arXiv:2304.01866v1 [math.AP] 4 Apr 2023

最小化自由能

EMANUEL INDREI 和 ARAM KARAKHANYAN

Abstract. 我们证明了径向各向同性 Almgren 问题中的尖锐定量稳定性。此外，我们还在对表面张力和势函数仅作最弱假设的条件下，建立了估计尖锐模数的理论，并在任意维数下获得了尖锐 ϵ^2 。除此之外，我们还解决了临界质量的计算问题。此前，人们只是先验地假设临界质量存在；它将质量范围划分为两个部分：能量为凹的部分和能量为凸的部分。

1. Introduction

两个主要要素定义了具有约化边界 $\partial^* E$ 的有限周长集合$E \subset \mathbb{R}^n$ 的自由能：

$$\mathcal{F}(E) = \int_{\partial^* E} f(\nu) d\mathcal{H}^{n-1}$$

（表面能）；并且，

$$\mathcal{G}(E) = \int_E g(x) dx$$

（势能），其中 $g \geq 0$ 是势函数， $g(0) = 0$， $g \in L^\infty_{loc}$，而 f是表面张力，即一个正凸的 $1-$ 齐次函数

$$f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty).$$

[Ind21a]。在此背景下，自由能为

$$\mathcal{E}(E) = \mathcal{F}(E) + \mathcal{G}(E).$$

热力学在质量约束（$|E| = m$）下使自由能最小化，并生成晶体。这一现象由 W. Gibbs 在 1878 [Gib78] 和 P. Curie 在 1885 [Cur85] 独立发现。假设重力效应可以忽略，解是凸集

$$K = \bigcap_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle < f(v)\}$$

第一作者的研究部分得到了 Eliwise Academy 的支持。第二作者的研究部分得到了 EPSRC 项目 EP/S03157X/1“自由边界的平均曲率测度”的支持。

（Wulff 定理 [Wul01, Tay78, FM91]）。长期以来，研究当 g 为凸时极小化子的凸性这一问题被称为 Almgren 问题，其起点正是 Wulff 定理。在一篇近期论文中，Indrei 通过近乎最优的假设证明了二维情形下的凸性 [Ind21a]（另见 [DPG, FZ22, Ind20]）。迄今为止，唯一的稳定性结果出现在 Figalli 完整的菲尔兹奖引文中：在 $g = 0$ 的背景下，针对 [FMP10]给出了显式模量： $w_m(\epsilon) = c(n)\epsilon^2 m^{\frac{n-1}{n}}$；在 [FMP08]中，针对 $g = 0$ 及各向同性情形给出了半显式模量；以及在 [Ind21a]中，针对 m 足够小时且势函数局部有界的情形给出了半显式模量。一种令人惊讶的技术使我们能够解决径向各向同性问题中的定量稳定性问题（定理 2.1）。极小化子是球，并且得到了一个尖锐的显式模量：$w_{m,\ g}(\epsilon) = c(n, m, g)\epsilon^2$，以及一个显式的$c(n, m, g) > 0$（参见注释 2.10）。此外，我们建立了一套理论，用于在对 g 和f 仅作最小假设的背景下估计尖锐模量（定理 2.9）。一个有趣的结果是，我们在任意维数下都得到了尖锐的 ϵ^2 。此外，我们还解决了计算临界质量的问题，该临界质量将质量区域划分为两部分：能量为凹的区域和能量为凸的区域（推论 2.6）。最后，我们通过一种新方法将这些结果应用于 $\mathbb{R}^3$ ：利用最大值原理结合 Simon 恒等式，在更一般的环境中获得凸性。

2. Quantitative stability in Almgren's free energy minimization

2.1. 估算尖锐模数的理论。

定理 2.1. 假设 $f(\nu) = 1$ if $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$, $g(x) = h(|x|)$, $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是非递减的， $h(0) = 0$。令 $m > 0$, $|B_a| = |E| = m$，则 (i)

$$\mathcal{E}(E) - \mathcal{E}(B_a) \geq \int_{E \setminus B_a} [h(|x|) - h(a)]dx + a_n m \inf_z \Big(\frac{|E\Delta(B_a + z)|}{m} \Big)^2,$$

其中 $a_n > 0$ 是一个有量纲的常数。
(ii)

$$\mathcal{E}(E) - \mathcal{E}(B_a) \geq \int_{E \setminus B_a} \int_a^{|x|} h'(t)dtdx + a_n m \inf_z \Big(\frac{|E\Delta(B_a + z)|}{m} \Big)^2,$$

i 此外，假设 h 是凸的，则以下不等式成立：(iii)

$$\mathcal{E}(E) - \mathcal{E}(B_a) \geq \partial_+ h(a) \int_{E \setminus B_a} [|x| - a]dx + a_n m \inf_z \Big(\frac{|E\Delta(B_a + z)|}{m} \Big)^2,$$

其中， $a_n > 0$ 和 $\partial_+ h$（a）是 a 处任意一条支撑直线的斜率；
（iv）

$$\alpha_1[[\partial_+ h(a)]^{-1}[\mathcal{E}(E) - \mathcal{E}(B_a)]]^{1/2} \geq |E \Delta B_a|,$$

其中 $\alpha_1 = \alpha_1(n, a) > 0$ 是显式的。

证明。首先，假设 h' 存在。若 $S \subset \mathbb{R}^+, |S| < \infty$，注意到单调性可得

$$\int_S h(x)dx \geq \int_0^{|S|} h(x)dx.$$

因此，若 $S^- = S \cap \{x < 0\}, S^+ = S \cap \{x \geq 0\}$，注意到由于 h 是偶函数

$$\int_S h \geq \int_{-|S^-|}^{|S^+|} h = \int_0^{|S^+|} h + \int_0^{|S^-|} h.$$

现在令

$$H(y) = \int_0^y h(x)dx$$

并考虑

$$H''(y) = h'(y) \geq 0.$$

因此，由凸性可得，

$$\begin{aligned} H(\frac{1}{2}(|S^-| + |S^+|)) &\leq \frac{1}{2}(H(|S^-|) + H(|S^+|)) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^{|S^+|} h + \int_0^{|S^-|} h\Big). \end{aligned}$$

鉴于假设 h 为偶函数，这意味着，

$$\int_{-\frac{1}{2}(|S^-|+|S^+|)}^{\frac{1}{2}(|S^-|+|S^+|)} h \leq \int_S h.$$

假设 $\{w_1, w_2, \ldots\}$ 是方向，它们通过相对于法向量为 w_i、 E_{w_1}、 E_{w_2}、 ..... 的经过原点的平面进行施泰纳对称化而生成，并且

$$E_{w_i} \to B_a.$$

Set

$$E_1 = \{(x_2, \ldots, x_n) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E\}$$

$$E^{x_2, x_3, \ldots, x_n} = \{x_1 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E\}.$$

注意，可以令 $\frac{x_1}{|x_1|} = w_1$;

$$\begin{aligned}\int_E g dx &= \int_{E_1} \Big(\int_{E^{x_2,x_3,\dots,x_n}} g dx_1 \Big) dx_2 \dots dx_n \\ &\geq \int_{E_1} \Big(\int_{-\frac{|E^{x_2,x_3,\dots,x_n}|}{2}}^{\frac{|E^{x_2,x_3,\dots,x_n}|}{2}} g dx_1 \Big) dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{E_{w_1}} g dx.\end{aligned}$$

此外，由于 g 是径向的，可以旋转坐标 x_1 ，使得 $\frac{x_1}{|x_1|} = w_2$，并重复上述论证:

$$\int_{E_{w_1}} g dx \geq \int_{E_{w_2}} g dx;$$

特别是,

$$\int_E g dx \geq \int_{B_a} g dx.$$

由于对称化不会增大周长，这就证明了第一部分。为了去掉关于 h的可微性假设，令 $h_k \to h$ 几乎处处成立，且 h_k 可微并且有界。

情形 1: E 有界
注意，对于 $E \subset B_A$ ，对于一个 $A > 0$

$$\mathcal{E}_k(E) := \int_{\partial^* E} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_E g_k(x) dx \geq \mathcal{E}_k(B_a);$$

特别地，控制收敛定理意味着

$$\int_{B_a} g_k(x) dx \to \int_{B_a} g(x) dx$$

$$\int_E g_k(x) dx \to \int_E g(x) dx$$

由此可得

$$\mathcal{E}(E) \geq \mathcal{E}(B_a).$$

情形 2: E 无界
若 E 无界，令 $E_T = E \cap B_T$，并注意到当 T 充分大时， $|E_T| \approx m$，因此

$$\mathcal{E}(E_T) \geq \mathcal{E}(B_{a_T}),$$

其中有 $|E_T| = |B_{a_T}|$。此外，由于 E 具有有限周长，根据单调收敛定理

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \setminus B_T) \to 0;$$

这意味着

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap \partial B_T) \to 0;$$

现在通过

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_T) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap \partial B_T) + \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap B_T)$$

and

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap B_T) \to \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E),$$

以下结论成立

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_T) \to \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E).$$

特别是

$$\mathcal{E}(E_T) \to \mathcal{E}(E),$$

并通过控制收敛

$$\mathcal{E}(B_{a_T}) \to \mathcal{E}(B_a).$$

若 $\mathcal{E}(E) = \mathcal{E}(B_a)$，注意到如果 E 并非 B_a，那么上述结论意味着经过对称化后能量降低，这将导致矛盾。因此， $\mathcal{E}(E) = \mathcal{E}(B_a)$ 当且仅当 $E = B_a$。现在假设

$$T : E \setminus B_a \to B_a \setminus E$$

表示 $\mu = \chi_{E\setminus B_a} dx$ 与 $\nu = \chi_{B_a \setminus E} dx$ [Bre91] 之间的 Brenier 映射。由于

$$T_{\#}\mu = \nu,$$

$$\int_{E\setminus B_a} h(|T(x)|)dx = \int_{B_a\setminus E} h(|x|)dx;$$

因此，因为 h是非递减的

$$\begin{aligned}
\int_E h dx &= \int_{E\cap B_a} h dx + \int_{E\setminus B_a} h(|x|)dx \\
&\geq \int_{E\cap B_a} h dx + \int_{E\setminus B_a} h(|T(x)|)dx \\
&= \int_{E\cap B_a} h dx + \int_{B_a\setminus E} h(|x|)dx \\
&= \int_{B_a} h dx.
\end{aligned}$$

由此可知

$$\int_E h dx - \int_{B_a} h dx \geq \int_{E\setminus B_a} [h(|x|) - h(a)]dx$$

通过 $|T(x)| \leq a$。此外， [FMP10] 给出了关于 $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E)$ 的不等式。如果

$$h = h_J + h_A + h_c$$

是勒贝格分解， h_J 是跳跃函数， h_A 是绝对连续的，且 h_c 连续，并且对几乎处处的 t， $h_c'(t) = 0$ 。由于对几乎处处的 t， $h_J'(t) = 0$ ，

$$h'(t) = h_A'(t)$$

对几乎处处的 t。特别地，

$$h_A(|x|) - h_A(a) = \int_a^{|x|} h'(t)dt$$

由此可得

$$\begin{aligned} h(|x|) - h(a) &= h_A(|x|) - h_A(a) + h_J(|x|) - h_J(a) + h_c(|x|) - h_c(a) \\ &\geq h_A(|x|) - h_A(a) = \int_a^{|x|} h'(t)dt, \end{aligned}$$

因此，定理中的陈述给出了 (ii)。注意，若 h 是凸的，则对几乎处处的 t， $h''(t) \geq 0$ 。因此， h' 是非递减的，由此可得 (iii)。接下来令 $E_* = \text{proj}_{\mathbb{S}^{n-1}}(E \setminus B_a)$， $E_\sigma = E \cap L_\sigma$， L_σ 为由$\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$生成的直线。情形 1： E 有界假设 $E \subset B_R$， $r_{-,j}(\sigma)r_{+,j}(\sigma) \geq a$ ，使得

$$|E \setminus B_a| = \int_{E_*} \sum_j \int_{r_{-,j}(\sigma)}^{r_{+,j}(\sigma)} r^{n-1} dr d\sigma.$$

注意，

$$\begin{aligned} r_{+,j}^n - r_{-,j}^n &= n(r_{-,j})^{n-1}(r_{+,j} - r_{-,j}) + \cdots + (r_{+,j} - r_{-,j})^n \\ &\leq t_n(r_*)(r_{+,j} - r_{-,j}) \end{aligned}$$

$$t_n(r_*) \geq \max\{n(r_{-,j})^{n-1}, \ldots, (r_{+,j} - r_{-,j})^{n-1}\},$$

$r_* \le R$;

$$\begin{aligned}
\Big[\frac{1}{2}|E\Delta B_a|\Big|^2 &= |E\setminus B_a|^2 \\
&= \Big[\int_{E_*}\sum_j \int_{r_{-,j}(\sigma)}^{r_{+,j}(\sigma)} r^{n-1}drd\sigma\Big]^2 \\
&= \Big[\int_{E_*}\frac{1}{n}\sum_j (r_{+,j}^n(\sigma)-r_{-,j}^n(\sigma))d\sigma\Big]^2 \\
&\le \Big[\frac{t_n(r_*)}{n}\int_{E_*}\sum_j (r_{+,j}(\sigma)-r_{-,j}(\sigma))d\sigma\Big]^2 \\
&= \Big[\frac{t_n(r_*)}{n}\int_{E_*}\mathcal{H}^1(E_\sigma)d\sigma\Big]^2 \\
&\le \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})t_n^2(r_*)}{n^2}\int_{E_*}(\mathcal{H}^1(E_\sigma))^2 d\sigma \\
&\le \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})2t_n^2(r_*)}{a^{n-1}n^2}\int_{E_*}\int_0^{\mathcal{H}^1(E_\sigma)} r[r+a]^{n-1}drd\sigma \\
&= \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})2t_n^2(r_*)}{a^{n-1}n^2}\int_{E_*}\int_a^{a+\mathcal{H}^1(E_\sigma)} [r-a][r]^{n-1}drd\sigma \\
&\le \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})2t_n^2(r_*)}{a^{n-1}n^2}\sum_j\int_{E_*}\int_{r_{-,j}(\sigma)}^{r_{+,j}(\sigma)} [r-a][r]^{n-1}drd\sigma \\
&= \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})2t_n^2(r_*)}{a^{n-1}n^2}\int_{E\setminus B_a}[|x|-a]dx.
\end{aligned}$$

因此，令

$$A_* = \left[\frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})2t_n^2(r_*)}{a^{n-1}n^2}\right]^{-1},$$

由此可得

$$\mathcal{G}(E)-\mathcal{G}(B_a) \ge \partial_+ h(a)A_*\Big[\frac{1}{2}|E\Delta B_a|\Big|^2.$$

接下来，定义

$$r_a = 2\Big[\frac{1}{\partial_+ h(a)A_*}\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Then

$$r_a\Big[\mathcal{G}(E)-\mathcal{G}(B_a)\Big]^{\frac{1}{2}} \ge |E\Delta B_a|.$$

现在令 x 满足

$$\frac{|E\Delta(B_a+x)|}{|E|}\leq a(m,n)[\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)-\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_a)]^{\frac{1}{2}},$$

$a(m,n)=\frac{\mu_n}{\sqrt{m}}$ 和 $\mu_n>0$ 取决于维数 [FMP10]；假设

$$\Big[\mathcal{E}(E)-\mathcal{E}(B_a)\Big]\geq s>0,$$

其中 s是一个常数，注意到

$$\frac{|E\Delta(B_a+x)|}{|E|}\leq 2,$$

$$|E\Delta B_a|\leq 2m,$$

得到 (iv) 中的下界，其中有两个常数取决于 s、 m。特别地，可以假设

$$\Big[\mathcal{E}(E)-\mathcal{E}(B_a)\Big]$$

很小（注意，常数 $s>0$ 是任意的，因此可以令 s 为任意小的常数）。假设 $|x|$很小，

$$a_{1,m}|x|\leq|(B_a+x)\Delta B_a|\leq a_m|x|,$$

$$\frac{a_m}{a_{1,m}}\leq w_1$$

对某个普适常数 $w_1>0$；

$$\begin{aligned}a_{1,m}|x|&\leq|(B_a+x)\Delta B_a|\\&\leq|E\Delta(B_a+x)|+|E\Delta B_a|\\&\leq a(m,n)\big[[\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)-\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_a)]\big]^{\frac{1}{2}}|E|+r_a\Big[\mathcal{G}(E)-\mathcal{G}(B_a)\Big]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

特别是

$$\begin{aligned}|E\Delta B_a|&\leq|E\Delta(B_a+x)|+|(B_a+x)\Delta B_a|\\&\leq a(m,n)\big[\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)-\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_a)\big]^{\frac{1}{2}}|E|+a_m|x|\\&\leq a(m,n)\big[\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)-\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_a)\big]^{\frac{1}{2}}|E|\\&+\frac{a_m}{a_{1,m}}\Big[a(m,n)\big[\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)-\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_a)\big]^{\frac{1}{2}}|E|+r_a\Big[\mathcal{G}(E)-\mathcal{G}(B_a)\Big]^{\frac{1}{2}}\Big].\end{aligned}$$

现在可以去掉假设 $E\subset B_R$。

情形 2： E 无界

首先应用 [FMP10]，并证明存在某个 $L \subset E$，使其近似于 E。存在一个常数 $e > 0$，使得如果

$$\mathcal{E}(E) - \mathcal{E}(B_a) \leq e$$

$$B_a + k \approx L,$$

& $|E \setminus L|$ 由 $q\sqrt{\mathcal{E}(E) - \mathcal{E}(B_a)}$ 有界。因此，若平移 k 有一致上界，则可令 R 依赖于 e、m、n。该界的存在性如下：假设 $k \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\infty &= \int_{B_a} \liminf g(y+k)dy \\
&\leq \liminf \int_{B_a} [g(y+k) - g(y)]dy + \int_{B_a} g(y)dy \\
&\leq w_1 \Big[\mathcal{E}(E) - \mathcal{E}(B_a)\Big]^{1/2} + ||g||_{L^1(B_a)} \\
&\leq w_1 e^{1/2} + ||g||_{L^1(B_a)}
\end{aligned}$$

因此，这与 $||g||_{L^1(B_a)} < \infty$ 矛盾，因为 g 单调不减且为凸函数（$g(0) = 0$，因此不失一般性，$g(x) > 0$ 对某个 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立，进而可推出，当 $|x| \to \infty$ 时，$g(x) \to \infty$ ）。在此情形下，$L \approx E$、$L \subset B_R$，因此上述论证表明，$r_* \leq R$，且 R 有一致上界。□

注 2.2. 不等式 (iv) 具有最优指数：为简化显式计算，假设 $n = 1$、$B = (-1/2, 1/2)$，并假设 $E = B + x$、$|x|$ 足够小；则下界的量级为 $|x|$，而 $g(a) = a^2$ 的自由能量级为

$$\mathcal{G}(B + x) - \mathcal{G}(B) = \int_{-1/2}^{1/2} (g(x+q) - g(q))dq = x^2.$$

注 2.3. 经典 Almgren 问题中的假设是势函数具有凸性。Indrei 构造了一个凸势函数的例子，在该例子中解并不存在。因此，必然需要更多假设。在上述定理中，我们得到，即使 g 是单调不减、径向且可能非凸的，球也能使能量达到极小。有趣的是，极小化子是球这一结论是新的。此外，单调不减假设是尖锐的：在一般情况下，（极小化子的）凸性并不成立（例如，可以构造一个具有不连通零水平集的势函数）。

注 2.4. 势函数还带来了一个副作用：它能生成一个不具有平移不变性的定量不等式。因此，定量各向异性等周不等式有很大不同。一个类似的定理见 [FI13]

在该定理中，考虑凸锥中的定量等周不等式时，平移至关重要：假设锥不含直线，则定量项不涉及平移。这一特征也体现在质量的指数上。在 [Ind21b], 中证明了一个加权相对等周不等式。

注 2.5。(iii) 中的界包含 $E \setminus B_a$ 的一阶矩：

$$\int_{E\setminus B_a} [|x| - a]dx = m_1(E \setminus B_a) - a|E \setminus B_a|.$$

推论 2.6。设 $f(\nu) = 1$ if $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$, $g(x) = h(|x|)$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 非递减且为 α 次齐次。令 $m > 0$，并假设 E_m 是满足 $|E_m| = m$ 的极小化子，设

$$m_\alpha = |B_1|\Big[\frac{(n-1)\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1)}{\alpha(\alpha+n)\int_{B_1} h(|x|)dx}\Big]^{\frac{n}{1+\alpha}},$$

于是可得

$$m \to \mathcal{E}(E_m)$$

在 $(0, m_\alpha)$ 上为凹函数，在 (m_α, ∞) 上为凸函数。

证明。注意到 $E_m = B_r$, $r = \Big[\frac{m}{|B_1|}\Big]^{\frac{1}{n}}$，因此可推出

$$\mathcal{E}(E_m) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1)(\frac{1}{|B_1|^{\frac{n-1}{n}}})m^{\frac{n-1}{n}} + (\frac{1}{|B_1|^{\frac{\alpha+n}{n}}})(\int_{B_1} h(|x|)dx)m^{\frac{n+\alpha}{n}}.$$

The 临界质量 m_α 因此可以通过二阶导数计算。 □

注 2.7。临界质量的存在性已在 [McC98], 中讨论过；然而，既未计算出具体数值，也没有证明该质量的存在性。

命题 2.8。若 $m > 0$、 $g \in L^\infty_{loc}$，且除去零测集外， g存在唯一的极小化子 E_m，那么对于 $\epsilon > 0$，存在 $w_m(\epsilon) > 0$，使得若 $|E| = |E_m|$、 $E \subset B_R$、 $R = R(m)$，并且

$$\mathcal{A}(E, E_m) := |\mathcal{F}(E) - \mathcal{F}(E_m) + \int_E g(x)dx - \int_{E_m} g(x)dx| < w_m(\epsilon),$$

then

$$\frac{|E_m \Delta E|}{|E_m|} < \epsilon.$$

证明。假设并非如此，那么存在 $\epsilon > 0$ 且对于 $w > 0$，存在 $E'_w \subset B_R$和 E_m、$|E'_w| = |E_m| = m$,

$$\mathcal{A}(E'_w, E_m) < w,$$

but

$$\frac{|E_m \Delta E'_w|}{|E_m|} \geq \epsilon;$$

特别地，设定 $w = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$；观察到存在 $E'_{\frac{1}{k}}, |E'_{\frac{1}{k}}| = m$,

$$|\mathcal{E}(E_m) - \mathcal{E}(E'_{\frac{1}{k}})| \leq \mathcal{A}(E'_{\frac{1}{k}}, E_m) < \frac{1}{k},$$

$$\frac{|E_m \Delta E'_{\frac{1}{k}}|}{|E_m|} \geq \epsilon;$$

thus

$$\mathcal{F}(E'_{\frac{1}{k}}) \leq \mathcal{E}(E'_{\frac{1}{k}}) < \frac{1}{k} + \mathcal{E}(E_m),$$

$$E'_{\frac{1}{k}} \subset B_R,$$

而有限周长集合的紧性意味着——取一个子列后——

$$E'_{\frac{1}{k}} \to E' \qquad in \ \ L^1(B_R),$$

因此，$|E'| = m$ 由于 L^1（B_R）中的三角不等式；于是

$$\mathcal{E}(E') \leq \liminf_k \mathcal{E}(E'_{\frac{1}{k}}) = \mathcal{E}(E_m),$$

这意味着 E' 是一个极小化子，与.....矛盾

$$\frac{|E_m \Delta E'|}{|E_m|} \geq \epsilon$$

利用极小化子的唯一性。 □

确定模量 w_m（ϵ）通常非常困难。接下来的定理讨论唯一极小化子情形下的尖锐误差估计。

定理 2.9。假设 $m > 0$，并且忽略零测集后，g 存在唯一的极小化子 $E_m \subset B_{r(m)}$, 则

(i) 存在 $\alpha_m > 0$，使得如果 $g \in W^{1,\ {}^1_{loc}}$ 可微，则 $\epsilon < \alpha_m$,

$$w_m(\epsilon) \leq \lambda(m, \epsilon) = o(\frac{\epsilon m}{a_{m_*}}),$$

$$a_{m_*} = \alpha_* |D\mathbf{1}_{E_m} \cdot w_*|(\mathbb{R}^n)$$

其中 $\alpha_* > 0$ 为一个普适常数;

(ii) 存在 $m_a > 0$，使得如果 $n = 2$、$m < m_a$、$g \in W^{1,\infty}_{loc}$，那么

$$\lambda(m, \epsilon) = \alpha m^{\frac{1}{2}} o_m(\epsilon),$$

$$o_m(\epsilon) = \epsilon \int_{E_m} o_x(1) dx,$$

$$\int_{E_m} o_x(1)dx \to 0$$

作为 $\epsilon \to 0^+$; 并假设 $g \in C^1$,

$$\lambda(m,\epsilon) = \alpha m^{\frac{3}{2}} o(\epsilon),$$

$\alpha = \alpha(||Dg||_{L^\infty(B_{r(m_a)})}) > 0$;

(iii) 存在 $m_a, \alpha_m > 0$, 使得若 $n \geq 3$, $m < m_a$, $\epsilon < \alpha_m$, $g \in C^1$, f 是 λ_a-椭圆的, 则

$$\lambda(m,\epsilon) = \alpha m^{1+\frac{1}{n}} o(\epsilon),$$

$\alpha = \alpha(||Dg||_{L^\infty(B_{r(m_a)})}\ \lambda_a) > 0$;

(iv) 存在 $\alpha_m > 0$, 使得若 $g \in W^{2,\ \overset{1}{loc}}$ 二次可微, $\epsilon < \alpha_m$,

$$w_m(\epsilon) \leq a_m \epsilon^2,$$

$$a_m = \Big(||D^2 g||_{L^1(E_m)} + m\frac{1}{6}\Big)\Big(\frac{m}{\alpha_* |D\mathbf{1}_{E_m} \cdot w_*|(\mathbb{R}^n)}\Big)^2$$

其中 $\alpha_* > 0$ 是普适的;

(v) 存在 $m_a > 0$, 使得如果 $n = 2$、 $g \in W^{2,\ \overset{\infty}{loc}}$ 、 $m < m_a$,

$$w_m(\epsilon) \leq a_m \epsilon^2,$$

$$a_m = a_* m^2,$$

$a_* = a_*(||D^2 g||_{L^\infty(B_{r(m_a)})}) > 0$;

(vi) 存在 $m_a > 0$, 使得如果 f 是 λ_a-椭圆的, $g \in W^{2,\ \overset{\infty}{loc}}$ 、 $m < m_a$,

$$w_m(\epsilon) \leq a_m \epsilon^2,$$

$$a_m = a_* m^{1+\frac{2}{n}},$$

$a_* = a_*(||D^2 g||_{L^\infty\ (B_{r(m_a)})}\ \ \lambda_a) > 0$。

证明。对于(i),

$$y \in (\int_{E_m} \nabla g(x)dx)^\perp,$$

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{E_m+y} g(x)dx - \int_{E_m} g(x)dx\Big| & \\
&= \int_{E_m} g(x+y) - g(x)dx \\
&= y \cdot \int_{E_m} \nabla g(x)dx + \int_{E_m} o_x(|y|)dx \\
&= \int_{E_m} o_x(|y|)dx.
\end{aligned}$$

现在存在一个 $\alpha(x) > 0$，使得对于 $|y| < \alpha(x)$,

$$\frac{|o_x(|y|)|}{|y|} \leq 1;$$

此外， $x \to \alpha(x)$ 是连续的（由 g 的可微性可知）。特别地，由于 $\overline{E_m}$的紧性,

$$\alpha := \inf_{E_m} \alpha(x) > 0;$$

因此，如果 $|y| < \alpha$,

$$\sup_{x \in E_m} \frac{|o_x(|y|)|}{|y|} \leq 1;$$

因此，控制收敛定理表明

$$\limsup_{|y| \to 0} \int_{E_m} o_x(|y|)/|y| dx = 0.$$

特别地，存在 $\alpha > 0$，使得当 $|y| < \alpha$ 时

$$\Big| \int_{E_m + y} g(x)dx - \int_{E_m} g(x)dx \Big| = o(|y|);$$

注意，存在 $t_{E_m} > 0$ 使得

$$a_{m_*}|y| \leq |(E_m + y) \Delta E_m|$$

当 $|y| \leq t_{E_m}$ [FI13，引理 3.2],

$$a_{m_*} = \alpha_* |D\mathbf{1}_{E_m} \cdot w_*|(\mathbb{R}^n),$$

$w_* \in \mathbb{R}^n$；因此，存在 $\alpha_m = t_{E_m} a_{m_*}/m > 0$，使得如果 $\epsilon < \alpha_m$，则可以取$|y|$,使得

$$\frac{a_{m_*}}{m}|y| = \epsilon;$$

因此，假设 $\epsilon < \alpha_m$,

$$w_m(\epsilon) \leq \Big| \int_{E_m + y} g(x)dx - \int_{E_m} g(x)dx \Big| = o(|y|) = o(\frac{\epsilon m}{a_{m_*}})$$

从而证明了 (i)。注意，为了证明 (ii)，只需证明

$$a_{m_*} = C\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_m), \tag{1}$$

其中常数与质量无关。为了说明原因，假设这成立

$$\begin{aligned} a_{m_*} &= C\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_m) \\ &\approx \mathcal{H}^{n-1}(\partial \mu_m K) \\ &= \mu_m^{n-1}\mathcal{H}^{n-1}(\partial K) = (\frac{m}{|K|})^{\frac{n-1}{n}}\mathcal{H}^{n-1}(\partial K) \end{aligned}$$

通过 $|\mu_m K| = m$ （其中 K 是 Wulff 形状）。注意，可以像上面那样控制 o_x（$|y|$）余项:

$$\sup_{x\in E_m}\frac{|o_x(|y|)|}{|y|} \leq 2A$$

（因为 $g \in W^{1,\ \infty}_{loc}$, $A = ||\nabla g||_{L^\infty(B_r)}$）。因此，控制收敛定理意味着

$$\begin{aligned} |y|\int_{E_m} o_x(|y|)/|y|dx = |y|o_m(1) &= \frac{\epsilon m}{a_{m_*}}o_m(1) \\ (\frac{\epsilon m}{a_{m_*}})o_m(1) &= (\frac{\epsilon m}{\bar{C}m^{\frac{n-1}{n}}})o_m(1) \\ &= \frac{o_m(\epsilon)}{\bar{C}}m^{1/n}; \end{aligned}$$

假设 $g \in C^1$,

$$\sup_{x\in E_m}\frac{o_x(|y|)}{|y|} \to 0,$$

当 $|y| \to 0$ 时；因此

$$o_m(1) = mo(1),$$

o**(1)** $\to 0$ 当 $\epsilon \to 0$ 时。特别是

$$m(\frac{\epsilon m}{a_{m_*}})o(1) = m(\frac{\epsilon m}{\bar{C}m^{\frac{n-1}{n}}})o(1) = \frac{o(\epsilon)}{\bar{C}}m^{1+1/n}.$$

假设 $n = 2, m$ 很小，极小化子 E_m 是凸的 [FM11]。特别地，只需证明当 E_m 一般为凸时，结论 **(1)** 成立。令 $A = E_m$。对于 $t > 0$和 $w \in \mathbb{S}^{n-1}$，定义

$$f_w(t) := |(A + tw)\Delta A|.$$

Note

$$f_w(t) = \int_{\mathbb{R}^n}|\mathbf{1}_{(A+tw)}(x) - \mathbf{1}_A(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n}|\mathbf{1}_A(x + tw) - \mathbf{1}_A(x)|dx.$$

此外，对于 $t > 0$，令

$$g_w(t) := \int_{\partial(A-tw)\cap A}\langle \nu_A(x + tw), w\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

其中 ν_A 是 A 边界的外单位法向量。首先：对于 $s>0$，如果 $0<t<s$，那么

$$\partial(A-sw)\cap A+(s-t)w\subset\partial(A-tw)\cap A. \tag{2}$$

事实上，令 $x=y+(s-t)w$，其中 $y\in\partial(A-sw)\cap A$。因此，$y=a-sw$，其中$a\in\partial A$ 且 $x=a-tw$。由于 $y\in A$，凸性意味着对所有 $\lambda\in(0,1)$，

$$\lambda y+(1-\lambda)a\in A.$$

但是 $\lambda y+(1-\lambda)a=\lambda(a-sw)+(1-\lambda)a=a-\lambda sw$。令$\lambda=\frac{t}{s}$，$a-tw=x\in A$，这就完成了该结论的证明。注意，由于 A的凸性，

$$\langle\nu_A(x+tw),w\rangle\geq 0$$

对于所有 $x\in(\partial A-tw)\cap A$（若 $y\in\partial A$ 且 $\nu_A(y)\cdot w<0$，则 $y-tw\in\{z:\langle z-y,\nu_A(y)\rangle>0\}$，且后者与 A不相交）。因此，通过变量替换 $x=y+(s-t)w$ 以及（2），

$$\begin{aligned}g_w(s)&=\int_{\partial(A-sw)\cap A}\langle\nu_A(y+sw),w\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y)\\&=\int_{\partial(A-sw)\cap A+(s-t)w}\langle\nu_A(x+tw),w\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x)\\&\leq g_w(t),\end{aligned}$$

已给出 $0<t<s$。接下来，对于 $s=s(n,A)>0$ 的某个特定取值，

$$\inf_{w\in\mathbb{S}^{n-1}}g_w(s)>0. \tag{3}$$

事实上，设 $w\in\mathbb{S}^{n-1}$，对于 $y\in\partial A$，求出 $r_y>0$，使得 $B_{r_y}(y)\cap\partial A$ 是凹函数 $u_y:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ 的图像。经过可能的重新定向后，我们有

$$A\cap B_{r_y}(y)=\{x\in B_{r_y}(y):x_n<u_y(x_1,\dots,x_{n-1})\}.$$

在以下论证中，$\tilde{B}_\beta(\alpha)$ 表示以 α 为中心、半径为 β 的 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的开球。由于

$$\partial A\subset\bigcup_{y\in\partial A}B_{r_y/2}(y),$$

由 ∂A 的紧性，存在 $N\in\mathbb{N}$、$\{y_k\}_{k=1}^N\subset\partial A$，使得 $\partial A\subset\cup_{k=1}^N B_{r_k/2}(y_k)$。将相应的凹函数记为$\{u_k\}_{k=1}^N$，并约定$\partial A\cap B_{r_k}(y_k)$是 u_k的图像。接下来，令 $y^*\in\partial A$满足：在 y^*处，支撑超平面的法向量为 w。那么，对于某个 $j\in\{1,2,\dots,N\}$，有 $y^*\in\partial A\cap B_{r_j/2}(y_j)\tilde{}$。此外，$u_j:\ B_{r_j}(\hat{}x_j)\to\mathbb{R}$，其中$(\hat{}x_j,u_j(\hat{}x))=y_j$，

$$A\cap B_{r_j}(y_j)=\{x\in B_{r_j}(y):x_n<u(x_1,\dots,x_{n-1})\}. \tag{4}$$

接下来，令$\hat{x}^* \in B_{r_j/2}(\hat{x}_j)$满足$(\hat{x}^*, u_j(\hat{x}^*)) = y^*$，$r = r(n, A) := \min_k r_k/4$，且 $s = s(n, A) := r/4$。由于$\hat{x}^* \in B_{r_j/2}(\hat{x}_j)$，$B_r(\hat{x}^*) \subset B_{3r_j/4}(\hat{x}_j)$。将凹函数 $\phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 在其定义域内点$\hat{x}$处的超微分记为

$$\partial^+\phi(\hat{x}) := \{\hat{y} \in \mathbb{R}^{n-1} : \forall \hat{z} \in \mathbb{R}^{n-1}, \phi(\hat{z}) \le \phi(\hat{x}) + \langle \hat{y}, \hat{z} - \hat{x}\rangle\}.$$

由于 w 是在 $(\hat{x}^*, u_j(\hat{x}^*))$ 处的 A 的支撑超平面的法向量，因此存在 $\nabla^+ u_j(\hat{x}^*) \in \partial^+ u_j(\hat{x}^*)$，使得 $w = \frac{(-\nabla^+ u_j(\hat{x}^*), 1)}{\sqrt{1+|\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)|^2}} =: (\hat{w}, w^\perp)$。不失一般性，经过一次无穷小旋转，可令 $|\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)| > 0$。令 $e_1 = \frac{\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)}{|\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)|}$ & $\{e_2, \dots, e_{n-1}\}$ 为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的一组对应的正交归一基。定义

$$N_\epsilon := \left\{\hat{z} \in \tilde{B}_r(\hat{x}^*) : \hat{z} - \hat{x}^* = \gamma_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i e_i,\ \ \Big|\sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i e_i\Big| \le \epsilon,\ \ -\frac{r}{4} \ge \gamma_1\right\},$$

and

$$\tilde{N}_\epsilon := \left\{\hat{z} \in \tilde{B}_r(\hat{x}^*) : \hat{z} - \hat{x}^* = \gamma_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i e_i,\ \ \Big|\sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i e_i\Big| \le \epsilon,\ \ -\frac{r}{2} \ge \gamma_1\right\}.$$

这些是区域内的矩形集合。令 $\hat{z} \in N_\epsilon$，并注意到

$$\begin{aligned} u_j(\hat{z}) &\le u_j(\hat{z} - s\hat{w}) + \langle \nabla^+ u_j(\hat{z} - s\hat{w}), s\hat{w}\rangle \\ &= u_j(\hat{z} - s\hat{w}) - \frac{s}{\sqrt{1+|\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)|^2}} \langle \nabla^+ u_j(\hat{z} - s\hat{w}), \nabla^+ u_j(\hat{x}^*)\rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

此外，如果 $\hat{z} \in B_r(\hat{x}^*)$，则存在 $\nabla^+ u_j(\hat{z}) \in \partial^+ u_j(\hat{z})$，使得 $\nu_A((\hat{z}, u_j(\hat{z})))$ $= \frac{(-\nabla^+ u_j(\hat{z}), 1)}{\sqrt{1+|\nabla^+ u_j(\hat{z})|^2}}$。因此，

$$\begin{aligned} \langle \nu_A((\hat{z}, u_j(\hat{z}))), w\rangle &= \left\langle \frac{(-\nabla^+ u_j(\hat{z}), 1)}{\sqrt{1+|\nabla^+ u_j(\hat{z})|^2}}, \frac{(-\nabla^+ u_j(\hat{x}^*), 1)}{\sqrt{1+|\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)|^2}} \right\rangle \\ &= \frac{1 + \nabla^+ u_j(\hat{z}) \cdot \nabla^+ u_j(\hat{x}^*)}{\sqrt{1+|\nabla^+ u_j(\hat{z})|^2}\sqrt{1+|\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)|^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

如果 $C = \max_k \{Lip_{\frac{3}{4}}(u_k)\} > 0$，其中 $Lip_{\frac{3}{4}}(u_k)$ 表示u_k在 $\tilde{B}_{\frac{3}{4}r_k}(\hat{x}_k)$ 上的 Lipschitz 常数（回顾 $\hat{x}_k := u_k^{-1}(y_k)$），那么由于 $\sup_{z \in \tilde{B}_r(\hat{x}^*)} |\nabla^+ u_j(\hat{z})| \le \tilde{C}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla^+ u_j(\hat{z})|^2}\sqrt{1+|\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)|^2}} \ge \frac{1}{1+\tilde{C}^2} =: C_0. \tag{7}$$

接下来，凹函数的超微分 u_j 的单调性公式给出

$$\langle \nabla^+ u_j(\hat{z}) - \nabla^+ u_j(\hat{x}^*), \hat{z} - \hat{x}^*\rangle \le 0,$$

并且由于

$$\langle \nabla^+ u_j(\hat{x}^*), \hat{z} - \hat{x}^* \rangle \leq 0$$

对于 $\hat{z} \in N_\epsilon$,

$$0 \geq \langle \nabla^+ u_j(\hat{z}), \hat{z} - \hat{x}^* \rangle = \langle \nabla^+ u_j(\hat{z}), \gamma_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i e_i \rangle$$
$$\geq \frac{\gamma_1}{|\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)|} \langle \nabla^+ u_j(\hat{z}), \nabla^+ u_j(\hat{x}^*) \rangle - C_0 \epsilon.$$

当 $0 < \frac{r}{4} \leq -\gamma_1$,

$$\langle \nabla^+ u_j(\hat{z}), \nabla^+ u_j(\hat{x}^*) \rangle \geq -\frac{4C_0\epsilon |\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)|}{r} \geq -\frac{4C_0\tilde{C}\epsilon}{r}. \tag{8}$$

注意，若 $\hat{z} \in N_\epsilon, \hat{z} - s\hat{w} \in N_\epsilon$，则由 (8) 得

$$\langle \nabla^+ u_j(\hat{z} - s\hat{w}), \nabla^+ u_j(\hat{x}^*) \rangle \geq -\frac{4C_0\tilde{C}\epsilon}{r}.$$

将此与 (5) 结合,

$$u_j(\hat{z} - s\hat{w}) \geq u_j(\hat{z}) - s\frac{4C_0\tilde{C}\epsilon}{r\sqrt{1 + |\nabla^+ u_j(\hat{x}^*)|^2}} \geq u_j(\hat{z}) - s\frac{4C_0\tilde{C}\epsilon}{r}. \tag{9}$$

现在假设

$$\epsilon \in \big(0, \min\{\frac{r}{4C_0\tilde{C}\sqrt{1+C^2}}, \frac{r}{8C_0\tilde{C}}\}\big).$$

注意 $\epsilon = \epsilon(n, A)$，采用此处的 ϵ 后，(6)、(7) 和 (8) 表明，对于 $\tilde{\hat{z}} \in N_\epsilon$,

$$\langle \nu_A((\hat{z}, u_j(\hat{z}))), w \rangle \geq \frac{1}{2} C_0, \tag{10}$$

而（9）则意味着

$$u_j(\hat{z} - s\hat{w}) > u_j(\hat{z}) - \frac{s}{\sqrt{1+C^2}} \geq u_j(\hat{z}) - sw^\perp. \tag{11}$$

由（11）可得，$(\hat{z} - s\hat{w}, u_j(\hat{z}) - sw^\perp) \in \partial(A - sw) \cap A_\circ$ 此外，令 U_s: $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$通过 $U_s(\hat{d}) = (\hat{d}, u_j(\hat{d} + s\hat{w}) - sw^\perp)$ 定义。于是

$$U_s(\tilde{N}_\epsilon - s\hat{w}) \subset \partial(A - sw) \cap A. \tag{12}$$

因此，如果 $y \in U_s(\tilde{N}_\epsilon - s\hat{w})$，使得 $y = (\hat{z} - s\hat{w}, u_j(\hat{z}) - sw^\perp)$ 对于 $\hat{z} \in \tilde{N}_\epsilon$ 成立，那么 $\nu_{(A-sw)}(y) = \nu_A((\hat{z}, u_j(\hat{z})))$；因此，(10) 蕴含了

$$\langle \nu_{(A-sw)}(y), w \rangle = \langle \nu_A((\hat{z}, u_j(\hat{z})), w \rangle \geq \frac{1}{2} C_0.$$

上述事实与式（12）得出

$$\begin{aligned} g_w(s) &= \int_{\partial(A-sw)\cap A} \langle \nu_{Asw}(y), w\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &\geq \int_{U_s(\tilde{N}_\epsilon - s\hat{w})} \frac{1}{2} C_0 d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \frac{1}{2} C_0 \mathcal{H}^{n-1}(U_s(\tilde{N}_\epsilon - s\hat{w})) \\ &= \frac{1}{2} C_0 C_1 \mathcal{H}^{n-1}(\partial A) \\ &= \frac{1}{2} C_0 C_1 \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_m), \end{aligned} \tag{13}$$

C_0C_1 仅取决于 E_m 的形状（而非质量），具体而言取决于 Wulff 形状的 Lipschitz 常数，由此证明了 (3)。接下来，$f'_w(t) = 2g_w(t)$ 几乎处处成立。为此，令

$$h(y) := |A \setminus (A-y)| = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{A\setminus(A-y)}(x)dx,$$

以及 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$。现在，$h(y)$ 是 Lipschitz 函数；因此，利用分部积分、Fubini 定理，以及 ψ 无散这一事实

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\cdot\nabla h(y)dy &= -\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\psi(y)h(y)dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\psi(y)\mathbf{1}_{A\setminus(A-y)}(x)dy\right)dx \\ &= -\int_{A}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\psi(y)\mathbf{1}_{A\setminus(A-y)}(x)dy\right)dx \\ &= -\int_{A}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\psi(y)(1-\mathbf{1}_{(A-y)}(x))dy\right)dx \\ &= \int_{A}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\psi(y)\mathbf{1}_{(A-y)}(x)dy\right)dx. \end{aligned} \tag{14}$$

接下来，注意到 $\mathbf{1}_{(A-y)}(x) = \mathbf{1}_{(A-x)}(y)$，并应用散度定理，可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\psi(y)\mathbf{1}_{(A-x)}(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \psi(y), \nu_{(A-x)}(y)\rangle d\mathcal{H}^{n-1}\lfloor\partial(A-x)(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \psi(z-x), \nu_A(z)\rangle d\mathcal{H}^{n-1}\lfloor\partial A(z). \end{aligned} \tag{15}$$

因此，由（14）、（15）和 Fubini 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\cdot\nabla h(y)dy &= \int_A\left(\int_{\mathbb{R}^n}\langle\psi(z-x),\nu_A(z)\rangle d\mathcal{H}^{n-1}\lfloor\partial A(z)\right)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(z-x)\mathbf{1}_A(x)dx\right)\cdot\nu_A(z)d\mathcal{H}^{n-1}\lfloor\partial A(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)\mathbf{1}_A(z-y)dy\right)\cdot\nu_A(z)d\mathcal{H}^{n-1}\lfloor\partial A(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_A(z-y)\nu_A(z)d\mathcal{H}^{n-1}\lfloor\partial A(z)\right)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)\cdot\left(\int_{\partial(A-y)}\mathbf{1}_A(x)\nu_A(x+y)d\mathcal{H}^{n-1}(x)\right)dy.\end{aligned}$$

但是，$\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 是任意的，因此这意味着对几乎处处的 $y\in\mathbb{R}^n$，

$$\nabla h(y)=\int_{\partial(A-y)\cap A}\nu_{(A-y)}(x)d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

注意 $f_w(t)=2h(tw)$，且由于 $f_w(t)$ 是 Lipschitz 的，对几乎处处的 $t\in\mathbb{R}$，

$$f_w'(t)=2\nabla h(tw)\cdot w=2g_w(t).$$

现在可以完成证明：令 $y\in\mathbb{R}^n$，并将 $y=tw$ 写成某个 $w\in\mathbb{S}^n$。若 $t\in[0,s]$，

$$\begin{aligned}f_w(t)&=\int_0^t f_w'(\xi)d\xi=\int_0^t 2g_w(\xi)d\xi\geq 2\inf_{w\in\mathbb{R}^n}g_w(s)t\\ &=2\inf_{w\in\mathbb{R}^n}g_w(s)|y|.\end{aligned}$$

令 $C(n,A):=2\inf_{w\in\mathbb{R}^n}g_w(s)$，并注意到

$$C(n,A)\geq C_0C_1\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_m)=:a_{m_*}>0$$

由 (3) 可知。因此，对于 $|y|\leq s=s(n,A)$，

$$a_{m_*}|y|\leq|(A+y)\Delta A|.$$

特别地，(ii) 成立。假设 $n\geq 3$，如果 $g\in C^1$ 和 f 是椭圆的，m 很小，那么 E_m 是凸的 [FM11]。因此，(iii) 成立。对于 (iv) 的证明，假设

$$y_0\in(\int_{E_m}\nabla g(x)dx)^\perp,$$

$$\Big|\int_{E_m+y_0} g(x)dx - \int_{E_m} g(x)dx\Big|$$

$$= \int_{E_m} g(x+y_0) - g(x)dx$$
$$= y_0 \cdot \int_{E_m} \nabla g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{E_m} \Big(\langle D^2 g(x)y_0, y_0\rangle + 2o_x(|y_0|^2)\Big)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{E_m} (\langle D^2 g(x)y_0, y_0\rangle + 2o_x(|y_0|^2))dx;$$

现在存在一个 $\alpha(x) > 0$，使得对于 $|y_0| < \alpha(x)$,

$$\frac{|o_x(|y_0|^2)|}{|y|^2} \leq 1;$$

此外，$x \to \alpha(x)$ 是连续的。特别地，由于 $\overline{E_m}$ 的紧性,

$$\alpha := \inf_{E_m} \alpha(x) > 0;$$

因此，如果 $|y_0| < \alpha$,

$$\sup_{x\in E_m} \frac{|o_x(|y_0|^2)|}{|y_0|^2} \leq 1;$$

所以如果 $|y_0| < \alpha$,

$$\langle D^2 g(x)\frac{y_0}{|y_0|}, \frac{y_0}{|y_0|}\rangle + |o_x(|y_0|^2)|/|y_0|^2 \leq |D^2 g(x)| + 1$$

因此，控制收敛定理表明

$$\limsup_{|y_0|\to 0} \int_{E_m} (\langle D^2 g(x)\frac{y_0}{|y_0|}, \frac{y_0}{|y_0|}\rangle + o_x(|y_0|^2)/|y_0|^2)dx \leq \int_{E_m} |D^2 g(x)|dx.$$

特别地，存在 $\alpha > 0$，使得对于 $|y_0| < \alpha$

$$\Big|\int_{E_m+y_0} g(x)dx - \int_{E_m} g(x)dx\Big|$$

$$\leq |y_0|^2 \int_{E_m} (|D^2 g(x)| + \frac{1}{6})dx;$$
$$= \mu_{W^{2,1}}|y_0|^2,$$

$$\mu_{W^{2,1}} = \int_{E_m} (|D^2 g(x)| + \frac{1}{6})dx.$$

注意，存在 $t_{E_m} > 0$ 使得

$$a_{m_*}|y_0| \leq |(E_m + y_0)\Delta E_m|$$

当 $|y_0| \le t_{E_m}$ 时，因此存在 $\alpha_m = t_{E_m} a_{m_*}/m > 0$，使得若 $\epsilon < \alpha_m$，则可取 $|y_0|$，从而

$$\frac{a_{m_*}}{m}|y_0| = \epsilon;$$

因此，假设 $\epsilon < \alpha_m$，(iv) 可由下式得证：

$$\begin{aligned} w_m(\epsilon) &\le \Big| \int_{E_m + y_0} g(x)dx - \int_{E_m} g(x)dx \Big| \\ &\le \mu |y_0|^2 = \Big(||D^2 g||_{L^1(E_m)} + m\frac{1}{6} \Big) (\frac{\epsilon m}{a_{m_*}})^2. \end{aligned}$$

现在假设 $g \in W^{2,\ \infty}_{loc}$，$|y_0| \le q$，并设 $w_{x,\ y_0}$ 满足以下条件（根据中值定理）：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{E_m} (\langle D^2 g(x) y_0, y_0 \rangle + 2o_x(|y_0|^2))dx &= \frac{1}{2}|y_0|^2 \int_{E_m} \langle D^2 g(w_{x,y_0}) \frac{y_0}{|y_0|}, \frac{y_0}{|y_0|} \rangle dx \\ &\le \frac{1}{2} ||D^2 g||_{L^\infty(a_q E_m)} m |y_0|^2. \end{aligned}$$

特别地，

$$w_m(\epsilon) \le \Big| \int_{E_m + y_0} g(x)dx - \int_{E_m} g(x)dx \Big| \le \mu |y_0|^2 \le \frac{1}{2} ||D^2 g||_{L^\infty(a_q E_m)} m (\frac{\epsilon m}{a_{m_*}})^2.$$

注意，若 m 足够小且 f 椭圆的，则 E_m 是凸的，并且在质量意义下与某个缩放后的 Wulff 形状任意接近。因此，根据下式，(vi) 得证：

$$m(\frac{\epsilon m}{a_{m_*}})^2 = m(\frac{\epsilon m}{\bar{C} m^{\frac{n-1}{n}}})^2 = \frac{\epsilon^2}{\bar{C}} m^{1+\frac{2}{n}}.$$

假设 $n = 2$，即使不对 f 作椭圆性假设，凸性仍成立，这尤其证明了 (v)。□

注释 2.10。定理 2.1 中的模量以显式方式计算。特别地，假设 m 足够小，则 $f(w) = 1$，若 $w \in \mathbb{S}^{n-1}$，$g(|x|) = |x|^2$，$w_m(\epsilon) = a_1 \epsilon^2 m^3$。因此，$\epsilon$ 依赖关系是最优的。还要注意，在假设 g 为二次函数时，(v) 中的 m 依赖关系几乎是尖锐的（还要注意，系数是质量的函数，在此处可见非平凡的依赖关系，因此这一项很可能产生关于 m 的尖锐函数）。假设$g(x) = |x|$，$f(w) = 1$，若 $w \in \mathbb{S}^{n-1}$，$w_m(\epsilon) = \overline{a_1} \epsilon^2 m^{3-\frac{1}{n}}$。

注释 2.11. 假设 $n = 2$ 且 g 是严格凸的，那么凸集的集合中的极小化子在忽略零测集的意义下是唯一的（一个

证明使用位移插值 [McC98]）。此外，假设当 E 有界、凸时， $0 \notin E$、$|E \cap \{g > 0\}| > 0$,

$$\int_E \nabla g(x) dx \neq 0,$$

任意 E_m 都是凸的，并且除去零测集外唯一 [Ind21a]。

2.2. 曲率估计。本节讨论 $\mathbb{R}^3$. 中光滑极小化子的若干曲率估计。该技术是全新的，我们将其应用于径向势函数一般扰动的定量稳定性，从而在大质量范围内得到凸性。令 K 为高斯曲率，则有

$$2K = 2\kappa_1\kappa_2 = (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2 = H^2 - |A|^2, \tag{16}$$

其中 H 是平均曲率， A 是第二基本形式， κ_1、 κ_2是主曲率。假设 f 是表面张力，则各向异性平均曲率为

$$H_f = \operatorname{trace}\Big(D^2 f A\Big).$$

一阶变分公式意味着

$$H_f = \mu - g,$$

其中

$$\mu = \frac{(n-1)\mathcal{F}(E_m) + \int_{\partial^* E_m} g\langle x, \nu_{E_m}\rangle d\mathcal{H}^{n-1}}{n|E_m|}.$$

定理 2.12。假设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是一个光滑的极小化子，且 $D^2 g$在 $\mathbb{R}^3$, $f(w) = 1$ 中有界，当且仅当 $w \in \mathbb{S}^{n-1}$，并且

(i) $\mu - g > 0$ 且较小，(ii) $\frac{|A|^2}{(\mu - g)_2} \backsim 1 + \epsilon$，其中 $\epsilon > 0$,

那么存在一个单调不减函数 $\sigma(t) \gg t$，对于较小的正数 t，使得

$$0 < \sigma(\mu - g) \leq |\nabla_\Sigma g|^2$$

这意味着 Σ 是凸的。

注 2.13。上述条件 (ii) 意味着

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 \sim (1+\epsilon)(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2K),$$

换言之

$$\frac{-2K}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \sim \frac{\epsilon}{1+\epsilon}.$$

注意，我们始终有不等式 $\frac{|2K|}{\kappa_1^2+\kappa_2^2} \leq 1$。

证明。引入函数

$$v = H^\alpha(H^2 - |A|^2),$$

其中 α 是一个将在下文选取的负数。设 $\min_{x\in\Sigma} v(x) < 0$，则存在一点 $x_0 \in \Sigma$ 使得该最小值能够取到。我们在 x_0 处选取一个局部坐标系，使得 A 为对角矩阵，即 $A = \mathrm{diag}[\kappa_1, \kappa_2]$，其中 κ_1、κ_2 是 Σ 在 x_0处的主曲率。将 Laplace-Beltrami 算子写成局部坐标形式 $\Delta_\Sigma v = g^{ij}(\partial_i\partial_j v - \Gamma_{ij}^k\partial_k v)$，其中 Γ_{ij}^k 为 Christoffel 符号。由此可知，在 x_0处，由于 v 的梯度为零且度量张量 g_{ij} 为单位矩阵， $\Delta_\Sigma v \geq 0$，因为根据假设， x_0 是 v的局部极小点。因此，利用 Simons 恒等式可得

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma v &= \Delta_\Sigma(H^{2+\alpha} - H^\alpha|A|^2) \\
&= (2+\alpha)(1+\alpha)H^\alpha|\nabla_\Sigma H|^2 + (2+\alpha)H^{\alpha+1}\Delta_\Sigma H \\
&\quad -H^\alpha\left[2|\nabla_\Sigma A|^2 - 2|A|^4 + 2\langle A, D^2H\rangle + 2H\mathrm{Trace}(A^3)\right] \\
&\quad -2(\alpha H^{\alpha-1}\nabla_\Sigma H\cdot\langle 2A, \nabla_\Sigma A\rangle) \\
&\quad -|A|^2(\alpha(\alpha-1)H^{\alpha-2}|\nabla_\Sigma H|^2 + \alpha H^{\alpha-1}\Delta H).
\end{aligned}$$

接下来，注意到在 x_0处 $\nabla_\Sigma v = 0$ ，因此

$$(\alpha+2)H^{\alpha+1}\nabla_\Sigma H - \alpha H^{\alpha-1}\nabla_\Sigma H|A|^2 = 2H^\alpha\langle A, \nabla_\Sigma A\rangle,$$

或者等价地

$$2H^\alpha\langle A, \nabla_\Sigma A\rangle = \nabla_\Sigma H\left(2H^{\alpha+1} + \alpha H^{\alpha-1}(H^2 - |A|^2)\right) = \nabla_\Sigma H\left(2H^{\alpha+1} + \alpha\frac{v}{H}\right)$$

由此得到

$$2\alpha H^{\alpha-1}\nabla_\Sigma H\cdot\langle A, \nabla_\Sigma A\rangle = \frac{\alpha}{H}|\nabla_\Sigma H|^2\left(2H^{\alpha+1} + \alpha\frac{v}{H}\right). \tag{17}$$

此外,

$$\begin{aligned}
|\nabla_\Sigma A|^2 &\geq \frac{|\langle A, \nabla_\Sigma A\rangle|^2}{|A|^2} \\
&= \frac{1}{4H^{2\alpha}|A|^2}|\nabla_\Sigma H|^2\left(2H^{\alpha+1} + \alpha\frac{v}{H}\right)^2.
\end{aligned}$$

最后，注意到

$$\mathrm{Trace}(A^3) = \kappa_1^3 + \kappa_2^3 = (\kappa_1+\kappa_2)(\kappa_1^2 - \kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2) = H(|A|^2 - K).$$

重新排列各项后，可得 v 满足以下方程

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Delta_\Sigma(H^{2+\alpha} - H^\alpha|A|^2) \\
&\leq (2+\alpha)(1+\alpha)H^\alpha|\nabla_\Sigma H|^2 + (2+\alpha)H^{\alpha+1}\Delta_\Sigma H \\
&\quad -H^\alpha\left[\frac{1}{2H^{2\alpha}|A|^2}|\nabla_\Sigma H|^2\left(2H^{\alpha+1}+\alpha\frac{v}{H}\right)^2 - 2|A|^4 - 2|A|\|D^2H\| + 2H^2(|A|^2-K)\right] \\
&\quad -\frac{2\alpha}{H}|\nabla_\Sigma H|^2\left(2H^{\alpha+1}+\alpha\frac{v}{H}\right) \\
&\quad -|A|^2\left(\alpha(\alpha-1)H^{\alpha-2}|\nabla_\Sigma H|^2 + \alpha H^{\alpha-1}\Delta H\right).
\end{aligned}$$

由于 $K<0$ 在 x_0 处，我们可以将其从等式中约去，随后可将所得不等式写成以下形式

$$0 \leq J_1 + J_2 + J_3,$$

其中

$$\begin{aligned}
J_1 &= (2+\alpha)H^{\alpha+1}\Delta_\Sigma H + 2H^\alpha|A|\|D^2H\| - \alpha|A|^2H^{\alpha-1}\Delta H, \\
J_2 &= (2+\alpha)(1+\alpha)H^\alpha|\nabla_\Sigma H|^2 - \frac{H^\alpha}{2H^{2\alpha}|A|^2}|\nabla_\Sigma H|^2\alpha^2\frac{v^2}{H^2} \\
&\quad -\frac{2\alpha^2}{H}|\nabla_\Sigma H|^2\frac{v}{H} - \alpha(\alpha-1)|A|^2H^{\alpha-2}|\nabla_\Sigma H|^2, \\
J_3 &= -\frac{4\alpha}{H}|\nabla_\Sigma H|^2H^{\alpha+1} - \frac{H^\alpha}{2H^{2\alpha}|A|^2}|\nabla_\Sigma H|^2\left(4H^{2\alpha+2}+4H^{\alpha+1}\alpha\frac{v}{H}\right) \\
&\quad +2H^\alpha(|A|^4 - H^2|A|^2).
\end{aligned}$$

为方便起见，令 $\omega = \frac{|A|^2}{H^2}$，通过另选一个 ϵ 使 $\omega = 1+\epsilon$，我们得到

$$J_1 = H^{\alpha+1}\left[(2+\alpha) + \sqrt{\omega} - \alpha\omega\right]O(\|D^2H\|).$$

同样，

$$\begin{aligned}
J_2 &= H^\alpha|\nabla_\Sigma H|^2\left[\alpha^2+3\alpha+2-\alpha^2\frac{1}{2\omega}(1-\omega)^2 + 2\alpha^2|1-\omega| - \alpha(\alpha-1)\omega\right] \\
&= H^\alpha|\nabla_\Sigma H|^2\left[\alpha^2+3\alpha+2-\alpha^2\frac{\epsilon^2}{2(1+\epsilon)} + 2\alpha^2\epsilon - (\alpha^2-\alpha)(1+\epsilon)\right]
\end{aligned}$$

其中我们使用了 $v = H^{\alpha+2}(1-\omega)$，并且 α 为负值。最后，

$$\begin{aligned} J_3 &= -\frac{4\alpha}{H}|\nabla_\Sigma H|^2 H^{\alpha+1} - \frac{H^\alpha}{2H^{2\alpha}|A|^2}|\nabla_\Sigma H|^2\left(4H^{2\alpha+2} + 4H^{\alpha+1}\alpha\frac{v}{H}\right) \\ &\quad +2H^\alpha(|A|^4 - H^2|A|^2) \\ &= -4\alpha H^\alpha|\nabla_\Sigma H|^2 - 2H^\alpha\frac{|\nabla_\Sigma H|^2}{\omega} + 2\alpha H^\alpha\frac{|\nabla_\Sigma H|^2}{\omega}|1-\omega| \\ &\quad +2H^{\alpha+4}(\omega^2-\omega) \\ &= H^\alpha|\nabla_\Sigma H|^2\left[-4\alpha - \frac{2}{\omega} + 2\alpha\frac{|1-\omega|}{\omega}\right] + 2H^{\alpha+4}(\omega^2-\omega) \\ &= H^\alpha|\nabla_\Sigma H|^2\left[-4\alpha - \frac{2}{1+\epsilon} + 2\alpha\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right] \\ &\quad +2H^{\alpha+4}(\omega^2-\omega). \end{aligned}$$

根据假设，ω 有界，因此对于最后一项，我们有 $2H^{\alpha+4}(\omega^2-\omega) = O(H^{\alpha+4})$，从而

$$J_2 + J_3 = -H^\alpha|\nabla_\Sigma H|^2 q(\epsilon,\alpha) + O(H^{\alpha+4}),$$

其中

$$\begin{aligned} q(\epsilon,\alpha) &= -\left[\alpha^2+3\alpha+2-\alpha^2\frac{\epsilon^2}{2(1+\epsilon)} + 2\alpha^2\epsilon - (\alpha^2-\alpha)(1+\epsilon)\right] \\ &\quad -\left[-4\alpha - \frac{2}{1+\epsilon} + 2\alpha\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right] \\ &= -\left[2-\alpha^2\frac{\epsilon^2}{2(1+\epsilon)} + \alpha^2\epsilon + \alpha\epsilon\right] \\ &\quad +\frac{2-2\alpha\epsilon}{1+\epsilon} \\ &= \frac{1}{2(1+\epsilon)}\left[-4-4\epsilon+\alpha^2\epsilon^2 - 2\alpha^2\epsilon - 2\alpha^2\epsilon^2 - 2\alpha\epsilon - 2\alpha\epsilon^2 + 4 - 4\alpha\epsilon\right] \\ &= \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}\left[-4-\alpha^2\epsilon - 2\alpha^2 - 6\alpha - 2\alpha\epsilon\right]. \end{aligned}$$

综合以上结果，并注意到平均曲率为

$$H = \mu - g,$$

尤其是，

$$|\nabla_\Sigma H| = |\nabla_\Sigma g|,$$

我们可以看到

$$\begin{aligned} 0 \leq J_1 + J_2 + J_3 &\leq H^{\alpha+1}\left[(2+\alpha) + \sqrt{\omega} - \alpha\omega\right] O(\|D^2 H\|) \\ &\quad -H^{\alpha}|\nabla_{\Sigma} H|^2 q(\epsilon, \alpha) + O(H^{\alpha+4}) \\ &\leq H^{\alpha+1}\left(O(1) - \frac{\sigma(H)}{H} c_0 + O(H^3)\right) < 0 \end{aligned}$$

若 $\lim_{t\to 0^+} \sigma(t)\, t \overset{=}{\underset{\infty}{}}$ 且 $c_0 > 0$成立。注意，例如选取 $\alpha = -1$，便可以选择满足以下条件的 c_0

$$\begin{aligned} q(\epsilon, -1) &= \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}\left[-4 - \epsilon - 2 + 6 + 2\epsilon\right] \\ &= \frac{\epsilon^2}{2(1+\epsilon)} = c_0. \end{aligned}$$

□

注 2.14. 回想一下，平均曲率为

$$H = \mu - g$$

并假设 $g(x) = g(|x|)$ 是非递减的，则定理 2.1 给出：

$$\begin{aligned} a &= \left[\frac{3m}{4\pi}\right]^{\frac{1}{3}}, \\ \partial E_m &= \Sigma, \\ |E_m| &= m; \end{aligned}$$

特别地，请注意，得益于

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \frac{2}{a^2} \\ H &= \frac{2}{a}, \end{aligned}$$

当 g_t 是 g 的扰动，且满足 $|\nabla_{\Sigma_t} g_t| > 0$ 时， Σ_t 是球面的一个变分（若 $m > m_1$ ），其中 $m_1 > 0$ 是一个可计算的常数。特别地，通过连续性论证，便可推出扰动具有凸性（在一般情况下，扰动未必是径向的/凸的）。若 m 较大，且假设势函数的次水平集为凸集，则凸性已有定论；不过，前述结果给出了一个显式界限，并且也说明次水平集一般的势函数可能具有凸性。

注 2.15. 对于一般的 f，我们有 $H_f := \langle D^2 f, A\rangle = \mu - g$（假设系统中 A 为对角矩阵）。假设 $H_f > 0$ 足够小，则只要 $D^2 H$ 保持有界（用于估计 J_1），且 H 为小的正数，我们就可以将先前的估计推广到非恒定的 f。

致谢。第一作者作为访问学者期间，部分研究工作在爱丁堡大学完成。谨此致谢所获支持。

References

[Bre91] Y. Brenier，《向量值函数的极分解与单调重排》，《纯粹与应用数学通讯》44（4）（1991），375–417。[Cur85] P. Curie，《论晶体的形成及其不同晶面的毛细常数》，《法国矿物学与结晶学会通报》8（1885），145–150。[DPG] G. De Philippis 和 M. Goldman，《运用双点函数方法研究凸势中的液滴连通性》，arXiv（2018）。[FI13] Alessio Figalli 和 Emanuel Indrei，《凸锥内相对等周不等式的尖锐稳定性结果》，《几何分析杂志》23（2013），第2期，938–969。MR 3023863[FM91] Irene Fonseca 和 Stefan M¨uller，《Wulff定理的唯一性证明》，《爱丁堡皇家学会学报A辑》119（1991），第1–2期，125–136。MR 1130601[FM11] A. Figalli 和 F. Maggi，《小质量情形下液滴与晶体的形状》，《有理力学与分析文档》201（2011），第1期，143–207。MR 2807136[FMP08] N. Fusco、F. Maggi 和 A. Pratelli，《尖锐定量等周不等式》，《数学年刊》（第二辑）168（2008），第3期，941–980。MR 2456887[FMP10] A. Figalli、F. Maggi 和 A. Pratelli，《定量等周不等式的质量输运方法》，《数学发明》182（2010），第1期，167–211。MR 2672283[FZ22] Alessio Figalli 和 Yi Ru-Ya Zhang，《晶体范数下Wulff不等式的强稳定性》，《纯粹与应用数学通讯》75（2022），第2期，422–446。[Gib78] J.W. Gibbs，《论非均质物质的平衡》，《文集》第1卷（1878）。[Ind20] Emanuel Indrei，《凸强制背景下平面晶体的平衡形状为凸集》，arXiv:2008.02238（2020）。[Ind21a] ———，《论晶体的平衡形状》，arXiv:2008.02238，在评审中（2021）。[Ind21b] ———，《凸锥中的加权相对等周不等式》，《应用分析方法》27 28（2021），第1期，001–014。[McC98] Robert J. McCann，《外场中平面晶体的平衡形状》，《数学物理通讯》195（1998），第3期，699–723。MR 1641031[Tay78] Jean E. Taylor，《晶体变分问题》，《美国数学会通报》84（1978），第4期，568–588。MR 493671[Wul01] G. Wulff，《关于晶面生长与溶解速度的问题》，《晶体学杂志》34（1901），449–530。

Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA.

School of Mathematics, The University of Edinburgh, Peter Tait Guthrie Road, EH9 3FD Edinburgh, UK.