非厄米系统的合成非阿贝尔规范场

Zehai Pang [1], 胡金兵 [1,2] 和 Yi Yang [1], *

[1]香港大学物理系，中国香港薄扶林 [2]上海理工大学光电信息与计算机工程学院，中国上海 200093

非阿贝尔规范场是合成拓扑现象的多功能工具，但迄今为止，相关研究大多集中在厄米系统中。在这类系统里，无论是阿贝尔规范场还是非阿贝尔规范场，都必须基于闭合回路定义规范通量，才能具有物理意义。我们提出并研究了一种具有不平衡非阿贝尔跃迁的广义 Hatano–Nelson模型，表明在非厄米系统中可以放宽这一条件。尽管一维系统中不存在规范通量，非阿贝尔规范场仍能带来丰富的非厄米拓扑效应。仅在最近邻耦合下，非阿贝尔规范场便可实现霍普夫链环体能带编织拓扑，其相变伴随着例外点（EPs）的出现。在开放链的两端，非阿贝尔规范场会使非厄米趋肤模同时存在，且其占据数可以得到有效调控。渐近分析表明，这种调控机制源于阿贝尔畑中–纳尔逊耦合与有效高阶跃迁之间的相互作用；在接近例外点相变条件时，这种相互作用会变得显著。非阿贝尔规范场所促成的这些非厄米现象，有望在合成维度光学平台中实现，例如时分复用光子网格晶格和受驱动的环形谐振腔。

arXiv:2304.01876v1 [physics.optics] 4 Apr 2023

与外部环境相互作用的开放物理系统，可由具有复数本征值的非厄米哈密顿量描述。与封闭系统相比，非厄米系统展现出丰富而独特的现象，例如功率振荡 [1–3], 单向隐形 [3, 4], 和异常点（EP）环绕 [5, 6], ，这些现象在厄米系统中没有对应物。除了像厄米系统那样由本征矢量定义的体不变量 [7–10] ，非厄米系统还展现出本征值拓扑 [11–20] ，这是因为本征能量从实数域扩展到了复数域。重要的是，具有非零本征值绕数的非厄米本征态，在开放系统中都会局域于边界，这种现象称为非厄米皮肤效应（NHSE） [7, 10, 21]。NHSE 已在光子学 [18, 22–25], 、声学 [26–28], 、力学 [29–31], 和电路 [32–37]中得到广泛实现。此外，人们引入了合成规范场，以便更好地控制非厄米系统 [38–43], ，但大多数研究都集中于阿贝尔规范场。

近年来，非阿贝尔物理在声学和光子学领域引起了广泛关注 [44–62]。特别是，非阿贝尔规范场利用粒子的内部自由度，成为在人工构造的物理系统中实现非阿贝尔物理的一种合成控制旋钮 [63]。这些规范场能够实现合成自旋轨道相互作用，并可用于构造非阿贝尔阿哈罗诺夫–玻姆干涉以及具有复规范结构的晶格模型。此外，近期实验已证明，可以在光纤 [45] 和电路 [64], 中构造并调节非阿贝尔规范场的基本构件，这表明它们适用于大型晶格系统。合成规范场的有效性在很大程度上取决于其维度。特别是，纯一维（1D）系统无法定义闭合回路及其对应的磁通量。因此，无论是阿贝尔还是非阿贝尔合成规范场，在一维厄米系统中都几乎不会产生物理效应。尽管利用冷原子实现的一维自旋轨道相互作用 [65]似乎是一个反例，但必须添加额外的塞曼项，拉什巴–德雷塞尔豪斯规范场才能变得非平凡。迄今为止，非阿贝尔规范场在非厄米系统中的研究仍然很少，而上述维度限制在这类系统中可能不再成立。

在本研究中，我们引入非阿贝尔规范场来产生非厄米性，并研究其对非厄米皮肤效应的调控。在仅有最近邻耦合的情况下，非阿贝尔畑中–纳尔逊模型的体能谱在复能量编织中形成霍普夫链环，而此前只有通过长程跃迁才能实现这一现象。霍普夫链环由编织度 ± 2 表征，其相变伴随着例外点的出现。非阿贝尔规范场使左、右局域皮肤模能够同时存在，且其占据数可调；绕数和非布洛赫计算均证实了这一点。渐近分析进一步表明，这种可调性在例外点相变附近最为显著，这是阿贝尔畑中–纳尔逊耦合与量级为 $4N-1$ （N 为整数）的有效高阶跃迁相互作用的结果。

Hatano–Nelson模型 [66] 是一个典型的一维系统，由于其非互易跃迁而展现出非厄米皮肤效应。我们首先通过引入 U(1)阿贝尔规范场扩展该模型，如（图1a）

$$\hat{H}_0 = \sum_m J_{\mathrm{L}} c_m^{\dagger} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{\mathrm{L}}} c_{m+1} + J_{\mathrm{R}} c_{m+1}^{\dagger} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{\mathrm{R}}} c_m. \tag{1}$$

这里，$c_m^{\dagger}$（c_m）是格点m处的产生（湮灭）算符，$J_{\mathrm{L(R)}}$ 是向左（向右）的实数跃迁振幅，而$\theta_{\mathrm{L(R)}}$ 是相应的跃迁相位。当 $\theta_{\mathrm{L}} = \theta_{\mathrm{R}} = 0$时，常规的 Hatano–Nelson模型得以恢复。我们可以将式（1）改写为$H_0(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_+} = J_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+\theta_-)} + J_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+\theta_-)}$，其中 $\theta_+ = (\theta_{\mathrm{L}} + \theta_{\mathrm{R}})/2$，且 $\theta_- = (\theta_{\mathrm{L}} - \theta_{\mathrm{R}})/2$。与厄米系统中一样，对 θ_- 作佩尔斯替换会作用于动量k。与此同时，在等式左侧，对 θ_+ 作佩尔斯替换会作用于复能量，即在复能量平面上旋转。因此，U(1)场只会导致

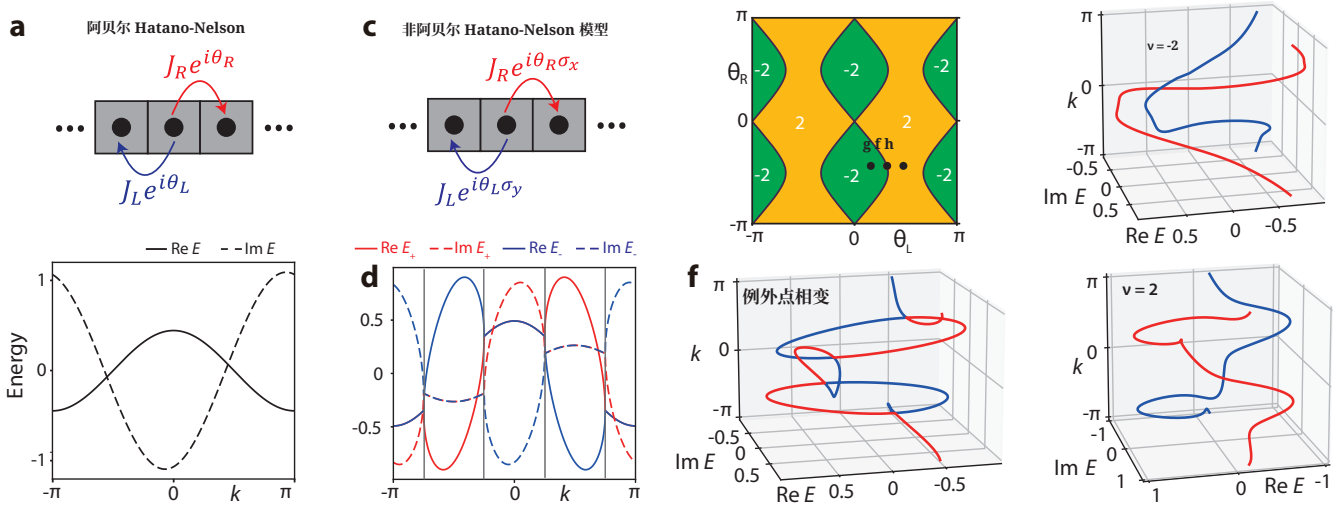

图1。**具有阿贝尔和非阿贝尔规范场的 Hatano–Nelson模型。a-b.** 具有非互易 U(1)跃迁相位的 Hatano–Nelson模型 (a) 及其单条非厄米能带 (b)，展现出绕数 $w = 1$。**c.** 具有非互易 SU(2)跃迁相位的 Hatano–Nelson模型。**d.** 两条非厄米能带（E_+ 和 E_-）在动量 $\{\pm\pi/4, \pm 3\pi/4\}$ 处展现出四个例外点（EPs）（灰色竖线）。**e.** 非阿贝尔畑中–纳尔逊模型在 $J_L/J_R = 7/6$ 条件下的相图，其中包含编织度为 $\nu = \pm 2$ 的霍普夫链环。其相变伴随着例外点的出现（黑色实线）。**f-h.** 两条能带在例外点相变 (f)、$\nu = -2$ (g) 和 $\nu = 2$ 霍普夫链环相 (h) 下，在 (Re E, Im E, k) 空间中的编织。这里全程采用 $J_L = 0.7$、$J_R = 0.6$ 和 $\theta_R = -1.38$；b、d 和 f 中分别为 $\theta_L = -1$，g 中为 $\theta_L = -0.5$，h 中为 $\theta_L = -1.5$，如 e 中黑点所示。

到对 Hatano–Nelson模型的平凡修改。这一点由图 1b 所示的能带得到证实，该能带在复能量平面上具有绕数 $w = +1$，其中 $w \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_k \arg(E(k) - E_b)\,\mathrm{d}k = \mathrm{sgn}(J_L - J_R)$ 分别表示±1逆时针（CCW）和顺时针（CW）旋转。

相比之下，引入 SU(2) 非阿贝尔规范场后，模型发生了显著改变（图1c）：

$$\hat{H} = \sum_m J_L c_m^\dagger e^{i\theta_L \sigma_y} c_{m+1} + J_R c_{m+1}^\dagger e^{i\theta_R \sigma_x} c_m, \qquad (2)$$

其中 σ_x 和 σ_y 为泡利矩阵。值得注意的是，在式（2）中，跃迁振幅（J_L、J_R）和非阿贝尔跃迁相位（θ_L、θ_R）均会导致非厄米性。这一特征使我们的系统区别于近期一项关于非厄米 Aubry–Andr´e–Harper 模型的研究 [67], ，在该研究中，仅有非阿贝尔现场势并不会导致非厄米性。式（2）的布洛赫哈密顿量为

$$H(k) = A(k)\sigma_0 + iJ_L \sin\theta_L e^{ik}\sigma_y + iJ_R \sin\theta_R e^{-ik}\sigma_x, \qquad (3)$$

其中

$$A(k) = J_L \cos\theta_L e^{ik} + J_R \cos\theta_R e^{-ik} \qquad (4)$$

以及 σ_0 单位矩阵。H 的本征能量由下式给出。

$$E_\pm(k) = A(k) \pm i\sqrt{J_L^2 \sin^2\theta_L e^{i2k} + J_R^2 \sin^2\theta_R e^{-i2k}}. \qquad (5)$$

方程（5）允许在 $k_{EP} = \{\pm\pi/4, \pm 3\pi/4\}$ 时出现例外点

$$J_L^2 \sin^2\theta_L = J_R^2 \sin^2\theta_R \qquad (6)$$

例外点条件已满足，如图中一个示例谱所示。1d.

式(5)中的两条能带在 (ReE,ImE, k) 空间中构成霍普夫链环（这与三维动量空间中的例外线链环 [68, 69]不同）。事实上，EP 条件式(6)是两种霍普夫链环之间能量编织的相变，这两种链环由编织度定义 [18] $\nu = \pm 2$ (图1e)，其中

$$\nu \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\ln\det\left(\hat{H}_k - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\hat{H}_k\right). \qquad (7)$$

图1f-g 证实了这一相变，其中具有相反编织度的霍普夫链环（图1g 和 h）出现在例外点相变（图1f）的两侧。霍普夫链环类型的非厄米能量编织此前已有报道，但需要更长程的跃迁，例如次最近邻耦合 [18, 19]。最近的一篇论文 [19], 通过使用构建块哈密顿量$\left(0, e^{ink}; 1, 0\right)$，其中$n = 2$会产生霍普夫链环。然而，在本文中，非阿贝尔规范场仅通过最近邻耦合就实现了霍普夫链环。因此，尽管无法定义规范通量，引入非阿贝尔规范场仍能充分驱动一维体中的非厄米拓扑相变，而这对于厄米系统是不可能的。效力

接下来，我们在图中展示非阿贝尔规范场如何丰富非厄米皮肤效应。2。我们计算了 H_0 和 H 在周期性边界条件（PBC）和开放边界条件（OBC）下的本征谱。H_0 和 H的 PBC 谱均在复平面上形成环绕零能量的闭合回路，表明存在点隙体拓扑，而它们的

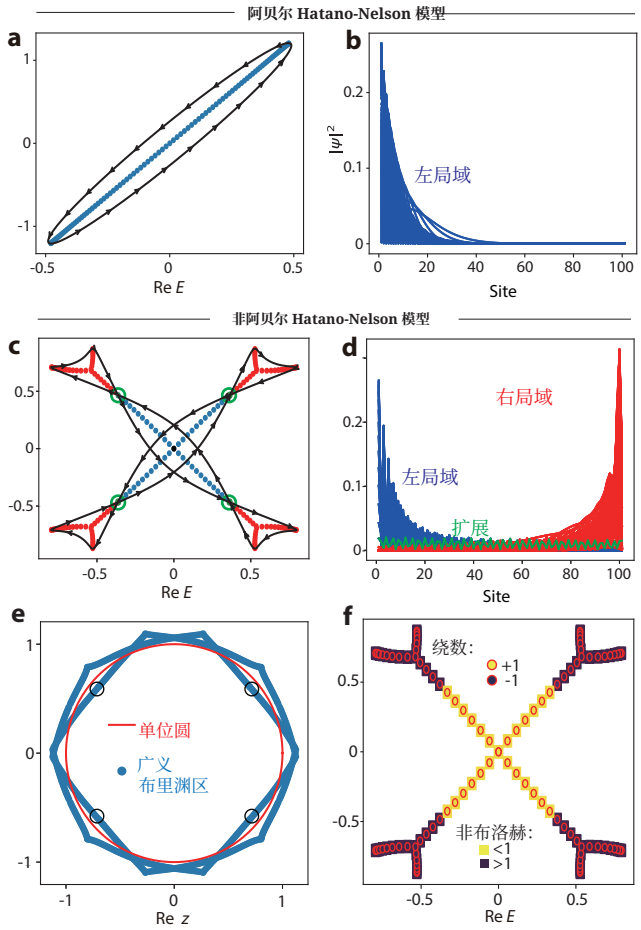

图 2. **非厄米趋肤效应分析。a–d.** 阿贝尔（a–b）和非阿贝尔（c–d）Hatano–Nelson 模型的周期边界（黑线）与开放边界（点）能谱（a 和 c）及本征态（b 和 d）。**e.** 局域化分析。单位圆（红色）与广义布里渊区（蓝色）相交，表明左局域态（位于单位圆内）和右局域态（位于单位圆外）同时存在。黑色圆圈表示零模解。**f.** 通过一致的非布洛赫（方块）和绕数（圆圈）计算，证实左局域和右局域同时存在。此处，$J_L = 0.7$，$J_R = 0.6$，$\theta_L = -2.5$，$\theta_R = -1.4$。

OBC 谱则变为开放弧 [15, 70, 71]。因此，PBC 和 OBC 谱在拓扑上截然不同，两种模型中都不可避免地会出现非厄米皮肤效应，这是拓扑相变的结果 [16]。在图2a 中，阿贝尔 H_0 的 PBC 谱呈椭圆形，显示出均匀的逆时针绕行；相应的 OBC 弧位于长轴上。根据 $|J_L/J_R| > 1$，所有 OBC 态都局域在链的左侧（图 2b），与传统的 Hatano–Nelson模型相同 [12]；这证实了我们先前的分析：U(1) 阿贝尔规范场只会导致平庸的佩尔斯替换，而不会改变非厄米皮肤效应。

相比之下，非阿贝尔烟中–纳尔逊模型中的非厄米皮肤效应H要丰富得多。在相同的参数组下，H 的周期性边界条件2（图 c）在 Hopf 的四个角和中心同时呈现顺时针和逆时针绕数链路，分别。因此，由这些区域所包围的开放边界条件弧应分别呈现向左（图 2c 中的蓝色）和向右（图 2c 中的红色）局域化，其同时存在可由图 2d 中本征态的可视化结果证实。同时，扩展态（图 2d 中的绿色）也出现在顺时针和逆时针绕数的边界处（图 2c 中的绿色圆圈）。这种向左和向右局域化同时存在的现象，无法仅用不平衡跃迁振幅（J_L，J_R）来解释。

我们采用非布洛赫 [7, 14, 17] 和绕数方法 [15] 来研究非阿贝尔规范场的影响。利用非布洛赫方法，对于一个开放边界条件能量 E，我们计算特征多项式 det[H(z) –E], ，这是 z 的四次函数（参见文献 [72] 的补充材料 S2 节）。因此，广义布里渊区（GBZ） [14]C_z 由 z_2 和 z_3 的轨迹确定，条件为 $|z_2| = |z_3|$，其中 z_2 和 z_3 是按绝对值升序排列后多项式的第二个和第三个解。与此同时，我们计算多带绕数（详情见补充材料 S3 节）$w \equiv \sum^{N} n=1 \int_{-\pi}^{\pi} dk \, _{2\pi} \partial_k \arg(E_n(k) - E_b)$，其中 E_b 是复开放边界条件能量基点，n 表示带指标，N 是能带总数。w 的符号表示局域化方向，即对于左局域和右局域，分别有 $w > 0$ 和 $w < 0$；对于扩展态，则有 $w = 0$。如图 2f 所示，我们的非布洛赫分析与绕数分析结果一致。

我们具体讨论开放边界条件下零模 $E = 0$ 的性质（详见补充材料第 S2 节）。与之对应的四个非布洛赫解为 $z = \pm i\sqrt{J_R/J_L}e^{\pm i\alpha}$，其中 $\alpha = \arctan\left(\sqrt{1 - F^2}/F\right)$ 且 $F = \cos(\theta_R)\cos(\theta_L)$。特征多项式的所有根的绝对值均相等，因此保证了开放边界条件下零模的存在，这可从复平面中 $E = 0$ 处的钉扎交叉看出（图 2c）。我们还证明，开放边界条件下的零模必为二重简并（补充材料第 S2 节）。此外，零模非布洛赫解的绝对值仅取决于跃迁振幅之比，这表明即使是 SU(2)规范场也无法改变零模的局域化方向（证明见补充材料第 S2 节）。

然而，非阿贝尔规范场可以有效调控非零模的局域化。非阿贝尔模型的广义布里渊区如图2e所示，同时包含位于单位圆内外的态；因此，这些态分别对应左局域和右局域。我们证明，利用阿贝尔 Hatano–Nelson 模型中的 U(1) 规范场无法实现这种对趋肤模的可调控性[，见公式（1）及 S2.A节中的证明]。

为进一步阐明不平衡跃迁振幅与非阿贝尔规范场之间的相互作用，我们在开放边界条件本征态中定义布居对比度 η，其表达式为

$$\eta(J_L, J_R, \theta_L, \theta_R) \equiv \frac{n_L - n_R}{n_L + n_R + n_E}, \tag{8}$$

其中 n_L、n_R和 n_E 分别为左局域态、右局域态和扩展态的数量。图3展示了占据数对比度随规范场（θ_L，θ_R）

在 (J_L,J_R) 的不同选择下。

图 3a 展示了在 $J_L = J_R$条件下左右局域化程度相等的分布，其中非阿贝尔规范场是非厄米性的唯一来源。 η 在由 $\sin^2(\theta_L) = \sin^2(\theta_R)$ 定义的 45 度线和 135 度线两侧变号，这正是例外点相变的条件。值得注意的是，当$J_L = J_R$时，周期性边界条件能谱塌缩为一条与开放边界条件能谱重叠的弧线。因此，所有开放边界条件能量点的绕数均为零，所有模态均为延展态。当 $\theta_L = \{0,\pi\}$ 或 $\theta_R = \{0,\pi\}$时，式（5）在 $J_L = J_R$条件下退化为传统的 Hatano-Nelson 能带，其周期性边界条件能谱同样塌缩为一条弧线，所有开放边界条件模态均为延展态；然而，此处不存在相变。

在图 3b 和 c 中，随着 J_L 与 J_R 之间的不平衡出现并加剧，非阿贝尔规范场的局域化可调性受到抑制，如红色区域缩小所示。至关重要的是，在例外点相变 [式（6）和图中的实线黑线附近，局域化调控最为有效（图 3中的颜色变化表明了这一点） 3]。

渐近分析（第 S4 节）表明，这种可调性的出现源于有效最近邻耦合与高阶 $[(4N-1)$-近邻耦合之间的竞争，其中 N 为整数] 。不失一般性地，我们假设 $J_L > J_R$ ，并得到本征能量 $E_{\pm}(k)$ 的渐近表达式（细节见第 S4 节） $\simeq$

$$\begin{cases} J_L e^{\pm i\theta_L} e^{ik} + J_R \cos\theta_R e^{-ik}, \text{ if } |J_L \sin\theta_L| \gg |J_R \sin\theta_R|, & (9a) \\ A(k) \pm i J_L \sin\theta_L e^{ik} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{1/2} \left[\left(\frac{J_R \sin\theta_R}{J_L \sin\theta_L} \right)^2 e^{-i4k} \right]^n & (9b) \\ \qquad \text{if } |J_L \sin\theta_L| \gtrapprox |J_R \sin\theta_R|, \\ A(k) \pm i J_R \sin\theta_R e^{-ik} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{1/2} \left[\left(\frac{J_L \sin\theta_L}{J_R \sin\theta_R} \right)^2 e^{i4k} \right]^n & (9c) \\ \qquad \text{if } |J_L \sin\theta_L| \lessapprox |J_R \sin\theta_R|, \\ J_L \cos\theta_L e^{ik} + J_R e^{\pm i\theta_R} e^{-ik}, \text{ if } |J_L \sin\theta_L| \ll |J_R \sin\theta_R|, & (9d) \end{cases}$$

其中 C 表示组合。在远离 EP 相变 [方程（9a）和（9d）], 时，系统表现得像一个具有修正跳跃振幅的常规 Hatano-Nelson 系统。具体而言，对于方程（9a），由于 $|J_L| > |J_R \cos\theta_R|$，可以保证完全左局域；而对于方程（9d），还需要满足 $|J_L \cos\theta_L| > |J_R|$。在 EP 相变附近，高阶项变得不可忽略，如方程（9b）和（9c）所示，它们分别与两种编织自由度相关。我们在图 3d 中绘出了两个灰色阴影区域 $|J_L \cos\theta_L| > |J_R| \cup |J_L \sin\theta_L| > |J_R \sin\theta_R|$。其互补参数空间以白色标示，在其附近不可忽略的有效高阶跃迁出现。上述分析表明，开链两端同时存在非厄米皮肤效应且局域化可调谐的现象应出现在白色区域附近，这一点已由图3b 中的数值计算验证。

总之，我们引入并研究非阿贝尔规范场，将其作为非厄米性的起源。在最近邻耦合下的广义非阿贝尔 Hatano–Nelson 系统中，

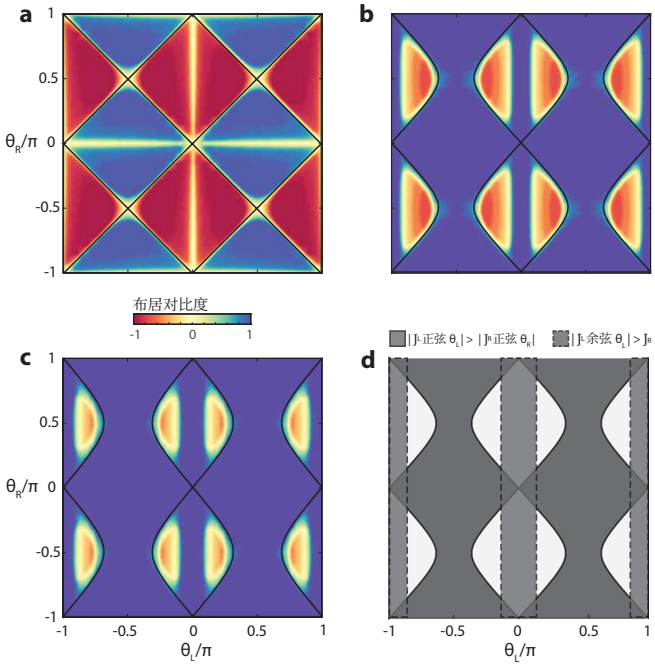

图 3. 利用非阿贝尔规范场调控非厄米局域化。a-c. 当 $(J_L, J_R) = (0.5, 0.5)$（a）、$(0.55, 0.5)$（b）和 $(0.6, 0.5)$（c）时，(θ_L, θ_R) 空间中的布居对比度 η [式 (8)]。黑色实线标示两个编织度之间的例外点相边界 $\nu = \pm 2$（见图 1e）。d. 渐近分析。有效高阶跃迁 [式 (9b) 和 (9c)] 在白色区域附近不可忽略，此处局域化调谐效果最为显著。在 d 中，我们采用 $(J_L, J_R) = (0.55, 0.5)$，与 b 中相同。

仅在此情况下，会出现霍普夫链结体编织度，其相变伴随着例外点的出现。在例外点相变附近，非阿贝尔规范场还会在开放链的两端产生非厄米皮肤效应，并且可以有效调控局域化种群。

最后，我们讨论在非厄米系统中实现非阿贝尔规范场的潜在实验平台。颇具前景的候选方案包括时间调制环形谐振器（即合成频率维度） [73]和时间复用光子网格晶格（即合成时间维度） [74]。在这两种情况下，我们都可以利用偏振作为赝自旋自由度。对于每个赝自旋分量，可以分别通过振幅和相位调制来设计跃迁强度和相位，从而生成所需的非阿贝尔规范场。实验上可观测的量可以是局域模式的占据数及其产生的对比度 η [，例如式（8）]，，其中前者可以通过频率分量的强度进行光谱测量，或者通过在对应于边界的到达时刻对脉冲强度进行时间分辨测量。

作者感谢香港大学启动基金以及国家自然科学基金优秀青年科学家基金（HKU 12222417）的资助。

* yiyg@hku.hk

[1] Z. Musslimani、K. G. Makris、R. El-Ganainy 和 D. N. Chris- todoulides，《物理评论快报》100，030402（2008）。[2] K. G. Makris、R. El-Ganainy、D. Christodoulides 和 Z. H. Musslimani，《物理评论快报》100，103904（2008）。[3] A. Regensburger、C. Bersch、M.-A. Miri、G. Onishchukov、D. N. Christodoulides 和 U. Peschel，《自然》488，167（2012）。[4] L. Feng、Y.-L. Xu、W. S. Fegadolli、M.-H. Lu、J. E. Oliveira、V. R. Almeida、Y.-F. Chen 和 A. Scherer，《自然材料》12，108（2013）。[5] T. Gao、E. Estrecho、K. Bliokh、T. Liew、M. Fraser、S. Brodbeck、M. Kamp、C. Schneider、S. H¨ofling、Y. Yamamoto 等，《自然》526，554（2015）。[6] J. Doppler、A. A. Mailybaev、J. B¨ohm、U. Kuhl、A. Girschik、F. Libisch、T. J. Milburn、P. Rabl、N. Moiseyev 和 S. Rotter，《自然》537，76（2016）。[7] S. Yao 和 Z. Wang，《物理评论快报》121，086803（2018）。[8] F. Song、S. Yao 和 Z. Wang，《物理评论快报》123，246801 2019( )。[9] F. K. Kunst、E. Edvardsson、J. C. Budich 和 E. J. Bergholtz，《物理评论快报》121，026808（2018）。[10] Y. Xiong，《物理学通讯》2，035043（2018）。[11] E. J. Bergholtz、J. C. Budich 和 F. K. Kunst，《现代物理评论》93，015005（2021）。[12] Z. Gong、Y. Ashida、K. Kawabata、K. Takasan、S. Higashikawa 和 M. Ueda，《物理评论 X》8，031079（2018）。[13] K. Kawabata、K. Shiozaki、M. Ueda 和 M. Sato，《物理评论 X》9，041015（2019）。[14] K. Yokomizo 和 S. Murakami，《物理评论快报》123，066404 2019( )。[15] K. Zhang、Z. Yang 和 C. Fang，《物理评论快报》125，126402 2020( )。[16] N. Okuma、K. Kawabata、K. Shiozaki 和 M. Sato，《物理评论快报》124，086801（2020）。[17] Z. Yang、K. Zhang、C. Fang 和 J. Hu，《物理评论快报》125，226402（2020）。[18] K. Wang、A. Dutt、C. C. Wojcik 和 S. Fan，《自然》598，59（2021）。[19] H. Hu 和 E. Zhao，《物理评论快报》126，010401（2021）。[20] D. S. Borgnia、A. J. Kruchkov 和 R.-J. Slager，《物理评论快报》124，056802（2020）。[21] T. E. Lee，《物理评论快报》116，133903（2016）。[22] S. Weidemann、M. Kremer、T. Helbig、T. Hofmann、A. Steg- maier、M. Greiter、R. Thomale 和 A. Szameit，《科学》368，311 2020( )。[23] K. Wang、A. Dutt、K. Y. Yang、C. C. Wojcik、J. Vu˘ckovi´c 和 S. Fan，《科学》371，1240（2021）。[24] L. Xiao、T. Deng、K. Wang、G. Zhu、Z. Wang、W. Yi 和 P. Xue，《自然·物理》16，761（2020）。[25] Y. G. Liu、Y. Wei、O. Hemmatyar、G. G. Pyrialakos、P. S. Jung、D. N. Christodoulides 和 M. Khajavikhan，《光：科学与应用》11，336（2022）。[26] X. Zhang、Y. Tian、J.-H. Jiang、M.-H. Lu 和 Y.-F. Chen，《自然·通讯》12，5377（2021）。[27] L. Zhang、Y. Yang、Y. Ge、Y.-J. Guan、Q. Chen、Q. Yan、F. Chen、R. Xi、Y. Li、D. Jia 等，《自然·通讯》12，6297（2021）。[28] Z. Gu、H. Gao、H. Xue、J. Li、Z. Su 和 J. Zhu，《自然·通讯》13，7668（2022）。[29] W. Wang、X. Wang 和 G. Ma，《自然》608，50（2022）。[30] A. Ghatak、M. Brandenbourger、J. Van Wezel 和 C. Coulais，《美国国家科学院院刊》117，29561（2020）。[31] C. Scheibner、W. T. Irvine 和 V. Vitelli，《物理评论快报》125，118001（2020）。[32] L. Li、C. H. Lee、S. Mu 和 J. Gong，《自然·通讯》11，5491（2020）。[33] T. Helbig、T. Hofmann、S. Imhof、M. Abdelghany、T. Kiessling、L. Molenkamp、C. Lee、A. Szameit、M. Greiter 和 R. Thomale，《自然·物理》16，747（2020）。[34] T. Hofmann、T. Helbig、F. Schindler、N. Salgo、M. Brzezi´nska、M. Greiter、T. Kiessling、D. Wolf、A. Vollhardt、A. Kaba˘si 等，《物理评论研究》2，023265（2020）。[35] S. Liu、R. Shao、S. Ma、L. Zhang、O. You、H. Wu、Y. J. Xiang、T. J. Cui 和 S. Zhang，《研究》，5608038（2021）。[36] D. Zou、T. Chen、W. He、J. Bao、C. H. Lee、H. Sun 和 X. Zhang，《自然·通讯》12，7201（2021）。[37] C. Shang、S. Liu、R. Shao、P. Han、X. Zang、X. Zhang、K. N. Salama、W. Gao、C. H. Lee、R. Thomale 等，《先进科学》9，2202922（2022）。[38] Z. Lin、L. Ding、S. Ke 和 X. Li，《光学快报》46，3512（2021）。[39] B. Midya、H. Zhao 和 L. Feng，《自然·通讯》9，2674（2018）。[40] S. Longhi，《物理评论B》95，014201（2017）。[41] S. Longhi、D. Gatti 和 G. Della Valle，《物理评论B》92，094204（2015）。[42] S. Longhi，《物理评论A》95，062122（2017）。[43] S. Wong 和 S. S. Oh，《物理评论研究》3，033042（2021）。[44] Y. Chen、R.-Y. Zhang、Z. Xiong、Z. H. Hang、J. Li、J. Q. Shen 和 C. T. Chan，《自然·通讯》10，1（2019）。[45] Y. Yang、C. Peng、D. Zhu、H. Buljan、J. D. Joannopoulos、B. Zhen 和 M. Solja˘ci´c，《科学》365，1021（2019）。[46] E. Yang、B. Yang、O. You、H.-C. Chan、P. Mao、Q. Guo、S. Ma、L. Xia、D. Fan、Y. Xiang 等，《物理评论快报》125，033901（2020）。[47] Q. Guo、T. Jiang、R.-Y. Zhang、L. Zhang、Z.-Q. Zhang、B. Yang、S. Zhang 和 C. T. Chan，《自然》594，195（2021）。[48] B. Jiang、A. Bouhon、Z.-K. Lin、X. Zhou、B. Hou、F. Li、R.-J. Slager 和 J.-H. Jiang，《自然·物理》17，1239（2021）。[49] V. Brosco、L. Pilozzi、R. Fazio 和 C. Conti，《物理评论A》103，063518（2021）。[50] Z.-G. Chen、R.-Y. Zhang、C. T. Chan 和 G. Ma，《自然·物理》18，179（2022）。[51] Y.-K. Sun、X.-L. Zhang、F. Yu、Z.-N. Tian、Q.-D. Chen 和 H.-B. Sun，《自然·物理》18，1080（2022）。[52] O. You、S. Liang、B. Xie、W. Gao、W. Ye、J. Zhu 和 S. Zhang，《物理评论快报》128，244302（2022）。[53] J. Noh、T. Schuster、T. Iadecola、S. Huang、M. Wang、K. P. Chen、C. Chamon 和 M. C. Rechtsman，《自然·物理》16，989（2020）。[54] X.-L. Zhang、F. Yu、Z.-G. Chen、Z.-N. Tian、Q.-D. Chen、H.-B. Sun 和 G. Ma，《自然·光子学》16，390（2022）。[55] J.-S. Xu、K. Sun、Y.-J. Han、C.-F. Li、J. K. Pachos 和 G.-C. Guo，《自然·通讯》7，1（2016）。[56] Y. Yang、B. Zhen、J. D. Joannopoulos 和 M. Solja˘ci´c，《光：科学与应用》9，177（2020）。[57] Y. Yang、H. C. Po、V. Liu、J. D. Joannopoulos、L. Fu 和 M. Solja˘ci´c，《物理评论B》106，L161108（2022）。[58] A. Gianfrate、O. Bleu、L. Dominici、V. Ardizzone、M. De Giorgi、D. Ballarini、G. Lerario、K. W. West、L. N.

Pfeiffer, D. D. Solnyshkov, D. Sanvitto, and G. Malpuech, 《自然》578, 381 (2020). [59] C. Whittaker, T. Dowling, A. Nalitov, A. Yulin, B. Royall, E. Clarke, M. Skolnick, I. Shelykh, and D. Krizhanovskii, 《自然·光子学》15, 193 (2021). [60] T. Iadecola, T. Schuster, and C. Chamon, 《物理评论快报》117, 073901 2016( ). [61] L. Polimeno, A. Fieramosca, G. Lerario, L. De Marco, M. De Giorgi, D. Ballarini, L. Dominici, V. Ardizzone, M. Pugliese, C. Prontera, et al., 《光学》8, 1442 (2021). [62] D. Cheng, K. Wang, and S. Fan, 《物理评论快报》130, 083601 2023( ). [63] M. Aidelsburger, S. Nascimbene, and N. Goldman, 《物理学报告》19, 394 (2018). [64] J. Wu, Z. Wang, Y. Biao, F. Fei, S. Zhang, Z. Yin, Y. Hu, Z. Song, T. Wu, F. Song, et al., 《自然·电子学》5, 635 (2022). [65] Y.-J. Lin, K. Jim

471,

83 2011

enez-Garcıa, and I. B. Spielman, 《自然》( ). [66] N. Hatano and D. R. Nelson, 《物理评论快报》77, 570

（1996）。[67] L. Zhou，arXiv 预印本 arXiv:2302 05710 10 48550 2302 05710 2023 . . /arXiv. . ( )。[68] Z. Yang 和 J. Hu，《物理评论B》99，081102（2019）。[69] J. Carlstr¨om 和 E. J. Bergholtz，《物理评论A》98，042114（2018）。[70] X. Zhang、T. Zhang、M.-H. Lu 和 Y.-F. Chen，《物理学进展：X》7，2109431（2022）。[71] Y. Ashida、Z. Gong 和 M. Ueda，《物理学进展》69，249（2020）。[72] 有关以下内容的补充说明，请参阅补充材料：(i) 霍普夫链环，(ii) 非布洛赫波方法，(iii) 绕数方法，(iv) 零模，以及 (v) 渐近分析。[73] A. Dutt、M. Minkov、Q. Lin、L. Yuan、D. A. Miller 和 S. Fan，《自然·通讯》10，3122（2019）。[74] A. Regensburger、C. Bersch、B. Hinrichs、G. Onishchukov、A. Schreiber、C. Silberhorn 和 U. Peschel，《物理评论快报》107，233902（2011）。