arXiv:2304.01867v1 [math.AP] 4 Apr 2023

关于三次谐波产生的 NLS 系统中孤立波的稳定性

ABBA RAMADAN 和 ATANAS G. STEFANOV

摘要。我们研究了三次谐波产生的 NLS 系统，该系统最初发表于 [12]。我们关注孤波解及其稳定性性质。Oliveira 和 Pastor 最近的工作 [10], 讨论了整体适定性与有限时间爆破的问题，以及动力学的其他方面。这些作者还通过山路/Nehari 流形方法，在适当的参数范围内构造了孤波解。具体而言，只有当空间维数$n = 1,2,3$ 时，这些波才存在。他们还针对这些波建立了一些稳定性/不稳定性结果。

在这项工作中，我们系统地构造并研究这一重要模型的孤立波。我们在尽可能大的参数空间中构造这些波，并对其稳定性进行完整分类。在一维情形下，我们证明了其稳定性；而在$n = 2,3$ 维情形下，它们通常在谱意义下不稳定，只有一个小范围例外，在该范围内它们确实具有额外的伪共形对称性。

最后，我们讨论爆破解的不稳定性。在$n = 3$的情形下，对于更为严格的参数集合，我们采用维里恒等式方法，按照 Ohta 的思路 [9]，推导出强不稳定性。在$n = 2$中，通过质量守恒和能量守恒，维里恒等式将问题归结为初始数据。我们的结论与标量三次聚焦型非线性薛定谔方程的经典结果非常相似，但证明要复杂得多。

1. 引言

本文研究如下非线性薛定谔方程组

$$\begin{cases} i u_t + \Delta u - u + (\frac{1}{9}|u|^2 + 2|v|^2)u + \frac{1}{3}\bar{u}^2 v = 0 \\ i\sigma v_t + \Delta v - \mu v + (9|v|^2 + 2|u|^2)v + \frac{1}{9}u^3 = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\mu, \sigma > 0$。该系统源于非线性光学应用。具体而言，该模型在 [12], 中提出，其中频率为 ω 的单色光束在立方（克尔）介质中传播，并与其三次谐波（频率为 3ω）发生相互作用。在这种情形下，考虑电场E，它满足麦克斯韦方程。

记U和V为分别对应频率 ω、3ω的模态振幅，则通过麦克斯韦方程的包络近似可得到一个与（1.1）非常相似的方程组。经过重新缩放和无量纲化处理，可得到模型（1.1）。更多细节请参阅 [12] 以及 [10]。

关于系统 (1.1)，还有一些值得注意的细节如下：它是一个哈密顿系统，因此由哈密顿函数生成，并且至少在形式上守恒能量

日期：2023年4月5日。2010年数学主题分类。主要分类 35Q60、35Q41；35Q51次要分类 35C07。关键词和短语。非线性薛定谔方程组、孤立波、谱稳定性、爆破不稳定性。Stefanov 部分获得 NSF-DMS # 1908626 和 NSF-DMS # 2204788 的资助。

和质量。守恒量的形式为

$$E(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+|u|^2+\mu|v|^2)dx-\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{36}|u|^4+\frac{9}{4}|v|^4+|u|^2|v|^2+\frac{1}{9}\Re(\bar{u}^3v)dx$$

$$M(u,v) = \int_{\mathbf{R}^n}(|u|^2+3\sigma|v|^2)dx$$

其中 u、v 是方程 (1.1) 的经典解。

我们的目标是为系统 (1.1) 构造各种孤立波，并研究它们的稳定性。为此，我们寻求如下形式的解：$u=e^{i\omega t}P$，$v=e^{3i\omega t}Q$。请注意，这种时间依赖形式直接对应于该模型；该模型旨在描述三次谐波的产生。从数学上看，这一内在性质体现为模型的这种特定对称性，它将时间依赖项分离出来，并自然导出以下椭圆型系统

$$\begin{cases}-\Delta P+(\omega+1)P-\left[\frac{1}{9}P^3+2Q^2P+\frac{1}{3}P^2Q\right]=0\\ -\Delta Q+(\mu+3\sigma\omega)Q-\left[9Q^3+2P^2Q+\frac{1}{9}P^3\right]=0.\end{cases}\tag{1.2}$$

首先，我们陈述以下所谓的 Pohozaev 恒等式，这些恒等式已在先前的论文中推导得出[10]。

引理 1. （*Pohozhaev* 恒等式）
假设 (1.2) 有解 $(P,Q)\in H^1(\mathbf{R}^n)\times H^1(\mathbf{R}^n))$。 则有以下恒等式成立 :

$$\int\left(|\nabla P|^2+(\omega+1)P^2\right)dx=\int\left(\frac{1}{9}P^4+2P^2Q^2+\frac{1}{3}P^3Q\right)dx,\tag{1.3}$$

$$\int(|\nabla Q|^2+(\mu+3\sigma\omega)Q^2)dx=\int\left(9Q^4+2P^2Q^2+\frac{1}{9}P^3Q\right)dx.\tag{1.4}$$

此外，

$$(4-n)\int(|\nabla Q|^2+|\nabla P|^2)dx=n(\omega+1)\int P^2dx+n(\mu+3\sigma\omega)\int Q^2dx.\tag{1.5}$$

注意，对于 $n\geq 4$ 以及 $\omega>\max\{-1,-\frac{\mu}{3\sigma}\}$，该系统的孤立波在 $(H^1(\mathbf{R}^n)\times H^1(\mathbf{R}^n))$ 中不存在。接下来，我们讨论方程 (1.1) 在驻波$u=e^{i\omega t}P$、$v=e^{3i\omega t}Q$附近的线性化。

1.1. 线性化系统。 我们采用标准的线性化过程，即令$u=e^{i\omega t}[P+\phi]$、$v=e^{3i\omega t}[Q+\psi]$，代入方程 (1.1) 并忽略高阶项 $O(\phi^2,\psi^2,\psi\phi)$，得到线性化系统。经过 $\phi=(\mathrm{R}\phi,\mathrm{I}\phi)=:(\phi_1,\phi_2)$ 和 $\psi=(\mathrm{R}\psi,\mathrm{I}\psi)=:(\psi_1,\psi_2)$ 后，可将其写为

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \psi_1\\ \phi_2\\ \psi_2\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\ 0&0&0&\frac{1}{\sigma}\\ -1&0&0&0\\ 0&-\frac{1}{\sigma}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathscr{L}_1&A&0&0\\ A&\mathscr{L}_3&0&0\\ 0&0&\mathscr{L}_2&B\\ 0&0&B&\mathscr{L}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \psi_1\\ \phi_2\\ \psi_2\end{pmatrix}.\tag{1.6}$$

这里，我们引入了以下标量薛定谔算子

$$\mathscr{L}_1 = -\Delta+(\omega+1)-\left(\frac{P^2}{3}+2Q^2+\frac{2}{3}PQ\right),\ \mathscr{L}_2=-\Delta+(\omega+1)-\left(\frac{P^2}{9}+2Q^2+\frac{2}{3}PQ\right),$$

$$\mathscr{L}_3 = -\Delta+(\mu+3\sigma\omega)-(27Q^2+2P^2),\ \mathscr{L}_4=-\Delta+(\mu+3\sigma\omega)-(9Q^2+2P^2)$$

势为 $A=-4PQ-P_3^2, B=-P_3^2$。引入算子 $\mathscr{L}_+, \mathscr{L}_-$ 如下

$$\mathscr{L}_+ := \begin{bmatrix} \mathscr{L}_1 & A \\ A & \mathscr{L}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{L}_- := \begin{bmatrix} \mathscr{L}_2 & B \\ B & \mathscr{L}_4 \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

注意，直接观察可得 $\mathscr{L}_-\begin{pmatrix} P \\ 3Q \end{pmatrix}=0$。此外，对 (1.2) 求空间导数可得

$$\mathscr{L}_+\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}=0. \tag{1.8}$$

鉴于 (1.1) 的平移不变性和调制不变性，这并不令人意外。此外，令 $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \psi_1 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \to e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = vvv: e^{\lambda t \to}$

v，可得到以下定常特征值问题

$$\mathscr{J}\mathscr{L}\vec{v}=\lambda\vec{v}. \tag{1.9}$$

Here

$$\mathscr{J} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sigma} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{L} := \begin{pmatrix} \mathscr{L}_+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{L}_- \end{pmatrix}.$$

按照惯例，如果特征值问题 (1.9) 不存在解 $(\lambda, \vec{v}) : \mathrm{R}\lambda > 0, \vec{v} \in Dom(\mathscr{L}) = (H^2(\mathbf{R}^n))^4$，则称时间周期波 $(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 谱稳定 。

1.2. **主要结果：存在性**。 我们的第一组结果讨论（1.2）适当解的存在性。我们将至少提供两种构造（1.2）解的方法，二者本质上都是变分方法。

定理 1. 设 $1 \le n \le 3, \sigma > 0$, 且 $\omega > \max(-1, -\frac{\mu}{3\sigma})$。则存在钟形且指数衰减的解 $(P,Q) \in (H^1(\mathbf{R}^n) \times H^1(\mathbf{R}^n))$，满足(1.2)。此外，自伴线性化算子 $\mathscr{L}_\pm$ 满足以下谱性质： $\mathscr{L}_- \ge 0$，而 $\mathscr{L}_+$ 恰有一个负特征值。

注： 请注意，条件 $\omega > \max(-1, -\frac{\mu}{3\sigma})$, 且 $1 \le n \le 3$ 是存在满足（1.2）的局域函数对 P,Q 所必需的。

接下来，我们将给出 (1.2) 的解（P,Q）的另一种构造，即所谓的归一化波。这类波仅在 $n=1$ 的情况下存在。这些解在几个方面颇为特殊，后文将对此加以说明。

定理 2. 设 $n=1, \sigma > 0$。那么，对于每个 $\lambda > 0$，存在 $\omega = \omega_\lambda >: \omega > \max(-1, -\frac{\mu}{3\sigma})$ 以及一对钟形函数 (P,Q): $\int_{\mathbb{R}}(P^2(x) + 3\sigma Q^2(x))dx = \lambda$，使得(1.2) 成立。此外， $\mathscr{L}_- \ge 0$，而 $n(\mathscr{L}_+) = 1$。事实上，

$$\langle \mathscr{L}_+ h, h\rangle \ge 0, \forall h \perp \begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}.$$

相应的波 $(e^{i\omega_\lambda t}P, e^{3i\omega_\lambda t}Q)$ 是谱稳定的。

我们的下一个结果讨论（1.2）的一般解的稳定性。

1.3. 主要结果：谱稳定性。 我们从高维情形 $n > 1$ 开始，其中大多数孤子都不稳定。

定理3。 令 $\sigma > 0$，$n = 2$，3，$\omega > \max(-1, -\frac{\mu}{3\sigma})$。假设 $(P, Q) \in (H^1(\mathbf{R}^n) \times H^1(\mathbf{R}^n))$ 满足(1.2)，并具有以下谱性质：$\mathscr{L}_- \geq 0$，$\mathscr{L}_+$ 恰有一个负特征值。

对于 $n = 3$，解 $(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 谱不稳定。对于 $n = 2$，$\mu \neq 3\sigma$，解$(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 谱不稳定。

对于 $n = 2$，$\mu = 3\sigma$，解 $(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 事实上是谱稳定的。

备注：

- 性质 $\mathscr{L}_- \geq 0$ 可由 $\mathscr{L}_-$ 的 Perron-Frobenius 性质轻易推出，只需假设 $P > 0$，$Q > 0$。事实上，该条件对于 $\mathscr{L}_- \geq 0$ 也是必要的。
- 对于定理 1 中构造的变分解，条件$n(\mathscr{L}_+) = 1$ 成立，但这些解不一定要通过变分方法或某种特定的变分方法构造。
- 在$n = 2, \mu = 3\sigma$ 的情形下，该解的谱稳定性机制与二维三次非线性薛定谔方程中孤子的稳定性机制相似。具体而言，相关特征值问题中零特征值的代数重数恰为八，而一般情形下的重数[1]为六。

1.4. 主要结果：爆破解的不稳定性。 接下来，我们给出强不稳定性的定义，它也称为爆破解的不稳定性。

定义 1. 若对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $(u_0, v_0) \in (H^1(R^n) \times H^1(R^n))$，使得 $k(u_0, v_0) - (P,Q)k_{(H^1(R^n)\times H^1(R^n))} < \epsilon$，且以 $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ 为初值的方程 *(1.1)* 的解 $(u(t), v(t))$ 在有限时间内爆破，则称 $(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 强不稳定。

定理 4. 设 $\sigma = 3$、$\mu = 3\sigma$ 和 $n = 2, 3$, $\omega > \max(-1, -\frac{\mu}{3\sigma})$。假设 $(P,Q) \in (H^1(\mathbf{R}^n) \times H^1(\mathbf{R}^n))$ 满足 (1.2)，并且它们还是某个约束变分问题的极小元，见下文命题 *2*。则 $(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 是方程 (1.1) 的孤波解，且强不稳定。

我们现在对文章的安排作如下说明。在第2节中，我们通过 Weinstein 泛函方法，在所有相关维数$n = 1$、2、3中构造孤立波。我们还将展示线性化算子 $\mathscr{L}_\pm$的一些相关谱性质。此外，仅在维数$n = 1$ 下构造归一化波，因为只有这种情形下才可能做到这一点。特别地，我们证明这些波是谱稳定的。在第3节中，我们严格证明$n = 2$、3维情形下波的不稳定性。最后，在第4节中，我们借助 Ohta 思路下的维里恒等式证明，二维和三维情形下谱不稳定的波实际上是强不稳定的。

2. 波的存在性与谱性质 我们先介绍一些预备知识。

[1]对于任意p幂次非线性$p \neq 3$

2.1. **预备知识**。 我们使用标准函数空间，例如L^p、W^{sp}等。鉴于钟形解尤为重要，我们先介绍一些标准内容。

首先，众所周知，对于每个 $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 函数 f，都存在一个递减重排 f^*。更准确地说，存在唯一的函数 $f^* \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，使得对于每个 $\lambda > 0$，f 和 f^* 等测度（也就是说，对于每个 $\lambda > 0$，$|\{x : |f(x)| > \lambda\}| = |\{x : |f^*(x)| > \lambda\}|$），并且 $f^*(x) = q(|x|)$，其中 $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个非递增函数。接下来，我们引入钟形函数的概念。

定义 2. 我们称函数 $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ 为钟形函数，如果 $f = f^*$。

对于 p: $1 \le p \le \infty$，有 $\|f\|_{L^p} = \|f^*\|_{L^p}$。此外，我们记录标准的重排不等式和塞格ő不等式。

$$\int_{\mathbf{R}^n} f g\,dx \le \int_{\mathbf{R}^n} f^* g^*\,dx \tag{2.1}$$

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \ge \|\nabla f^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \tag{2.2}$$

2.2. **通过温斯坦泛函证明波的存在性**。接下来，我们采用变分方法来构造波。目标是找到一种有效的方法，构造满足 (1.2) 的波，必要时可进行缩放等简单变换。由于我们希望涵盖更广参数范围内的存在性理论，因此固定 $\alpha, \beta > 0$，并考虑以下温斯坦泛函

$$W_{\alpha,\beta}[u,v] := \frac{\int_{\mathbf{R}^n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + \alpha|u|^2 + \beta|v|^2)dx}{\left(\int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{36}|u|^4 + \frac{9}{4}|v|^4 + |u|^2|v|^2 + \frac{1}{9}\Re(\bar{u}^3 v dx)\right)^{\frac{1}{2}}} \to \min \tag{2.3}$$

其中，最小值是在 u、$v \in \mathscr{S}$ 满足：$(u, v) \neq (0,0)$ 的条件下取得的。注意泛函 $W_{\alpha,\beta}$ 的齐次性，即对每个 $a \neq 0$，都有 $W_{\alpha,\beta}[au, av] = W_{\alpha,\beta}[u, v]$。因此，显然，求解无约束变分问题 (2.3) 等价于求解以下约束最大化问题

$$\begin{cases} J[u,v] := \int_{\mathbf{R}^n} \left(\frac{1}{36}|u|^4 + \frac{9}{4}|v|^4 + |u|^2|v|^2 + \frac{1}{9}\Re(\bar{u}^3 v)\right) dx \to \max \\ I[u,v] := \int_{\mathbf{R}^n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + \alpha|u|^2 + \beta|v|^2)dx = 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

我们的主要存在性结果如下。

命题 1。设 $\alpha, \beta > 0$ 和 $1 \le n \le 3$。那么，变分问题 (2.4) 有解 (U, V)，且该解必为钟形。此外，它满足欧拉-拉格朗日方程

$$\begin{cases} -\Delta U + \alpha U - C(\alpha,\beta)\left[\frac{1}{9}U^3 + 2V^2U + \frac{1}{3}U^2V\right] = 0 \\ -\Delta V + \beta V - C(\alpha,\beta)\left[9V^3 + 2U^2V + \frac{1}{9}U^3\right] = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

对于某个正标量 $C(\alpha,\beta)$。最后，线性化算子

$$L_+ := \begin{bmatrix} L_1 & C(\alpha,\beta)A \\ C(\alpha,\beta)A & L_3 \end{bmatrix}, L_- := \begin{bmatrix} L_2 & C(\alpha,\beta)B \\ C(\alpha,\beta)B & L_4 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

其中

$$L_1 := -\Delta + \alpha - C(\alpha,\beta)(\frac{U^2}{3} + 2V^2 + \frac{2}{3}UV),\ L_3 := -\Delta + \beta - C(\alpha,\beta)(U^2 + 27V^2)$$

（类似地，L_2,L_4）满足：对于每个测试函数 $h : h \perp \left[(-\Delta+\alpha)U(-\Delta+\beta)V\right]$，则 $\langle \mathscr{L}_+ h, h\rangle \geq 0$. 证明。 不难看出，变分问题（ 2.4 ）与下面的问题等价，并且如果有解，两者的解也相同

$$\begin{cases} \int_{\mathbf{R}^n} \left(\frac{1}{36}|u|^4+\frac{9}{4}|v|^4+|u|^2|v|^2+\frac{1}{9}\Re(\bar{u}^3 v)\right)dx \to \max \\ \int_{\mathbf{R}^n} (|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+\alpha|u|^2+\beta|v|^2)dx \leq 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

事实上，我们断言，如果 (u, v) 是满足 $\int(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+\alpha|u|^2+\beta|v|^2)dx < 1$,$\mathbf{R}^n$ 的函数，我们可以取 $(\tilde{u}, \tilde{v}) := a(u, v)$，其中 $a = \left(\int_n R\,(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+\alpha|u|^2+\beta|v|^2)d\,x\right)^{-\frac{1}{2}} > 1$。显然仍满足约束 $I[\tilde{u}, \tilde{v}] = 1$，而 $J[\tilde{u}, \tilde{v}] = a^4 J[u, v]$，因此它比 (u, v) 更优。

接下来，根据 Hölder 不等式和索伯列夫嵌入可知，对于 $1 \leq n \leq 3$，有

$$J[u,v] \leq C(\|u\|_{L^4}^4+\|v\|_{L^4}^4)) \leq C\|(u,v)\|_{H^{\frac{n}{4}}\times H^{\frac{n}{4}}}^4 \leq C\|(u,v)\|_{H^1\times H^1}^4 \leq C_{\alpha,\beta}(I[u,v])^2.$$

这表明问题 (2.3)（等价地，(2.4)）是适定的，即 .

$$J_{\max} := \sup_{I]u,v]=1} \int_{\mathbf{R}^n} \left(\frac{1}{36}|u|^4+\frac{9}{4}|v|^4+|u|^2|v|^2+\frac{1}{9}\Re(\bar{u}^3 v)\right)dx < \infty$$

定义良好。取一个极大化序列，即 (u_k, v_k)，使得 $J[u_k, v_k] \to J_{\max}$。现在显然，相应的递减重排 u^*k, v^*k 是更好的选择。事实上，由 (2.2) 可得 $I[u^*k, v^*k] \leq I[u_k, v_k] = 1$，而由 (2.1) 可得 $J[u^*k, v^*k] \geq J[u_k, v_k]$。因此，$(u^*k, v^*k)$ 也是一个极大化序列。现在我们证明该序列在 $L^4(R^n) \times L^4(R^n)$ 中是紧的。具体而言，由黎斯-柯尔莫哥洛夫紧性判据，并且由于对于[2]for $1 \leq n \leq 3$，$H^1(R^n) \to L^4(R^n)$，只需验证

$$\lim_{R\to\infty} \sup_k \int_{|x|>R} |u_k^*|^4+|v_k^*|^4 dx = 0. \tag{2.8}$$

这实际上可由钟形性轻易推出，因为对于每个 $M > 1$，以及 $|x| = M$，我们有

$$|u_k^*(x)|^2 \leq \frac{1}{|B_M|}\int_{B_M} |u_k^*(y)|^2 dy \leq CM^{-n}\|u_k^*\|_{L^2}^2 \leq C|x|^{-n},$$

当 $\|u^*k\|^2_{L_2} \leq CI[u^*k、v^*k] = C$时。对$v^*k$也有类似的估计。因此

$$\int_{|x|>R} |u_k^*|^4+|v_k^*|^4 dx \leq C\int_{|x|>R} |x|^{-2n} dx = CR^{-n},$$

由此可得（2.8）。

接下来推导欧拉-拉格朗日方程（2.5）。为此，取任意测试函数$h = [h_1,h_2]$，$\epsilon > 0$我们有

$$J(U+\epsilon h_1, V+\epsilon h_2) = J(U,V)+\epsilon\left(\langle\frac{1}{9}U^3+2UV^2+\frac{1}{3}U^2V, h_1\rangle)+\langle 9V^3+2U^2V+\frac{U^3}{9}, h_2\rangle\right)+$$

$$+ \quad \frac{\epsilon^2}{2}(\langle\left(\frac{U^2}{3}+2V^2+\frac{2}{3}UV\right)h_1, h_1\rangle+\langle(8UV+\frac{2}{3}U^2)h_1, h_2\rangle+\langle\left(27V^2+2U^2\right)h_2, h_2\rangle+O(\epsilon^3).$$

[2]这里是 此处需要$n \leq 3$，因为$n = 4$ 已无法保证嵌入的紧性

同样,

$$I(U+\epsilon h_1, V+\epsilon h_2) = I(U,V) + 2\epsilon\left(\langle -\Delta U + \alpha U, h_1\rangle + \langle -\Delta V + \beta V, h_2\rangle\right)$$
$$+ \quad \epsilon^2\left(\langle(-\Delta+\alpha)h_1, h_1\rangle + \langle(-\Delta+\beta)h_2, h_2\rangle\right) + O(\epsilon^3).$$

现在我们利用函数

$$g(\epsilon) := \frac{J(U+\epsilon h_1, V+\epsilon h_2)}{I^2(U+\epsilon h_1, V+\epsilon h_2)}$$

在 $\epsilon = 0$ 处取得最大值这一事实，因此 $g\prime(\epsilon) = 0$，$g\prime\prime(\epsilon) \le 0$。由此，根据一阶变分可知，$(U,V)$ 在弱意义下满足以下系统

$$\begin{cases} -\Delta U + \alpha U - C(\alpha,\beta)\left[(\frac{1}{9}U^2 + 2V^2)U + \frac{1}{3}U^2 V\right] = 0 \\ -\Delta V + \beta V - C(\alpha,\beta)\left[(9V^2 + 2U^2)V + \frac{1}{9}U^3\right] = 0. \end{cases}$$

其中

$$C(\alpha,\beta) = \frac{1}{4J_{\max}} > 0.$$

考察二阶变分，可得

$$\langle(-\Delta+\alpha - C(\alpha,\beta)(\frac{U^2}{3} + 2V^2 + \frac{2}{3}UV))h_1, h_1\rangle + \langle(-\Delta+\beta - C(\alpha,\beta)(2U^2 + 27V^2))h_2, h_2\rangle$$
$$-C(\alpha,\beta)\langle(8UV + \frac{2}{3}U^2)h_1, h_2\rangle \ge -\frac{1}{2}\left(\langle(-\Delta+\alpha)U, h_1\rangle + \langle(-\Delta+\beta)V, h_2\rangle\right)^2.$$

最后这个不等式可以改写为

$$\langle L_1 h_1, h_1\rangle + \langle L_3 h_2, h_2\rangle \ge -\frac{1}{2}\left(\langle(-\Delta+\alpha)U, h_1\rangle + \langle -\Delta+\beta)V, h_2\rangle\right)^2 =: -\frac{1}{2}\langle T, h\rangle^2.$$

其中$T = \begin{bmatrix} (-\Delta+\alpha)U \\ (-\Delta+\beta)V \end{bmatrix}$。根据上述定义的内积，我们有$\langle \mathscr{L}_+ h, h\rangle \ge 0$。对于$h$：$h \perp T$。

□

根据命题 1，我们可以为这些波（P，Q）表述一个存在性结果，使其满足（1.2）。

命题 2. 假设 $\omega + 1 > 0$，$\mu + 3\sigma\omega > 0$。则存在一对钟形函数(P, Q)，使其满足(1.2)。

证明。取 $\alpha = \omega + 1 > 0$、$\beta = \mu + 3\sigma\omega > 0$，并对这一对应用命题 1。由此构造$U$、$V$，它们呈钟形，并具备命题 1 的陈述和证明中提到的所有附加信息。最后，取

$$P(x) := \sqrt{C(\alpha,\beta)}U(x), Q(x) := \sqrt{C(\alpha,\beta)}V(x). \tag{2.9}$$

□

2.3. 归一化波。 在本节中，我们证明定理 2。为此，对于每个 $\lambda > 0$，我们考虑约束变分问题

$$\begin{cases} E[u,v] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |u|^2 + \mu|v|^2)dx - \int_{\mathbb{R}} F(u,v)dxdx \to \min \\ M(u,v) = \int_{\mathbb{R}}(|u|^2 + 3\sigma|v|^2)dx = \lambda. \end{cases} \tag{2.10}$$

为方便起见，我们在此引入

$$F(u,v) := \frac{1}{36}|u|^4 + \frac{9}{4}|v|^4 + |u|^2|v|^2 + \frac{1}{9}\Re(\bar{u}^3 v). \tag{2.11}$$

由于

$$|\int_{\mathbb{R}} F(u,v)dx| \le C\|(u,v)\|^4_{L^4\times L^4} \le C\|(u,v)\|^4_{H^{\frac{1}{4}}\times H^{\frac{1}{4}}} \le C\|(u,v)\|_{H^1\times H^1}\|(u,v)\|^3_{L^2\times L^2} \le \epsilon\|(\nabla u,\nabla v)\|^2_{L^2\times L^2} + C_{\epsilon,\lambda},$$

对于每个 $\epsilon > 0$，因此取 $\epsilon = \frac{1}{2}$，可得

$$\inf_{M(u,v)=\lambda} E(u,v) \ge -C_{\frac{1}{2},\lambda}.$$

因此，约束变分问题 (4.1) 有下界且适定。接下来，由塞格ő不等式，重排显然使 (4.1) 的值增大，并且

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^2|v|^2 \le \int_{\mathbb{R}} (u^*)^2(v^*)^2, \Re\int_{\mathbb{R}} \bar{u}^3 v dx \le \int_{\mathbb{R}} (u^*)^3 v^* dx$$

由此 $\int F(u,v)dx \le F(u^*, v^*)dx$。因此，不失一般性，我们可以假设问题 (4.1) 是在钟形函数上提出的。特别地，由于约束$M(u, v) = \lambda$,

$$|u(x)| \le C\lambda|x|^{-1}, |v(x)| \le C\lambda|x|^{-1}.$$

现在利用索伯列夫嵌入和里斯–科尔莫哥洛夫紧性判据，很容易得到 (4.1) 的极小化序列在L^2 中的紧性，因此，这样一个序列的（强L^2）极限，记作（P，Q），就是 (4.1) 的一个解。

接下来，我们推导欧拉–拉格朗日方程。为此，引入一对测试函数$h = (h_1,h_2)$，并考虑一个标量函数，

$$g(\epsilon) := E\left(\frac{\sqrt{\lambda}(P+\epsilon h_1)}{\Xi(\epsilon)}, \frac{\sqrt{\lambda}(Q+\epsilon h_2)}{\Xi(\epsilon)}\right)$$

其中 $\Xi(\epsilon)=\sqrt{\mathrm{k}P+\epsilon h_1\mathrm{k}^2+3\sigma\mathrm{k}Q+\epsilon h_2\mathrm{k}^2}$。为简便起见，取$h\perp\begin{pmatrix}P\\3\sigma Q\end{pmatrix}$，并按 ϵ 的幂展开，得到

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\Xi(\epsilon)}=1-\frac{\epsilon^2}{2\lambda}\left(\int h_1^2+3\sigma h_2^2\right)+O(\epsilon^3);$$

$$\int_{\mathbb{R}}(|\nabla(P+\epsilon h_1)|^2+|\nabla(Q+\mu\epsilon h_2)|^2+|(P+\epsilon h_1)|^2+\mu|Q+\epsilon h_2|^2)dx=$$

$$\int_{\mathbb{R}}(|\nabla P|^2+|\nabla|Q|^2+P^2+\mu Q^2)dx+2\epsilon(\langle-\Delta P+P,h_1\rangle+\langle-\Delta Q+\mu Q,h_2\rangle)+$$

$$+\epsilon^2(\|\nabla h_1\|^2+\|h_1\|^2+\|\nabla h_2\|^2+\mu\|h_2\|^2);$$

$$F(P+\epsilon h_1,Q+\epsilon h_2)=F(P,Q)+\epsilon\left(h_1\left(\frac{1}{9}P^3+2PQ^2+\frac{1}{3}P^2Q\right)+h_2\left(9Q^3+2P^2Q+\frac{P^3}{9}\right)\right)+$$

$$+\quad\epsilon^2\left(h_1\left(\frac{P^2}{6}+Q^2+\frac{1}{3}PQ\right)+\left(4PQ+\frac{1}{3}P^2\right)h_1h_2+\left(\frac{27}{2}Q^2+P^2\right)h_2^2\right)+O(\epsilon^3).$$

综上可得展开式

$$g(\epsilon)=g(0)+$$

$$\epsilon\left(\langle-\Delta P+P-\left(\frac{1}{9}P^3+2PQ^2+\frac{1}{3}P^2Q\right),h_1\rangle+\langle-\Delta Q+\mu Q-\left(9Q^3+2P^2Q+\frac{P^3}{9}\right),h_2\rangle\right)+O(\epsilon^2).$$

因此，由于 (P,Q) 是一个极小化子，故 $g'(0)=0$，从而

$$\langle-\Delta P+P-\left(\frac{1}{9}P^3+2PQ^2+\frac{1}{3}P^2Q\right),h_1\rangle+\langle-\Delta Q+\mu Q-\left(9Q^3+2P^2Q+\frac{P^3}{9}\right),h_2\rangle=0,$$

对所有 $h\perp\begin{pmatrix}P\\3\sigma Q\end{pmatrix}$ 均成立。因此，存在 $\omega=\omega_\lambda$，

使得

$$\begin{cases}-\Delta P+(\omega_\lambda+1)P-\left[\frac{1}{9}P^3+2Q^2P+\frac{1}{3}P^2Q\right]=0\\-\Delta Q+(\mu+3\sigma\omega_\lambda)Q-\left[9Q^3+2P^2Q+\frac{1}{9}P^3\right]=0,\end{cases}\tag{2.12}$$

根据 Pohozaev 恒等式，

$$\omega_\lambda=\frac{-\int_{\mathbb{R}}(|\nabla P|^2+|\nabla Q|^2+P^2+\mu Q^2)dx+\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{9}P^4+9Q^4+4P^2Q^2+\frac{4}{9}P^3Q)dx}{\lambda}>0.$$

此外，由于 (P,Q) 是一个极小化子，因此应有 $g''(0)\geq 0$。

$$\frac{g''(0)}{2}=\langle(-\Delta+1-(\frac{P^2}{3}+2Q^2+\frac{2}{3}PQ))h_1,h_1\rangle+\langle(-\Delta+\mu-(2P^2+27Q^2))h_2,h_2\rangle$$

$$-\langle(8PQ+\frac{2}{3}P^2)h_1,h_2\rangle+\omega_\lambda\epsilon^2(\int_{\mathbb{R}}h_1^2+3\sigma\int_{\mathbb{R}}h_2^2))+O(\epsilon^3)=\langle\mathscr{L}_+h,h\rangle$$

由此可知，当 $h\perp\begin{pmatrix}P\\3\sigma Q\end{pmatrix}$ 时，$\langle\mathscr{L}_+h,h\rangle\geq 0$。最后，根据命题 5 的结果，对于刚构造出的归一化波，由于构造方式，性质 (3.1) 成立。因此，波 $(e^{i\omega t}P,e^{3i\omega t}Q)$ 谱稳定，定理 2 的证明完毕。

3. $n = 2$ 中波的不稳定性，3

本节中，我们将证明$n = 2,3$ 中波的不稳定性。为着手分析，我们还需要一些进一步的预备材料，这些材料同样适用于$n = 1$ 的情形。

3.1. $\mathscr{L}_{\pm}$ 的谱性质。

命题 3。 算子 $L_{\pm}$ 定义于 (2.6)，具有以下性质：

- $L_{\pm}$ 的连续谱为 $[\min(\alpha, \beta), \infty)$。
- L_{+} 恰有一个负特征值，且零特征值的重数至少为 n，$L_{+}\begin{bmatrix}\partial \\ \partial jU\, jV\end{bmatrix} = 0$，$j = 1, 2, \ldots\ldots, n$。
- $L_{-} \geq 0$，其中 $L_{-}\begin{bmatrix} U\, 3V \end{bmatrix} = 0$ 并且此外 $\langle L_{-}h, h\rangle \geq \delta \|h\|^2$，$\forall h \perp \begin{bmatrix} U\, 3V \end{bmatrix}$

证明。 连续谱的证明直接由外尔定理得出。我们已由命题 1 证明，$\mathscr{L}_{+}$ 至多有一个负特征值；接下来只需证明这样的特征值确实存在。为此，考虑到 (U,V) 呈钟形，我们有

$$\langle \mathscr{L}_{+}\begin{bmatrix} U \\ 3V \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U \\ 3V \end{bmatrix}\rangle = -C(\alpha,\beta)\int_{\mathbf{R}^n}\left(\frac{2U^4}{9} + 7U^2V^2 + 18V^4 + \frac{2U^3V}{3}\right)dx < 0,$$

因此 $n(\mathscr{L}_{+}) = 1$。对（2.5）取空间导数，得到 $\mathscr{L}_{+}\begin{bmatrix}\partial_j \\ \partial_j UV\end{bmatrix} = 0$，$j = 1$、2、……、$n$。

关于 $\mathscr{L}_{-}$ 的陈述，我们首先注意到，直接可得 $\mathscr{L}_{-}\begin{bmatrix} U3V \end{bmatrix} = 0$。现在，我们利用 $\mathscr{L}_{-}$ 的 Perron–Frobenius 性质：最小特征值是单重的，且对应的本征态是由非负函数构成的向量。因此，由于 $\begin{bmatrix}U3V\end{bmatrix}$ 是这样的本征态，0 是最小特征值，且为单重特征值，因此关于 $\mathscr{L}_{-}$ 的断言得证。

关于 $\mathscr{L}_{-}$ 的 Perron-Frobenius 性质，对于形如 $\begin{pmatrix}-\Delta+\alpha & 0 \\ 0 & -\Delta+\beta\end{pmatrix} + \vec{V}$的任意矩阵薛定谔算子都成立，其中 $\vec{V}$是实值、有界的对称势，因此该性质对 $\mathscr{L}_{-}$ 也成立。□

现在，我们可以轻松地将命题 3 的结果推广到在 (1.7) 中引入的算子 $\mathscr{L}_{\pm}$。

Pro命题 4。 在 (2.6) 中定义的算子 $\mathscr{L}_{\pm}$ 具有以下性质 *s:*

- $$\sigma_{cont.}(\mathscr{L}_{\pm}) = [\min(\alpha,\beta), \infty).$$
- $\mathscr{L}_{+}$ 恰有一个负特征值，且零特征值的重数至少为 n，
$$\mathscr{L}_{+}\begin{bmatrix}\partial_j P \\ \partial_j Q\end{bmatrix} = 0, j = 1, 2, \ldots, n.$$

- $\mathscr{L}_- \geq 0$, *with* $\mathscr{L}_- \begin{bmatrix} P \\ 3Q \end{bmatrix} = 0$ *and moreover*

$$\langle \mathscr{L}_- h, h\rangle \geq \delta \|h\|^2, \forall h \perp \begin{bmatrix} P \\ 3Q \end{bmatrix}$$

3.2. **特征值问题的稳定性与不稳定性** (1.9)。 现在，我们推导关于 (1.9) 稳定性/不稳定性的（充要）条件。具体而言，基于命题 4 中确立的 $\mathscr{L}_\pm$ 的谱性质，我们得到以下命题。

命题 5. 若波$(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 谱稳定[3],，则 $\mathscr{L}_+$ 在余维一子空间 $\left(P\ 3\sigma Q\right)^\perp$ 上非负，即

$$\langle \mathscr{L}_+ h, h\rangle \geq 0, \forall h \perp \begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

等价地，当且仅当存在 $h \perp \left(P 3\sigma Q\right)$，使得 $\langle \mathscr{L}_+ h, h\rangle < 0$。证明。 首先，我们需要一个技术步骤，以消除$\frac{1}{\sigma}$ 在$\mathscr{J}$定义中造成的问题。为此，简记$I_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix}$，于是

$$\mathscr{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & I_\sigma \\ -I_\sigma & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}.$$

我们可以将特征值问题 (1.9) 改写如下

$$\begin{cases} I_\sigma \mathscr{L}_- v_2 = \lambda v_1 \\ I_\sigma \mathscr{L}_+ v_1 = -\lambda v_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

引入$v_j \rightarrow \mathrm{p} I_\sigma v_j$，$j = \overline{1, 2}$，我们还可以将 (3.2) 等价地改写为

$$\begin{cases} \sqrt{I_\sigma}\mathscr{L}_-\sqrt{I_\sigma} v_2 = \lambda v_1 \\ \sqrt{I_\sigma}\mathscr{L}_+\sqrt{I_\sigma} v_1 = -\lambda v_2. \end{cases} \tag{3.3}$$

引入新算子 $\tilde{\mathscr{L}}_\pm := \mathrm{p} I_\sigma \mathscr{L}_\pm \mathrm{p} I_\sigma$，我们得到更标准的非线性薛定谔形式

$$\begin{cases} \tilde{\mathscr{L}}_- v_2 = \lambda v_1 \\ \tilde{\mathscr{L}}_+ v_1 = -\lambda v_2 \end{cases} \tag{3.4}$$

注意，由于 $\mathscr{L}_-$ 在子空间 $\left(P 3Q\right)^\perp$ 上为正，很容易看出 $\tilde{\mathscr{L}}_-\left(P 3\mathrm{p}\sigma Q\right) = 0$ 且$\tilde{\mathscr{L}}_-$ 在子空间 $\left(P\ 3\mathrm{p}\sigma Q\right)^\perp$ 上为正。

现在将 $\mathscr{L}_-$ 应用于（3.4）的第二个方程，我们得到特征值问题

$$\tilde{\mathscr{L}}_-\tilde{\mathscr{L}}_+ v_1 = -\lambda^2 v_1, \tag{3.5}$$

这显然等价于原特征值问题 (1.9)，因为当且仅当 (3.5) 有解 $(\lambda, v_1) : \mathrm{R}\lambda > 0, v_1 \in (H^4(\mathbf{R}^n))^2 \neq 0$ 时，才会出现不稳定性。假设 $\lambda \neq 0, v_1 \neq 0$。

[3]即，特征值问题（1.9）没有非平凡解（λ, v）： $\mathrm{R}\lambda > 0, v \neq 0$

将 (3.5) 与 $Z_\sigma := \begin{pmatrix} P & \mathrm{p}\sigma Q \end{pmatrix}$ 做点积可得 $v_1 \perp Z_\sigma$。由于 $\tilde{\mathscr{L}}_-$ 在$Z_\sigma^\perp$ 上为正，因此有 $\tilde{\mathscr{L}}_-$: $Z_\sigma^\perp \to Z_\sigma^\perp$ 定义良好且严格为正，由此我们可以引入

$$h : \sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}h = v_1.$$

由于我们可以在子空间 $Z_\sigma^\perp$ 上考察特征值问题 (3.5)，因此可以将其改写为

$$\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}\tilde{\mathscr{L}}_+\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}h = -\lambda^2 h. \tag{3.6}$$

由 (3.6) 可立即看出， $-\lambda^2$ 是实数，因为它是自伴算子$\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}\tilde{\mathscr{L}}_+\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}$的特征值，所以 $\lambda \in \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}$。特别地，若存在不稳定性，则只会以正特征值的形式出现。

假设存在谱不稳定性，即 (3.6) 有一个解，该解必为 λ： $\lambda > 0$。与h 取点积可得

$$0 > -\lambda^2\langle h, h\rangle = \langle\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}\tilde{\mathscr{L}}_+\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}h, h\rangle = \langle\tilde{\mathscr{L}}_+ v_1, v_1\rangle.$$

因此，我们构造出了一个向量（即 $v_1 = \sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}h \perp Z_\sigma$），使得 $\langle \tilde{\mathscr{L}}_+v_1, v_1\rangle < 0$。但这意味着

$$\langle\mathscr{L}_+\sqrt{I_\sigma}v_1, \sqrt{I_\sigma}v_1\rangle < 0,$$

其中 $\mathrm{p}I_\sigma v_1 \perp \begin{pmatrix} P & \mathrm{p}\sigma Q \end{pmatrix}$。一个方向已得到证明。

对于相反方向，假设存在h： $h \perp \begin{pmatrix} P & \sigma Q \end{pmatrix}$， $\langle\mathscr{L}_+h, h\rangle < 0$。这意味着对于$h =: \mathrm{p}I_\sigma h_\sigma$，有 $\perp Z_\sigma$ 并且

$$\langle\tilde{\mathscr{L}}_+h_\sigma, h_\sigma\rangle < 0$$

接着，引入v： $\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}v = h_\sigma$。由此可得 $\langle\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}\tilde{\mathscr{L}}_+\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}v, v\rangle < 0$，因此自伴算子 $\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}\tilde{\mathscr{L}}_+\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}$ 具有一个负特征值。因此，方程 (3.6) 有解，谱不稳定性随之成立。□

3.3. **波的不稳定性 在$n > 1$维空间中的波：定理3的证明**。我们有如下命题 .

命题 6. 设 P,Q 是方程(1.2)的经典解。引入

$$H(x) = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{n}{2}P + x\cdot\nabla P \\ \frac{n}{2}Q + x\cdot\nabla Q \end{pmatrix}.$$

于是，$H \perp \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix}$

并且

$$\begin{cases} \langle\mathscr{L}_+H, H\rangle < 0, n = 3, \\ \langle\mathscr{L}_+H, H\rangle = 0, n = 2. \end{cases}$$

作为命题 5 的推论，我们立即得出在$n = 3$的情形下存在谱不稳定性；而要在$n = 2$的情形下确立不稳定性，还需要额外论证。

*Pro*由。 将$x\cdot\nabla$ 作用于椭圆方程 (1.2)。利用交换恒等式 y

$$-x\cdot(\Delta) = -\Delta(x\cdot) + 2\Delta, \tag{3.7}$$

我们得到

$$\mathscr{L}_+ \begin{pmatrix} x\cdot\nabla P \\ x\cdot\nabla Q \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

直接计算可得

$$\mathscr{L}_+ \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2(-\Delta P + (\omega+1)P) \\ 2(-\Delta Q + (\mu+3\sigma\omega)Q) \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

综上,

$$\mathscr{L}_+ H = \begin{pmatrix} (n-2)\Delta P - n(\omega+1)P) \\ (n-2)\Delta Q - n(\mu+3\sigma\omega)Q \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

与H作点积（注意，按构造有$H \perp \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix}$），可得

$$\langle \mathscr{L}_+ H, H\rangle = (n-2)\left(\langle \Delta P, x\cdot P\rangle + \langle \Delta Q, x\cdot Q\rangle\right).$$

显然，当$n=2$时，有$\langle \mathscr{L}_+ H, H\rangle = 0$；而当$n=3$时，我们利用对易恒等式 (3.7) 进行分部积分。得到

$$\langle \Delta P, x\cdot P\rangle = -\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla P|^2, \langle \Delta Q, x\cdot Q\rangle = -\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla Q|^2.$$

因此，对于 $n=3$, $\langle \mathscr{L}_+ H,\ H\rangle = -\left(\int_{\mathbf{R}_3} |\nabla P|^2 + |\nabla Q|^2\right) < 0$。 □

最后，我们可以陈述谱不稳定性结果了。

命题 7。 设 $n=2,3$，且 P,Q 是方程 (1.2) 的经典解，并具有命题 *4* 中列出的谱性质。那么，

- 对于 $n=3$，这一对 $(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 是谱不稳定的。
- 对于 $n=2$，在额外假设 $\mu \neq 3\sigma$ 下，$(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 也不稳定。
- 最后，在特殊情形 $n=2, \mu = 3\sigma$ 下，这些波 $(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 是谱稳定的。

证明。 如上文所述，结合命题 5 和命题 6 的结果，我们可知在$n=3$的情况下存在谱不稳定性。

对于$n=2$ 及$\mu \neq 3\sigma$的情形，假设谱稳定性成立，以导出矛盾。由命题 5（见 (3.1)），$\mathscr{L}_+$ 在子空间 $\begin{pmatrix} P \\ 3Q \end{pmatrix}$ 上必须是非负的。根据命题 5 的证明，这又等价于算子[4] $\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}\tilde{\mathscr{L}}_+\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}$ 在子空间 $\begin{pmatrix} P \\ 3 \quad p\sigma Q \end{pmatrix}^{\perp}$ 上的非负性。

[4]Note that this operator acts invariantly on $\begin{pmatrix} P \\ 3\sqrt{\sigma}Q \end{pmatrix}^{\perp}$, due to the presence of $\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}$

That is, with the projection $\Pi_{\begin{pmatrix} P \\ 3\sqrt{\sigma}Q \end{pmatrix}^{\perp}} : L^2 \to \begin{pmatrix} P \\ 3\sqrt{\sigma}Q \end{pmatrix}^{\perp}$, we have

$$\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}\Pi_{\begin{pmatrix} P \\ 3\sqrt{\sigma}Q \end{pmatrix}^{\perp}}\tilde{\mathscr{L}}_+\Pi_{\begin{pmatrix} P \\ 3\sqrt{\sigma}Q \end{pmatrix}^{\perp}}\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-} : \begin{pmatrix} P \\ 3\sqrt{\sigma}Q \end{pmatrix}^{\perp} \to \begin{pmatrix} P \\ 3\sqrt{\sigma}Q \end{pmatrix}^{\perp}$$

是非负的。另一方面，

$$\inf_{Z\perp\begin{pmatrix} P \\ 3\sqrt{\sigma}Q \end{pmatrix}:\|Z\|=1} \langle\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}\tilde{\mathscr{L}}_+\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}Z, Z\rangle = 0.$$

[1] [1]事实上，可以取 $Z_0 = \mathrm{k}\,\tilde{\mathscr{L}}_-^{-\frac{1}{2}}H\mathrm{k}^{-1}\tilde{\mathscr{L}}_-^{-\frac{1}{2}}H$，其中 H如命题 6 所述。因此，0 必定是自伴算子 $\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}\tilde{\mathscr{L}}_+\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}$的特征值，其特征向量为 Z_0。但这意味着，由于 $\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}$ 在 $\begin{pmatrix} P\,3\mathrm{p}\sigma Q \end{pmatrix}$ 上可逆，

$$\Pi_{\begin{pmatrix} P \\ 3\sqrt{\sigma}Q \end{pmatrix}^{\perp}}\tilde{\mathscr{L}}_+\sqrt{\tilde{\mathscr{L}}_-}Z_0 = 0,$$

这与

$$\Pi_{\begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}^{\perp}}\mathscr{L}_+H = 0.$$

然而，根据 (3.10)，

$$0 = \Pi_{\begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}^{\perp}}\mathscr{L}_+H = -3\Pi_{\begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}^{\perp}}\begin{pmatrix} (\omega+1)P) \\ (\mu+3\sigma\omega)Q \end{pmatrix} = -3(\mu-3\sigma)\Pi_{\begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}^{\perp}}\begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix} \neq 0,$$

只要 $P \neq 0$ 且 $\mu \neq 3\sigma$。这一矛盾表明，对于 $n = 2$，波 $(e^{i\omega t}P, e^{3i\omega t}Q)$ 同样在谱意义下不稳定。

对于 $n = 2$, $\mu = 3\sigma$ 的情形，由于 $n(\mathscr{L}_+) = 1$ 且 $\mathscr{L}_- \geq 0$，稳定性由 Vakhitov-Kolokolov 量 $\langle\mathscr{L}_+^{-1}\begin{pmatrix} P3\sigma Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P3\sigma Q \end{pmatrix}\rangle$ 决定，见特征值问题 (3.4)。

我们的计算（见式 (3.10)，其中$n = 2, \mu = 3\sigma$）表明

$$\mathscr{L}_+H = -2(\omega+1)\begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}.$$

由此可得

$$\langle\mathscr{L}_+^{-1}\begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}\rangle = -\frac{1}{2(\omega+1)}\langle H, \begin{pmatrix} P \\ 3\sigma Q \end{pmatrix}\rangle = 0.$$

这表明其具有（边缘）谱稳定性，与二维三次非线性薛定谔方程的情形相同；在该情形下，零点处多出一对（广义）特征向量。事实上，此时方程 (1.9) 的零特征值代数重数为八，而通常为六。□

4. 强不稳定性

在本节中，对于固定的 $\omega > \max(-1, -\frac{\mu}{3\sigma})$，我们考察命题 2 中构造的波 P,Q，具体见 (2.9)。特别地，它们是 Weinstein 极小化问题 (2.3) 的解。

我们还需要对参数作如下限制 $\sigma = 3, \mu = 3\sigma = 9$。在这些特定取值下，能量和质量记录如下

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |u|^2 + 9|v|^2)dx - \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{36}|u|^4 + \frac{9}{4}|v|^4 + |u|^2|v|^2 + \frac{1}{9}\Re(\bar{u}^3 v)dx \\ M(u,v) &= \int_{\mathbf{R}^n} (|u|^2 + 9|v|^2)dx. \end{aligned}$$

我们从以下命题开始，它给出了必要的维里恒等式，而这些恒等式最终构成了我们关于通过爆破导致不稳定性的结果的基础。

命题 8. 设 $n = 2, 3, (u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, |x|^2 dx)$ 且 $\sigma = 3, \mu = 3\sigma = 9$ 并设

$$V(t) = \int |x|^2 \left(|u(t)|^2 + 9|v(t)|^2\right) dx$$

Then

$$V''(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(8|\nabla u|^2 + 8|\nabla v|^2 - \frac{2n}{9}|u|^4 - 18n|v|^4 - 8n|v|^2|u|^2 - \frac{8n}{9}\Re(\bar{u}^3 v)\right) dx =: 16R(u,v). \tag{4.1}$$

其中

$$R(u,v) := \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \frac{n}{36}|u|^4 - \frac{9n}{4}|v|^4 - n|v|^2|u|^2 - \frac{n}{9}\Re(\bar{u}^3 v)dx\right).$$

证明。这由 [10] 中的命题 4.4 得出。 □

接下来，引入 L^2–尺度不变变换，$u^\lambda(x) := (\lambda^{\frac{n}{2}} u(\lambda x)$。我们计算得，

$$\begin{aligned} \partial_\lambda E(u^\lambda, v^\lambda) &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - n\lambda^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} F(u,v)dx, \\ \partial_\lambda^2 E(u^\lambda, v^\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - n(n-1)\lambda^{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} F(u,v)dx. \end{aligned}$$

显然，

$$\frac{\lambda}{2}\partial_\lambda E(u^\lambda, v^\lambda) = R(u^\lambda, v^\lambda), \tag{4.2}$$

$$\|\nabla P\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla Q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = n\int_{\mathbb{R}^n} F(P,Q)dx. \tag{4.3}$$

其中，(4.3) 是 (1.3)、(1.4)、(1.5) 的推论。

沿用 Ohta 的方法， [9], 我们引入如下集合

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \left\{(u,v) : E(u,v) < E(P,Q), \int P^2 + 9Q^2 = \int u^2 + 9u^2, \int F(P,Q) < \int F(u,v)\right\}, \\ \mathscr{B} &= \{(u,v) \in \mathscr{A} : R(u,v) < 0\}. \end{aligned}$$

现在，我们分$n = 2$ 和$n = 3$两种情况进行讨论。我们先从较难的情况$n = 3$开始。

4.1. $n = 3$**的情况**。

引理 2. 设 $n = 3$。则 $(P^\lambda, Q^\lambda) \in \mathscr{B}$, 对所有 $\lambda > 1$。
证明。 由缩放不变性可得 $\int_{\mathbb{R}^3} P^2 + 9Q^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} (P^\lambda)^2 + 9(Q^\lambda)^2$。接下来，注意到由于 F 是四次项，

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(P^\lambda, Q^\lambda) dx = \lambda^3 \int_{\mathbb{R}^3} F(P,Q) dx > \int_{\mathbb{R}^3} F(P,Q) dx$$

对于 $\lambda > 1$。我们有

$$\begin{aligned} 2R(P^\lambda, Q^\lambda) &= \lambda^2 \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla P|^2 + |\nabla Q|^2 - \lambda^3 \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{12}|P|^4 + \frac{27}{4}|Q|^4 + 3|P|^2|Q|^2 + \frac{1}{3}P^3 Q = \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla P|^2 + |\nabla Q|^2 - 3\lambda^3 \int F(P,Q) \\ &= 3\lambda^2(1-\lambda) \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla P|^2 + |\nabla Q|^2 < 0, \end{aligned}$$

其中用到了 (4.3) 和 $\lambda > 1$。由公式 (4.2)，我们得出

$$\frac{\lambda}{2} \partial_\lambda E(P^\lambda, Q^\lambda) = R(P^\lambda, Q^\lambda) < 0,$$

因此，标量函数 $\lambda \to E(P^\lambda, Q^\lambda)$ 对 $\lambda > 1$ 单调递减。特别地，

$$E(P^\lambda, Q^\lambda) < E(P,Q),$$

只要 $\lambda > 1$。因此我们已经证明，$(P^\lambda, Q^\lambda) \in \mathscr{A}$ 对于 $\lambda > 1$。回想一下，我们还证明了 $R(P^\lambda, Q^\lambda) < 0$, 由此也可得 $(P^\lambda, Q^\lambda) \in \mathscr{B}$。□

接下来，我们需要以下技术引理。

引理 3. 若 $(u, v) \in (H^1(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3))$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^3} P^2 + 9Q^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^2 + 9u^2 dx; \ \int_{\mathbb{R}^3} F(u,v) dx = \int_{\mathbb{R}^3} F(P,Q) dx. \tag{4.4}$$

则 $E(P,Q) \le E(u,v)$。

证明。 回想一下，(P,Q) 求解极小化问题 (2.3)，对于[5]在 $\alpha = \omega + 1$ 和 $\beta = 9(1+\omega)$ 条件下。此外，根据 (2.3) 的齐次性，(P,Q) 求解以下约束极小化问题

$$\begin{cases} K[u,v] := \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + (1+\omega)|u|^2 + 9(1+\omega)|v|^2 \to \min \\ \int_{\mathbf{R}^3} F(u,v) = \int_{\mathbf{R}^3} F(P,Q) \end{cases} \tag{4.5}$$

现在设 (u, v) 满足约束 (4.4)。由于 $M(u, v) = M(P,Q)$ 且 $\int_{\mathbf{R}^3} F(u, v) = \int_{\mathbf{R}^3} F(P,Q)$，由 (P,Q) 求解 (4.5) 可知

$$E(P,Q) + \int_{\mathbf{R}^3} F(P,Q) + \frac{\omega}{2} M(P,Q) = K(P,Q) \le K(u,v) = E(u,v) + \int_{\mathbf{R}^3} F(u,v) + \frac{\omega}{2} M(u,v).$$

消去相等项后，即得到所需的不等式 $E(P,Q) \le E(u, v)$。

□

接下来，我们证明集合 $\mathscr{A}$ 在流作用下是不变的。

[5]注意公式（2.9），它将(P,Q)与极小化子(U,V)联系起来。由于问题（2.3）具有齐次不变性，因此(P,Q)也是解

引理 4。T 集合 $\mathscr{A}$ 在 (1.1) 的流作用下是不变的，至少在可能发生爆破解之前如此。

证明。 取初始数据（u_0, v_0）$\in \mathscr{A}$。即 E（u_0, v_0）$< E$（P,Q），M（u_0, v_0）$= M$（P,Q），$\int_{\mathbf{R}^3} F$（P,Q）$< \int F$（u_0, v_0）。随时间演化这一初始数据，利用质量守恒和能量守恒，我们得到

$$
\begin{aligned}
&M(u(t), v(t)) = M(u_0, v_0) = M(P,Q);\\
&E(u(t), v(t)) = E(u_0, v_0) < E(P,Q);
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

此外，解映射的连续性保证了在某个小时间区间内，$\int_{\mathbf{R}^3} F$（P,Q）$< \int_{\mathbf{R}^3} F$（u（t），v（t）），即在 $t \in$（$0,\delta$）内。

因此，对于（u（t），v（t））$\notin \mathscr{A}$，某个$t_0 > 0$的唯一可能性是最终

$$\int_{\mathbf{R}^3} F(u(t_0), v(t_0)) = \int_{\mathbf{R}^3} F(P,Q).$$

但此时，我们便可以应用引理 3。这意味着E（u（t_0），v（t_0））$\geq E$（P,Q），这与（4.6）矛盾。因此，在发生势爆破的整个期间，（u（t），v（t））$\in \mathscr{A}$。□

注意，当 $n = 3$ 时，

$$E(u,v) - R(u,v) = \frac{1}{2}M(u,v) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} F(u,v)\,dx. \tag{4.7}$$

现在我们需要另一个技术引理。

引理 5. 设 $n = 3$，且若 $(u,v) \in (H^1(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3))$ 使得 $R(u,v) \leq 0, M(u,v) = M(P,Q), \int_{\mathbb{R}^3} F(P,Q)\,dx < \int_{\mathbb{R}^3} F(u,v)\,dx$. 那么

$$E(P,Q) \leq E(u,v) - R(u,v).$$

证明。 利用恒等式 (4.7)、质量守恒以及对 (u, v) 的假设，我们得到

$$
\begin{aligned}
E(P,Q) &= \frac{1}{2}M(P,Q) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} F(P,Q)\,dx = \frac{1}{2}M(u,v) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} F(P,Q)\,dx \leq\\
&\leq \frac{1}{2}M(u,v) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} F(u,v) = E(u,v) - R(u,v)
\end{aligned}
$$

□

因此，我们现在可以证明集合 $\mathscr{B}$ 在流作用下也保持不变。

引理 6. 假设 $n = 3$，则 $\mathscr{B}_\omega$ 在 (1.1) 的流作用下保持不变。

证明。 令 $(u_0,v_0) \in \mathscr{B}$，因此特别有 $(u_0, v_0) \in \mathscr{A}$。

由于 $\mathscr{A}$是不变的，我们需要证明 $R(u, v) < 0$。假设存在 $t_1 \in (0, T_{max})$，使得 $R(u(t_1), v(t_1)) \geq 0$。由 $t \to R(u(t), v(t))$ 的连续性，存在 $t_0 \in (0, t_1]$ 使得$R(u(t_0), v(t_0)) = 0$。然后根据引理 4，

$$M(u(t_0), v(t_0)) = M(P,Q);\ \int_{\mathbb{R}^3} F(P,Q)\,dx < \int_{\mathbb{R}^3} F(u(t_0), v(t_0))\,dx.$$

因此根据引理 5，我们有

$$E(P,Q) \leq E(u(t_0), v(t_0)) - R(u(t_0), v(t_0)) = E(u(t_0), v(t_0).$$

这与引理 3 中的陈述相矛盾：$E(u(t_0), v(t_0)) < E(P,Q)$，因此 $\mathscr{B}$是不变的，如前所述。□

现在我们可以证明波 (P,Q) 的强不稳定性了，也就是定理 4 中 $n=3$ 的情形。

为此，设（u_0,v_0）$\in\mathscr{B}_\omega$ 以及（$u(t)$，$v(t)$）为具有初始数据（u_0,v_0）的解（1.1）。根据引理 6，（$u(t)$，$v(t)$）$\in\mathscr{B}_\omega$ 对所有 $t\in[0,T_{max}$ 均成立。此外，维里尔恒等式、命题 8 和引理 3，结合能量守恒，推出

$$\frac{1}{16}V''(t)=R(u(t),v(t))\le E(u(t),v(t))-E(P,Q)=E(u_0,v_0)-E(P,Q)<0$$

对每个 $t\in[0,T_{max}$）。这意味着 $T_{max}<\infty$。

4.2. **情形** $n=2$。维里尔恒等式可简化为 .

引理 7。对于 $n=2$，$\sigma=3$，$\mu=9$，取初始数据 $(u_0,v_0)\in(H^1(\mathbb{R}^2)\times H^1(\mathbb{R}^2))$。那么，在所有时刻，直到潜在爆破时刻为止，我们都有

$$V''(t)=16E(u(t),v(t))-8M(u(t),v(t))=16E(u_0,v_0)-8M(u_0,v_0). \tag{4.8}$$

证明。公式（4.8）只是（4.1）在 $n=2$ 情形下的一个特例，其中使用了 Pohozhaev 恒等式。最后，我们利用质量守恒和能量守恒得出结论，即该量实际上是时间的常数。□

注意到在这种情况下，只需找到初始数据 u_0,v_0 使得

$$16E(u_0,v_0)-8M(u_0,v_0)<0. \tag{4.9}$$

另一个观察是，对于 $u_0=P$、$v_0=Q$，有 $V(t)=const$，因此 $V\prime\prime(t)=0$，于是得到[6] $16E(P,Q)-8M(P,Q)=0$。显然，为了构造具有性质 (4.9) 的数据，需要对波 (P,Q) 进行扰动。为此，取一对实值测试函数 h_1,h_2，并考虑扰动 $(P+\epsilon h_1,Q+\epsilon h_2)$。对[7] ϵ 作一阶展开，得到

$$\begin{aligned}
&E(P+\epsilon h_1,Q+\epsilon h_2)-\frac{1}{2}M(P+\epsilon h_1,Q+\epsilon h_2)=\\
=\;&\epsilon\left(\langle-\Delta P-(\frac{1}{9}P^3+2PQ^2+\frac{1}{3}P^2Q),h_1\rangle\right)+\epsilon\left(\langle-\Delta Q-(9Q^3+2P^2Q+\frac{1}{9}P^3),h_2\rangle\right)+O(\epsilon^2)\\
=\;&-(\omega+1)\epsilon\langle\begin{pmatrix}P\\9Q\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\rangle+O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

例如，取 $h_1=P$、$h_2=Q$，并考虑到 $\omega>-1$，可知对于所有充分小的 $0<\epsilon<<1$，都有 $E(P+\epsilon P,Q+\epsilon Q)<\frac{1}{2}M(P+\epsilon P,Q+\epsilon Q)$。因此，以此为初始数据的解会在有限时间内爆破。

至此，定理 4 得证。

参考文献

[1] Z. Lin, C. Zeng，不稳定性、指标定理及线性哈密顿偏微分方程的指数三分性，美国数学会回忆录，**275**，（1347），2022年。[2] G. Simpson, M. Spiegelman, M. I. Weinstein. 研究岩浆动力学中出现的退化色散方程，《非线性》，《非线性》，**20**，（1），（2007年），第21–49页。[3]L. Zhang, L.-Q. Chen. 广义非线性薛定谔方程的包络紧孤子与孤立波模式解，《非线性分析》，《非线性分析》，**70**，（1），（2009年），第492–496页。[4] T. Cazenave，《半线性薛定谔方程》，库朗数学讲义第10卷，纽约大学，纽约，2003年。

[6]当然也可以由 Pohozhaev 恒等式得到。[7]注意到，由于关系 $16E(P,Q)=8M(P,Q)$，ϵ 中的零阶项消失

[5] T. Cazenave, P.L. Lions，驻波在某些非线性薛定谔方程中的轨道稳定性，《Comm. Math. Phys.》，**85**，（1982年），第549–561页。[6] T. M.Kapitula, P. G. Kevrekidis, B. Sandstede，通过 *Krein* 符号计算无限维哈密顿系统的特征值，*Physica D*，**3-4**，（2004年），第263–282页。[7] T. Kapitula,P. G. Kevrekidis, B. Sandstede，补遗：“通过 *Krein* 符号计算无限维哈密顿系统的特征值” *[Phys. D 195 (2004), no. 3-4, 263–282]* , *Phys. D* **201**(2005), no. 1-2, 199–201.[8] T. Kapitula, K. Promislow，《非线性波的谱稳定性与动力学稳定性》，185，应用数学科学丛书，2013年。[9] Masahito Ohta，谐振势下非线性薛定谔方程驻波的强不稳定性。*Funkcialaj Ekvacioj*.（2018年），**61**，第1期，第135–143页。[10] F. Oliveira, A. Pastor，关于非线性光学中出现的薛定谔系统。*Anal.Math.Phys.*（2021年），**11**，论文编号：123。[11] D. Pelinovsky，耦合非线性薛定谔方程中孤立波谱稳定性的惯性定律，*Proc. R. Soc. Lond. Ser.A Math. Phys. Eng. Sci.*，**461**，（2005年），第2055期，第783–812页。[12] A. R. Sammut, A. V. Buryak, Y.S. Kivshar，三次谐波产生条件下的亮孤立波与暗孤立波。*J. Opt. Soc.Am. B*，（1998年），**15**，第1488–1496页。[13] M. I. Weinstein 非线性色散演化方程基态的李雅普诺夫稳定性，《Comm. Pure Appl. Math.》，**39**，（1986年），第51–67页。

数学系，阿拉巴马大学，戈登·帕尔默楼，150室，戈登·帕尔默楼，哈克贝里巷，图斯卡卢萨，阿拉巴马州35401，美国电子邮箱：aramadan@ua.edu

数学系，阿拉巴马大学伯明翰分校，大学楼，4005室，1402号第十大道南，伯明翰，阿拉巴马州35294-1241电子邮箱：stefanov@uab.edu