓄）决策与投资决策的分离 ，如凯恩斯所言。

从相关文献来看，工程学和运筹学领域的专家对于同时 求解马尔可夫纳什均衡和动态配置问题的数值近似解相当适应。[22] 理论经济学文献远未接受这种态度。相反，它通常期待得到精确的解析解，以及能够明确与经过检验的基本经济学直觉相一致的定性乃至定量预测。尽管人们对动态配置问题本身的数值解已有一定接受度，但疑虑依然存在。人们似乎担心，鉴于所涉关系的复杂性，将马尔可夫纳什均衡的数值近似解代入动态配置问题的求解过程，可能会限制甚至扭曲结果，以至于使其失去效用。

4.2 关于不平等与增长的实证争论

Galor 和 Zeira（1993年）因重新引发人们对初始不平等与后续增长之间因果机制的兴趣而受到认可。Person 和 Tabellini（1994年）以及 Alesina 和 Rodrik（1994年）发现，较高的初始收入不平等与较低的后续增长相关。B´enabou（1996年）和 Perotti（1996年）综述了实证文献，并报告称大多数研究都得出了相同的结果。

在一篇1997年的论文（发表于《美国经济评论》）中，Forbes（2000年）对这一发现提出了质疑，并利用Deininger和Squire（1996年）建立的新面板数据，转而报告称，初始收入不平等与后续增长之间存在正相关关系。Li和Zou（1998年）也

[22]关于使用数值近似计算经济微分博弈的马尔可夫纳什均衡和动态解的少数论文之一，参见 Itaya（2000年）。

声称发现了正相关关系。Deininger和Squire（1998年）亲自对其数据集进行了分析，发现负相关关系是稳健的。Sz´ekely和Hilgert（1999年）质疑Deininger和Squire关于拉丁美洲的数据质量，并指出，Forbes的结果可能取决于计算不平等所采用的方法。Birdsall和Londono（1997年）发现，初始人力资本不平等与后续增长之间存在负相关关系。

Barro（1999年）分析了一组扩展数据，发现"收入不平等与增长率和投资率总体上几乎没有关系"。然而，"较高的不平等往往会阻碍贫穷国家的增长，却会促进较富裕地区的增长"。由于世界上大多数国家都被归类为贫穷国家，且世界上大多数人生活在贫穷国家，因此，显而易见，前一个结论对全球福利的影响比后一个结论更大。Lucas（1988年）有力地指出，通过帮助贫穷的大型经济体实现增长，世界经济可以获得巨大的效率收益。[23]

Sokoloff和Engerman（2000年）以及Engerman和Sokoloff（2002年）广泛搜集了历史文献资料，对拉丁美洲与盎格鲁美洲进行了比较：前者起初的要素禀赋分布更为不均，这又使其逐渐形成较弱的法律和政治制度，并由此导致较差的经济绩效。Easterly（2001a）和Easterly（2001b）采用严谨的计量经济学设定，验证了Engerman和Sokoloff的假说。Forbes（2000年）以及Li和Zou（1998年）提出的质疑基于面板回归，而Panizza（2002年）分析了美国各州的面板数据。他没有发现正相关的证据，并发现了"某些"负相关的证据，不过结果会因不平等衡量方法的不同而有所变化。[24]

---

[23]"印度政府是否可以采取某种行动，使印度经济像印度尼西亚或埃及那样增长？如果可以，究竟是什么行动？如果不可以，究竟是'印度的本质'中的什么因素使其无法做到？这些问题对人类福祉所产生的影响实在令人震撼：一旦开始思考这些问题，就很难再去想别的事情。"Lucas（1988年）。[24]实证文献中所讨论的初始不平等，涉及消费、收入，以及各种资产（包括物质资产、人力资产，甚至无形资产）的所有权。一些研究还纳入种族、族裔、语言、性别或年龄等标记；当这些标记会导致社会等级划分时，便会将其纳入考量。物质财富、人力财富、收入与消费之间的概念关系和实证关系，已有相当扎实的认识。本文以最广义的含义使用"财富不平等"一词。

4.3 关于合作的随想

在一般均衡文献中，人们通常会将分散市场得出的结果，与不借助分离定理、即假定存在某种“社会规划者”所推导出的结果进行对比。在一般均衡的福利分析中，社会规划者的结果被用作基准，以比较分散市场情形下得到的结果。这种做法隐含着这样一种观念：所有自利的经济主体都能完美协调各自行动的经济，优于任何可以想象的其他经济。[25] 更为现实的经济安排（例如分散市场）只能力求达到这种完美经济所能实现的福利水平——前提是这种完美经济能够存在。

尽管一般均衡所依赖的假设（完全信息、完全市场、偏好与技术的凸性以及零外部性）极为抽象——事实上，近乎理想化——但与抽象角色“社会规划者”所代表的完美协调相比，分散化市场的情形似乎现实得多、更为稳健，也更可能从实际的历史经济演进中自然形成。毕竟，社会规划者的主要职责，即从个人效用到福利函数提供一种“自洽”（不自相矛盾）的映射，完全没有得到解释。

阿罗（1963）仔细研究了从个人效用函数到一般福利函数的这种映射，并推导出该映射得以存在、且由此得到的福利函数符合某些基本“理性”标准所需的严格条件。其中一个条件恰恰是，必须存在一位能够构建自洽福利函数的“独裁者”，从而绕开人际效用比较的“不可能性”。因此，“社会规划者”可以被视为某种“仁慈的独裁者”。

尽管存在阿罗不可能定理，福利与经济政策分析仍然依赖于社会福利这一概念。考虑到在几乎每个经济体中，再分配行动（例如财政政策）都十分普遍，显然，帕累托效率由于回避分配判断，过于严格，因而难以在福利经济学和政策分析中发挥实际作用。在大多数情况下，政策制定者面临着不同经济政策选择所带来的再分配

[25]关于这种做法的一个例子，请参见斯托基和卢卡斯（1989）第1章。

权衡。很少会出现某一选择明显属于帕累托优选的情况。[26] 因此，在缺乏无争议的结果（类似于帕累托效率）来指导福利经济学家和政策制定者应对再分配困境时，理论家被迫提出限制性更强的福利概念，甚至重新尝试早已过时的基数主义。[27]

文献的其他脉络表明，经济主体之间策略互动中的合作理念可能是一种最优响应。例如，可以将合作博弈视为两个参与者的利益合并的结果，以使其非市场中介互动（即攫取）所产生的外部成本内部化。在我们的模型中，参与者之间的跨期交换按假设被排除。因此，不会出现正式的实际利率。然而，这并不意味着不存在价格。生产和攫取中隐含的瞬时影子价格属于科斯所称的“最广义上的价格”。因此，攫取的负外部性可以被视为大规模的科斯式交易成本，而将参与者的利益合并为一个单一经济实体可能是更好的处理方式。这方面的例子包括“企业”：

> 显然，若有另一种经济组织形式能够以低于 [私人所有者之间议价] 所需的成本实现同样的结果，就能提高生产价值。 [...] [T]企业正是通过 [...] 私人各方之间的交易[]来组织生产的一种替代方式。在企业内部，各合作生产要素之间的个别议价被消除，并以行政决策取代 [. ..] 私人所有者之间的交易 []。 [...] 实际上， [...] 企业将取得各方的法律权利，而活动的重新安排不会随权利的重新安排而发生

[26]斯蒂格利茨（2003）认为，在实际政策制定中，面对看不到明显帕累托改进政策的灰色地带情形，才是常态。[27]关于前者，参见巴德汉、鲍尔斯和金蒂斯（1998）：他们用“提高生产率”取代“帕累托有效”这一概念，因为后者无法评判非市场中介的资产再分配对福利的影响；“提高生产率”则指在信息不完善导致合同不完备或执行成本过高的情形下，非市场中介的资产再分配带来的福利增益。关于后者，例如参见 Layard（2003）。

> 后者不是通过合同实现，而是源于关于如何行使这些权利的行政决策。”科斯（1960年，第115–116页）。

然而，在这种情况下，合并的具体设计和实施机制仍然是外生的。

森（1997）精辟地指出，如果自利型参与者表现得反常，那么他们就能在囚徒困境博弈中实现帕累托优解；也就是说，他们可以把它转变为“保证博弈”（根据互惠原则，参与者彼此事先保证不会偷懒），或者采取“具有社会意识”的策略（每个参与者无论对方是否这样做，都更愿意做正确的事）：

> 如果人们的偏好不同，囚徒困境或许就会消失，这一点固然属实，却不怎么有趣。然而，真正意义重大的是，即使相关人群仍然具有相同的囚徒困境型偏好，但他们的行为仿佛其偏好属于保证博弈（或者更进一步，仿佛 他们具有 [.....] “具有社会意识”的偏好[.....]），他们也可能过得更好，即便是按照他们真实的偏好来衡量。这正是文化取向问题所涉及之处，它或许能为倡导那些能够重新引导个人选择与行动的价值观提供社会层面的理由，即使其个人福利函数并未改变。从某种意义上说，这关乎道德。当然，生活中还有许多其他领域，社会也会孕育出各种道德价值观，试图使选择摆脱个人主义的理性计算。事实上，诚实、信守承诺等“日常美德”便是常见的例子；但这里重要的是认识到，所有这些都与工作激励问题相关，进而也与收入分配相关。[28]

森的设想是，在囚徒困境博弈中，自利型参与者在其效用函数中仍然是自利的，但行为却仿佛其效用函数是利他的。这种看法比将参与者的利他行为视为神来之笔更为精妙。[29]

[28]森（1997），第98—99页。[29]从经济学的基本原理出发，研究利他偏好的演化与合作的文献日益增多，其中一部分研究以阿克塞尔罗德（1984）的著作为基础。例如，可参见鲍尔斯和金蒂斯（2000年）。

然而，这种设想仍然相当牵强地要求：个体用来主观地将自身行为映射为自身福祉的偏好集合，必须按假设不同于他们在约束条件下实际行为所遵循的偏好。

森的思考是对马克思的回应。马克思将“纯粹”共产主义描述为一种“协调型博弈”社会，在其中，共同所有制排除了正式交换。马克思认为，共产主义社会的出现是必要的，因为“生产的社会化”（以及一般意义上的生活）日益要求“所有权的社会化”。他所说的“生产的社会化”，是指生产者之间日益增强的相互依赖，主要源于技术进步。[30] 马克思似乎设想，纯粹的共产主义社会将在一段漫长的过渡之后出现；这一过渡要求消除主要形式的经济不平等，并逐步形成一种新的合作伦理和具有公共意识的观念。[31]

用现代术语来说，马克思设想技术进步将带来外部性不断增多、影响不断扩大的过程，而以私人所有制为基础的市场将无法有效应对这些外部性。推动向共产主义过渡的力量将是“无产者

[30]“让我们设想这样一个由自由人组成的联合体：他们共同占有生产资料，并以完全自觉的方式，将各自不同形式的劳动力作为一支统一的社会劳动力加以支配。”（1976年，第171页。）“在以生产资料公有制为基础的集体社会中，生产者不交换他们的产品；同样，耗费在产品上的劳动也不会像在这里那样表现为这些产品所具有的一种物质属性，即价值，因为与资本主义社会不同，个人劳动如今不再以间接方式存在，而是直接成为总劳动的一部分。”（1938年，第85页。）“当然，在共同生产的基础上，时间的确定仍然至关重要。社会生产小麦、牲畜等所需的时间越少，就越能腾出时间用于其他物质或精神生产。正如对个人而言，其发展的丰富性、享受和活动都取决于节约时间一样。归根结底，一切经济都归结于节约时间。社会同样必须有目的地分配时间，以实现与其整体需求相适应的生产；正如个人必须正确分配时间，才能满足其活动的各种要求。因此，在共同生产的基础上，节约时间以及有计划地将劳动时间分配到各个生产部门，仍然是首要的经济规律。在这种情况下，它更是成为一条规律。（1973年，第172—173页。）

[31] 关于通向纯粹共产主义的过渡过程，马克思（1938年）作了简要讨论。森（1995年）对经济平等和／或社会平等这一概念的困难作了博学而细致的探讨。

直接生产者——工人，他们对现状最缺乏既得利益。[32] 然而，马克思的著作中没有阐明这一过渡过程的具体内容，或仅将其模糊地描述为工人在反抗资本家的斗争中实现集体自我发展。马克思在多大程度上认识到共同支配生产性财富所引发的道德风险的主要来源，并不明确，更不用说如何在实践中应对这些风险了。[33]

需要注意的是，本文所采用的合作概念并未明确区分直接合作与通过市场交换实现的合作。[34] 对上述模型的含义作宽泛解读，可以认为，至少在考察某一特定时点时，使自利型参与者能够合作的条件，可能比通常认为的稳健得多。再次强调，至少在某一特定时点，分配冲突似乎只是例外。

5 结论

本文运用微分博弈框架，提出了一个包含生产与攫取的双主体经济动态模型。本文求得了该经济的马尔可夫纳什均衡闭式解，并据此提取了有关攫取经济学与增长的信息。

给定初始条件和参数值，在某一特定时点，模型表明攫取不太可能发生，因为它需要极端

[32]用现代术语来阐述马克思对技术进步的看法，另一种方式是将其视为一个过程：越来越多的商品变得公共。公共品既具有非竞争性（极端情况下，不可耗竭性），也具有非排他性。商品的非竞争性（以及不可耗竭性）特征取决于其物理或技术属性，而其可排他性则受社会条件制约。如上所述，可排他性是指个人或其代理机构执行其所有权的能力；在我们的模型中，它与攫取程度呈负相关。[33]私人所有制可以视为面对经济不确定性时的一种粗略形式的私人保险。同样，公共所有制可以视为旨在消除非系统性风险的社会保险。关于社会保险主题的现代论述，参见 Shiller（1996）。[34]事实上，自由自愿的市场交换（相对于攫取而言）可以视为一种有组织的合作。另一方面，直接的自愿合作（其中互惠不受价格调节，甚至不受强制执行）可以视为一种非正式的交换方式。

的财富占有不平等、消费水平以及——因此——财富的瞬时影子价格。

然而，其完整的动态影响尚不清楚。一种可能是，由于攫取函数具有严格凹性，系统内置了自我纠正机制，从而防止初始差距不断扩大，直至某一参与者失去全部财富。

另一种可能是，动态配置的最优路径必须满足的典范微分方程组中的非线性，会使财富占有（以及影子价格）方面原本微小的初始差距随着时间推移不断扩大，最终形成引发分配冲突的条件。显然，在模型中引入随机性，会使分配冲突情形更容易出现。

博弈的动态配置问题的完整解法及其影响分析留待未来研究。

参考文献

[1] Adelman, Irma 和 Sherman Robinson，《收入分配与发展》，发展经济学手册，第 II 卷，H. Chenery 和 T.N. Srinivasan 编，1989年，爱思唯尔。[2] Adelman, Irma 和 C. T. Morris，《社会、政治与经济发展：定量方法》，巴尔的摩：约翰·霍普金斯出版社，1967年。[3] Aghion, Phillipe，“涓滴式增长与发展理论”，《经济研究评论》，64，151-172，1997年。[4] Alesina, Alberto 和 Dani Rodrik，“分配政治与经济增长”，《经济学季刊》，1994年5月。[5] 阿罗，Kenneth J.，《社会选择与个人价值》，康涅狄格州纽黑文：耶鲁大学出版社，1963年。[6] 阿克塞尔罗德，Robert，《合作的演化》，纽约：Basic Books，1984年。[7] 巴德汉，Pranab、Samuel Bowles 和 Herbert Gintis，“财富不平等、财富约束与经济绩效”，未发表论文，1998年（即将刊载于 A. Atkinson 和 F. Bourguignon 编《收入分配手册》，北荷兰出版社）。[8] Barro, Robert J.，“不平等、增长与投资”，NBER 工作论文第 w7038 号，1999年3月。[9] Barro, Robert 和 Xavier Sala-i-Martin，《经济增长》，McGraw-Hill，1995年。[10] B´enabou, R.，“不平等与增长”，载于 Bernanke, B. 和 J. Rotemberg（编），《NBER宏观经济年刊》1996，麻省理工学院出版社：马萨诸塞州剑桥，第 11-76 页，1996年。[11]Bertola, Giuseppe，“分配与增长的宏观经济学”，《收入分配手册》，第 I 卷，A.B. Atkinson 和 F. Bourguignon 编，1999年，爱思唯尔。

[12]Bertkovicz, L.D., 《一类微分博弈与控制问题中最优策略的必要条件》，数学年刊，研究报告第52号，M. Dresher、L.S. Shapley 和 A.W. Tucker 编，普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社，1964年。[13] Bertkovicz, L.D., 《微分博弈综述》，载于 A.V. Balakrishnan 和 L.W. Neustadt（编），控制数学理论，纽约：学术出版社，1967年。[14] Birdsall, N. 和 J.L. Londono, 《资产不平等至关重要：评估世界银行的减贫方法》，《美国经济评论》，第82卷，第2期，第32-37页，1997年。[15] Bleaney, Michael 和 Akira Nishiyama, 《解释增长：模型之争》，《经济增长杂志》，第7卷，259-281页，2002年，马萨诸塞州 Norwell：Kluwer学术出版社。[16] 鲍尔斯, Samuel 和 Herbert Gintis, 《强互惠的演化》，未发表论文，马萨诸塞大学阿默斯特分校，2000年。[17]Chou, Chien Fu 和 Gabriel Talmain, 《再分配与增长：帕累托改进》，《经济增长杂志》，第1卷：505-523页，1996年12月。[18] Clemhout, S. 和 H.Y. Wan, Jr., 《微分博弈：经济学应用》，载于 Aumann, R.J. 和 S. Hart（编），《博弈论手册：经济学应用》，第II卷，阿姆斯特丹：爱思唯尔，1994年。[19] Coase, Ronald, 《社会成本问题》，《法律与经济学杂志》，1960年；后重刊于 Ronald H. Coase 的著作《企业、市场与法律》，芝加哥大学出版社，1988年。[20]Clarke, George R. G., 《收入分配与增长的更多证据》，罗切斯特大学，未发表论文，1993年6月。[21] Conley, Timothy G. 和 Ethan Ligon, 《经济距离与跨国溢出效应》，《经济增长杂志》，第7卷，157-187页，2002年，马萨诸塞州 Norwell：Kluwer学术出版社。

[22] Decornez, S. S.，《美国中产阶级的实证分析（1968-1992）》，博士学位论文，范德堡大学。[23] Deininger, K. 和 L. Squire，《衡量收入不平等的新数据集》，《世界银行经济评论》，第10卷，第565-591页，1996年。[24] Deininger, K. 和 L. Squire，《审视老问题的新方法》，《发展经济学杂志》，第57卷，第259-87页，1998年。[25]Dockner, Engelbert J.、Steffen Jørgensen、Ngo Van Long 和 Gerhard Sorger，《经济与管理科学中的微分博弈》，剑桥：剑桥大学出版社，2000年。[26] Easterly, William，《中产阶级共识与经济发展》，《经济增长杂志》，第6卷，317-335页，2001年，马萨诸塞州 Norwell：Kluwer学术出版社。[27] Easterly, William，《不平等确实会导致欠发展：来自商品禀赋、中产阶级占比及其他人均收入决定因素的新证据》，初步论文，华盛顿特区：世界银行发展研究组，2001年。[28] Easterly, William 和 R. Levine，《非洲的增长悲剧：政策与族群分化》，《经济学季刊》，第112卷（第4期），1203-1250页。[29] Engerman, Stanley L. 和 Kenneth L. Sokoloff，《要素禀赋、不平等与新大陆经济体的发展路径》，美国国家经济研究局工作论文第9259号，2002年10月。[30] Feldstein, Martin，《社会保险》，载于《收入再分配》，Colin D. Campbell（编），华盛顿特区：美国企业研究所，1976年。[31] Ferreira, Francisco H.G.，《不平等与经济绩效：增长与分配理论简述》，世界银行不平等、贫困与社会经济绩效网站文章，http://www.worldbank.org/poverty/inequal/index.htm，1999年6月。

[32] Fishman, Arthur 和 Avi Simhon，《劳动分工、不平等与增长》，《经济增长杂志》，第7卷，117-136页，2002年，马萨诸塞州 Norwell：Kluwer学术出版社。[33] Forbes, Kristin J.，《重新评估不平等与增长之间的关系》，《美国经济评论》，第90卷，第4期，第869-887页，2000年9月。[34] Friedman, A.，《微分博弈》，纽约：Wesley & Son，1971年。[35] Friedman, Milton，《资本主义与自由》，芝加哥大学出版社，1962年。[36] Galor, Oded 和 Joseph Zeira，《收入分配与宏观经济学》，《经济研究评论》，第60卷，第35-52页，1993年。[37] Grossman, Herschel I. 和 Minseong Kim，《刀剑还是犁铧？财产权主张安全性的理论》，《政治经济学杂志，1995年，第103卷，第6期。[38] Haavelmo, Trygve，《经济演进理论研究》，阿姆斯特丹：北荷兰出版社，1954年。[39] Harrod, Roy F.，《动态经济学导论》，伦敦：Macmillan，1948年。[40] Hoel, Michael，《工人与资本家之间的分配与增长微分博弈》，《国际经济评论》，第19卷，第2期，1978年6月。[41] Intriligator, Michael D.，《数学优化与经济理论》，纽约：Prentice-Hall，1971年。[42] Isaacs, Rufus，《微分博弈：一种应用于战争与追逐、控制和优化的数学理论》，纽约：Wesley & Sons。[43] Itaya, Yuji，《动态优化与微分博弈在经济学中的应用》，手稿，日本岐阜，2000年。

[44] Kalemli-Ozcan, Sebnem, 《死亡率下降会促进经济增长吗？》《经济增长杂志》，第7卷，411-439页，2002年，马萨诸塞州 Norwell：Kluwer学术出版社。[45] Kanbur, Ravi, 《收入分配与发展》，《收入分配手册》，第I卷，A.B. Atkinson 和 F. Bourguignon 编，2000年，爱思唯尔。[46] Krasovskii, N.N. 和 A.I. Subbotin, 《博弈论控制问题》，纽约：施普林格出版社，1990年。[47] Kremer, Michael, 《内生生育率下的收入分配动态》《经济增长杂志》，第7卷，227-258页，2002年，马萨诸塞州 Norwell：Kluwer学术出版社。[48] Kristol, Irving, 《关于平等与平等主义的思考》，载于《收入再分配》，Colin D. Campbell（编），华盛顿特区：美国企业研究所，1976年。[49] Lancaster, Kelvin, 《资本主义的动态无效率》，《政治经济学杂志》，第81卷，第5期，1973年9月至10月。[50] Landes, David, 《国家的财富与贫困》，纽约：诺顿出版社，1998年。[51] Layard, Richard, 《幸福：社会科学能找到答案吗？》，Lionel Robbins 2002/3年纪念讲座，伦敦经济学院，2003年3月。[52] Leitmann, G., 《合作与非合作多人微分博弈》，纽约：施普林格出版社，1974年。[53] Li, Hongyi 和 Heng-fu Zou, 《收入不平等并不损害增长：理论与证据》，《发展经济学评论》，第2卷，第3期，1998年10月。[54] Lucas, Robert E., Jr., 《论经济发展的机制》，《货币经济学杂志》，第22卷，1988年7月。[55] Mankiw, N. Gregory、David Romer 和 D. Weil, 《对经济增长经验研究的贡献》，《经济学季刊》，第101卷，407-437页，1992年。

[56] 马克思，卡尔，《资本论：政治经济学批判》，第1卷，纽约：Vintage Books，1977年。[57] 马克思，卡尔，《政治经济学批判大纲（草稿）》，哈蒙兹沃思，英格兰：企鹅出版社，1973年。[58] 马克思，卡尔，《哥达纲领批判》，载于 K. 马克思和弗里德里希·恩格斯，《选集》，第II卷，莫斯科：国际出版社，1938年。[59] 卡尔·马克思和弗里德里希·恩格斯，《共产党宣言》，1848年，载于《全集》，第6卷，1976年，纽约：国际出版社。[60] 约翰·麦克德莫特，《发展动态：经济一体化与人口转型》，《经济增长杂志》，第7卷，371-409页，2002年，Norwell，马萨诸塞州：Kluwer学术出版社。[61] 罗德里格·门德斯，《创造性破坏与不平等的加剧》，《经济增长杂志》，第7卷，259-281页，2002年，Norwell，马萨诸塞州：Kluwer学术出版社。[62] 阿瑟·M·奥肯，《平等与效率：重大的权衡》，华盛顿：布鲁金斯学会，1975年。[63] 阿瑟·M·奥肯，《关于平等与效率的进一步思考》，载于《收入再分配》，Colin D. Campbell（编），华盛顿特区：美国企业研究所，1976年。[64] 乌戈·Panizza，《收入不平等与经济增长：来自美国数据的证据》，《经济增长杂志》，第7卷，25-41页，2002年，Norwell，马萨诸塞州：Kluwer学术出版社。[65] R. Perotti，《政治均衡、收入分配与增长》，《经济研究评论》，第60卷，1993年，第755-776页。[66] R. Perotti，《增长、收入分配与民主：数据揭示了什么》，《经济增长杂志》，第1卷，第2期，第149-187页，1996年6月。[67] T. Persson 和 G. Tabellini，《不平等是否有害于增长？理论与证据》，《美国经济评论》，第84卷，第3期，第600-621页，1994年。

[68] M.L. Petit，《经济政策分析中的控制理论与动态博弈》，剑桥：剑桥大学出版社，1990年。[69]A.C. Pigou，《福利经济学》，第四版，伦敦：麦克米伦，1932年。[70] L.S. Pontryagin 等，《最优过程的数学理论》，译者：K. N. Trirogoff，编者：L. W. Neustadt，纽约：Wiley-Interscience，1962年。[71] Danny Quah，《世界三分之一的增长与不平等》，未发表论文，伦敦经济学院，2002年4月。[72] Frank P. Ramsey，《储蓄的数学理论》，《经济学杂志》，第38卷，1928年。[73] Xavier Sala-i-Martin，《转移支付、社会安全网与经济增长》，《国际货币基金组织工作人员论文集》，第44卷，81-102页，1997年3月，国际货币基金组织。[74] Amartya Sen，《论经济不平等》，增订版，1997年，牛津：克拉伦登出版社。[75] Amartya Sen，《重新审视不平等》，剑桥，马萨诸塞州：哈佛大学出版社，1995年。[76] Robert Shiller，《宏观市场》，TIAA-CREF Paul Samuelson奖，纽约：牛津大学出版社，1996年。[77] Kenneth L. Sokoloff 和 Stanley L. Engerman，《新世界的制度、要素禀赋与发展路径》，《经济展望杂志》，第14卷，第3期，217-232页，2000年。[78] Nancy L. Stokey 和 Robert E. Lucas Jr.（与 Edward C. Prescott 合著），《经济动态学中的递归方法》，剑桥，马萨诸塞州：哈佛大学出版社，1989年。[79] Joseph Stiglitz，《咆哮的九十年代》，纽约：W.W. Norton & Co.，2003年。

[80] Sz´ekely, Miguel 和 Marianne Hilgert，《我们所衡量的不平等背后是什么？》美洲开发银行，研究部工作论文第409号，1999年。[81] Taylor, Lance 和 Persio Arida，《长期收入分配与增长》，发展经济学手册，第I卷，H. Chenery 和 T.N. Srinivasan 编，1988年，爱思唯尔。[82] Tobin, James，《关于税收与不平等的思考》，载于收入再分配，Colin D. Campbell（编），华盛顿特区：美国企业研究所，1976年。

附录

留存比率

我将留存比率定义为:

$$p_i \equiv 1/(1+\theta a_i) \tag{45}$$

那么，留存率对攫取的导数为:

$$\frac{dp_i}{da_i} = -\frac{\theta}{(1+\theta a_i)^2} \tag{46}$$

$$\frac{dp_i}{da_i} = -\Big(\frac{\theta}{1+\theta a_i}\Big)\Big(\frac{1}{1+\theta a_i}\Big)\Big(\frac{a_i}{a_i}\Big) \tag{47}$$

$$\frac{dp_i}{da_i} = -\frac{(1-p_i)p_i}{a_i} \tag{48}$$

$$\frac{dp_i}{da_i} = \frac{p_i^2 - p_i}{a_i} \tag{49}$$

另一方面，损失率对侵占的导数为:

$$\frac{d(1-p_i)}{da_i} = \frac{(1+\theta a_i)\theta - \theta a_i \theta}{(1+\theta a_i)^2} \tag{50}$$

$$\frac{d(1-p_i)}{da_i} = \frac{\theta + \theta^2 a_i - \theta^2 a_i}{1+\theta a_i} \tag{51}$$

$$\frac{d(1-p_i)}{da_i} = \frac{\theta}{(1+\theta a_i)^2} \tag{52}$$

$$\frac{d(1-p_i)}{da_i} = \frac{(1-p_i)p_i}{a_i} \tag{53}$$

$$\frac{d(1-p_i)}{da_i} = \frac{p_i - p_i^2}{a_i} \tag{54}$$

一阶条件

哈密顿函数定义为:

$$H_i = u(c_i) + \lambda_{ii}[y(x_i) - c_i - a_i - \delta x_i(1-p_j) + \gamma\delta x_j(1-p_i)\Big)] \\ +\lambda_{ij}[y(x_j) - c_j - a_j - \delta x_j(1-p_i) + \gamma\delta x_i(1-p_j)] \tag{55}$$

对每位参与者和 t，使哈密顿函数最大化的一阶必要条件推导如下。首先，关于消费:

$$\frac{\partial H_i}{\partial c_i} = u'(c_i) - \lambda_{ii} = 0 \tag{56}$$

因此:

$$u'(c_i) = \lambda_{ii} \tag{57}$$

接着，关于攫取:

$$\frac{\partial H_i}{\partial a_i} = \lambda_{ii}[-1 + \gamma\delta x_j \frac{\partial(1-p_i)}{\partial a_i}] + \lambda_{ij}[-\delta x_j \frac{\partial(1-p_i)}{\partial a_i}] = 0 \tag{58}$$

利用上文的方程 (54)，可以将这一一阶条件整理为一个简洁的表达式:

$$\lambda_{ii}\Big[\gamma\delta x_j\Big(\frac{p_i - p_i^2}{a_i}\Big)\Big] - \lambda_{ii} - \lambda_{ij}\Big[\delta x_j\Big(\frac{p_i - p_i^2}{a_i}\Big)\Big] = 0 \tag{59}$$

$$\lambda_{ii}\Big[\gamma\delta x_j\Big(\frac{p_i - p_i^2}{a_i}\Big)\Big] - \lambda_{ij}\Big[\delta x_j\Big(\frac{p_i - p_i^2}{a_i}\Big)\Big] = \lambda_{ii} \tag{60}$$

$$\delta x_j\ (\gamma\lambda_{ii} - \lambda_{ij})\Big(\frac{p_i - p_i^2}{a_i}\Big) = \lambda_{ii} \tag{61}$$

$$\frac{a_i}{p_i - p_i^2} = \delta x_j \frac{(\gamma\lambda_{ii} - \lambda_{ij})}{\lambda_{ii}} \tag{62}$$

替代与边际效用弹性

瞬时替代弹性是边际效用弹性的负值的倒数。

为说明这一点，考虑两个时点 t 和 s。这两个时点之间消费的替代弹性定义如下：

$$\sigma(c_t) \equiv -\frac{u'(c_s)/u'(c_t)}{c_s/c_t}\frac{d(c_s/c_t)}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]} \tag{63}$$

取上述表达式在 $s \to t$ 下的极限：

$$\lim_{s\to t}\sigma(c_t) = \sigma[c(t)] = -\lim_{s\to t}\frac{u'(c_s)/u'(c_t)}{c_s/c_t} \times \lim_{s\to t}\frac{d(c_s/c_t)}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]} \tag{64}$$

$$\sigma[c(t)] = -\frac{\lim_{s\to t}[u'(c_s)/u'(c_t)]}{\lim_{s\to t}[c_s/c_t]} \times \lim_{s\to t}\frac{d(c_s/c_t)}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]} \tag{65}$$

$$\sigma[c(t)] = -\frac{1}{1} \times \lim_{s\to t}\frac{d(c_s/c_t)}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]} \tag{66}$$

$$\sigma[c(t)] = -\frac{\lim_{s\to t} d(c_s/c_t)}{\lim_{s\to t} d[u'(c_s)/u'(c_t)]} \tag{67}$$

$$\sigma[c(t)] = -\frac{\lim_{s\to t}\frac{c_t(dc_s/dc_t)dc_t - c_s dc_t}{c_t^2}}{\lim_{s\to t}\frac{u'(c_t)[du'(c_s)/du'(c_t)]u''(c_t)dc_t - u'(c_s)[u''(c_t)]dc_t}{[u'(c_t)]^2}} \tag{68}$$

$$\sigma[c(t)] = -\frac{\lim_{s\to t} -(c_s/c_t)(dc_t/c_t)}{\lim_{s\to t} -[u'(c_s)/u'(c_t)][u''(c_t)/u'(c_t)]dc_t} \tag{69}$$

$$\sigma[c(t)] = -\frac{\lim_{s\to t}(dc_t/c_t)}{\lim_{s\to t}[u''(c_t)/u'(c_t)]dc_t} \tag{70}$$

$$\sigma[c(t)] = -\frac{[1/c(t)]}{u''[c(t)]/u'[c(t)]} \tag{71}$$

$$\sigma[c(t)] = -\frac{u'[c(t)]}{c(t)u''[c(t)]} \tag{72}$$

由于 $\epsilon \equiv \{u''[c(t)]c(t)\}/u'[c(t)]$ 是边际效用弹性，因此：

$$\sigma[c(t)] = -\frac{1}{\epsilon} \tag{73}$$

马尔可夫纳什均衡

对于 t ，马尔可夫纳什最优消费规则可直接由一阶条件 (11) 得出。

对于 a_i ，马尔可夫纳什最优攫取规则可直接由方程 (49) 和 (50) 推导得出。然后，简化一阶条件 (62)：

$$-\frac{(1+\theta a_i)^2}{\theta} = \delta x_j \left(\frac{\gamma\lambda_{ii} - \lambda_{ij}}{\lambda_{ii}}\right) \tag{74}$$

$$(1+\theta a_i)^2 = -\theta\delta x_j \left(\frac{\gamma\lambda_{ii} - \lambda_{ij}}{\lambda_{ii}}\right) \tag{75}$$

$$(1+\theta a_i)^2 = \theta\delta x_j \left(\frac{\lambda_{ij} - \gamma\lambda_{ii}}{\lambda_{ii}}\right) \tag{76}$$

$$1+\theta a_i = \pm\sqrt{\theta\delta x_j \left(\frac{\lambda_{ij} - \gamma\lambda_{ii}}{\lambda_{ii}}\right)} \tag{77}$$

$$\theta a_i = \pm\sqrt{\theta\delta x_j \left(\frac{\lambda_{ij} - \gamma\lambda_{ii}}{\lambda_{ii}}\right)} - 1 \tag{78}$$

$$a_i = \frac{1}{\theta}\Big[\pm\sqrt{\theta\delta x_j \left(\frac{\lambda_{ij} - \gamma\lambda_{ii}}{\lambda_{ii}}\right)} - 1\Big] \tag{79}$$

a_i 的非负性条件要求：

$$\pm\sqrt{\theta\delta x_j \left(\frac{\lambda_{ij} - \gamma\lambda_{ii}}{\lambda_{ii}}\right)} \geq 1 \tag{80}$$

可以省略正负号，因为只有正平方根的情形满足该条件：

$$\sqrt{\theta\delta x_j \left(\frac{\lambda_{ij} - \gamma\lambda_{ii}}{\lambda_{ii}}\right)} \geq 1 \tag{81}$$

$$\theta\delta x_j \left(\frac{\lambda_{ij} - \gamma\lambda_{ii}}{\lambda_{ii}}\right) \geq 1 \tag{82}$$

$$\frac{\lambda_{ij} - \gamma\lambda_{ii}}{\lambda_{ii}} \geq \frac{1}{\theta\delta x_j} \tag{83}$$

稳态

马尔可夫纳什最优消费规则的增长率为：

$$\hat{c}_i^* = \sigma(c_i^*)\Big\{\delta(1-p_j^*)\Big[\frac{\lambda_i - \gamma\lambda_j}{\lambda_i}\Big] - y'(x_i)\Big\} \tag{84}$$

如果 $\hat{c}_i^* = 0$，那么：

$$\sigma(c_i^*)\Big\{\delta(1-p_j^*)\Big[\frac{\lambda_i - \gamma\lambda_j}{\lambda_i}\Big] - y'(x_i)\Big\} = 0 \tag{85}$$

$$\delta(1-p_j^*)\Big[\frac{\lambda_i - \gamma\lambda_j}{\lambda_i}\Big] - y'(x_i) = 0 \tag{86}$$

$$\delta(1-p_j^*)\Big[\frac{\lambda_i - \gamma\lambda_j}{\lambda_i}\Big] = y'(x_i) \tag{87}$$

$$\delta(1-p_j^*)[\lambda_i - \gamma\lambda_j] = \lambda_i y'(x_i) \tag{88}$$

财富不平等

这表明，参与者的财富存量与其瞬时影子价格呈负相关。根据方程（88）：

$$y'(x_i) = \delta(1-p_j^*)\Big[\frac{\lambda_i - \gamma\lambda_j}{\lambda_i}\Big] \tag{89}$$

$$y'(x_i) = \delta(1-p_j^*)\Big[1 - \frac{\gamma\lambda_j}{\lambda_i}\Big] \tag{90}$$

边际产出关于财富存量的偏导数为：

$$\frac{\partial[y'(x_i)]}{\partial x_i} = -\delta(1-p_j^*)\gamma\lambda_j\Big[\frac{\partial(1/\lambda_i)}{\partial x_i}\Big] \tag{91}$$

$$y''(x_i) = -\delta(1 - p_j^*)\gamma\lambda_j\Big[\frac{\partial(1/\lambda_i)}{\partial x_i}\Big] \tag{92}$$

根据假设，$y''(x_i) > 0$ 且 $\delta(1 - p_j^*)\gamma\lambda_j \geq 0$。因此：

$$\frac{\partial(1/\lambda_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial\lambda_i/\partial x_i}{\lambda_i^2} \leq 0 \tag{93}$$

$$-\frac{\partial\lambda_i/\partial x_i}{\lambda_i^2} \leq 0 \tag{94}$$

这意味着 x_i 和 λ_i 呈负相关。