关于对称区间交换变换的无限反对称扩张的遍历性

普热梅斯瓦夫·贝尔克和 Frank Trujillo

摘要。我们考虑单位区间 $[0,\ 1)$ 上关于余循环 $f = \chi_{(0,\ 1/2)} - \chi_{(1/2,1)}$ 的对称区间交换变换的扭积扩张。我们证明，对于几乎所有具有对称组合数据的区间交换变换 T，由 $T_f(x,\ r) = (T(x),\ r + f(x))$ 给出的扭积 $T_f\colon [0,\ 1) \times \mathbb{Z} \to [0,\ 1) \times \mathbb{Z}$ 关于勒贝格测度与计数测度的乘积是遍历的。

arXiv:2304.01868v4 [math.DS] 4 Apr 2024

1. 引言

在本文中，我们研究一类区间交换变换的无限扩展的遍历性质。更准确地说，给定单位区间上的一个遍历的（相对于勒贝格测度）区间交换变换 $T\colon\ I \to I$ 在单位区间 $I = [0,\ 1)$（精确定义见第 3 节）以及 $f = \chi_{(0,\ 1/2)} - \chi_{(1/2,1)}$，我们研究映射的遍历性

$$\begin{array}{rccc} T_f: & [0,1)\times\mathbb{Z} & \to & [0,1)\times\mathbb{Z} \\ & (x,r) & \mapsto & (T(x), r+f(x)) \end{array} \tag{1}$$

关于勒贝格测度与计数测度的乘积。

正如我们将在下文回顾的那样，这类一般扭积在仅假设基底变换具有遍历性且扭函数满足 T 零均值 f的情况下，会保持一个自然的（无限）测度，并表现出重要的复返性质。然而，关于这些变换的遍历性，已知结果寥寥无几。主要障碍在于，这个问题属于无限测度保持系统的范畴，其中遍历性质更加难以确定。

1.1. 扭积的复返性。 给定一个保概率变换$(T,\ X,\ \mathcal{B},\ \mu)$ 以及一个可测的扭函数 $\varphi\colon\ X \to G$（有时称为余循环），其中$(G,\ +)$ 是一个带有哈尔测度 ν_G的局部紧阿贝尔群，立即可以验证，与之对应的扭积

$$\begin{array}{rccc} T_\varphi: & X\times G & \to & X\times G \\ & (x,g) & \mapsto & (T(x), g+\varphi(x)) \end{array} \tag{2}$$

保持（可能是无限的）乘积测度 $\mu \times \nu_G$。此外，当限于取值于 $\mathbb{R}$ 的扭函数时，根据 Atkinson [3] 和 Schmidt [20] 的经典结果，只要扭函数具有零均值，相关的扭积就会相对于这一不变测度呈现重要的复返性质（见下文定理 1.1）。当 $G = \mathbb{R}$ 时，测度 $\nu_{\mathbb{R}}$ 就是 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度，记作 $\mathrm{Leb}_{\mathbb{R}}$。另一方面，若 $G = \mathbb{Z}$，测度 $\nu_{\mathbb{Z}}$ 就是 $\mathbb{Z}$ 上的计数测度。

回顾一下，若 φ 为实值函数，则称 T_φ 是遍历的，如果对每个具有正 μ 测度的 $A \subseteq X$，以及任意 $\epsilon > 0$，都存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $T_\varphi^n(A \times \{0\}) \cap (A \times (-\epsilon,\ \epsilon)) \neq \varnothing$；若对任意具有正 $(\mu \times \mathrm{Leb}_{\mathbb{R}})$ 测度的 $D \subseteq X \times \mathbb{R}$，都存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $T_\varphi(D) \cap D \neq \varnothing$，则称 T_φ 是保守的。

定理 1.1 (Atkinson [3], Schmidt [20])。设 $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个遍历保测变换，且 $\varphi:\ X \to \mathbb{R}$ 是定义在 $L^1(X, \mu)$上的可测函数。那么，下述结论成立。

(1) T_φ 保持测度 $\mu \times \mathrm{Leb}_{\mathbb{R}}$。*(2)* T_φ 遍历当且仅当 φ 具有零均值。*(3)* T_φ 是保守的当且仅当 φ具有零均值。

上述定理中的第二和第三个断言分别归功于 Atkinson 和 Schmidt。这些复返性质自然引出了一个问题：对于零均值扭函数，相对于上述乘积测度，扭积是否具有遍历性。然而，需要指出的是，如果所考虑的扭函数 φ 取整数值，那么无论映射 $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$如何，映射 T_φ相对于测度 $\mu \times \mathrm{Leb}_{\mathbb{R}}$ 都不是遍历的（尽管定理 1.1 的结论仍然成立）。事实上，在这种情况下，使 r 的小数部分落在区间 $[0, 1/2]$ 内的点对 $(x, r) \in X \times \mathbb{R}$ 构成一个正测度（但非全测度）的不变集。尽管如此，我们仍可将这些映射视为定义在 $X \times \mathbb{Z}$ 上的扭积，并相对于不变乘积测度 $\mu \times \nu_{\mathbb{Z}}$研究其遍历性质。类似地，可以自然地将这些讨论推广到取有限个值且生成 $\mathbb{R}$的离散子群的扭函数。

需要指出的是，证明取值于 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$ 的扭函数（更一般地，取值于局部紧阿贝尔群的余循环）具有遍历性的已知方法非常相似，因为它们主要依赖于本质值 （见第 4 节）。

1.2. 遍历性方面的已有结果。 下文将重点讨论形如 (2) 的系统 T_φ，其中基变换 T 是单位区间 I 上的区间交换变换（IET），且扭函数 φ: $I \to \mathbb{R}$ 具有零均值。

对于仅有两个区间的区间交换变换，基系统 T 可自然地视为圆周旋转。在此背景下，扭积族

$$S_{\alpha,\beta}:\ \begin{array}{ccc} S^1 \times \mathbb{R} & \to & S^1 \times \mathbb{R} \\ (x, r) & \mapsto & (x + \alpha \mod 1,\ \ r + \varphi_\beta(x)) \end{array}, \qquad \varphi_\beta(x) = \chi_{(0,\beta)} - \beta, \tag{3}$$

其中 $(\alpha,\ \beta) \in S^1 \times S^1$ 已由多位作者进行了深入研究。关于 $S_{\alpha,\ \beta}$ 相对于圆周与实数线上的勒贝格测度之积的遍历性的部分结果，最早由 Schmidt [21], 针对 $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\beta = \frac{1}{2}$，以及由 Conze 和 Keane [9], 针对任意 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ \beta = \frac{1}{2}$得出。随后，Oren [16] 对此作了推广，他根据余循环$S_{\alpha,\ \beta}$ 的遍历性质给出了完整分类。具体而言，他证明了对于每个无理数 $\alpha \in S^1$, 映射 $S_{\alpha,\ \beta}$ 是遍历的，当且仅当 β 是有理数，或者 1，α 与 β 在有理数域上线性无关；其中，当 β 为有理数时，斜积定义在 $S^1 \times \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ 上，并配备勒贝格测度与计数测度的乘积测度，而 q 是 β 的最小可能分母。

具体而言，就本文的主题而言，取 $\beta = \frac{1}{2}$ 并将 φ_β 与映射 $\frac{1}{2}(\chi_{(0,\ 1/2)} - \chi_{(1/2,1)}) = \frac{1}{2}f$，等同，上述结果表明，对于任意由两个区间构成的极小区间交换变换，映射 T_f（如式（1）所示）是遍历的。

Hellekalek 和 Larcher [13]、Pask [17]、Conze 和 Piękniewska [10] 还发现了其他一些旋转上的遍历扭积族，它们考虑了不同类别的扭函数。

当交换区间的数量大于或等于 3 时，目前尚无此类完整结果。Conze 和 Frączek [8]构造了一族遍历扭积，其底变换是自相似区间交换变换，余循环由一个在各交换区间上为常数的分段连续函数给出。Ralston 和 Troubetzkoy [18] 证明了某个二参数族的区间交换变换上的一类奇值分段常数扭积具有遍历性。最近，Chaika 和 Robertson [7]证明，对于有界型区间交换变换和典型的分段常数余循环，相应的扭积是遍历的。还需指出，与某些曲面上的流的遍历性相关，区间交换变换上若干特定类别的扭积的遍历性也已得到证明 [5, 11, 19]。

请注意，尽管上述扭积相对于所述乘积测度可能是遍历的，但通常并非唯一遍历。例如，根据 Aaronson 等人的一项结果，对于几乎处处的 [2]，$(\alpha, \beta) \in S^1 \times S^1$，由 (3) 给出的扭积 $S_{\alpha,\beta}$ 存在无穷多个彼此不同（不成比例）的局部有限遍历测度，称为*Maharam* 测度。

最后，我们提一下，文献中也存在关于非遍历性的结果。事实上，Frączek 和 Ulcigrai [12] 构造了一族源自某些无限台球系统的扭积，其遍历分解极其复杂且并非平凡。

1.3. **对称区间交换变换上的遍历性实例**。本文证明，对于单位区间上的几乎每个对称区间交换变换 T（精确定义见第 3 节），带有余循环 $f = \chi_{(0,1/2)} - \chi_{(1/2,1)}$ 的扭积 T_f 相对于勒贝格测度与计数测度的乘积是遍历的（见定理 2.1）。据我们所知，这是交换区间数大于 2 时首个关于全测度集合的结果。这也部分回答了 [7]中的问题 1.4。然而，底层置换的对称性假设在我们的论证中起着关键作用，而且似乎无法将证明方法推广到一般的组合数据。因此，对于典型区间交换变换上、带有余循环 $f = \chi_{(0,1/2)} - \chi_{(1/2,1)}$，且不受组合数据限制的扭积，其遍历性问题仍未解决。

2. 主要结果

我们的目标是证明以下结论。

定理 2.1. 设 $f\colon [0,1) \to \mathbb{Z}$ 由 $f = \chi_{(0,1/2)} - \chi_{(1/2,1)}$ 给出。那么，对于几乎所有作用于 $[0,1)$ 上的对称区间交换变换 T，由 (1) 给出的扭积 $T_f\colon [0,1) \times \mathbb{Z} \to [0,1) \times \mathbb{Z}$ 相对于勒贝格测度与计数测度的乘积测度都是遍历的。

请注意，上文考虑的扭积的遍历指数均为 *1*，也就是说，自同构 $T_f \times T_f\colon ([0, 1) \times \mathbb{Z})^2 \to ([0,1) \times \mathbb{Z})^2$ 对于勒贝格测度与计数测度的乘积的平方而言，从来不是遍历的。事实上，请注意，对于几乎处处的

点对 $(x, y) \in [0, 1)^2$，我们有 $f(x) + f(y) = 0$模 2。这意味着集合 $[0, 1)^2 \times G$，其中$G \subset \mathbb{Z}^2$是由 $(1, 1)$和 $(-1, 1)$生成的子群，是一个非平凡的 $T_f \times T_f$-不变子集。

在描述证明的结构之前，我们先指出，定理 2.1 无法推广到所有关于勒贝格测度遍历的对称区间交换变换。事实上，如果 T 是一个对称区间交换变换，且1_2 是某个交换区间的左端点，那么

$$f = \chi_{(0,1/2)} - \chi_{(1/2,1)} = \chi_{(0,1/2)} - \chi_{(0,1/2)} \circ T,$$

也就是说，函数 f 关于 T是一个余边界，这意味着*Birkhoff* 和$S_n f(x)$（定义见式（5））在 $x \in [0, 1)$和 $n \in \mathbb{N}$上一致有界，从而阻碍了 T_f的遍历性。

2.1. **证明策略**。 我们将利用本质值 ——一种用于证明遍历性的关键工具——来证明主要结果。正如我们将在第 4 节回顾的那样，在相当一般的条件下，这些本质值刻画了斜积的遍历性（定理 4.1）。此外，对于诸如（1）中的系统，我们可以通过部分刚性序列 给出遍历性的充分条件（命题 4.2）（这些对象的精确定义见第 4 节）。我们将利用 IET 的对称性假设，控制形如 $S_n f(\frac{1}{2})$的 Birkhoff 和（见推论 5.3），从而构造这些集合序列；同时，通过控制1_2 在与 T 的*Rauzy-Veech* 诱导 相关的 Rohlin 塔中的位置，将这种控制推广到更大的集合（见第 3 节和第 6 节）。此前已有研究证明了这种位置控制 [6]，而我们在此给出的精确表述（见引理 6.1）是其中结果的直接推论。

如前所述，我们的方法无法使我们对对称以外的置换得到类似结果。事实上，要证明非平凡本质值的存在，最关键的要素之一是找到任意大的时刻 $n \in \mathbb{N}$，使得伯克霍夫和$S_n f$ 在一个相对较大的集合上统一有界。为此，在第 5 节中，我们利用了这样一个事实：每个对称区间交换变换都与其逆变换共轭，而共轭映射由区间的对称反射给出。这一性质是对称区间交换变换所特有的；据我们所知，目前没有其他方法能够将我们的结果推广到一般情形。

2.2. **文章结构**。 本文余下部分将用于证明定理 2.1。第 3 节介绍区间交换变换的必要背景，并引入全文所用的记号。第 4 节回顾本质值的概念，以及有关扭积遍历性的其他一些事实和判据，主要取自 [8]。接下来，第 5 节介绍一些关于对称区间交换变换和奇余循环 （见定义 5.1）的事实，这些内容将在证明主要结果时发挥关键作用。本节可与 [6] 的部分内容对照，其中提出了利用对称置换假设来处理一类特殊奇余循环的思路。值得指出的是，尽管 [6] 中使用的奇余循环定义与本文给出的定义不同，但这些假设所产生的效果相似。第 6 节介绍一项关于典型区间交换变换 T 的 Rauzy-Veech 诱导所关联的 Rokhlin 塔中1_2 位置的结果，该结果取自 [6]。最后，我们在第 7 节证明主要结果。

3. 区间交换变换

现在我们介绍本文中将使用的对象。我们的记号主要沿用 [4]。回顾一下，定义在有界区间上的区间交换变换（*IET*） T 是 I 上的一个双射，且为分段平移。这样的映射完全由交换区间的数量、它们的长度，以及变换前后的排列顺序决定。更确切地说，我们可以借助一个含有 $d \geqslant 2$ 个元素的有限字母表 $\mathcal{A}$ 来编码一个 IET，并用它为交换区间 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$编索引；还需要一个长度向量 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ 来描述这些区间的长度，也就是说，

$$\lambda_\alpha = |I_\alpha|, \quad \text{for every } \alpha \in \mathcal{A},$$

其中 $|J|$ 表示任意子区间 $J \subseteq I$的长度，而置换 π 则编码了交换顺序。由于区间以有限字母表 $\mathcal{A}$中的元素为索引，我们将 π 视为一对$\pi = (\pi_0, \pi_1)$，其中 $\pi_0, \pi_1 \colon \mathcal{A} \to \{1, \ldots, d\}$ 分别是描述交换前后区间顺序的双射。

在本文中，讨论置换为 π的区间交换变换时，我们始终假设该置换是不可约的，也就是说，不存在 $1 \leqslant k < d$使得 $\pi_1\circ\pi_0^{-1}(\{1, \ldots, k\}) =\{1, \ldots, k\}$。否则，该系统会分裂成两个子系统，二者都是区间交换变换，可以分别讨论。我们用 $S^{\mathcal{A}}$表示有限字母表 $\mathcal{A}$ 上所有不可约置换的集合。

本文主要关注对称置换，即满足以下条件的置换$\pi = (\pi_0, \pi_1) \in S^{\mathcal{A}}$

$$\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(k) = d + 1 - k, \quad \text{for every } k \in \{1, \ldots, d\}.$$

我们将具有对称组合数据的区间交换变换称为对称区间交换变换。

通常，给定区间交换变换的长度向量 λ 是 $\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$中的一个元素。然而，有时考虑归一化长度的集合很有用，也就是满足

$$|\lambda| = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha = |I| = 1.$$

在这种情况下， λ 是实正单位单纯形中的一个元素

$$\Lambda^{\mathcal{A}} := \left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}} \mid |\lambda| = 1\right\}.$$

从现在起，如果不存在混淆的风险，我们将经常把区间交换变换 T 与上文定义的一个有序对$(\pi, \lambda) \in S^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ 视为同一对象。我们在 $\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$和 $\Lambda^{\mathcal{A}}$ 上赋予勒贝格测度。

研究典型区间交换变换（相对于 $S^{\mathcal{A}}$ 上的计数测度与 $\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$上的勒贝格测度的乘积）的性质时，一个重要工具是***Rauzy-Veech*** 归纳，记作 R。这一归纳过程通过考察到区间 $I\backslash I_{\pi_0^{-1}(d)}$ 或 $I\backslash I_{\pi_1^{-1}(d)}$（取较长者）的首次返回映射，为几乎处处的区间交换变换 $(\pi, \lambda) \in S^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$（其交换区间为 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$）指定另一个区间交换变换 $R(\pi, \lambda) \in S^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$（特别地，这个新的区间交换变换与初始变换具有相同数量的交换区间）。如果这两个区间长度相同，那么 R 就没有明确定义。不过，这种情况是例外，因为对于几乎处处的区间交换变换 $(\pi, \lambda) \in S^{\mathcal{A}}\times\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$，归纳 R 可以无限次迭代。为简单起见，我们假设 R 对每个区间交换变换都有定义。

给定 $T=(\pi,\lambda)\in S^{\mathcal{A}}\times\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们记 $T_n=R^n(\pi,\lambda)=(\pi^n,\lambda^n)$。$T_n$ 的定义域记作 I^n，而 T_n 交换的区间记作 $\{I_\alpha^n\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$。

使用 Rauzy-Veech 归纳的主要原因之一 R 是为给定的区间交换变换 $T=(\pi,\ \lambda)$构造 Rokhlin 塔。具体而言，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们考虑区间 I_α^n 及其回归时间，并通过 T将其映射到 I^n，记为 $h_\alpha^n\in\mathbb{N}$。这样，我们得到 d 个不同的 Rokhlin 塔，其形式为 $\{I_\alpha^n,\ T(I_\alpha^n),\ \ldots\ldots,\ T^{h_\alpha^n-1}(I_\alpha^n)\}$，其中 $\alpha\in\mathcal{A}$；我们将它们称为***Rauzy-Veech*** 塔。不难看出，T 在每一层塔上都通过平移作用。

满足 $\mathfrak{R}\times\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$在 R 的作用下保持不变的不可约置换 $\mathfrak{R}\subseteq S^{\mathcal{A}}$的极小非空集合称为***Rauzy*** 类。与区间交换变换 $R^n(\pi,\ \lambda)$ 相关联的置换序列称为***Rauzy*** 轨道。Rauzy 轨道的任意有限子段 γ 称为***Rauzy*** 路径，其长度记为 $|\gamma|$。若 Rauzy 路径 γ 满足：对于沿该路径 γ 经 Rauzy-Veech 归纳后得到的每个 $(\pi,\ \lambda)$ 以及每个 $\alpha,\ \beta\in\mathcal{A}$，都存在 $0\leqslant k<h_\alpha^{|\gamma|}$使得 $T^k(I_\alpha^{|\gamma|})\subset I_\beta^{|\gamma|}$，则称该路径为正 路径。根据 [14, 引理 1.2.4], ，对于任何可以无限次迭代 Rauzy-Veech 归纳的区间交换变换，存在 $n\in\mathbb{N}$，使得经过 n 次 Rauzy-Veech 归纳后得到的 Rauzy 路径是正路径。

还可以考虑归一化 ***Rauzy-Veech*** 归纳 $\tilde{R}:\ S^{\mathcal{A}}\times\Lambda^{\mathcal{A}}\to S^{\mathcal{A}}\times\Lambda^{\mathcal{A}}$，它将每个区间交换变换 $(\pi,\ \lambda)\in S^{\mathcal{A}}\times\Lambda^{\mathcal{A}}$ 映射为区间交换变换 $R(\pi,\ \lambda)$ 并按定义域的长度进行线性缩放。Masur [15] 和 Veech [22]独立获得的以下著名结果说明了这一对象的重要性。

定理 3.1。对于每个 ***Rauzy*** 类 $\mathfrak{R}\subseteq S^{\mathcal{A}}$，归一化 ***Rauzy-Veech*** 归纳 $\tilde{R}$ 在 $\mathfrak{R}\times\Lambda^{\mathcal{A}}$ 上的限制相对于一个不变无限测度是遍历的。此外，该测度等价于 $\mathfrak{R}$ 上的计数测度与$\Lambda^{\mathcal{A}}$上的勒贝格测度的乘积。

我们回顾一下关于 Rauzy-Veech 塔的回归时间和正 Rauzy 路径的以下众所周知的事实。

命题 3.2. 设 γ 是 $S^{\mathcal{A}}$中的一条有限正 ***Rauzy*** 路径。存在 $\rho(\gamma)>0$，使得对于每个 ***IET*** $(\pi$、$\lambda)\in S^{\mathcal{A}}\times\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ 以及每个 $n\geqslant|\gamma|$，如果对 $R^{n-|\gamma|}(\pi$作用 $|\gamma|$ 次后由 R 得到的 ***Rauzy*** 路径 $\lambda)$ 等于 γ，那么

$$\max_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}\frac{h_\alpha^n}{h_\beta^n}<\rho(\gamma).$$

这是由 [23] 中的命题 4.23 直接得出的。事实上，可以验证，γ 为正这一事实等价于与 γ 相关联的所谓 ***Rauzy*** 矩阵 为正（精确定义请参见 [23] ）。上述结果最重要的一点是，常数 $\rho(\gamma)$ 与区间交换变换的具体参数无关。

一种常见的策略（我们也采用这种策略）是控制 Rauzy-Veech 塔的基底长度和高度：固定一个置换 π （在我们的情形中是对称置换），选取一个适当的正勒贝格测度集 $A\subseteq\Lambda^{\mathcal{A}}$（它对应于基底可能的长度），使得对于每个 $\lambda\in A$，(π,λ) 的 Rauzy 轨道都以同一条正的 Rauzy˜路径 γ 结束；然后利用 R 的遍历性，得到由 R 作用后落在集合 $\{\pi\}\times A$中的迭代所对应的基底长度和 Rauzy-Veech 塔高度的所需比例。注意，在这种情形下，高度比例的控制可由命题 3.2 得出。

有关区间交换变换和 Rauzy-Veech 归纳的更多详细信息，请读者参阅 [23] 和 [24]。

4. 扭积与本质值

我们打算通过本质值来研究扭积的遍历性，这一概念最初由 Schmidt 在 [20]中引入。

设 $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个保概率变换， $\varphi\colon X \to G$ 是一个可测余循环，其中 $(G, +)$ 是配有哈尔测度 ν_G的局部紧阿贝尔群。设$\|\cdot\|_G$ 是 G 上的一个生成拓扑的（群）范数（参见 [1, 推论 1.6.10]）。若对任意满足 $\mu(A) > 0$ 的 $A \in \mathcal{B}$ 以及任意 $\epsilon > 0$，都存在满足下式的$n \in \mathbb{N}$，则称 $a \in G$是 T_φ 的一个本质值。

$$\mu\left\{x \in A \,\middle|\, T_\varphi^n(x, 0) \in A \times \{g \in G \mid \|g - a\|_G < \epsilon\}\right\} > 0.$$

我们用 $Ess(T_\varphi)$表示 T_φ 的所有本质值组成的集合。

以下结果表明，可以用本质值来刻画遍历性。关于证明及更多细节，感兴趣的读者可参见 [1, §8.2]。

定理 4.1 (本质值判据)。 假设 $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个遍历的保概率变换，且 $\varphi\colon X \to G$ 可测，其中 G 是一个带有哈尔测度 ν_G 的局部紧阿贝尔群。那么， $Ess(T_\varphi) = \varnothing$ 或 $Ess(T_\varphi)$ 是 G 的闭子群。此外，扭积 T_φ 关于 $\mu \times \nu_G$ 遍历，当且仅当 $Ess(T_\varphi) = G$。

利用以下定义，我们将给出充分条件，以判定一个整数是否为紧致度量空间上、具有 $\mathbb{Z}$ 值余循环的扭积的本质值。给定紧致度量空间 X 上的保概率变换 $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$，称 X 的一列可测子集 $(\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为部分刚性序列，如果存在一个自然数递增序列 $(\mathfrak{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$（称为刚性时刻）以及 $\delta > 0$，使得:

(i) $\mu(\Xi_n) \to \delta > 0$, (ii)
$\mu(\Xi_n \Delta T(\Xi_n)) \to 0$, (iii)
$\sup_{x\in\Xi_n} d(x, T^{\mathfrak{h}_n} x) \to 0$。

在这种情况下，我们称 $(\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是沿刚性时刻序列 $(\mathfrak{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一列 δ-部分刚性集。

对于取整数值的扭曲函数，可以根据部分刚性序列和伯克霍夫和（定义见下文 (5)），给出某个整数成为扭积本质值的充分条件，如下所述。

命题 4.2 （取整数值余循环的本质值， [8]中的推论 2.8）。设 $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ 是紧致度量空间 X 上的一个遍历保概率变换，并设$\varphi\colon X \to \mathbb{Z}$ 是 $L^1(X, \mu)$ 中一个零均值取整数值余循环。假设存在部分刚性集 $(\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 及其对应的刚性时刻 $(\mathfrak{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $S_{\mathfrak{h}_n}\varphi|_{\Xi_n} = a$ （见下文（5））， 其中某个 $a \in \mathbb{Z}$。那么 $a \in Ess(T_\varphi)$。

5. 对称区间交换变换与对合

回顾一下，对于任意区间交换变换 $T=(\pi,\lambda)$，其逆变换 T^{-1} 也是一个作用于相同数量区间上的区间交换变换，并可表示为 $T^{-1}=(\overline{\pi},\lambda)$，其中

$$\overline{\pi}=(\overline{\pi}_0,\overline{\pi}_1)=(\pi_1,\pi_0).$$

也就是说，T^{-1} 按照 π. 交换区间 $\{T(I_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$。特别地，如果 T是对称区间交换变换，那么 T^{-1} 也是对称区间交换变换。

我们用 $\mathcal{I}$ 表示区间 $[0,1]$ 上由下式给出的对合

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{I}\colon & [0,1] & \to & [0,1]\\ & x & \mapsto & 1-x\end{array}.$$

容易验证，如果 $T=(\pi,\lambda)\in S^{\mathcal{A}}\times\Lambda^{\mathcal{A}}$ 是作用于 $[0,1]$ 上的对称区间交换变换，那么

$$T^{-n}\circ\mathcal{I}=\mathcal{I}\circ T^n, \tag{4}$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。事实上，对于 $n=1$，若 $x\in I_\alpha$，则

$$T(x)=x-\sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)}\lambda_\beta+\sum_{\pi_1(\beta)<\pi_1(\alpha)}\lambda_\beta.$$

注意，由于 T是对称的，$1-x\in T(I_\alpha)=\mathcal{I}(I_\alpha)$。因此

$$\begin{aligned}T^{-1}(1-x)&=1-x-\sum_{\overline{\pi}_0(\beta)<\overline{\pi}_0(\alpha)}\lambda_\beta+\sum_{\overline{\pi}_1(\beta)<\overline{\pi}_1(\alpha)}\lambda_\beta\\&=1-x-\sum_{\pi_1(\beta)<\pi_1(\alpha)}\lambda_\beta+\sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)}\lambda_\beta\\&=1-T(x).\end{aligned}$$

因此 $T^{-1}\circ\mathcal{I}=\mathcal{I}\circ T$。对于 $n\geqslant 1$，现在通过归纳法即可轻易得到性质 **(4)**。由于 $\mathcal{I}$是一个对合，即 $\mathcal{I}^2=$ 恒等，因此 $\mathcal{I}\circ T^{-1}=T\circ\mathcal{I}$，进而再次通过归纳法可知，性质 **(4)** 对每个 $n\leqslant -1$都成立。

对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，我们将关于 T的 φ 的伯克霍夫和 记为：$[0,\ 1)\to\mathbb{R}$

$$S_n\varphi(x):=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(T^ix) & \text{if } n\geqslant 1,\\ 0 & \text{if } n=0,\\ -\sum_{i=-n}^{-1}\varphi(T^ix) & \text{if } n\leqslant 1,\end{cases} \tag{5}$$

为简洁起见，我们在记号中省略对 T 的依赖。

下面关于余循环的假设对于获得相对于非对称区间交换变换的伯克霍夫和估计至关重要（见引理 5.2）。

定义 5.1. 若函数 $\varphi\colon[0,1)\to\mathbb{R}$ 满足对每个 $x\in(0,1)$ 都有

$$\varphi(x)=-\varphi\circ\mathcal{I}(x).$$

注意，函数 $f=\chi_{(0,1/2)}-\chi_{(1/2,1)}$ 是奇函数。

引理 5.2. 假设 T 是一个对称区间交换变换，且 $\varphi:\ [0,1)\to\mathbb{R}$ 是奇数。那么，对于每个 $n\geqslant 0$，我们有

$$S_{n+1}\varphi(\tfrac{1}{2})=S_{-n}\varphi(\tfrac{1}{2}).$$

证明. 设 $n \geqslant 0$。由于 φ是奇数，我们有 $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$。此外， $\mathcal{I}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$。因此，

$$S_{n+1}\varphi(\tfrac{1}{2}) = \sum_{i=0}^{n} \varphi\big(T^i(\tfrac{1}{2})\big) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\big(T^i(\tfrac{1}{2})\big) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\big(T^i \circ \mathcal{I}(\tfrac{1}{2})\big).$$

于是，由 (4) 得

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi\big(T^i \circ \mathcal{I}(\tfrac{1}{2})\big) = \sum_{i=-n}^{-1} \varphi\big(\mathcal{I} \circ T^i(\tfrac{1}{2})\big) = -\sum_{i=-n}^{-1} \varphi(T^i(\tfrac{1}{2})) = S_{-n}\varphi(\tfrac{1}{2}),$$

由此证明完毕。

□

推论 5.3. 假设 T 是一个对称区间交换变换，且 φ： $[0,1) \to \mathbb{R}$ 为奇数。那么，对每个$n \geqslant 0$, 都有

$$S_{2n}\varphi(T^{-n}(\tfrac{1}{2})) = -\varphi(T^n(\tfrac{1}{2})).$$

证明。 这由引理 5.2 得出。事实上，注意到

$$S_{-n}\varphi(x) = -S_n\varphi(T^{-n}(x)), \qquad S_{2n}\varphi(x) = S_n\varphi(x) + S_n\varphi(T^n(x))$$

因此

$$S_{2n}\varphi(T^{-n}(x)) = S_n\varphi(x) - S_{-n}\varphi(x)$$

对于任意 $x \in [0,\ 1)$ 以及任意 $n \in \mathbb{Z}$。因此，由引理 5.2 可得

$$S_{2n}\varphi(T^{-n}(\tfrac{1}{2})) = S_n\varphi(\tfrac{1}{2}) - S_{n+1}\varphi(\tfrac{1}{2}) = -\varphi(T^n(\tfrac{1}{2})).$$

□

6. Rauzy-Veech 归纳与中心的位置

给定一个交换区间 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 的区间交换变换 T，对每个 $\alpha \in \mathcal{A}$，我们将区间 I_α 的中心记为 $c_\alpha \in I_\alpha$。类似地，对每个 $\alpha \in \mathcal{A}$，我们将区间 I_α^n 的中心记为 c_α^n。对任意 $x \in I$ 和任意 $n \in \mathbb{N}$, 我们将 x 在 I^n 上的投影 记为 $p_n(x)$，即 $p_n(x) = T^{-l}(x)$, 其中 $l \geqslant 0$ 是满足 $T^{-l}(x) \in I^n$ 的最小自然数。

下面的引理给出了关于区间中心在 Rauzy-Veech 塔中的位置，以及 $_{1\ 2}$ 的关键信息。

引理 6.1。 对于几乎每个对称区间交换变换 $T = (\pi, \lambda)$，以及每个具有正勒贝格测度的子集 $A \subseteq \Lambda^{\mathcal{A}}$，都存在一条有限的正 ***Rauzy*** 路径 γ 和一个递增序列$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$， T_{n_k} 都是对称的， $\frac{\lambda^{n_k}}{|\lambda^{n_k}|} \in A$，在 T_{n_k} 之前的最后$|\gamma|$ 次 ***Rauzy-Veech*** 归纳步骤所对应的 ***Rauzy*** 路径为 γ，并且

$$\{p_{n_k}(c_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{p_{n_k}(\tfrac{1}{2})\} = \{c_\alpha^{n_k} \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{|I^{n_k}|/2\}.$$

上述结果由 [6, 引理 3.12]得出。要得到引理 6.1，只需在 [6]中引理 3.12 的证明里，将集合 U 替换为集合 A （根据引理 6.1 的假设）。

引理 6.1 是在 Rauzy-Veech 塔中定位 $_{1\ 2}$ 的关键步骤之一。更确切地说，对于任意 $k \geqslant 1$, 该引理表明，$_{1\ 2}$ 属于定义域 I^{n_k} 的中点或 T_{n_k}所交换的某个区间的中点的正向轨道。此外，在后一种情形下，显然 $_{1\ 2}$ 是其所属 Rauzy-Veech 塔中该层的中点

。要在 $p_{n_k}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}|I^{n_k}|$ 的情形下获得类似的控制，只需假设 $\frac{1}{2}|I^{n_k}|$ 与 T_{n_k} 的任一间断点相距足够远。

正如我们将在下一节看到的，在满足定理 2.1 的假设并适当选取集合 $A \subseteq \Lambda^{\mathcal{A}}$ 后，对与引理 6.1 给出的重整化时刻相对应的 Rauzy-Veech 塔中1_2 的位置进行恰当控制（见断言 A1），再结合推论 5.3，将使我们能够构造命题 4.2 中的刚性集。

7. 定理 2.1 的证明

本节通过证明 -1 是 T_f 的一个本质值，来证明我们的主要结果。回顾定理 4.1 和命题 4.2 可知，这足以保证该斜积具有遍历性。为此，我们利用 f 的跳跃间断来构造命题 4.2 中的刚性集。事实上，利用推论 5.3 和引理 6.1（在适当选取集合 A 后），我们将证明，对于几乎处处的对称区间交换变换 T，存在一个递增序列 $(\mathfrak{h}_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $S_{\mathfrak{h}_k} f(\frac{1}{2}) = 0$。因此，对于固定的 $k \geqslant 1$，并假设1_2不属于 T 的任何一个间断点的轨道，若 x 从左侧（分别从右侧）充分接近1_2，则有 $S_{\mathfrak{h}_k} f(x) = 1$（分别有 $S_{\mathfrak{h}_k} f(x) = -1$）。利用引理 6.1 确定$1_2$的位置，我们将证明可以把这些估计（例如 $S_{\mathfrak{h}_k} f(x) = -1$）扩展为一列集合 $(\Xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的部分刚性序列，其刚性时刻由 $(\mathfrak{h}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 给出。

上文描述的序列 $\mathfrak{h}_k$ 将被选为 Rauzy-Veech 归纳的 n_k 步中若干个 Rohlin 塔高度之和，其中 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是由引理 6.1 给出的序列。此外，正如我们将在证明中看到的，为了证明上述性质，关键在于点 $T^{-\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$，$T^{\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$ 属于与1_2 相同的底层和相同的 Rohlin 塔，并且这三个点始终相对靠近它们所属底层的中点。正如我们将在下文解释的，由于 T 是对称区间交换变换，只要交换区间的长度相当，就可以轻易实现这一点。

有鉴于此，我们将 A 定义为

$$A = \left\{ \lambda \in \Lambda^{\mathcal{A}} \;\middle|\; \tfrac{1}{d} - \tfrac{1}{100d^3} < \lambda_\alpha < \tfrac{1}{d} + \tfrac{1}{100d^3}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \right\}, \tag{6}$$

如果 d 为奇数，或

$$A = \left\{ \lambda \in \Lambda^{\mathcal{A}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \frac{1}{d-1} - \frac{1}{100d^3} < \lambda_\alpha < \frac{1}{d-1} + \frac{1}{100d^3}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}\backslash\{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(2)\}; \\ \frac{3}{7}(\frac{1}{d-1} - \frac{1}{100d^3}) < \lambda_{\pi_0^{-1}(1)} < \frac{3}{7}(\frac{1}{d-1} + \frac{1}{100d^3}); \\ \frac{4}{7}(\frac{1}{d-1} - \frac{1}{100d^3}) < \lambda_{\pi_0^{-1}(2)} < \frac{4}{7}(\frac{1}{d-1} + \frac{1}{100d^3}). \end{array} \right\}, \tag{7}$$

如果 d 是偶数。我们之所以区分这两种情况，是因为引理 6.1 并未精确说明1_2 在 Rauzy-Veech 塔中的位置，而是至多给出 $d+1$ 种不同的可能性。因此，沿着引理 6.1 给出的子序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$，1_2 始终可能位于 I^{n_k} 中点的正向轨道上。如果在偶数情形下，我们像奇数情形那样精确地选取集合 A，那么在前述情形中，1_2 就会靠近 T_{n_k} 的一个不连续点，因而也会靠近它所属的 Rokhlin 塔底层的边界。如前所述，为了将从1_2 出发的伯克霍夫和估计推广到较大的部分刚性序列，我们希望避免这种情况。为解决这一问题，我们在偶数情形下对集合 A 的长度施加了稍微不那么平衡的条件。常数3_7 和4_7 的选取使得交换区间中心的足够长轨道不会过于

靠近 T_{n_k} 的不连续点。除这一细微的技术差异外，两种情形下的证明基本相同。

我们通过考察一个特例，进一步说明这个集合的定义为何合理：对于所有 $\alpha \in \mathcal{A}$，若 d 为奇数，则 $\lambda_\alpha = \frac{1}{d}$；若 d 为偶数，则对于 $\alpha \in \mathcal{A}\backslash\{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(2)\}$，有 $\lambda_{\pi_0^{-1}(1)} = \frac{3}{7(d-1)}$、$\lambda_{\pi_0^{-1}(2)} = \frac{4}{7(d-1)}$、$\lambda_\alpha = \frac{1}{d-1}$。注意，集合 A 不过是由这些参数的小扰动构成的一个开集。考虑一个长度由 λ 给出的对称区间交换变换 T_0。在这种情况下，1 2 是 T_0 的不动点，并与 c_β 重合，其中 $\beta = \pi_0^{-1}(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor)$。若 d 为奇数，则对于 $\alpha \in \mathcal{A}$，中心点 c_α 是 T_0 的 2-周期点。另一方面，若 d 为偶数，则 $c_{\pi_0^{-1}(1)}$、$c_{\pi_0^{-1}(2)}$ 和 $c_{\pi_0^{-1}(d)}$ 不再是 2-周期点，而其余中心点仍是 2-周期点。然而，对于 $\alpha \in \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(2), \pi_0^{-1}(d)\}$，迭代点 $T_0^4(c_\alpha)$ 和 $T_0^{-4}(c_\alpha)$ 到 c_α 的距离为 $\frac{1}{7(d-1)}$，因此属于 I_α，且远离其边界。因此，给定一个满足引理 6.1 中条件的区间交换变换 T，使得其第 n_k 次 Rauzy-Veech 重整化 T_{n_k} 接近 T_0，若将 $\mathfrak{h}_k$ 定义为相关 Rokhlin 塔的两个或四个高度之和（取决于 1 2 所属的塔），则根据引理 6.1，我们可以保证 $T^{-\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$ 和 $T^{\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$ 与 1 2 位于同一层、同一 Rokhlin 塔中，并且它们都相对接近该层的中部。还值得补充的是，在偶数情形下，点 $T_0^{-4}\big(c_{\pi_0^{-1}(d)}\big)$ 和 $c_{\pi_0^{-1}(d)}$ 在 T_0 的前四次迭代中经过相同的交换区间，尽管顺序不同。不过，正如本例所示，每个区间经过的总次数相同这一事实，足以比较这两个点的轨道。

根据 d 是奇数还是偶数，按式 (6) 或 (7) 定义 A。由引理 6.1 给出 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和 γ。我们将使用命题 4.2 证明 -1 是 T_f 的一个本质值；由此根据定理 4.1 可知，T_f 是遍历的。要应用命题 4.2，我们需要定义适当的部分刚性集及其刚性时刻。为此，关键在于控制 $1\ 2$ 在由引理 6.1 所给重整化序列对应的 Rauzy-Veech 塔中的位置，并为这些塔的适当子集找到刚性时刻。事实上，找到适当的子塔，使其在某个刚性时刻之前的迭代都避开 $1\ 2$，便可构造刚性集，使得伯克霍夫和在这些刚性时刻上为常数。

根据引理 6.1，存在 $\alpha \in \mathcal{A}$，必要时取一个子序列后，$\frac{1}{2} \in T^{\ell_k}(I_\alpha^{n_k})$ 对某个 $0 \leqslant \ell_k < h_\alpha^{n_k}$ 成立，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都如此。下文中，我们记 $I_\alpha^n = [l_\alpha^n, r_\alpha^n)$。回忆一下，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $c_\alpha^n = \frac{1}{2}(l_\alpha^n + r_\alpha^n)$ 表示区间 I_α^n 的中点。

我们首先在 d 为奇数的假设下证明定理 2.1，并将其称为情形 A。偶数情形的证明称为情形 B，采用类似的方法，并将在证明末尾进行概述。

情形 A： d **为奇数。** 我们在图 1 中展示了这一情形。首先考察通过 Rauzy-Veech 归纳得到的区间长度之间的关系。

断言 A1。 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\max_{\beta,\beta' \in \mathcal{A}} \left|\lambda_\beta^{n_k} - \lambda_{\beta'}^{n_k}\right| < \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{40d^2}.$$

断言 A1 的证明。 根据 A 的定义，我们得到

$$\max_{\beta,\beta' \in \mathcal{A}} \left|\lambda_\beta^{n_k} - \lambda_{\beta'}^{n_k}\right| < \frac{1}{50d^3} < \frac{100d\lambda_\alpha^{n_k}}{99} \cdot \frac{1}{50d^3} < \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{40d^2},$$

因为

$$\frac{100d\lambda_\alpha^{n_k}}{99} > \frac{100d}{99}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{100d^3}\right) = \frac{100 - \frac{1}{d^2}}{99} > 1.$$

□

现在我们在 Rauzy-Veech 塔中定位 1 2 。

断言 A2。对于任意 $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} \in \left(T^{\ell_k}(c_\alpha^{n_k}) - \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{10}, T^{\ell_k}(c_\alpha^{n_k}) + \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{10}\right). \tag{8}$$

断言 *A2* 的证明。 固定 $k \in \mathbb{N}$。根据引理 6.1，要么 $\frac{1}{2} = T^{\ell_k}(c_\alpha^{n_k})$，要么 $\frac{1}{2} = T^{\ell_k}(|I^{n_k}|/2)$。在第一种情况下，(8) 显然成立。

在后一种情况下，由于 $\frac{1}{2} = T^{\ell_k}(|I^{n_k}|/2) \in T^{\ell_k}(I_\alpha^{n_k}),$，因此 $|I^{n_k}|/2 \in I_\alpha^{n_k}$，并且根据集合 A 的选取，我们有 $\pi_0(\alpha) = \#\frac{A+1}{2}$ 。

因此，根据断言 A1，

$$\left|c_\alpha^{n_k} - \frac{|I^{n_k}|}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|l_\alpha^{n_k} + r_\alpha^{n_k} - |I^{n_k}|\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{\pi_0(\beta)<\frac{\#A+1}{2}} \lambda_\beta^{n_k} + \sum_{\pi_0(\beta)\leqslant\frac{\#A+1}{2}} \lambda_\beta^{n_k} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}} \lambda_\beta^{n_k}\right|$$

$$\leqslant \frac{d}{2}\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{40d^2} < \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{10}.$$

由于 T^{ℓ_k} 通过平移作用于 $I_\alpha^{n_k}$,

$$\left|T^{\ell_k}(c_\alpha^{n_k}) - \frac{1}{2}\right| = \left|T^{\ell_k}(c_\alpha^{n_k}) - T^{\ell_k}(|I^{n_k}|/2)\right| = \left|c_\alpha^{n_k} - \frac{|I^{n_k}|}{2}\right| < \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{10},$$

这意味着 (8) 成立。 □

设 $\overline{\alpha} = \pi_1^{-1}(\pi_0(\alpha))$. 。符号 α 对应于与以 α 为指标的区间对称排列的区间；也就是说，它满足 $\pi_0(\alpha) = d + 1 - \pi_0(\alpha)$。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，令

$$\mathfrak{h}_k := h_\alpha^{n_k} + h_{\overline{\alpha}}^{n_k}.$$

现在，我们定义 I^{n_k} 的一个子区间序列，该序列相对于 T_{n_k} 和 $\mathfrak{h}_k$ 具有良好的刚性性质。这些集合将用于为 T 定义一个集合的部分刚性序列。

断言 A3. 对于任意 $k \in \mathbb{N}$，以下结论成立。

(i) $\left(c_\alpha^{n_k} - \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}, c_\alpha^{n_k} + \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right)$ *is a continuity interval for* $T_{n_k}^{\pm 2} = T^{\pm\mathfrak{h}_k}$.

(ii) $T_{n_k}^{\pm 1}\left(c_\alpha^{n_k} - \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}, c_\alpha^{n_k} + \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right) \subseteq I_{\overline{\alpha}}^{n_k}$ *and* $T_{n_k}^{\pm 2}\left(c_\alpha^{n_k} - \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}, c_\alpha^{n_k} + \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right) \subseteq I_\alpha^{n_k}$.

(iii) $c_\alpha^{n_k} - \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5} < T^{\mathfrak{h}_k}\left(c_\alpha^{n_k} - \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right) < T^{-\ell_k}\left(\frac{1}{2}\right) < T^{\mathfrak{h}_k}\left(c_\alpha^{n_k} + \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right) < c_\alpha^{n_k} + \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}$.

断言 *A3* 的证明。我们来证明

$$|T_{n_k}(c_{\overline{\alpha}}^{n_k}) - c_\alpha^{n_k}| < \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{40}, \qquad |T_{n_k}(c_\alpha^{n_k}) - c_{\overline{\alpha}}^{n_k}| < \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{40}. \tag{9}$$

由于 $c_{\overline{\alpha}}^{n_k}$是由 T_{n_k} 交换的区间之一的中心，且 $\pi^{n_k} = \pi$ 是对称的，$T_{n_k}(c_\alpha^{n_k}) = |I^{n_k}| - c_\alpha^{n_k}$。因此 – –

$$T_{n_k}(c_{\overline{\alpha}}^{n_k}) = \frac{1}{2}(|I^{n_k}| - l_{\overline{\alpha}}^{n_k}) + \frac{1}{2}(|I^{n_k}| - r_{\overline{\alpha}}^{n_k}) = \frac{1}{2}\sum_{\pi_0(\beta)\geqslant\pi_0(\overline{\alpha})} \lambda_\beta^{n_k} + \frac{1}{2}\sum_{\pi_0(\beta)>\pi_0(\overline{\alpha})} \lambda_\beta^{n_k}.$$

由于 $\pi^{n_k}=\pi$ 是对称的,

$$\#\{\beta\in\mathcal{A}\mid \pi_0(\beta)>\pi_0(\overline{\alpha})\}=\#\{\beta\in\mathcal{A}\mid \pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)\}.$$

结合断言 A1，由前述关系可得

$$\begin{aligned}|T_{n_k}(c_{\overline{\alpha}}^{n_k})-c_\alpha^{n_k}| &= \frac{1}{2}\left|\sum_{\pi_0(\beta)\geqslant\pi_0(\overline{\alpha})}\lambda_\beta^{n_k}+\sum_{\pi_0(\beta)>\pi_0(\overline{\alpha})}\lambda_\beta^{n_k}-\sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)}\lambda_\beta^{n_k}-\sum_{\pi_0(\beta)\leqslant\pi_0(\alpha)}\lambda_\beta^{n_k}\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left|\sum_{\pi_0(\beta)\geqslant\pi_0(\overline{\alpha})}\lambda_\beta^{n_k}-\sum_{\pi_0(\beta)\leqslant\pi_0(\alpha)}\lambda_\beta^{n_k}\right|+\frac{1}{2}\left|\sum_{\pi_0(\beta)>\pi_0(\overline{\alpha})}\lambda_\beta^{n_k}-\sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)}\lambda_\beta^{n_k}\right|\\ &\leqslant \frac{d}{2}\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{20d^2}<\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{40}.\end{aligned}$$

这证明了不等式 (9) 的第一个部分。第二个不等式的证明完全类似。

我们来验证，方程 (9) 与断言 A1 和断言 A2 一起，能够推出该断言的结论。我们先证明 $\mathfrak{h}_k$ 的 (i) 和 (ii)，因为 $-\mathfrak{h}_k$ 的证明思路相同。由于

$$\left(c_\alpha^{n_k}-\frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5},c_\alpha^{n_k}+\frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right)\subseteq I_\alpha^{n_k}$$

并且 $T_{n_k}|_{I_\alpha^{n_k}}=T^{h_\alpha^{n_k}}$，由 (9) 可得

$$\begin{aligned}T^{h_\alpha^{n_k}}\left(c_\alpha^{n_k}-\frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5},c_\alpha^{n_k}+\frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right) &\subseteq \left(c_{\overline{\alpha}}^{n_k}-\frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}-\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{40},c_{\overline{\alpha}}^{n_k}+\frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}+\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{40}\right)\\ &=\left(c_{\overline{\alpha}}^{n_k}-\frac{17\lambda_\alpha^{n_k}}{40},c_{\overline{\alpha}}^{n_k}+\frac{17\lambda_\alpha^{n_k}}{40}\right).\end{aligned}$$

根据断言 A1，取 $\beta=\alpha$ 和 $\beta'=\alpha$，可得 $-$

$$\lambda_\alpha^{n_k}<\frac{40}{39}\lambda_{\overline{\alpha}}^{n_k}.$$

Thus

$$T^{h_\alpha^{n_k}}\left(c_\alpha^{n_k}-\frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5},c_\alpha^{n_k}+\frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right)\subseteq\left(c_{\overline{\alpha}}^{n_k}-\frac{17\lambda_{\overline{\alpha}}^{n_k}}{39},c_{\overline{\alpha}}^{n_k}+\frac{17\lambda_{\overline{\alpha}}^{n_k}}{39}\right)\subseteq I_{\overline{\alpha}}^{n_k}.$$

特别地，我们得到了 (ii) 中的第一个包含关系。由于 $I_\alpha^{n_k}$是 T_{n_k}和 $T_{n_k}|_{I_\alpha^{n_k}}=T^{h_\alpha^{n_k}}$的连续区间，因此得到 (i) 。为了得到 (ii) 中的第二个包含关系，注意到同样由 (9) 可得

$$T^{h_\alpha^{n_k}}\left(c_{\overline{\alpha}}^{n_k}-\frac{17\lambda_\alpha^{n_k}}{40},c_{\overline{\alpha}}^{n_k}+\frac{17\lambda_\alpha^{n_k}}{40}\right)\subseteq\left(c_{\overline{\alpha}}^{n_k}-\frac{9\lambda_\alpha^{n_k}}{20},c_{\overline{\alpha}}^{n_k}+\frac{9\lambda_\alpha^{n_k}}{20}\right)\subseteq I_\alpha^{n_k}.$$

为了证明 (iii)，根据断言 A2，只需证明

$$c_\alpha^{n_k}-\tfrac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}<T^{\mathfrak{h}_k}\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\big)<c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{10}\tag{10}$$

and

$$c_\alpha^{n_k}+\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{10}<T^{\mathfrak{h}_k}\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\big)<c_\alpha^{n_k}+\tfrac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}.$$

我们将证明第一个不等式；后一个不等式的证明类似。由 (9) 可得

$$T^{\mathfrak{h}_k}\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\big)=T_{n_k}^2\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\big)>\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{20}\big)>\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\big)$$

and

$$T^{\mathfrak{h}_k}\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\big)=T_{n_k}^2\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\big)<\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}+\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{20}\big)<\big(c_\alpha^{n_k}-\tfrac{\lambda_\alpha^{n_k}}{10}\big),$$

这就证明了 (10)。

□

通过取底层 $T^{\ell_k}(I_\alpha^{n_k})$ 的一个适当子区间的原像，我们可以构造一个集合，在该集合上可以很好地控制 f 的第 $\mathfrak{h}_k$ 个伯克霍夫和。记

$$q_k := \min_{\alpha\in\mathcal{A}} h_\alpha^{n_k}, \tag{11}$$

对任意 $k \geqslant 1$。

断言 A4. 设 $k \in \mathbb{N}$。对任意 $x \in T^{-i}\left(T^{\ell_k}\left(c_\alpha^{n_k} - \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}, \underline{c_\alpha^{n_k}} + \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right)\right)$ 以及任意 $0 \leqslant i < q_k$,

$$S_{\mathfrak{h}_k} f(x) - S_{\mathfrak{h}_k} f(\tfrac{1}{2}) = f(T^i(x)) = \begin{cases} 1 & if \quad T^i(x) < \frac{1}{2}, \\ 0 & if \quad T^i(x) = \frac{1}{2}, \\ -1 & if \quad T^i(x) > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{12}$$

证明。 由断言 A3 中的 (i) 和 (ii)，给定 $x \in T^{-i}\left(T^{\ell_k}(c_\alpha^{n_k}) - \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5},\ T^{\ell_k}(c_\alpha^{n_k}) + \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right)$，对于某个 $0 \leqslant i < q_k$，在塔 $\bigcup_{j=0}^{h_\alpha^{n_k}-1} T^j(I_\alpha^{n_k})$ 和 $\bigcup_{j=0}^{h_\alpha^{n_k}-1} T^j(I_\alpha^{n_k})$. 的每一层中，$\{x,\ T(x),\ \ldots\ldots,\ T^{\mathfrak{h}_k-1}(x)\}$ 中恰有一个点

由于1 2是 f和 $T^i(x), \frac{1}{2} \in T^{\ell_k}(I_\alpha^{n_k})$唯一的不连续点,

$$S_{\mathfrak{h}_k} f(x) - S_{\mathfrak{h}_k} f(\tfrac{1}{2}) = f(T^i(x)) - f(\tfrac{1}{2}) = f(T^i(x)),$$

而该断言的证明可由 f的形式直接得出。 □

考虑到前面的断言，我们定义如下 Rokhlin 塔序列 $(\Xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\Xi_k := \bigcup_{i=0}^{q_k-1} T^{-i}(B_k), \qquad B_k := T^{\ell_k}\left(c_\alpha^{n_k} + \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{5}, c_\alpha^{n_k} + \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right),$$

对于任意 $k \in \mathbb{N}$，其中 q_k 由 (11) 给出。注意，我们选取1 2 右侧的一个子区间作为 Rokhlin 塔的基底，并且 Ξ_k 包含在至多两个 Rokhlin 塔的并集中。作此选择是为了使得对于任意 $x \in \Xi_k$，(12) 右端的值等于 -1。

Let 下面证明 $(\Xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(\mathfrak{h}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为 T 定义了一个满足以下条件的部分刚性序列

$$S_{\mathfrak{h}_k} f \mid_{\Xi_k} = -1. \tag{13}$$

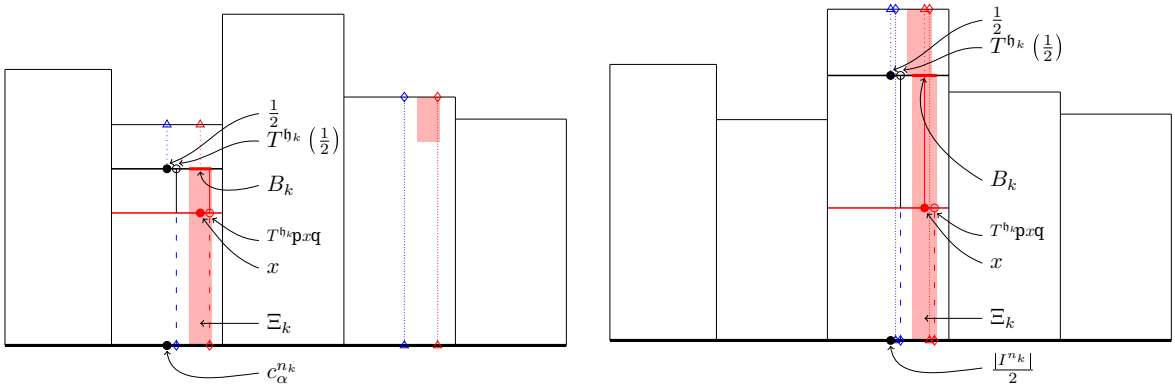
注意，$\mathrm{Leb}(\Xi_k) = q_k \cdot \lambda_\alpha^{n_k}$。由于引理 6.1 给出的 Rauzy 路径 γ 是正的且固定，命题 3.2 结合集合 A 的选取可得

$$1 = \sum_{\beta\in\mathcal{A}} h_\beta^{n_k}\lambda_\beta^{n_k} \leqslant 2d\rho(\gamma)q_k\lambda_\alpha^{n_k} = 10d\rho(\gamma)\mathrm{Leb}(\Xi_k),$$

对于任意 $k \in \mathbb{N}$，其中 $\rho(\gamma) > 0$ 是命题 3.2 给出的常数。因此，通过取一个子序列，我们可以假设

$$\delta := \lim_{k\to\infty} \mathrm{Leb}(\Xi_k) > 0.$$

由于 $|I^{n_k}| \to 0$ as $k \to \infty$，前一个等式结合断言 A3 中的 (ii) 表明，$(\Xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 T 的部分刚性序列，其刚性时刻为 $(\mathfrak{h}_k)_{k\in\mathbb{N}}$。



(i) $\alpha = \pi_0^{-1}(2)$。 (ii) $\alpha = \pi_0^{-1}(\frac{d+1}{2})$ 和 $\frac{1}{2} = T^{\ell_k}(|I^{n_k}|/2)$。

图 1. 情形 A: $d = \#\mathcal{A}$ 为奇数。通过不同的虚线模式，上图展示了如何将伯克霍夫和 $S_{\mathfrak{h}_k} f(\frac{1}{2})$ 与 $S_{\mathfrak{h}_k} f(x)$ 分成数值相同的部分，但包含$_1$ $_2$的底层上的点除外。由于$_1$ $_2$ 是 f 的唯一不连续点，若 $_1$ $_2$ 不在 x 的正向轨道上，这些 $\mathfrak{h}_k$ 阶伯克霍夫和相差 ± 1。

固定 $k \in \mathbb{N}$，下面证明 (13) 成立。注意，由断言 A3 中的 (iii) 和断言 A4 可知，$S_{\mathfrak{h}_k} f\,|_{\Xi_k}$ 是常数，并且满足

$$S_{\mathfrak{h}_k} f\,|_{\Xi_k} = S_{\mathfrak{h}_k} f(\tfrac{1}{2}) - 1. \tag{14}$$

由 (8) 和断言 A3 中的 (iii) 可得，

$$T^{-\mathfrak{h}_k}(\tfrac{1}{2}), \tfrac{1}{2}, T^{\mathfrak{h}_k}(\tfrac{1}{2}) \in T^{\ell_k}\left(c_\alpha^{n_k} - \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}, c_\alpha^{n_k} + \frac{2\lambda_\alpha^{n_k}}{5}\right).$$

由推论 5.3 和应用于 $T^{-\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$ 的断言 A4 可得，

$$-f(T^{\mathfrak{h}_k}(\tfrac{1}{2})) = S_{2\mathfrak{h}_k} f(T^{-\mathfrak{h}_k}(\tfrac{1}{2})) = S_{\mathfrak{h}_k} f(T^{-\mathfrak{h}_k}(\tfrac{1}{2})) + S_{\mathfrak{h}_k} f(\tfrac{1}{2}) = 2S_{\mathfrak{h}_k} f(\tfrac{1}{2}) + f(T^{-\mathfrak{h}_k}(\tfrac{1}{2})).$$

因此，由于 $T^{-\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2} < T^{\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$ 或 $T^{\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2} < T^{-\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$，

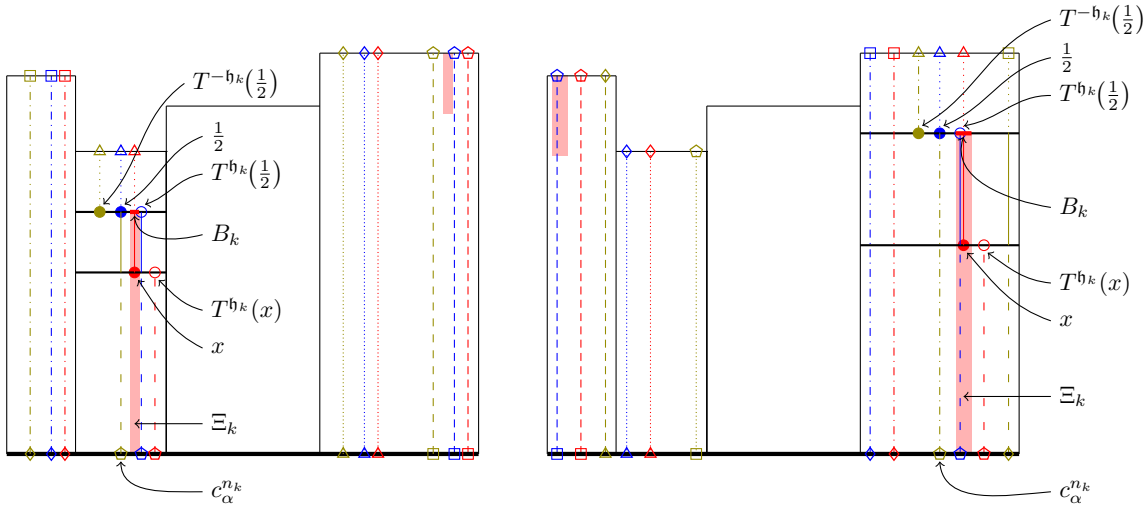
$$S_{\mathfrak{h}_k} f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}\big(-f(T^{\mathfrak{h}_k}(\tfrac{1}{2})) - f(T^{-\mathfrak{h}_k}(\tfrac{1}{2}))\big) = 0. \tag{15}$$

因此，由 (14) 可得方程 (13)。

由命题 4.2 可知，-1 是 T_f的一个本质值，因此，根据定理 4.1，T_f 是遍历的。这就完成了对 d 为奇数情形的证明。

情形 B： d **为偶数**。我们在图 2 中说明这一情形。请注意，在这种情况下，并非所有区间的大小都相近。不过，由于证明沿用情形 A 中的相同论证，我们不再给出完整证明，而是给出与断言 A1–A4 相应的陈述，以便完成证明。

断言 A1 的一个类似结论如下，其证明与断言 A1 的证明完全遵循相同的思路。



(i) $\alpha = \pi_0^{-1}(2)$。 (ii) $\alpha = \pi_0^{-1}(d)$。

图 2。 情形 B： $d = \#\mathcal{A}$ 为偶数。通过不同的虚线模式，上图展示了如何将伯克霍夫和 $S_{\mathfrak{h}_k} f(T^{-\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2}))$、 $S_{\mathfrak{h}_k} f(\frac{1}{2})$ 和 $S_{\mathfrak{h}_k} f(x)$ 分割成具有相同值的部分，但属于包含$_{1\ 2}$的底层的点除外。由于$_{1\ 2}$ 是 f 的唯一不连续点，如果$_{1\ 2}$ 不在 x 的正向轨道上，那么这些 $\mathfrak{h}_k$ 阶伯克霍夫和相差 ± 1。 –

断言 B1。 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们都有

$$\max\Big\{ \max_{\beta,\beta' \in \mathcal{A}\setminus\{\pi_0^{-1}(1),\pi_0^{-1}(2)\}} \Big|\lambda_\beta^{n_k} - \lambda_{\beta'}^{n_k}\Big|, \max_{\beta \in \mathcal{A}\setminus\{\pi_0^{-1}(1),\pi_0^{-1}(2)\}} \Big|\lambda_\beta^{n_k} - \tfrac{7}{3}\lambda_{\pi_0^{-1}(1)}^{n_k}\Big|, \max_{\beta \in \mathcal{A}\setminus\{\pi_0^{-1}(1),\pi_0^{-1}(2)\}} \Big|\lambda_\beta^{n_k} - \tfrac{7}{4}\lambda_{\pi_0^{-1}(2)}^{n_k}\Big|, \Big|\tfrac{7}{3}\lambda_{\pi_0^{-1}(1)}^{n_k} - \tfrac{7}{4}\lambda_{\pi_0^{-1}(2)}^{n_k}\Big| \Big\} < \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{40d^2}.$$

如果 $\alpha \notin \{\pi_0^{-1}(1),\ \pi_0^{-1}(2),\ \pi_0^{-1}(d)\}$，则在情形 B 中，定理 2.1 的其余证明与情形 A 相同，只需使用断言 B1 代替断言 A1。唯一的区别在于 $\alpha \in \mathcal{A}$ 的选择，也就是说，我们取 $\bar{\pi}_0(\alpha) = d + 2 - \pi_0(\alpha)$。下面我们专注于 $\alpha \in \{\pi_0^{-1}(1),\ \pi_0^{-1}(2),\ \pi_0^{-1}(d)\}$ 的情形。

对于 $\alpha \in \{\pi_0^{-1}(1),\ \pi_0^{-1}(2),\ \pi_0^{-1}(d)\}$，断言 A2 保持不变。

Take

$$\mathfrak{h}_k := h_{\pi_0^{-1}(1)}^{n_k} + h_{\pi_0^{-1}(2)}^{n_k} + 2h_{\pi_0^{-1}(d)}^{n_k}.$$

事实证明，正如下方断言 B3 中的 (ii) 所示，对于所有 $\alpha \in \{\pi_0^{-1}(1),\ \pi_0^{-1}(2),\ \pi_0^{-1}(d)\}$，这一选择都是通用的。

如果 $\alpha \in \{\pi_0^{-1}(1),\ \pi_0^{-1}(2),\ \pi_0^{-1}(d)\}$，断言 A3 在情形 B 中并不成立。主要原因是，与情形 A 相比， $T_{n_k}^{\pm i}$ 的连续区间（其中 $i = -4, \ldots, 4$）周围的区间中心要小得多。下面给出断言 A3 的一种替代说法。

断言 B3。 对于任意 $\alpha \in \{\pi_0^{-1}(1)、\ \pi_0^{-1}(2)、\ \pi_0^{-1}(d)\}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，以下结论成立。

(i) $\left(c_\alpha^{n_k} - \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}, c_\alpha^{n_k} + \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}\right)$ 是 $T_{n_k}^{\pm 4} = T^{\pm \mathfrak{h}_k}$ 的一个连续性区间*(ii)*

$T_{n_k}^{i}\left(c_\alpha^{n_k} - \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}, c_\alpha^{n_k} + \frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}\right) \subseteq I_{\pi_0^{-1}(b(i,\alpha))}^{n_k}$，其中 $i = -4, \ldots\ldots, 4$，且

- $[b(i,\alpha)]_{i=-4}^{4}=[1,d,2,d,1,d,2,d,1]$，若 $\alpha=\pi_0^{-1}(1)$，
- $[b(i,\alpha)]_{i=-4}^{4}=[2,d,1,d,2,d,1,d,2]$，若 $\alpha=\pi_0^{-1}(2)$，
- $[b(i,\alpha)]_{i=-4}^{4}=[d,1,d,2,d,2,d,1,d]$，若 $\alpha=\pi_0^{-1}(d)$。

(iii) $c_\alpha^{n_k}-\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}<T^{-\ell_k}(\frac{1}{2})=c_\alpha^{n_k}<c_\alpha^{n_k}+\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}$.

由于集合 A 的定义中前两个区间的长度不同，断言 A4 略有变化。

断言 B4。令 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha\in\{\pi_0^{-1}(1),\pi_0^{-1}(2),\pi_0^{-1}(d)\}$。对于任意 $x\in T^{-i}\left(T^{\ell_k}\left(c_\alpha^{n_k}-\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50},c_\alpha^{n_k}+\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}\right)\right)$ 以及任意 $0\leqslant i<q_k$，

$$S_{\mathfrak{h}_k}f(x)-S_{\mathfrak{h}_k}f(\tfrac{1}{2})=f(T^i(x))=\begin{cases}1 & if\quad T^i(x)<\frac{1}{2},\\ 0 & if\quad T^i(x)=\frac{1}{2},\\ -1 & if\quad T^i(x)>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

这一断言的证明与断言 A4 的证明基本相同。事实上，只需将伯克霍夫和拆分成与各个塔对应的部分，并比较这些塔内伯克霍夫和的值即可（参见图 2 以及点1_2和 $T^{\pm\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$的轨道匹配）。更确切地说，对于任意 $x\in\left(c_\alpha^{n_k}-\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50},c_\alpha^{n_k}+\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}\right)$ 以及任意 $i=0,\dots,4$，根据 A 的定义，很容易得到 $T_{n_k}^i(x)\in I^{n_k}_{\pi_0^{-1}(b(i,\alpha))}$，其中

- $[b(i,\alpha)]_{i=0}^{4}=[1,d,2,d,1]$ 若 $\alpha=\pi_0^{-1}(1)$，
- $[b(i,\alpha)]_{i=0}^{4}=[2,d,1,d,2]$ 若 $\alpha=\pi_0^{-1}(2)$，
- $[b(i,\alpha)]_{i=0}^{4}=[d,2,d,1,d]$ 若 $\alpha=\pi_0^{-1}(d)$。

需要注意的是，尽管上述断言足以构造塔 Ξ_k，并比较其中各点的 Birkhoff 和与 $S_{\mathfrak{h}_k}f(\frac{1}{2})$，但在这种情况下，它不足以推导出方程（15），因为点 $T^{-\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$ 不属于区间 $T^{\ell_k}\left(c_\alpha^{n_k}-\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50},c_\alpha^{n_k}+\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}\right)$。然而，由于 $\frac{1}{2}\in T^{\ell_k}\left(c_\alpha^{n_k}-\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50},\ c_\alpha^{n_k}+\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}\right)$，根据断言 B3 中的 (ii)，对于每个 $i=0,\ \dots,4$，我们都有 $T_{n_k}^i\left(T^{-\ell_k}\left(T^{-\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})\right)\right)\in I^{n_k}_{\pi_0^{-1}(b(i-4,\ \alpha))}$，其中

- $[b(i-4,\alpha)]_{i=0}^{4}=[1,d,2,d,1]$ 若 $\alpha=\pi_0^{-1}(1)$，
- $[b(i-4,\alpha)]_{i=0}^{4}=[2,d,1,d,2]$ 若 $\alpha=\pi_0^{-1}(2)$，
- $[b(i-4,\alpha)]_{i=0}^{4}=[d,1,d,2,d]$ 若 $\alpha=\pi_0^{-1}(d)$。

上述经由T_{n_k}的前两条行程，与所有点 $x\in\left(c_\alpha^{n_k}-\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50},\ c_\alpha^{n_k}+\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}\right)$（尤其是 $T^{-\ell_k}(\frac{1}{2})$）的行程相同。因此，在这些情形下，可以像情形 A 中对（15）的证明那样，直接控制伯克霍夫和。最后一条行程有所不同，但关键在于，点1_2和 $T^{-\mathfrak{h}_k}(\frac{1}{2})$长度为 $\mathfrak{h}_k$的轨道经过相同的塔，只是顺序不同。这足以比较相应的伯克霍夫和，因为 f 是分段常数函数，而1_2 是其唯一的不连续点。

最后，利用上述列出的事实并沿用情形 A 中相同的论证，可以证明

$$\Xi_k:=\bigcup_{i=0}^{q_k-1}T^{-i}(B_k),\qquad B_k:=T^{\ell_k}\left(c_\alpha^{n_k}+\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{100},c_\alpha^{n_k}+\frac{\lambda_\alpha^{n_k}}{50}\right),$$

其中，q_k 由（11）给出，是满足$S_{\mathfrak{h}_k}f\mid_{\Xi_k}=-1.$ 的 T 的部分刚性序列。命题 4.2 和定理 4.1随后保证了 T_f 是遍历的。

致谢： 两位作者谨此感谢 Corinna Ulcigrai 一直以来的支持，以及围绕这一主题所进行的多次讨论。我们还要感谢 Jamerson Bezerra、Davide Ravotti 以及匿名审稿人，他们帮助提高了本文的质量。第一作者还要感谢夏季学校“模空间的几何与动力学”的组织者和演讲者。该夏季学校于 2022 年在博洛尼亚举行，我们的结果部分解决了开放问题环节中提出的问题。最后，两位作者感谢瑞士国家科学基金会 通过 Grant200021_188617/1提供的支持。第一作者还感谢国家科学中心（波兰） 提供的 OPUS 2022/45/B/ST1/00179 资助。第二作者在准备本项工作期间获得了 UZH 博士后资助（资助编号：FK-23-133）的部分支持。

参考文献

[1] Aaronson, J. 无限遍历理论导论，数学调查与专著第 50 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1997 年。[2] Aaronson, J., Nakada, H., Sarig, O., and Solomyak, R. 某些扭积的不变测度与渐近性质。以色列数学杂志 *128*，第 1 期（2002 年 12 月），93–134。[3] Atkinson, G. 余循环与随机游走的复返性。伦敦数学会杂志 *s2-13*，第 3 期（1976），486–488。_电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s2-13.3.486。[4] Berk, P. 逆向 Rauzy-Veech 算法与水平鞍连接。高等师范学校科学类数学年刊（2022 年 12 月），16–16。[5] Berk, P., and Trujillo, F. 以 (0,1/2) 的中心化示性函数为扭积函数的对称区间交换变换无限扩展的遍历性，2023 年 5 月。arXiv:2304.01868 [math].[6] Berk, P., Trujillo, F., and Ulcigrai, C. 区间交换变换上显式对数余循环的遍历性，2023 年 8 月。arXiv:2210.16343 [math].[7]Chaika, J., and Robertson, D. 线性复返区间交换变换上的扭积的遍历性。伦敦数学会杂志 *100*，第 1 期（2019），223–248。_电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms.12210。[8] Conze, J.-P., and Frączek, K. 区间交换变换上的余循环与多值哈密顿流。数学进展 *226*，第 5 期（2011 年 3 月），4373–4428。[9] Conze, J. P., and Keane, M. 圆柱流的遍历性。雷恩数学与计算机科学出版物，第 2 期（1976），1–7。[10] Conze, J.-P., and Piękniewska, A. 关于无理旋转上仿射余循环的多重遍历性。以色列数学杂志 *201*，第 2 期（2014 年 4 月），543–584。[11] Frączek, K., and Schmoll, M. 关于半平移曲面的 $${\mathbb{Z}^d}$$-覆盖上的叶层遍历性及其在伊顿透镜周期系统中的若干应用。数学物理通讯 *362*，第 2 期（2018 年 9 月），609–657。[12] Frączek, K., and Ulcigrai, C. 非遍历的 $\mathbb{Z}$-周期台球与无限平移曲面。数学发明 *197*，第 2 期（2014 年 8 月），241–298。[13] Hellekalek, P., and Larcher, G. 关于一类扭积的遍历性。以色列数学杂志 *54*，第 3 期（1986 年 10 月），301–306。[14] Marmi, S., Moussa, P., and Yoccoz, J.-C. Roth 型区间交换映射的上同调方程。美国数学会杂志 *18*，第 4 期（2005），823–872。[15] Masur, H. 区间交换变换与测度叶层。数学年刊 *115*，第 1 期（1982），169–200。出版者：数学年刊。[16] Oren, I. 由分布不规则性产生的圆柱流的遍历性。以色列数学杂志 *44*，第 2 期（1983 年 6 月），127–138。[17] Pask, D. A. 无理旋转上的扭积。以色列数学杂志 *69*，第 1 期（1990 年 2 月），65–74。

[18] Ralston, D., and Troubetzkoy, S. 某些区间交换变换上的某些余循环的遍历性。离散与连续动力系统 *33*，第 6 期（2013），2523–2529。出版者：离散与连续动力系统。[19] Ralston, D., and Troubetzkoy, S. 平移曲面上周期群扩展的剩余泛遍历性。*Geometriae Dedicata 187*，第 1 期（2017 年 4 月），219–239。[20] Schmidt, K. 遍历变换群上的余循环。麦克米伦数学讲座，第 1 卷。印度麦克米伦有限公司，德里，1977 年。[21] Schmidt, K. 由分布不规则性产生的圆柱流。*Compositio Mathematica 36*，第 3 期（1978），225–232。[22] Veech, W. A. 区间交换映射空间上的高斯测度。数学年刊 *115*，第 2 期（1982），201–242。出版者：数学年刊。[23] Viana, M. 区间交换映射的遍历理论。*Revista Matemática Complutense 19*，第 1 期（2006 年 4 月），7–100。编号：1。[24] Yoccoz, J.-C. 区间交换映射与平移曲面。载于齐性流、模空间与算术，*Clay* 数学会议录第 10 卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2010 年，第 1–69 页。

尼古拉·哥白尼大学数学与计算机科学学院，波兰托伦市 Chopina 街 12/18 号，邮编 87-100电子邮箱地址：zimowy@mat.umk.pl 苏黎世大学数学研究所，瑞士苏黎世 Winterthurerstrasse 190 号，邮编 CH-8057

R-

兰电子邮箱地址：frank.trujillo@math.uzh.ch