arXiv:2304.01935v1 [math-ph] 4 Apr 2023

开放边界下 q 变形的 $D_3^{(1)}$ 顶点模型的精确解

Guang-Liang Li[a,b]，Junpeng Cao[b,c,d,e1]，Yi Qiao[f] 和 Wen-Li Yang[b,f,g2]

[a] 教育部非平衡合成与调控重点实验室，物理学院，西安交通大学，西安 710049，中国[b] 彭桓武理论物理中心，西安 710127，中国[c] 北京凝聚态物理国家研究中心，中国科学院物理研究所，北京 100190，中国[d] 中国科学院大学物理科学学院，北京 100049，中国[e] 松山湖材料实验室，东莞，广东 523808，中国[f] 西北大学现代物理研究所，西安 710127，中国[g] 陕西省理论物理前沿重点实验室，西安 710127，中国

摘要

本文研究了具有非对角开放边界条件的 q 变形 $D_3^{(1)}$ 量子晶格模型的精确解。我们证明了传递矩阵的交叉对称性，并求得了量子行列式。我们构造了独立的传递矩阵融合恒等式，并证明融合过程可以闭合。基于融合层级和多项式分析，我们获得了该系统的非齐次 $T-Q$ 关系、精确能谱和 Bethe Ansatz 方程。

PACS：75.10.Pq，02.30.Ik，71.10.Pm 关键词：Bethe Ansatz；格点可积模型；量子可积系统

[1]通讯作者：junpengcao@iphy.ac.cn[2]通讯作者：wlyang@nwu.edu.cn

1 引言

高秩量子可积系统及其精确解非常重要，并且在多体物理、统计场论和高能物理中有着广泛应用 [1–3]。典型的 $SU(n)$ 对称可积模型已得到广泛研究，并发现了许多有趣现象，例如新型基本激发和成对机制 [4–7]。在研究过程中，人们提出了许多强有力的方法，例如嵌套代数 Bethe Ansatz、$T-Q$ 关系、反演关系和融合层级。其中，基于代数分析的方法非常有用，尤其适用于求解不具有 $U(1)$ 对称性的可积模型，因为在这种情况下，应用传统 Bethe Ansatz [1, 4]时，很难构造合适的参考态。

近年来，围绕 $A_n^{(1)}$李代数的高秩可积模型（如 B_n、C_n 和 D_n 模型）受到广泛关注。基于精巧的代数结构，人们取得了许多有趣的进展。例如，$O(n)$-不变磁体模型和 Izergin-Korepin 模型的函数型 Bethe Ansatz 已被提出 [8, 9]。传递矩阵的融合关系 [10–15] 被推广至 $Sp(4)$ [16, 17] 以及任意$Sp(2n)$可积顶点模型 [18, 19]。基于这些结果，人们研究了配分函数及热力学极限 [19]，并构造了一些新的折叠型精确可解模型 [20]。在边界可积性方面 [21], ，人们得到了含非对角元的一般边界反射矩阵 [22–24]。此外，人们还研究了具有特殊开放边界条件的 $A_{2n-1}^{(2)}$、$B_n^{(1)}$、$C_n^{(1)}$和 $D_n^{(1)}$量子代数不变模型的解析 Bethe Ansatz [24, 25]。其他重要进展可参见文献[16, 18, 26–30]。

本文研究了与 q 变形的 $D_3^{(1)}$ 代数[3], 相关联的格点量子可积模型，其中每个格点上的粒子具有六种内部自由度。由于存在 q 变形，沿 x 和 y 方向的相互作用强度不同于沿 z 方向的强度，因此耦合具有各向异性。各向异性交换相互作用可能破坏长程有序，并引发一些有趣的现象，例如新型磁有序态和量子相变。

[3]需要指出的是，(q 变形)仿射代数 $D_3^{(1)}$ 和 $A_3^{(1)}$ 是同构的。这里我们选择$D_3^{(1)}$，只是为了强调该模型的哈密顿量（2.10）及其相关的基本R-矩阵（2.1）仅涉及其向量表示（对应于 $so(6)$的定义表示）。

本征态中的自旋构型也不同于未经过 q 变形的有理 $D_3^{(1)}$ 顶点模型中的自旋构型。这里采用具有非对角矩阵元的开放边界条件，这种条件会破坏模型的 $U(1)$ 对称性。自旋子携带的自旋并不守恒，并且在边界反射后可能发生改变。由于受到两个边界磁场的钉扎作用，还可能诱导出一些有趣的螺旋自旋态。

研究 q 变形可积模型的另一个优势是，与有理型可积模型相比，一些物理性质和数学结构能够得到更清晰的呈现。这是因为在交叉参数等于 1 的有理极限下，一些重要信息会被抹去。不同于有理情形，q 变形可积模型的传递矩阵首项的系数也是非平凡的守恒量，可用于构造拓扑不变量，例如拓扑动量和拓扑荷。

我们注意到，随着人工调控技术的发展，将具有较大核自旋的原子置于特定的磁阱或光晶格中，便可通过实验实现 q 变形可积系统。

本文结构安排如下。第 2 节介绍模型。第 3 节展示其可积性，并证明传递矩阵的交叉对称性。第 4 节研究系统的量子行列式。第 5 节和第 6 节研究 q 变形 $D_3^{(1)}$ 李代数中的嵌套融合过程，并给出融合传递矩阵之间的闭合递归融合关系。第 7 节研究模型的旋量表示。基于此，我们得到新的融合传递矩阵之间的交叉对称性，并在第 8 节给出。第 9 节列出确定传递矩阵本征值的充分条件。根据这些条件并借助多项式分析，我们得到本征值，并用相关的非齐次 $T-Q$ 关系对其进行参数化。同时给出嵌套贝特方程。最后，第 10 节给出结论。

2 模型

我们考虑一个包含 N 个格点的一维量子晶格模型。我们关注体内的 q 变形 $D_3^{(1)}$ 对称性。因此，每个格点上的粒子具有六个内部自由度。不失一般性，记 $\{|i\rangle|i=1,2,\cdots,6\}$ 为每个格点希尔伯特空间的一组正交基。对于第 j 个格点，我们可以定义

玻尔兹曼权重或 R 矩阵 $R_{0j}(u)$，它与二体散射矩阵有关。根据量子逆散射理论，矩阵 $R_{0j}(u)$ 定义在张量空间 $V_0 \otimes V_j$ 中，其中 V_0 表示辅助空间， V_j 表示量子空间或物理空间。辅助空间与量子空间的维数相同。因此，矩阵 $R_{0j}(u)$ 是 $6^2 \times 6^2$ 矩阵。 q 变形 $D_3^{(1)}$ 顶点模型的 R 矩阵的显式形式为 [24, 31, 32]

$$
R_{0j}(u) = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc|cccccc|cccccc|cccccc}
a & & & & & & g & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & b & & & & & & & & & & & g & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & b & & & & & & & & & & & & & & & & g & & & & & & & & & \\
 & & & b & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & g & & & \\
 & & & & b & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & e & & & & d & & & & & d_1 & & & & d_1 & & & & & g & d_2 & & & g_1 & \\
\hline
\bar{g} & & & & & & b & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & a & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & b & & & & & g & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & b & & & & & & & & g & & & & & & & & & \\
 & & & & \bar{d} & & & & & & e & & & & & d & & & & d & & & & g_2 & & & d_2 & \\
 & & & & & & & & & & & b & & & & & & & & & & & & & & & g \\
\hline
 & \bar{g} & & & & & & & & & & & b & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \bar{g} & & & & & & b & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & a & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \bar{d}_1 & & & & & \bar{d} & & & & & & e & & & & g_3 & & & & d & & & d_1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & b & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & b & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & g & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & g & & & & & & & \\
\hline
 & & \bar{g} & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \bar{g} & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \bar{d} & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \bar{d} & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \bar{g}_3 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & \bar{g} & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \bar{d}_2 & & & & & & \bar{g}_2 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \bar{d} & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \bar{g} & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & \bar{g}_1 & & & & & & d_2 & & & & & d_1 & & & & d_1 & & & & d & & & e & \\
 & & & & & & & & & & & \bar{g} & & & & & & & & & & & & & & & & b \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \bar{g} & & & & & & & & & & & b \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & b \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & b \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & a
\end{array}\right), \quad (2.1)
$$

其中矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&a(u) = 2\sinh\left(\frac{u}{2} - 2\eta\right)\sinh\left(\frac{u}{2} - 4\eta\right), \quad b(u) = 2\sinh\frac{u}{2}\sinh\left(\frac{u}{2} - 4\eta\right), \\
&e(u) = 2\sinh\frac{u}{2}\sinh\left(\frac{u}{2} - 2\eta\right), \quad g(u) = -2e^{-\frac{u}{2}}\sinh 2\eta\sinh\left(\frac{u}{2} - 2\eta\right), \\
&\bar{g}(u) = e^{u}g(u), \quad d(u) = 2e^{-\frac{u}{2}+2\eta}\sinh 2\eta\sinh\left(\frac{u}{2}\right), \quad d_1(u) = e^{-2\eta}d(u), \\
&d_2(u) = e^{-4\eta}d(u), \quad \bar{d}(u) = e^{u-4\eta}d(u), \quad \bar{d}_1(u) = e^{2\eta}\bar{d}(u), \quad \bar{d}_2(u) = e^{4\eta}\bar{d}(u), \\
&g_1(u) = 2e^{-u}\sinh 2\eta\sinh 4\eta, \quad g_2(u) = 4e^{-\frac{u}{2}}\sinh^2 2\eta\cosh\left(\frac{u}{2} - 2\eta\right),
\end{aligned}
$$

$$g_3(u) = e^u g_1(u), \quad \bar{g}_1(u) = e^{2u} g_1(u), \quad \bar{g}_2(u) = e^u g_2(u), \quad \bar{g}_3(u) = g_3(u), \tag{2.2}$$

u 是谱参数， η 是交叉参数， $D_3^{(1)}$ 对称性的变形由 $q = e^\eta$量化。将每个格点上的所有 R-矩阵相乘，我们得到单值矩阵 $T_0(u)$

$$T_0(u) = R_{01}(u - \theta_1) R_{02}(u - \theta_2) \cdots R_{0N}(u - \theta_N), \tag{2.3}$$

其中， $\{\theta_j | j = 1, \cdots, N\}$是非齐次参数。 $T_0(u)$定义在张量空间 $V_0 \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$中，其中 V_0 是六维辅助空间， $\otimes_{j=1}^N V_j$ 是6^N维物理空间。由式（2.3）可知， $T_0(u)$在辅助空间中的矩阵元是定义在物理空间中的算子。

对于开放边界条件，一端的边界反射由定义在辅助空间 V_0中的反射矩阵 $K_0(u)$刻画

$$K_0(u) = \begin{pmatrix} K_{11}(u) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}(u) & 0 & K_{24}(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}(u) & 0 & K_{35}(u) & 0 \\ 0 & K_{42}(u) & 0 & K_{44}(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{53}(u) & 0 & K_{55}(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{66}(u) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

其中，非零矩阵元会影响准粒子反射后的行为，而 $K_0(u)$的矩阵元为

$$\begin{aligned}
&K_{11}(u) = h_1(u - 2\eta), \quad h_1(u) = e^{-\frac{u}{2}} \sinh(\frac{u}{2} - c_2) + c e^{-u} \sinh u, \\
&K_{22}(u) = K_{33}(u) = h_3(u - 2\eta), \quad h_3(u) = e^{-\frac{u}{2}} \sinh(\frac{u}{2} - c_2) - c e^{2\eta} \sinh 2\eta, \\
&K_{44}(u) = K_{55}(u) = -h_4(u + 2\eta), \quad h_4(u) = e^{\frac{u}{2}} \sinh(\frac{u}{2} + c_2) + c e^{2\eta} \sinh 2\eta, \\
&K_{66}(u) = -h_2(u + 2\eta), \quad h_2(u) = e^{\frac{u}{2}} \sinh(\frac{u}{2} + c_2) + c e^{u} \sinh(u), \\
&K_{24}(u) = -c_1 h_0(u), \quad K_{42}(u) = -c_3 h_0(u), \quad h_0(u) = e^{2\eta} \sinh u, \\
&K_{35}(u) = c_1 h_0(u), \quad K_{53}(u) = c_3 h_0(u).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

这里， c、 c_1、 c_2 和 c_3 是边界参数，并满足约束条件

$$c_1 c_3 = c(c + e^{-c_2}). \tag{2.6}$$

因此共有三个自由边界参数。值得注意的是，文献 [23], 给出了 $D_3^{(1)}$ 模型的一般反射矩阵，而反射矩阵 (2.4) 是一个特例。关键在于， K-矩阵 (2.4) 含有非对角矩阵元，这破坏了 U(1) 对称性，因此传统的嵌套代数 Bethe Ansatz 不再适用。这里我们以 (2.4) 为例，展示一种求得该系统精确解的新方法。边界参数 c、 c_1、 c_2 和 c_3 量化了两个边界处所施加外部磁场的强度和方向。

为了刻画反射准粒子的散射过程，我们还需要反射单值矩阵 $T_0(u)$

$$\hat{T}_0(u) = R_{N0}(u+\theta_N)\cdots R_{20}(u+\theta_2)R_{10}(u+\theta_1). \tag{2.7}$$

与此同时，链另一端的边界反射由对偶反射矩阵 $\bar{K}_0$) 定量描述，该矩阵可通过映射得到

$$\bar{K}_0(u) = M_0 K_0(-u+8\eta)|_{(c,c_1,c_2,c_3)\to(c',c_1',c_2',c_3')}, \tag{2.8}$$

其中， M_0 是辅助空间中的 6×6 对角矩阵，来源于q变形迹 [31]； $M_0 = diag(e^{8\eta}, e^{4\eta}, 1, 1, e^{-4\eta}, e^{-8\eta})$； c'、 c_1'、 c_2'、 c_3' 是边界参数，并满足 $c_1'c_3' = c'(c'+e^{-c_2'})$。

结合以上所有元素，我们构造出 q变形的 $D_3^{(1)}$ 顶点模型 [21]的传递矩阵

$$t(u) = tr_0\{\bar{K}_0(u)T_0(u)K_0(u)\hat{T}_0(u)\}, \tag{2.9}$$

其中， tr_0 表示在辅助空间中取迹。随后，辅助空间被消去，传递矩阵 $t(u)$恰好就是在物理空间 $\otimes_{j=1}^N V_j$中定义的算子。不同格点之间的相互作用由取迹运算引发。传递矩阵 $t(u)$也可以这样理解：准粒子从左向右移动，依次与其他所有准粒子发生散射，然后在右边界处反射，动量反向。反射准粒子向左移动，再次与其他粒子发生散射。随后，它在左边界处反射并返回初始位置。利用散射矩阵和反射矩阵的数学表达式，我们得到式（2.9）。

传递矩阵 $t(u)$ 是系统守恒量的生成泛函。哈密顿量由传递矩阵对数的导数生成

矩阵 [21]

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln t(u)}{\partial u}|_{u=0,\{\theta_j\}=0} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \mathcal{P}_{jj+1}\, \frac{\partial R_{jj+1}(u)}{\partial u}\Big|_{u=0} + \frac{K_N(0)'}{2K_N(0)} + \frac{tr_0\{\bar{K}_0(0)H_{10}\}}{tr_0\bar{K}_0(0)} + \text{constant}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $\mathcal{P}_{jj+1}$ 是置换算符，$H_{10} = \mathcal{P}_{10}{}^{\partial R_{10}\ (\partial u}{}^{u}\ |_{u=0)}$。由式（2.10）的第一项可知，体内的相互作用是最近邻相互作用。最近邻耦合的各向异性由交叉参数 η 量化。我们要强调的是，尽管模型（2.10）体内的相互作用只有局部的 q 变形 D_3 对称性，但边界反射（2.4）和（2.8）破坏了这种对称性[4]。

在下文中，我们将精确求解传递矩阵 $t(u)$（2.9），进而求解哈密顿量（2.10）。我们注意到，反射矩阵 $K(u)$ 及其对偶矩阵 $K(u)$ 含有非对角元素，因此具有固定内部固有自由度的准粒子在边界反射后可能不再守恒。

3 可积性与交叉对称性

我们首先证明该系统的可积性。R-矩阵 (2.1) 具有以下性质

$$\text{unitarity}: \quad R_{12}(u)R_{21}(-u) = \rho_1(u) \times \text{id}, \quad \rho_1(u) = a(u)a(-u), \tag{3.1}$$

交叉幺正性：$R_{12}(u)^{t_1} M_1 R_{21}(-u+16\eta)^{t_1} M_1^{-1}$

$$= R_{12}(u)^{t_2} M_2^{-1} R_{21}(-u+16\eta)^{t_2} M_2 = \rho_1(u-8\eta), \tag{3.2}$$

$$\text{crossing relation}: \quad R_{12}(u) = V_1 R_{12}(-u+8\eta)^{t_2} V_1 = V_2^{t_2} R_{12}(-u+8\eta)^{t_1} V_2^{t_2}, \tag{3.3}$$

正则性：$R_{12}(0) = \rho_1(0)^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}_{12}$, (3.4)

其中，下标 1 和 2 表示不同的空间，$\mathcal{P}_{12}$ 是置换算符，其矩阵元为 $[\mathcal{P}_{12}]^{\alpha\gamma}_{\beta\delta} = \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$，$R_{21}(u) = \mathcal{P}_{12}R_{12}(u)\mathcal{P}_{12} = R_{12}(u)^{t_1 t_2}$，$t_k$表示

[4]需要指出的是，只有当边界参数满足某些约束时，系统 (2.10) 才具有全局 q-变形的 D_3 对称性 [24, 25]。

转置　　在 k 个空间中的位置，而 V_k 是在 k 个空间中定义的算子，

$$V_k = \begin{pmatrix} & & & & e^{-4\eta} \\ & & & e^{-2\eta} & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ e^{2\eta} & & & & \\ & e^{4\eta} & & & \end{pmatrix}, \quad V_k^2 = \mathrm{id}, \quad V_k^{t_k} V_k = M_k, \quad k = 1, 2. \tag{3.5}$$

R-矩阵（2.1）满足杨–巴克斯特方程（YBE）

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u)R_{12}(u-v). \tag{3.6}$$

由此可以证明，单值矩阵满足杨-巴克斯特关系（YBRs）

$$R_{21}(u-v)T_2(u)T_1(v) = T_1(v)T_2(u)R_{21}(u-v), \tag{3.7}$$

$$R_{12}(u-v)\hat{T}_2(v)\hat{T}_1(u) = \hat{T}_1(u)\hat{T}_2(v)R_{12}(u-v). \tag{3.8}$$

反射矩阵 $K(u)$ 满足反射方程

$$R_{12}(u-v)K_1(u)R_{21}(u+v)K_2(v) = K_2(v)R_{12}(u+v)K_1(u)R_{21}(u-v). \tag{3.9}$$

¯对偶反射矩阵 $K(u)$ 满足对偶反射方程

$$\begin{aligned} &R_{12}(-u+v)\bar{K}_1(u)M_1^{-1}R_{21}(-u-v+16\eta)M_1\bar{K}_2(v) \\ &\quad = \bar{K}_2(v)M_1R_{12}(-u-v+16\eta)M_1^{-1}\bar{K}_1(u)R_{21}(-u+v). \end{aligned} \tag{3.10}$$

由杨-巴克斯特关系（3.7）-（3.8）、反射方程（3.9）以及对偶反射方程（3.10）可容易证明，具有不同谱参数的传递矩阵彼此可交换，即 $[t(u)\ t(v)] = 0$。然后，我们可以利用传递矩阵构造无穷多个可交换守恒量。因此，该系统是可积的。

现在，我们证明传递矩阵具有交叉对称性

$$t(u) = t(-u+8\eta). \tag{3.11}$$

借助 R-矩阵的交叉关系 (3.3)，单值矩阵 $T_0(u)$ 在辅助空间中的转置为

$$T_0(-u+8\eta)^{t_0} = \{R_{01}(-u+8\eta-\theta_1)R_{02}(-u+8\eta-\theta_2)\cdots R_{0N}(-u+8\eta-\theta_N)\}^{t_0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{V_0 R_{01}(u+\theta_1)^{t_1} R_{02}(u+\theta_2)^{t_2} \cdots R_{0N}(u+\theta_N)^{t_N} V_0\}^{t_0} \\
&= V_0^{t_0} \{R_{0N}(u+\theta_N)^{t_0 t_N} R_{0N-1}(u+\theta_{N-1})^{t_0 t_{N-1}} \cdots R_{01}(u+\theta_1)^{t_0 t_1}\} V_0^{t_0} \\
&= V_0^{t_0} \hat{T}_0(u) V_0^{t_0}, \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

ˆ 由此得到单值矩阵 $T_0(u)$ 与其反射矩阵 $T_0(u)$ 之间的关系。类似地，我们有 ˆ $T_0(-u+8\eta)^{t_0} = V_0 T_0(u) V_0$。直接计算可得

$$
\begin{aligned}
&tr_2\{R_{12}(0)R_{12}(2u)\bar{K}_2(u)\} = f(u) V_1^{t_1} \bar{K}_1(-u+8\eta)^{t_1} V_1, \\
&tr_2\{R_{12}(0)R_{12}(2u)M_2[K_2(-u+8\eta)]^{t_2}\} = f(u) V_1^{t_1} K_1(u) V_1^{t_1}, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

其中 $f(u) = -4$ 双曲正弦 2η 双曲正弦 4η 双曲正弦$(u-6\eta)$ 双曲正弦$(u-8\eta)$。结合结果 (3.12)- (3.13)，我们得到

$$
\begin{aligned}
t(-u+8\eta) &= tr_{0_1}\{\bar{K}_{0_1}(-u+8\eta) T_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} \{K_{0_1}(-u+8\eta)\hat{T}_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} \\
&= tr_{0_1}\hat{T}_{0_1}(u) V_{0_1}^{t_{0_1}} \{\bar{K}_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} V_{0_1} T_{0_1}(u) V_{0_1} \{K_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} V_{0_1}^{t_{0_1}} \\
&= tr_{0_1}\hat{T}_{0_1}(u) tr_{0_2} R_{0_1 0_2}(0) R_{0_1 0_2}(2u) \bar{K}_{0_2}(u) T_{0_1}(u)) V_{0_1} \{K_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} V_{0_1}^{t_{0_1}} / f(u) \\
&= tr_{0_2}\bar{K}_{0_2}(u) tr_{0_1} R_{0_2 0_1}(0) \hat{T}_{0_2}(u) R_{0_1 0_2}(2u) T_{0_1}(u) V_{0_1} \{K_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} V_{0_1}^{t_{0_1}} / f(u) \\
&= tr_{0_2}\bar{K}_{0_2}(u) tr_{0_1} R_{0_2 0_1}(0) T_{0_1}(u) R_{0_1 0_2}(2u) \hat{T}_{0_2}(u) V_{0_1} \{K_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} V_{0_1}^{t_{0_1}} / f(u) \\
&= tr_{0_2}\bar{K}_{0_2}(u) T_{0_2}(u) tr_{0_1} R_{0_1 0_2}(0) R_{0_1 0_2}(2u) V_{0_1} \{K_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} V_{0_1}^{t_{0_1}} \hat{T}_{0_2}(u) / f(u) \\
&= tr_{0_2}\bar{K}_{0_2}(u) T_{0_2}(u) tr_{0_1} V_{0_1}^{t_{0_1}} R_{0_1 0_2}(0) R_{0_1 0_2}(2u) V_{0_1} \{K_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} \hat{T}_{0_2}(u) / f(u) \\
&= tr_{0_2}\bar{K}_{0_2}(u) T_{0_2}(u) V_{0_2}^{t_{0_2}} tr_{0_1} R_{0_2 0_1}(0) R_{0_2 0_1}(2u) M_{0_1} \{K_{0_1}(-u+8\eta)\}^{t_{0_1}} V_{0_2}^{t_{0_2}} \hat{T}_{0_2}(u) / f(u) \\
&= tr_{0_2}\bar{K}_{0_2}(u) T_{0_2}(u) K_{0_2}(u) \hat{T}_{0_2}(u) = t(u). \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

在推导过程中，我们使用了以下关系

$$
\begin{aligned}
&\hat{T}_{0_2}(u) R_{0_1 0_2}(2u) T_{0_1}(u) = T_{0_1}(u) R_{0_1 0_2}(2u) \hat{T}_{0_2}(u), \\
&M_1 M_2 R_{12}(u) = R_{12}(u) M_1 M_2, \\
&V_{0_1}^{t_{0_1}} R_{0_1 0_2}(0) R_{0_1 0_2}(2u) V_{0_1} = V_{0_2}^{t_{0_2}} R_{0_2 0_1}(0) R_{0_2 0_1}(2u) M_{0_1} V_{0_2}^{t_{0_2}}, \\
&R_{0_2 0_1}(0) T_{0_1}(u) = T_{0_2}(u) R_{0_1 0_2}(0), \quad \hat{T}_{0_1}(u) R_{0_1 0_2}(0) = R_{0_2 0_1}(0) \hat{T}_{0_2}(u). \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

4 量子行列式

q变形的 $D_3^{(1)}$ 顶点模型还有另一个有趣的守恒量，即量子行列式。我们使用融合技术来计算量子行列式。

根据表示论，两个 6 维 q变形的 D_3 代数矢量表示的张量积可分解为 $6 \otimes 6 = 1 \oplus 15 \oplus 20$, 这意味着 36 维张量空间可分解为一个 1 维、一个 15 维和一个 20 维子空间的直和。于是, 在该张量空间中定义的矢量 R矩阵 (2.1) 可用投影算子表示。在不同点处， R矩阵 (2.1) 会退化为不同的投影算子，从而可将物理量投影到不同的不可约子空间 [33]。例如，在 $u = 8\eta$ 点， R矩阵 (2.1) 退化为一维投影算子。在 $u = 4\eta$ 点， R矩阵 (2.1) 退化为 ($1 + 15$) 维投影算子。在 $u = -8\eta$ 点，R矩阵 (2.1) 退化为 ($15 + 20$) 维投影算子。而在 $u = -4\eta$ 点， R矩阵 (2.1) 退化为 20 维投影算子。在这些投影子空间中，我们可以研究传递矩阵的融合。相关投影算子的基底揭示了子空间的详细结构。需要注意的是，所有融合传递矩阵都具有相同的代数结构，但相关子空间的维数不同。

我们首先考虑 $u = 8\eta$ 处的情形。此时， R-矩阵 (2.1) 退化为

$$R_{12}(8\eta) = P_{12}^{(1)} S_{12}^{(1)}, \tag{4.1}$$

其中， $S_{12}^{(1)}$ 是此处省略的常数矩阵， $P_{12}^{(1)}$ 是一维投影算子

$$P_{12}^{(1)} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \quad P_{21}^{(1)} = \mathcal{P}_{12} P_{12}^{(1)} \mathcal{P}_{12}, \tag{4.2}$$

基向量为

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{\frac{\sinh 2\eta}{2\cosh 4\eta \sinh 6\eta}}(e^{-4\eta}|16\rangle + e^{-2\eta}|25\rangle + |34\rangle + |43\rangle + e^{2\eta}|52\rangle + e^{4\eta}|61\rangle).$$

我们考虑以下两个传递矩阵的乘积，其中谱参数经过一定的平移 [18]

$$\begin{aligned}
t(u)t(u+\Delta) &= tr_2\{\bar{K}_2(u)T_2(u)K_2(u)\hat{T}_2(u)\} \\
&\quad \times tr_1\{\bar{K}_1(u+\Delta)T_1(u+\Delta)K_1(u+\Delta)\hat{T}_1(u+\Delta)\}^{t_1} \\
&= [\rho_1(2u+\Delta-8\eta)]^{-1} tr_{12}\{\bar{K}_2(u)T_2(u)K_2(u)\hat{T}_2(u)[T_2(u+\Delta)K_2(u+\Delta)\hat{T}_2(u+\Delta)]^{t_1} \\
&\quad \times R_{12}^{t_1}(2u+\Delta) M_1 R_{21}^{t_1}(-2u+16\eta-\Delta) M_1^{-1}[\bar{K}_1(u+\Delta)]^{t_1}\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [\rho_1(2u+\Delta-8\eta)]^{-1} tr_{12}\{[\bar{K}_1(u+\Delta)M_1^{-1}R_{21}(-2u+16\eta-\Delta)M_1 \\
&\quad \times \bar{K}_2(u)T_2(u)K_2(u)\hat{T}_2(u)]^{t_1}[R_{12}(2u+\Delta)T_1(u+\Delta)K_1^{-}(u+\Delta)\hat{T}_1(u+\Delta)]^{t_1}\} \\
&= [\rho_1(2u+\Delta-8\eta)]^{-1} tr_{12}\{\bar{K}_1(u+\Delta)M_1^{-1}R_{21}(-2u+16\eta-\Delta)M_1 \\
&\quad \times \bar{K}_2(u)T_2(u)T_1(u+\Delta)K_2(u)R_{12}(2u+\Delta)K_1(u+\Delta)\hat{T}_2(u)\hat{T}_1(u+\Delta)\}. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

在推导过程中，我们使用了以下关系

$$
\begin{aligned}
&tr_{12}\{A_{12}^{t_1}B_{12}^{t_1}\} = tr_{12}\{A_{12}B_{12}\}, \quad M_1^t = M_1, \quad (M_1^{-1})^t = M_1^{-1}, \\
&\hat{T}_2(u)R_{12}(2u+\Delta)T_1(u+\Delta) = T_2(u+\Delta)R_{12}(2u+\Delta)\hat{T}_2(u). \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

我们应当指出，推导式（4.3）的基本思路如下。将传递矩阵的定义代入（4.3）的左端，得到一个解析表达式。随后利用矩阵转置和杨-巴克斯特关系，改变反射矩阵与单值矩阵的排列顺序。最后，使两个谱参数具有一定平移的（反射）单值矩阵彼此相邻。由此即可得到（4.3）。 Δ 的取值由相关 R矩阵（2.1）的退化确定。

根据杨-巴克斯特关系（3.7）–（3.8）并利用投影算子的性质，可得

$$
T_2(\theta_j)\,T_1(\theta_j+8\eta) = P_{12}^{(1)}\,T_2(\theta_j)\,T_1(\theta_j+8\eta), \qquad (4.5)
$$

$$
\hat{T}_2(-\theta_j)\,\hat{T}_1(-\theta_j+8\eta) = P_{21}^{(1)}\,\hat{T}_2(-\theta_j)\,\hat{T}_1(-\theta_j+8\eta), \qquad (4.6)
$$

ˆ ˆ 这意味着，乘积 $T_2(\theta_j)T_1(\theta_j+8\eta)$和 $T_2(-\theta_j)T_1(-\theta_j+8\eta)$均可生成投影算子。将式（4.5）代入（4.3），并考虑 $u=\{\theta_j\}$、 $\Delta = 8\eta$，可见投影算子 $P_{12}^{(1)}$ 确实由算子乘积恒等式（4.3）生成。随后可与投影算子 $P_{12}^{(1)}$ 进行融合，这意味着所有算子都可投影到由 $|\psi_0\rangle$ 生成的一维子空间中。取迹后，投影算子 $P_{12}^{(1)}$ 被消去，从而得到一个一维向量，即量子行列式。将式（4.6）代入（4.3），并考虑 $u=\{-\theta_j\}$、 $\Delta = 8\eta$，可见投影算子$P_{21}^{(1)}$ 出现在恒等式（4.3）中。 $P_{(1)\,21}$的融合也能将所有算子投影到一维融合空间中，从而验证量子行列式。

现在，我们进行融合过程。从固定$u-v$值的杨–巴克斯特方程 (3.6) 出发，并利用性质 $[P_{12}^{(1)}]^2 = P_{(1)\,12}$、 $[P_{(1)\,21}\,]^2 = P_{(1)\,21}$，可得融合恒等式

$$
P_{12}^{(1)}R_{23}(u)R_{13}(u+8\eta)P_{12}^{(1)} = a(u)e(u+8\eta)P_{21}^{(1)}, \qquad (4.7)
$$

$$P_{21}^{(1)} R_{32}(u) R_{31}(u+8\eta) P_{21}^{(1)} = a(u) e(u+8\eta) P_{12}^{(1)}. \tag{4.8}$$

根据单值矩阵的定义，并利用方程 (4.7)–(4.8)，可得

$$P_{12}^{(1)} T_2(u)\, T_1(u+8\eta) P_{12}^{(1)} = P_{12}^{(1)} \prod_{i=1}^{N} a(u-\theta_i) e(u-\theta_i+8\eta), \tag{4.9}$$

$$P_{21}^{(1)} \hat{T}_2(u)\, \hat{T}_1(u+8\eta) P_{21}^{(1)} = P_{21}^{(1)} \prod_{i=1}^{N} a(u+\theta_i) e(u+\theta_i+8\eta). \tag{4.10}$$

反射矩阵的融合给出

$$\begin{aligned} &P_{12}^{(1)} K_2(u) R_{12}(2u+8\eta) K_1(u+8\eta) P_{21}^{(1)} \\ &\qquad = -2\sinh(u+6\eta)\sinh(u+8\eta) h_1(u-2\eta) h_2(u+2\eta) P_{12}^{(1)}, \qquad (4.11) \\ &P_{21}^{(1)} \bar{K}_1(u+8\eta) M_1^{-1} R_{21}(-2u+8\eta) M_1 \bar{K}_2(u) P_{12}^{(1)} \\ &\qquad = -2\sinh(u-6\eta)\sinh(u-8\eta) \tilde{h}_1(u-2\eta) \tilde{h}_2(u+2\eta) P_{21}^{(1)}, \qquad (4.12) \end{aligned}$$

其中 $\tilde{h}_1(u) = h_1(u)|_{(c,c_1,c_2,c_3)\to(c',c_1',c_2',c_3')} = -[e^{-\frac{u}{2}}\sinh(\frac{u}{2}-\tilde{c}_2) + \tilde{c}e^{-u}\sinh(u)]$ 以及 $\tilde{h}_2(u) = h_2(u)|_{(c,c_1,c_2,c_3)\to(c',c_1',c_2',c_3')} = -[e^{\frac{u}{2}}\sinh(\frac{u}{2}+\tilde{c}_2) + \tilde{c}e^{u}\sinh(u)]$。

将方程 (4.9)–(4.12) 代入 (4.3)，得到

$$t(\pm\theta_j) t(\pm\theta_j + 8\eta) = S\Delta_q(u)|_{u=\{\pm\theta_j\}} \times \mathrm{id}, \quad j = 1, \cdots, N, \tag{4.13}$$

其中 S 是来自自由开放边界的结构因子

$$S = \frac{\sinh(\pm\theta_j - 6\eta)\sinh(\pm\theta_j - 8\eta)\sinh(\pm\theta_j + 6\eta)\sinh(\pm\theta_j + 8\eta)}{\sinh(\pm\theta_j - 2\eta)\sinh(\pm\theta_j - 4\eta)\sinh(\pm\theta_j + 2\eta)\sinh(\pm\theta_j + 4\eta)}, \tag{4.14}$$

而 $\Delta_q(u)$ 是量子行列式

$$\begin{aligned} \Delta_q(u) = {} & h_1(u-2\eta) h_2(u+2\eta) \tilde{h}_1(u-2\eta) \tilde{h}_2(u+2\eta) \\ & \times \prod_{i=1}^{N} a(u-\theta_i) e(u-\theta_i+8\eta) a(u+\theta_i) e(u+\theta_i+8\eta). \end{aligned} \tag{4.15}$$

由式 (4.13) 可知，在非齐次点 $u = \{\pm\theta_j\}$ 处，乘积 $t(u)t(u+8\eta)$ 给出一维向量。我们指出，传递矩阵具有交叉对称性 (3.11)。因此，$u = \{\theta_j\}$ 对应的融合恒等式 (4.13) 与 $u = \{-\theta_j\}$ 对应的融合恒等式相同。所以，只有 $u = \{\theta_j\}$ 对应的恒等式 (4.13) 是独立的。

5 传递矩阵融合恒等式

5.1 融合 R-矩阵

在 $u = 4\eta$ 点， R-矩阵 (2.1) 退化为

$$R_{12}(4\eta) = P_{12}^{(16)} S_{12}^{(16)}, \tag{5.1}$$

其中 $S_{12}^{(16)}$ 是此处略去的常数矩阵，而 $P_{12}^{(16)}$ 是一个 16 维投影算子

$$P_{12}^{(16)} = \sum_{i=1}^{16} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad P_{21}^{(16)} = \mathcal{P}_{12} P_{12}^{(16)} \mathcal{P}_{12},$$

其基向量为

$$\begin{aligned}
&|\phi_1\rangle = \phi(e^{-\eta}|12\rangle - e^{\eta}|21\rangle),\ |\phi_2\rangle = \phi(e^{-\eta}|13\rangle - e^{\eta}|31\rangle),\ |\phi_3\rangle = \phi(e^{-\eta}|14\rangle - e^{\eta}|41\rangle),\\
&|\phi_4\rangle = \phi(e^{-\eta}|15\rangle - e^{\eta}|51\rangle),\ |\phi_5\rangle = \phi(e^{-2\eta}|16\rangle - e^{2\eta}|61\rangle),\ |\phi_6\rangle = \phi(e^{-\eta}|23\rangle - e^{\eta}|32\rangle),\\
&|\phi_7\rangle = \phi(e^{-\eta}|24\rangle - e^{\eta}|42\rangle),\ |\phi_9\rangle = \phi(e^{-\eta}|26\rangle - e^{\eta}|62\rangle),\ |\phi_{11}\rangle = \phi(e^{-\eta}|35\rangle - e^{\eta}|53\rangle),\\
&|\phi_{12}\rangle = \phi(e^{-\eta}|36\rangle - e^{\eta}|63\rangle),\ |\phi_{14}\rangle = \phi(e^{-\eta}|45\rangle - e^{\eta}|54\rangle),\\
&|\phi_{15}\rangle = \phi(e^{-\eta}|46\rangle - e^{\eta}|64\rangle),\ |\phi_{16}\rangle = \phi(e^{-\eta}|56\rangle - e^{\eta}|65\rangle),\ \phi = \frac{1}{\sqrt{2\cosh 2\eta}},\\
&|\phi_8\rangle = 2\bar{\phi}\Big\{\cosh 4\eta(e^{-2\eta}|25\rangle - e^{2\eta}|52\rangle) - \sinh 2\eta(e^{2\eta}|16\rangle + e^{-2\eta}|61\rangle)\Big\},\\
&|\phi_{10}\rangle = \bar{\phi}\Big\{e^{4\eta}|25\rangle + e^{-4\eta}|52\rangle + e^{2\eta}|16\rangle + e^{-2\eta}|61\rangle + 2\cosh 6\eta|34\rangle\Big\},\\
&|\phi_{13}\rangle = \tilde{\phi}\Big\{\frac{\sinh 2\eta}{\sinh 8\eta}(e^{4\eta}|25\rangle + e^{-4\eta}|52\rangle + e^{2\eta}|16\rangle + e^{-2\eta}|61\rangle) - \frac{|34\rangle}{2\cosh 4\eta} + |43\rangle\Big\},\\
&\bar{\phi} = \sqrt{\frac{\sinh 2\eta}{2\cosh 6\eta \sinh 8\eta}},\ \tilde{\phi} = \sqrt{\frac{\sinh 6\eta}{2\cosh 4\eta \sinh 2\eta}}.
\end{aligned}$$

利用投影算子的性质和杨-巴克斯特关系 (3.7)-(3.8)，可得

$$T_2(\theta_j) T_1(\theta_j + 4\eta) = P_{12}^{(16)} T_2(\theta_j) T_1(\theta_j + 4\eta), \tag{5.2}$$

$$\hat{T}_2(-\theta_j)\, \hat{T}_1(-\theta_j + 4\eta) = P_{21}^{(16)}\, \hat{T}_2(-\theta_j)\, \hat{T}_1(-\theta_j + 4\eta), \tag{5.3}$$

这意味着乘积 $T_2(\theta_j)T_1(\theta_j+4\eta)$ 生成投影算子 $P_{(16)\,12}$，而 $T_2(\theta_j)T_1(\theta_j+4\eta)$ 生成 $P_{(16)\,12}$。将 $u = \{\theta_j\}$, $\Delta = 4\eta$代入式 (4.3)，并结合 (5.2)，可知投影算子 $P_{12}^{(16)}$ 确实由算子乘积恒等式 (4.3) 导出。将 $u = \{-\theta_j\}$, $\Delta = 4\eta$ 代入式 (4.3)，并结合 (5.3)，可得投影算子$P_{21}^{(16)}$。因此，我们可以进一步利用这两个 16 维投影算子进行融合。

从杨–巴克斯特方程 (3.6) 出发，利用 16 维投影算子进行融合，我们得到 R-矩阵的融合

$$P_{12}^{(16)}R_{23}(u)R_{13}(u+4\eta)P_{12}^{(16)}=4\tilde{\rho}_0(u)S_{1'2'}R_{1'3}^{(+)}(u+2\eta)R_{2'3}^{(-)}(u+2\eta)S_{1'2'}^{-1}, \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}P_{21}^{(16)}R_{32}(u)R_{31}(u+4\eta)P_{21}^{(16)}&=4\tilde{\rho}_0(u)S_{1'2'}R_{32'}^{(-)}(u+2\eta)R_{31'}^{(+)}(u+2\eta)S_{1'2'}^{-1}\\&=4\tilde{\rho}_0(u)\bar{S}_{1'2'}R_{31'}^{(+)}(u+2\eta)R_{32'}^{(-)}(u+2\eta)\bar{S}_{1'2'}^{-1}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

由式（5.4）和式（5.5）可知，两个6维空间 V_1 和 V_2融合后得到一个16维融合空间 $V_{\langle 12\rangle}$。同时，这个16维融合空间可以分解为两个4维辅助空间 $V_{1'}$ 和 $V_{2'}$的直张量积，即 $V_{\langle 12\rangle}=V_{1'}\otimes V_{2'}$。需要注意的是， $V_{1'}$ 和 $V_{2'}$ 的空间结构相同。由式（5.4）和式（5.5）还可知，融合结果是两个新的融合 R矩阵 $R_{1'3}^{(+)}(u)$ 和 $R_{2'3}^{(-)}(u)$ 的乘积。这里，函数 $\tilde{\rho}_0(u)$ 是

$$\tilde{\rho}_0(u)=\sinh\frac{1}{2}(u+4\eta)\sinh\frac{1}{2}(u-8\eta).$$

该 $S_{1'2'}$ 是一个 $4^2\times 4^2$ 定义在张量空间 $V_{1'}\otimes V_2$中的相似变换矩阵 ，

$$S_{1'2'}=\left(\begin{array}{cccc}
s_0 & & & \\
 & -s_0 & & \\
 & & s_0 & \\
 & & & s_0 \\
\hline
 & s_1 & s_2 & s_3 \\
s_0 & & & \\
 & & & s_0 \\
 & s_5 & s_6 & -s_5 \\
\hline
 & & & s_0 \\
 & s_7 & s_8 & s_9 \\
 & & & \\
 & & & \\
\hline
 & s_{11} & & \\
 & & s_0 & \\
 & & & s_0 \\
 & & &
\end{array}\right.
\left.\begin{array}{c}
s_4 \\
 \\
 \\
s_6 \\
\hline
 \\
s_{10} \\
 \\
 \\
\hline
s_{12} \\
 \\
 \\
-s_0
\end{array}\right), \tag{5.6}$$

其中矩阵元为

$$\begin{aligned}
&s_0=2\sqrt{\cosh 2\eta\cosh 4\eta\cosh 6\eta},\ s_1=-e^{5\eta}\sqrt{\cosh 6\eta},\ s_2=-e^{-2\eta}s_1,\ s_3=e^{-8\eta}s_1,\\
&s_4=e^{-10\eta}s_1,\ s_5=-e^{5\eta}\sqrt{\cosh 2\eta},\ s_6=e^{-10\eta}s_5,\ s_7=-e^{-4\eta}s_5,\\
&s_8=-e^{\eta}\cosh 4\eta\sqrt{\cosh 2\eta},\ s_9=e^{-2\eta}s_8,\ s_{10}=e^{-4\eta}s_5,\ s_{11}=e^{-\eta}\sqrt{\frac{\sinh 12\eta}{2\sinh 2\eta}},\\
&s_{12}=-e^{2\eta}s_{11}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

该变换矩阵为

$$\bar{S}_{1'2'} = -\frac{1}{\sinh 4\eta} S_{1'2'} R^{(-+)}_{2'1'}(u)|_{u=0}, \tag{5.8}$$

其中 $R^{(-+)}_{2'1'}(u)$ 可由下式计算

$$R^{(+-)}_{1'2'}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} r_1 & & & \\ & r_1 & & \\ & & r_1 & \\ & & & r_2 \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ r_3 & & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ r_4 & & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ r_5 & & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \bar{r}_3 & & & \end{matrix} & \begin{matrix} r_1 & & & \\ & r_1 & & \\ & & r_2 & \\ & & & r_1 \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ -r_3 & & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ -r_4 & & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \bar{r}_4 & & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ -\bar{r}_3 & & & \end{matrix} & \begin{matrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & r_1 & \\ & & & r_1 \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ -r_3 & & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \bar{r}_5 & & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ -\bar{r}_4 & & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ -\bar{r}_3 & & & \end{matrix} & \begin{matrix} r_2 & & & \\ & r_1 & & \\ & & r_1 & \\ & & & r_1 \end{matrix} \end{array}\right), \tag{5.9}$$

矩阵元为

$$\begin{aligned} &r_1 = \sinh\frac{1}{2}(u-8\eta), \quad r_2 = \sinh\frac{1}{2}(u-4\eta), \quad r_3 = -e^{-\frac{u}{2}+2\eta}\sinh 2\eta, \\ &r_4 = -e^{-\frac{u}{2}}\sinh 2\eta, \quad r_5 = -e^{-\frac{u}{2}-2\eta}\sinh 2\eta, \quad \bar{r}_3 = -e^{\frac{u}{2}-2\eta}\sinh 2\eta, \\ &\bar{r}_4 = -e^{\frac{u}{2}}\sinh 2\eta, \quad \bar{r}_5 = -e^{\frac{u}{2}+2\eta}\sinh 2\eta. \end{aligned} \tag{5.10}$$

矩阵 $R^{(+-)}_{1'2'}(u)$ 具有以下性质

$$\text{transition symmetry}: \ R^{(-+)}_{2'1'}(u) = R^{(+-)}_{1'2'}(u)^{t_{1'}t_{2'}}, \tag{5.11}$$

$$\text{unitarity}: \ R^{(+-)}_{1'2'}(u)R^{(-+)}_{2'1'}(-u) = -\sinh\frac{1}{2}(u-8\eta)\sinh\frac{1}{2}(u+8\eta), \tag{5.12}$$

交叉幺正性：
$$\begin{aligned} &R^{(+-)}_{1'2'}(u)^{t_{2'}}\bar{M}^{-1}_{2'}R^{(-+)}_{2'1'}(-u+16\eta)^{t_{2'}}\bar{M}_{2'} \\ &\qquad = \rho_{ss}(u) = -\sinh\frac{1}{2}(u-4\eta)\sinh\frac{1}{2}(u-12\eta), \end{aligned} \tag{5.13}$$

杨–巴克斯特方程：
$$\begin{aligned} &R^{(+-)}_{1'2'}(u_1-u_2)R^{(+)}_{1'3}(u_1-u_3)R^{(-)}_{2'3}(u_2-u_3) \\ &\quad = R^{(-)}_{2'3}(u_2-u_3)R^{(+)}_{1'3}(u_1-u_3)R^{(+-)}_{1'2'}(u_1-u_2), \end{aligned} \tag{5.14}$$

反射方程：
$$\begin{aligned} &R^{(+-)}_{1'2'}(u-v)K^{(+)}_{1'}(u)R^{(-+)}_{2'1'}(u+v)K^{(-)}_{2'}(v) \\ &\qquad = K^{(-)}_{2'}(v)R^{(+-)}_{1'2'}(u+v)K^{(+)}_{1'}(u)R^{(-+)}_{2'1'}(u-v), \end{aligned} \tag{5.15}$$

对偶反射方程：
$$R^{(+-)}_{1'2'}(-u+v)\,\bar{K}^{(+)}_{1'}(u)\,\bar{M}^{-1}_{1'}R^{(-+)}_{2'1'}(-u-v+16\eta)\,\bar{M}_{1'}\bar{K}^{(-)}_{2'}(v)$$
$$=\bar{K}^{(-)}_{2'}(v)\bar{M}_{1'}R^{(+-)}_{1'2'}(-u-v+16\eta)\bar{M}^{-1}_{1'}\bar{K}^{(+)}_{1'}(u)R^{(-+)}_{2'1'}(-u+v), \qquad (5.16)$$

其中，$\bar{M}_{2'}$ 是融合子空间 $V_{2'}$ 中定义的 4×4 对角矩阵，$\bar{M}_{2'}=diag(e^{6\eta},e^{2\eta},e^{-2\eta},e^{-6\eta})$。
$R^{(\pm)}_{1'2}(u)$ 是在张量空间 $V_{1'}\otimes V_2$ 中定义的 $(4\times 6)\times(4\times 6)$融合 R-矩阵，其形式为

$$R^{(+)}_{1'2}=\begin{pmatrix}
a_1 & a_1 & a_1 & b_1 & b_1 & b_1 & -e_1 & e_1 & e_2 & -e_1 & -e_2 & e_2\\
-e_3 & e_3 & a_1 & b_1 & b_1 & a_1 & a_1 & b_1 & -e_1 & e_1 & -e_1 & e_2\\
e_4 & -e_3 & b_1 & a_1 & b_1 & a_1 & b_1 & a_1 & -e_1 & e_1 & b_1 & b_1\\
-e_4 & e_4 & -e_3 & e_3 & -e_3 & e_3 & e_4 & b_1 & a_1 & b_1 & a_1 & a_1
\end{pmatrix}, \qquad (5.17)$$

$$R^{(-)}_{1'2}=\begin{pmatrix}
a_1 & a_1 & b_1 & b_1 & b_1 & a_1 & e_1 & -e_3 & e_2 & -e_1 & -e_2 & e_2\\
e_3 & -e_3 & a_1 & b_1 & a_1 & b_1 & e_1 & e_1 & -e_1 & -e_2 & b_1 & b_1\\
e_4 & e_3 & b_1 & a_1 & a_1 & b_1 & b_1 & a_1 & -e_1 & e_1 & b_1 & a_1\\
-e_4 & e_4 & -e_3 & e_3 & -e_3 & e_3 & -e_4 & b_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1
\end{pmatrix}, \qquad (5.18)$$

其中矩阵元为

$$a_1=\sinh\frac{1}{2}(u-6\eta),\quad b_1=\sinh\frac{1}{2}(u-2\eta),\quad e_1=e^{-\frac{u}{2}+\eta}\sinh 2\eta,$$
$$e_2=e^{-\frac{u}{2}-\eta}\sinh 2\eta,\quad e_3=e^{\frac{u}{2}-\eta}\sinh 2\eta,\quad e_4=e^{\frac{u}{2}+\eta}\sinh 2\eta. \qquad (5.19)$$

根据融合恒等式 (5.4)-(5.5) 以及单值矩阵的定义，我们得到

$$P_{12}^{(16)}T_2(u)\,T_1(u+4\eta)P_{12}^{(16)} = 4^N\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(u-\theta_i)S_{1'2'}\,T_{1'}^{+}(u+2\eta)\,T_{2'}^{-}(u+2\eta)S_{1'2'}^{-1}, \quad (5.20)$$

$$P_{21}^{(16)}\hat{T}_2(u)\,\hat{T}_1(u+4\eta)P_{21}^{(16)} = 4^N\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(u+\theta_i)\bar{S}_{1'2'}\,\hat{T}_{1'}^{+}(u+2\eta)\,\hat{T}_{2'}^{-}(u+2\eta)\bar{S}_{1'2'}^{-1}, \quad (5.21)$$

其中，$T_{0'}^{(\pm)}(u)$ 和 $\hat{T}^{(\pm)}_{0'}(u)$ 是由融合 $R_{1'2}^{(\pm)}(u)$ 构造的融合单值矩阵，如下所示

$$T_{0'}^{(\pm)}(u) = R_{0'1}^{(\pm)}(u-\theta_1)R_{0'2}^{(\pm)}(u-\theta_2)\cdots R_{0'N}^{(\pm)}(u-\theta_N), \quad (5.22)$$

$$\hat{T}_{0'}^{(\pm)}(u) = R_{N0'}^{(\pm)}(u+\theta_N)\cdots R_{20'}^{(\pm)}(u+\theta_2)R_{10'}^{(\pm)}(u+\theta_1). \quad (5.23)$$

5.2 融合反射矩阵

从 t 边界可积理论出发，反射矩阵的融合规则 i s

$$\begin{aligned}&P_{12}^{(16)}K_2(u)R_{12}(2u+4\eta)K_1(u+4\eta)P_{21}^{(16)}\\ &= -2e^{4\eta}\sinh(u+4\eta)S_{1'2'}K_{1'}^{(+)}(u+2\eta)R_{2'1'}^{(-+)}(2u+4\eta)K_{2'}^{(-)}(u+2\eta)\bar{S}_{1'2'}^{-1}, \quad (5.24)\end{aligned}$$

其中，插入具有特定谱参数的 R-矩阵以确保可积性。我们看到，融合结果是两个新的融合反射矩阵 $K_{1'}^{(+)}(u)$ 和 $K_{2'}^{(-)}(u)$ 的乘积。在融合子空间 $V_{1'}$ 中定义的 $K_{1'}^{(\pm)}(u)$ 矩阵具有如下形式

$$K_{1'}^{(+)}(u) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{u}{2}}\sinh(c_2-\frac{u}{2}) & c_1\sinh(u) & 0 & 0\\ c_3\sinh(u) & e^{\frac{u}{2}}\sinh(c_2+\frac{u}{2}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & h_2(u) & 0\\ 0 & 0 & 0 & h_2(u)\end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

$$K_{1'}^{(-)}(u) = \begin{pmatrix} -e^{-4\eta}h_1(u-4\eta) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -e^{-4\eta}h_1(u-4\eta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & k_1(u) & c_1\sinh(u)\\ 0 & 0 & c_3\sinh(u) & k_2(u)\end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

其中

$$k_1(u) = e^{-\frac{u}{2}-2\eta}\sinh(c_2-\frac{u}{2}+2\eta) + c\sinh 4\eta,$$

$$k_2(u) = e^{\frac{u}{2}-2\eta}\sinh(c_2+\frac{u}{2}+2\eta) + c\sinh 4\eta.$$

融合反射矩阵满足反射方程

$$\begin{aligned} &R^{(\pm)}_{1'2}(u-v)K^{(\pm)}_{1'}(u)R^{(\pm)}_{21'}(u+v)K_2(v) \\ &\qquad = K_2(v)R^{(\pm)}_{1'2}(u+v)K^{(\pm)}_{1'}(u)R^{(\pm)}_{21'}(u-v). \end{aligned} \tag{5.27}$$

融合对偶反射矩阵 $\bar{K}^{(\pm)}_{1'}(u)$ 定义为

$$\begin{aligned} &P^{(16)}_{21}\bar{K}_1(u+4\eta)M_1^{-1}R_{21}(-2u+12\eta)M_1\bar{K}_2(u)P^{(16)}_{12} = 2e^{4\eta}\sinh(u-8\eta) \\ &\quad\times\bar{S}_{1'2'}\bar{K}^{(-)}_{2'}(u+2\eta)\bar{M}^{-1}_{2'}R^{(+-)}_{1'2'}(-2u+12\eta)\bar{M}_{2'}\bar{K}^{(+)}_{1'}(u+2\eta)S^{-1}_{1'2'}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

它们满足对偶反射方程

$$\begin{aligned} &R^{(\pm)}_{1'2}(-u+v)\bar{K}^{(\pm)}_{1'}(u)\bar{M}^{-1}_{1'}R^{(\pm)}_{21'}(-u-v+16\eta)\bar{M}_{1'}\bar{K}_2(v) \\ &\qquad = \bar{K}_2(v)\bar{M}_{1'}R^{(\pm)}_{1'2}(-u-v+16\eta)\bar{M}^{-1}_{1'}\bar{K}^{(\pm)}_{1'}(u)R^{(\pm)}_{21'}(-u+v). \end{aligned} \tag{5.29}$$

融合对偶反射矩阵 $\bar{K}^{(\pm)}_{1'}(u)$ 也可以通过映射得到

$$\bar{K}^{(\pm)}_{1'}(u) = \bar{M}_{1'}K^{(\pm)}_{1'}(-u+8\eta)\,\big|_{(c,c_1,c_2,c_3)\to(c',c'_1,c'_2,c'_3)}\,. \tag{5.30}$$

5.3 传递矩阵的融合恒等式

将 $u=\{\pm\theta_j\}$, $\Delta = 4\eta$ 代入式 (4.3)，并利用融合关系 (5.20)-(5.21)、(5.24)、(5.28)，我们得到

$$\begin{aligned} t(\pm\theta_j)\,t(\pm\theta_j+4\eta) &= e^{8\eta}\frac{\sinh(\pm\theta_j+4\eta)\sinh(\pm\theta_j-8\eta)}{\sinh(\pm\theta_j+2\eta)\sinh(\pm\theta_j-6\eta)}\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(\pm\theta_j-\theta_i)\tilde{\rho}_0(\pm\theta_j+\theta_i) \\ &\quad\times 4^{2N}t_+(\pm\theta_j+2\eta)\,t_-(\pm\theta_j+2\eta), \quad j=1,\cdots,N, \end{aligned} \tag{5.31}$$

其中融合传递矩阵 $t_\pm(u)$ 定义为

$$t_\pm(u) = tr_{0'}\{\bar{K}^{(\pm)}_{0'}(u)T^{(\pm)}_{0'}(u)K^{(\pm)}_{0'}(u)\hat{T}^{(\pm)}_{0'}(u)\}. \tag{5.32}$$

在公式（5.31）的推导中，我们使用了关系

$$\begin{aligned} &tr_{1'2'}\{\bar{K}^{(-)}_{2'}(u)\bar{M}^{-1}_{2'}R^{(+-)}_{1'2'}(-2u+16\eta)\bar{M}_{2'}\bar{K}^{(+)}_{1'}(u)T^{(+)}_{1'}(u)T^{(-)}_{2'}(u) \\ &\qquad\times K^{(+)}_{1'}(u)R^{(-+)}_{2'1'}(2u)K^{(-)}_{2'}(u)\hat{T}^{(+)}_{1'}(u)\hat{T}^{(-)}_{2'}(u)\} = \rho_{ss}(2u)t_+(u)\,t_-(u). \end{aligned} \tag{5.33}$$

由公式（5.31）可知，两个传递矩阵 $t(u)$ 的融合会生成两个新的融合传递矩阵 $t_{\pm}(u)$。含有 $u=\{\theta_j\}$ 的恒等式与含有 $u=\{-\theta_j\}$ 的恒等式并不等价，尽管 $t(u)$ 具有交叉对称性。根据定义（5.32），$t_{\pm}(u)$ 的物理空间与 $t(u)$ 的物理空间相同。$t_{\pm}(u)$ 是 q 变形的 $D_3^{(1)}$ 可积模型的守恒量的新生成泛函。由杨–巴克斯特方程（5.14）、反射方程（5.15）–（5.16）以及融合单值矩阵的定义（5.22）–（5.23），可以证明融合传递矩阵 $t_+(u)$ 和 $t_-(u)$ 可交换

$$[t_+(u),t_-(v)]=0. \tag{5.34}$$

6 嵌套融合

递归融合关系 (5.31) 并未闭合，因为引入了新的融合传递矩阵$t_{\pm}(u)$。为了闭合融合过程，我们进一步研究融合矩阵 $R^{(\pm)}_{1'2}(u)$ 的性质。$R^{(\pm)}_{1'2}(u)$ 满足

$$\begin{aligned}
\text{transition symmetry} \quad &: \quad R^{(\pm)}_{21'}(u)=R^{(\pm)}_{1'2}(u)^{t_{1'}t_2}, && (6.1)\\
\text{unitarity} \quad &: \quad R^{(\pm)}_{1'2}(u)R^{(\pm)}_{21'}(-u)=\rho_s(u)=a_1(u)a_1(-u), && (6.2)\\
\text{crossing unitarity} \quad &: \quad R^{(\pm)}_{1'2}(u)^{t_2}M_2^{-1}R^{(\pm)}_{21'}(-u+16\eta)^{t_2}M_2=\rho_s(u-8\eta), && (6.3)\\
\text{YBE} \quad &: \quad R^{(\pm)}_{1'2}(u_1-u_2)R^{(\pm)}_{1'3}(u_1-u_3)R_{23}(u_2-u_3) && \\
&\quad =R_{23}(u_2-u_3)R^{(\pm)}_{1'3}(u_1-u_3)R^{(\pm)}_{1'2}(u_1-u_2). && (6.4)
\end{aligned}$$

$R^{(\pm)}_{1'2}(u)$ 矩阵的张量空间可分解为 $4\otimes 6=4\oplus 20$。因此，我们得到一个 4 维投影子空间和一个 20 维投影子空间。在 $u=6\eta$ 处，融合 R 矩阵 $R^{(\pm)}_{1'2}(u)$ 化简为

$$R^{(\pm)}_{1'2}(6\eta)=P^{(\pm)}_{1'2}S^{(\pm)}_{1'2},\quad P^{(\pm)}_{1'2}=\sum_{i=1}^{4}|\phi_i^{(\pm)}\rangle\langle\phi_i^{(\pm)}|, \tag{6.5}$$

其中 $S^{(\pm)}_{1'2}$ 是此处省略的常矩阵，$P^{(\pm)}_{1'2}$ 是以基向量表示的四维投影算子

$$\begin{aligned}
&|\phi_1^{(+)}\rangle=\phi_0(e^{-2\eta}|14\rangle-|22\rangle+e^{2\eta}|31\rangle),\quad |\phi_2^{(+)}\rangle=\phi_0(e^{-2\eta}|15\rangle+|23\rangle-e^{2\eta}|41\rangle),\\
&|\phi_3^{(+)}\rangle=\phi_0(e^{-2\eta}|16\rangle-|33\rangle+e^{2\eta}|42\rangle),\quad |\phi_4^{(+)}\rangle=\phi_0(e^{-2\eta}|26\rangle+|35\rangle+e^{2\eta}|44\rangle),\\
&|\phi_1^{(-)}\rangle=\phi_0(e^{-2\eta}|13\rangle+|22\rangle+e^{2\eta}|31\rangle),\quad |\phi_2^{(-)}\rangle=\phi_0(e^{-2\eta}|15\rangle-|24\rangle-e^{2\eta}|41\rangle),
\end{aligned}$$

$$|\phi_3^{(-)}\rangle = \phi_0(e^{-2\eta}|16\rangle - |34\rangle + e^{2\eta}|42\rangle), \quad |\phi_4^{(-)}\rangle = \phi_0(e^{-2\eta}|26\rangle - |35\rangle - e^{2\eta}|43\rangle),$$

其中 $\phi_0 = \sqrt{\text{双曲正弦}2\eta\,\text{双曲正弦}\,6\eta}$。交换两个空间后，我们得到投影算子

$$P_{21'}^{(\pm)} = \sum_{i=1}^{4} |\varphi_i^{(\pm)}\rangle\langle\varphi_i^{(\pm)}|, \quad |\varphi_i^{(\pm)}\rangle = |\phi_i^{(\pm)}\rangle|_{\eta\to-\eta,|kl\rangle\to|lk\rangle}. \tag{6.6}$$

由杨–巴克斯特方程 (6.4) 可知，融合单值矩阵满足杨-巴克斯特关系

$$R_{00'}^{(\pm)}(u-v)T_0(u)T_{0'}^{(\pm)}(v) = T_{0'}^{(\pm)}(v)T_0(u)R_{00'}^{(\pm)}(u-v), \tag{6.7}$$

$$R_{00'}^{(\pm)}(u-v)\hat{T}_0(u)\hat{T}_{0'}^{(\pm)}(v) = \hat{T}_{0'}^{(\pm)}(v)\hat{T}_0(u)R_{00'}^{(\pm)}(u-v), \tag{6.8}$$

由此得到

$$T_2(\theta_j)\,T_{1'}^{(\pm)}(\theta_j+6\eta) = P_{1'2}^{(\pm)}\,T_2(\theta_j)\,T_{1'}^{(\pm)}(\theta_j+6\eta), \tag{6.9}$$

$$\hat{T}_2(-\theta_j)\,\hat{T}_{1'}^{(\pm)}(-\theta_j+6\eta) = P_{21'}^{(\pm)}\,\hat{T}_2(-\theta_j)\,\hat{T}_{1'}^{(\pm)}(-\theta_j+6\eta). \tag{6.10}$$

由式 (6.9)-(6.10) 可知，乘积 $T_2(\theta_j)T^{(\pm)1'}(\theta_j+6\eta)$ 可以导出投影算子 $P_{(\pm)1'2}$，而 $\hat{T}_2(-\theta_j)\hat{T}^{(\pm)1'}(-\theta_j+6\eta)$ 可以导出投影算子 $P_{(\pm)21'}$。式 (6.9)-(6.10) 还表明，我们可以考虑以下量

$$t(u)t_{\pm}(u+\Delta) = [\rho_s(2u+\Delta-8\eta)]^{-1}tr_{1'2}\{\bar{K}_{1'}^{(\pm)}(u+\Delta)\bar{M}_{1'}^{-1}R_{21'}^{(\pm)}(-2u+16\eta-\Delta)\bar{M}_{1'}$$
$$\times\bar{K}_2(u)T_2(u)T_{1'}^{(\pm)}(u+\Delta)K_2(u)R_{1'2}^{(\pm)}(2u+\Delta)K_{1'}^{(\pm)}(u+\Delta)\hat{T}_2(u)\hat{T}_{1'}^{(\pm)}(u+\Delta)\}. \tag{6.11}$$

因此，将 $u=\{\theta_j\}$, $\Delta=6\eta$ 代入式 (6.11)，并结合 (6.9)，可得到由投影算子 $P_{(\pm)1'2}$ 导出的融合恒等式。将 $u=\{-\theta_j\}$, $\Delta=6\eta$ 代入式 (6.11)，并结合 (6.10)，可得到由投影算子 $P_{21'}^{(\pm)}$ 导出的融合恒等式。

从杨–巴克斯特方程 (6.4) 出发，并使用投影算子 $P_{(+)1'2}$ 和 $P_{21'}^{(+)}$ 进行融合，我们得到

$$P_{1'2}^{(+)}R_{23}(u)R_{1'3}^{(+)}(u+6\eta)P_{1'2}^{(+)} = 2\tilde{\rho}_0(u)R_{\langle1'2\rangle3}^{(-)}(u+2\eta), \tag{6.12}$$

$$P_{21'}^{(+)}R_{32}(u)R_{31'}^{(+)}(u+6\eta)P_{21'}^{(+)} = 2\tilde{\rho}_0(u)R_{3\langle1'2\rangle}^{(-)}(u+2\eta). \tag{6.13}$$

我们看到，R-矩阵 $R(u)$ 和 $R^{(+)}(u)$ 可以融合为 $R^{(-)}(u)$。不会出现新的 R-矩阵。因此，R-矩阵的融合是封闭的。请注意，其维数

融合辅助空间 $V_{\langle 1'2\rangle}$ 为 4。由式 (6.12)–(6.13)，我们得到单值矩阵之间的融合关系

$$P^{(+)}_{1'2}T_2(u)T^{(+)}_{1'}(u+6\eta)P^{(+)}_{1'2}=2^N\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(u-\theta_i)T^{(-)}_{\langle 1'2\rangle}(u+2\eta), \tag{6.14}$$

$$P^{(+)}_{21'}\hat{T}_2(u)\hat{T}^{(+)}_{1'}(u+6\eta)P^{(+)}_{21'}=2^N\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(u+\theta_i)\hat{T}^{(-)}_{\langle 1'2\rangle}(u+2\eta). \tag{6.15}$$

融合反射矩阵为

$$\begin{aligned}&P^{(+)}_{1'2}K_2(u)R^{(+)}_{1'2}(2u+6\eta)K^{(+)}_{1'}(u+6\eta)P^{(+)}_{21'}\\&\quad=-e^{4\eta}\sinh(u+6\eta)h_2(u+2\eta)K^{(-)}_{\langle 1'2\rangle}(u+2\eta),\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}&P^{(+)}_{21'}\bar{K}^{(+)}_{1'}(u+6\eta)\bar{M}^{-1}_{1'}R^{(+)}_{21'}(-2u+10\eta)\bar{M}_{1'}\bar{K}_2(u)P^{(+)}_{1'2}\\&\quad=e^{4\eta}\sinh(u-8\eta)\tilde{h}_1(u-2\eta)\bar{K}^{(-)}_{\langle 1'2\rangle}(u+2\eta).\end{aligned} \tag{6.17}$$

我们看到，K 和 $K^{(+)}$ 在谱参数作适当平移后，可融合为$K^{(-)}(u)$。因此，反射矩阵的融合也构成闭合结构。将 $u=\{\pm\theta_j\}$ 和$\Delta=6\eta$ 代入式 (6.11)，并利用关系式 (6.14)–(6.17)，得到

$$\begin{aligned}t(\pm\theta_j)\,t_+(\pm\theta_j+6\eta)=e^{8\eta}&\frac{\sinh(\pm\theta_j+6\eta)\sinh(\pm\theta_j-8\eta)}{\sinh(\pm\theta_j+2\eta)\sinh(\pm\theta_j-4\eta)}\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(\pm\theta_j-\theta_i)\tilde{\rho}_0(\pm\theta_j+\theta_i)\\&\times h_2(\pm\theta_j+2\eta)\tilde{h}_1(\pm\theta_j-2\eta)2^{2N}t_-(\pm\theta_j+2\eta),\quad j=1,\cdots,N.\end{aligned} \tag{6.18}$$

我们看到，在某些非齐次点处，$t(u)$ 与 $t_+(u)$ 的融合给出融合传递矩阵 $t_-(u)$，且不产生其他附加项。我们还发现，由于 $t(u)$ 的交叉对称性，将式 (6.18) 分别与 $u=\{\theta_j\}$和 $u=\{-\theta_j\}$相乘，均可得到融合恒等式 (4.13)。因此，只有含 $u=\{\theta_j\}$或 $u=\{-\theta_j\}$的恒等式 (6.18) 是独立的。

利用投影算子 $P^{(-)}_{1'2}$ 和 $P^{(-)}_{21'}$ 进行融合，得到

$$P^{(-)}_{1'2}R_{23}(u)R^{(-)}_{1'3}(u+6\eta)P^{(-)}_{1'2}=2\tilde{\rho}_0(u)\tilde{S}_{\langle 1'2\rangle}R^{(+)}_{\langle 1'2\rangle 3}(u+2\eta)\tilde{S}^{-1}_{\langle 1'2\rangle}, \tag{6.19}$$

$$P^{(-)}_{21'}R_{32}(u)R^{(-)}_{31'}(u+6\eta)P^{(-)}_{21'}=2\tilde{\rho}_0(u)\tilde{S}_{\langle 1'2\rangle}R^{(+)}_{3\langle 1'2\rangle}(u+2\eta)\tilde{S}^{-1}_{\langle 1'2\rangle}, \tag{6.20}$$

其中 $\tilde{S}_{\langle 1'2\rangle}=diag(1,-1,1,-1)$。因此，$R$-矩阵 $R(u)$ 和 $R^{(-)}(u)$ 可以融合为 $R^{(+)}(u)$。据此，我们得到单值矩阵之间的融合关系

$$P^{(-)}_{1'2}T_2(u)T^{(-)}_{1'}(u+6\eta)P^{(-)}_{1'2}=2^N\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(u-\theta_i)\tilde{S}_{\langle 1'2\rangle}T^{(+)}_{\langle 1'2\rangle}(u+2\eta)\tilde{S}^{-1}_{\langle 1'2\rangle}, \tag{6.21}$$

$$P^{(-)}_{21'}\hat{T}_2(u)\hat{T}^{(-)}_{1'}(u+6\eta)P^{(-)}_{21'}=2^N\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(u+\theta_i)\tilde{S}_{\langle 1'2\rangle}\hat{T}^{(+)}_{\langle 1'2\rangle}(u+2\eta)\tilde{S}^{-1}_{\langle 1'2\rangle}. \quad (6.22)$$

融合反射矩阵为

$$\begin{aligned}&P^{(-)}_{1'2}K_2(u)R^{(-)}_{1'2}(2u+6\eta)K^{(-)}_{1'}(u+6\eta)P^{(-)}_{21'}\\&\qquad=e^{-4\eta}\sinh(u+6\eta)h_1(u-2\eta)\tilde{S}_{\langle 1'2\rangle}K^{(+)}_{\langle 1'2\rangle}(u+2\eta)\tilde{S}^{-1}_{\langle 1'2\rangle}, \quad (6.23)\\&P^{(-)}_{21'}\bar{K}^{(-)}_{1'}(u+6\eta)\bar{M}^{-1}_{1'}R^{(-)}_{21'}(-2u+10\eta)\bar{M}_{1'}\bar{K}_2(u)P^{(-)}_{1'2}\\&\qquad=-e^{-4\eta}\sinh(u-8\eta)\tilde{h}_2(u+2\eta)\tilde{S}_{\langle 1'2\rangle}\bar{K}^{(+)}_{\langle 1'2\rangle}(u+2\eta)\tilde{S}^{-1}_{\langle 1'2\rangle}. \quad (6.24)\end{aligned}$$

因此，经过谱参数的适当平移后，反射矩阵 $K(u)$ 和 $K^{(-)}(u)$ 可以融合为 $K^{(+)}(u)$。将 $u=\{\pm\theta_j\}$ 和 $\Delta=6\eta$ 代入式 (6.11)，并利用关系式 (6.21)–(6.24)，我们得到

$$\begin{aligned}t(\pm\theta_j)\,t_-(\pm\theta_j+6\eta)=e^{-8\eta}&\frac{\sinh(\pm\theta_j+6\eta)\sinh(\pm\theta_j-8\eta)}{\sinh(\pm\theta_j+2\eta)\sinh(\pm\theta_j-4\eta)}\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(\pm\theta_j-\theta_i)\tilde{\rho}_0(\pm\theta_j+\theta_i)\\&\times h_1(\pm\theta_j-2\eta)\tilde{h}_2(\pm\theta_j+2\eta)2^{2N}t_+(\pm\theta_j+2\eta),\quad j=1,\cdots,N. \quad (6.25)\end{aligned}$$

我们看到，在某些非齐次点处，传递矩阵 $t(u)$ 和 $t_-(u)$ 可以融合为 $t_+(u)$，且不会产生其他附加项。因此，传递矩阵的融合也是封闭的。

根据反射方程 (5.27)、对偶反射方程 (5.29) 以及杨-巴克斯特关系 (6.7)–(6.8)，我们可以证明传递矩阵 $t(u)$ 与融合传递矩阵 $t_\pm(v)$ 彼此对易，

$$[t(u),t_\pm(v)]=0. \quad (6.26)$$

因此，它们具有公共本征态。

接下来的任务是从融合恒等式 (5.31)、(6.18) 和 (6.25) 中选出独立关系，并证明 $[t_\pm(u)\ t_\pm(v)]=0$。为此，我们应研究融合传递矩阵 $t_+(u)$ 与 $t_-(u)$ 之间的关系。出发点是 q 变形 $D^{(1)}_3$ 李代数的旋量表示。

7 旋量表示

式 (2.1) 给出的 R-矩阵是矢量型的。事实上，q 变形的 $D^{(1)}_3$ 顶点模型还具有 16×16 自旋型 R-矩阵，它等于 $SU(4)$ 的基本 R-矩阵

李代数。自旋型 R-矩阵的矩阵形式为 [32,34]

$$\tilde{R}_{1'2'}(u)=\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
a_2 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & b_2 & & & e_5 & & & & & & & & & & & \\
 & & b_2 & & & & & & e_5 & & & & & & & \\
 & & & b_2 & & & & & & & & & e_5 & & & \\
\hline
 & e_6 & & & b_2 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & a_2 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & b_2 & & & e_5 & & & & & & \\
 & & & & & & & b_2 & & & & & & e_5 & & \\
\hline
 & & e_6 & & & & & & b_2 & & & & & & & \\
 & & & & & & e_6 & & & b_2 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & a_2 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & b_2 & & & e_5 & \\
\hline
 & & & e_6 & & & & & & & & & b_2 & & & \\
 & & & & & & e_6 & & & & & & & b_2 & & \\
 & & & & & & & & & & e_6 & & & & b_2 & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & a_2
\end{array}\right), \qquad (7.1)$$

其中矩阵元为

$$a_2(u)=\sinh(\frac{u}{2}-2\eta),\ \ b_2(u)=\sinh(\frac{u}{2}),\ \ e_5(u)=-e^{-\frac{u}{2}}\sinh(2\eta),\ \ e_6(u)=-e^{\frac{u}{2}}\sinh(2\eta).$$

旋量 R-矩阵 (7.1) 具有以下性质

$$\text{unitarity}\ :\ \tilde{R}_{1'2'}(u)\tilde{R}_{2'1'}(-u)=-\sinh(\frac{u}{2}-2\eta)\sinh(\frac{u}{2}+2\eta), \qquad (7.2)$$

$$\text{crossing unitarity}\ :\ \tilde{R}_{1'2'}(u)^{t_{2'}}\bar{M}_{2'}^{-1}\tilde{R}_{2'1'}(-u+16\eta)^{t_{2'}}\bar{M}_{2'}=-\sinh(\frac{u}{2})\sinh(\frac{u}{2}-8\eta), \qquad (7.3)$$

$$\text{YBE}\ :\ \tilde{R}_{1'2'}(u_1-u_2)\tilde{R}_{1'3'}(u_1-u_3)\tilde{R}_{2'3'}(u_2-u_3)$$

$$=\tilde{R}_{2'3'}(u_2-u_3)\tilde{R}_{1'3'}(u_1-u_3)\tilde{R}_{1'2'}(u_1-u_2), \qquad (7.4)$$

杨–巴克斯特方程：$\tilde{R}_{1'2'}(u_1-u_2)R^{(\pm)}_{1'3'}(u_1-u_3)R^{(\pm)}_{2'3'}(u_2-u_3)$

$$=R^{(\pm)}_{2'3'}(u_2-u_3)R^{(\pm)}_{1'3'}(u_1-u_3)\tilde{R}_{1'2'}(u_1-u_2). \qquad (7.5)$$

在 $u=4\eta$ 处，旋量 R-矩阵 (7.1) 化简为

$$\tilde{R}_{1'2'}(4\eta)=P^{(6)}_{1'2'}S^{(6)}_{1'2'},\quad P^{(6)}_{1'2'}=\sum_{i=1}^{6}|\chi_i\rangle\langle\chi_i|, \qquad (7.6)$$

其中 $S^{(6)}_{1'2'}$ 是此处省略的 6×6 常数矩阵，而 $P^{(6)}_{1'2'}$ 是一个以基底表示的六维投影算子。

$$|\chi_1\rangle=\phi_0(e^{-\eta}|12\rangle-e^{\eta}|21\rangle),\ |\chi_2\rangle=\phi_0(e^{-\eta}|13\rangle-e^{\eta}|31\rangle),\ |\chi_3\rangle=\phi_0(e^{-\eta}|14\rangle-e^{\eta}|41\rangle),$$

$$|\chi_4\rangle = \phi_0(e^{-\eta}|23\rangle - e^{\eta}|32\rangle),\ |\chi_5\rangle = \phi_0(-e^{-\eta}|24\rangle + e^{\eta}|42\rangle),\ |\chi_6\rangle = \phi_0(e^{-\eta}|34\rangle - e^{\eta}|43\rangle).$$

现在，我们证明矢量型 R-矩阵 (2.1) 和融合后的矩阵 (5.17)-(5.18) 可以通过融合由旋量型矩阵 (7.1) 得到。从 YBE (7.4) 出发，并利用投影算子的性质，我们得到

$$P^{(6)}_{2'3'}\tilde{R}_{1'2'}(u-2\eta)\tilde{R}_{1'3'}(u+2\eta)P^{(6)}_{2'3'} = \sinh(\frac{u}{2}+\eta)R^{(+)}_{1'\langle 2'3'\rangle}(u), \tag{7.7}$$

其中，融合空间 $V_{\langle 2'3'\rangle} \equiv V_2$ 的维数为 6。我们注意到，V_2 确实是 q 变形 $D^{(1)}_3$ 顶点模型的矢量表示空间。根据融合规则 (7.7)，我们得到融合 R 矩阵 $R^{(+)}_{1'2'}(u)$，它与式 (5.17) 给出的矩阵完全相同。在 $u = 6\eta$ 处，$R^{(+)}_{1'2'}(u)$ 化为式 (6.5) 给出的投影算子 $P^{(+)}_{1'2'}$。

Sta从 YBE (7.5) 出发并利用投影算子的性质，我们得到

$$P^{(6)}_{1'2'}R^{(+)}_{2'3}(u-2\eta)R^{(+)}_{1'3}(u+2\eta)P^{(6)}_{1'2'} = \frac{1}{2}R_{\langle 1'2'\rangle 3}(u). \tag{7.8}$$

我们看到，代入 $V_{\langle 2'3'\rangle} \equiv V_1$ 后，得到矢量 R 矩阵 $R_{13}(u)$，它与式 (2.1) 给出的矩阵完全相同。

从 YBE (6.4) 出发并利用融合关系 (6.12)-(6.13)，我们发现，在投影算子 $P^{(+)}_{1'2'}$ 的作用下，将 $R^{(+)}(u)$ 与 $R(u)$ 融合，得到融合 $R^{(-)}(u)$ 矩阵，它与式 (5.18) 给出的矩阵完全相同。

˜旋量反射矩阵 $K(u)$ 可通过求解反射方程得到

$$\begin{aligned}&\tilde{R}_{1'2'}(u-v)\tilde{K}_{1'}(u)\tilde{R}_{2'1'}(u+v)\tilde{K}_{2'}(v)\\ &\qquad = \tilde{K}_{2'}(v)\tilde{R}_{1'2'}(u+v)\tilde{K}_{1'}(u)\tilde{R}_{2'1'}(u-v).\end{aligned} \tag{7.9}$$

容易验证，矩阵 (5.25) 是方程 (7.9) 的一个解，因此 $\tilde{K}(u) = K^{(+)}(u)$。通过将旋量反射矩阵 $\tilde{K}(u)$ 与六维投影算子 $P_{(6)\,1'2'}$ 融合，我们得到

$$P^{(6)}_{1'2'}\tilde{K}_{2'}(u-2\eta)\tilde{R}_{1'2'}(2u)\tilde{K}_{1'}(u+2\eta)P^{(6)}_{2'1'} = \sinh(u+2\eta)h_2(u-2\eta)K_{\langle 1'2'\rangle}(u), \tag{7.10}$$

其中，$K_{\langle 1'2'\rangle}(u)$ 正是由式 (2.4) 给出的矢量反射矩阵 $K(u)$。将 $K^{(+)}(u)$ 与 $K(u)$ 通过 $P^{(+)}_{1'2'}$ 融合，得到由式 (5.26) 给出的融合反射矩阵 $K^{(-)}(u)$，详见式 (6.16)。值得注意的是，融合反射矩阵 $K^{(\pm)}(u)$ 也满足反射方程 (7.9)。

_~对偶旋量反射矩阵 $K(u)$ 满足对偶反射方程

$$\tilde{R}_{1'2'}(-u+v)\bar{\tilde{K}}_{1'}(u)\bar{M}_{1'}^{-1}\tilde{R}_{2'1'}(-u-v+16\eta)\bar{M}_{1'}\bar{\tilde{K}}_{2'}(v)$$
$$=\bar{\tilde{K}}_{2'}(v)\bar{M}_{1'}\tilde{R}_{1'2'}(-u-v+16\eta)\bar{M}_{1'}^{-1}\bar{\tilde{K}}_{1'}(u)R^{(-+)}_{2'1'}(-u+v). \quad (7.11)$$

可以验证，矩阵 (5.30) 是方程 (7.11) 的一个解，因此 $\tilde{K}(u)=\bar{K}^{(\pm)}(u)$，这表明 $\bar{K}^{(\pm)}(u)$ 也满足对偶反射方程 (7.11)。与关于 $K(u)$ 的讨论~~类似，利用对偶旋量反射矩阵 $K(u)$ 与六维投影算子$_{(6)1'2'}$的融合，我们可以得到由 (2.8) 给出的对偶矢量反射矩阵 $\bar{K}(u)$。具体的融合规则为

$$P^{(6)}_{2'1'}\bar{\tilde{K}}_{1'}(u+2\eta)\bar{M}_{1'}^{-1}\tilde{R}_{2'1'}(-2u+16\eta)\bar{M}_{1'}\bar{\tilde{K}}_{2'}(u-2\eta)P^{(6)}_{1'2'}$$
$$=-\sinh(u-10\eta)\tilde{h}_1(u-6\eta)\bar{K}_{\langle 1'2'\rangle}(u). \quad (7.12)$$

利用杨–巴克斯特方程 (7.5) 以及反射方程 (7.9)、(7.11)，我们可以证明

$$[t_+(u),t_+(v)]=[t_-(u),t_-(v)]=0. \quad (7.13)$$

8 $t_+(u)$ 与 $t_-(u)$ 之间的交叉对称性

现在，我们可以证明融合传递矩阵 $t_+(u)$ 和 $t_-(u)$ 满足交叉对称性

$$t_+(-u+8\eta)=e^{8\eta}\mathcal{W}t_-(u)\mathcal{W}, \quad (8.1)$$

其中 $\mathcal{W}=W_1\otimes W_2\otimes\cdots\otimes W_N$和 $W_j=diag(1,-1,1,-1,1,-1)$。交叉方程 (8.1) 表明，融合传递矩阵 $t_+(-u+8\eta)$ 和 $t_-(u)$ 并非相互独立。$t_+(-u+8\eta)$ 与 $t_-(u)$ 相差一个酉变换和一个常数因子。该酉变换为 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{W}^{-1}=\mathcal{W}$。利用融合 R-矩阵的以下性质

$$R^{(+)}_{1'2}(u)=\bar{V}_{1'}W_2[R^{(-)}_{1'2}(-u+8\eta)]^{t_2}\bar{V}_{1'}W_2,$$
$$R^{(-)}_{1'2}(u)=\bar{V}_{1'}W_2[R^{(+)}_{1'2}(-u+8\eta)]^{t_2}\bar{V}_{1'}W_2,$$
$$R^{(+)}_{21'}(u)=[R^{(+)}_{1'2}(u)]^{t_{1'}t_2},\quad R^{(-)}_{21'}(u)=[R^{(-)}_{1'2}(u)]^{t_{1'}t_2}, \quad (8.2)$$

~其中，定义在融合四维空间 $V_{1'}$ 中的算子 $\bar{V}_{1'}$ 为

$$\bar{V}_{1'}=\begin{pmatrix}0&0&0&-e^{-3\eta}\\0&0&e^{-\eta}&0\\0&-e^{\eta}&0&0\\e^{3\eta}&0&0&0\end{pmatrix},\quad \bar{V}_{1'}\bar{V}_{1'}=-\mathrm{id},\quad \bar{V}_{1'}^{t_{1'}}\bar{V}_{1'}=\bar{M}, \quad (8.3)$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
[T_{0'}^{(+)}(-u+8\eta)]^{t_{0'}} &= (-1)^{N-1}\mathcal{W}\bar{V}_{0'}^{t_{0'}}\hat{T}_{0'}^{(-)}(u)\bar{V}_{0'}^{t_{0'}}\mathcal{W},\\
[\hat{T}_{0'}^{(+)}(-u+8\eta)]^{t_{0'}} &= (-1)^{N-1}\mathcal{W}\bar{V}_{0'}T_{0'}^{(-)}(u)\bar{V}_{0'}\mathcal{W}.
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

基于这些关系，我们得到

$$
\begin{aligned}
&t_+(-u+8\eta) = tr_{1'}\{\bar{K}_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)T_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\{K_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\hat{T}_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\\
&= \mathcal{W}tr_{1'}\hat{T}_{1'}^{(-)}(u)\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}\{\bar{K}_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\bar{V}_{1'}T_{1'}^{(-)}(u)\bar{V}_{1'}\{K_{0_1}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}\mathcal{W}\\
&= e^{4\eta}\mathcal{W}tr_{1'}\hat{T}_{1'}^{(-)}(u)tr_{2'}\tilde{R}_{1'2'}(0)\tilde{R}_{1'2'}(2u)\bar{K}_{2'}^{(-)}(u)T_{1'}^{(-)}(u)\bar{V}_{1'}\{K_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}\mathcal{W}/\bar{f}(u)\\
&= e^{4\eta}\mathcal{W}tr_{2'}\bar{K}_{2'}^{(-)}(u)tr_{1'}\tilde{R}_{2'1'}(0)\hat{T}_{2'}^{(-)}(u)\tilde{R}_{1'2'}(2u)T_{1'}^{(-)}(u)\bar{V}_{1'}\{K_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}\mathcal{W}/\bar{f}(u)\\
&= e^{4\eta}\mathcal{W}tr_{2'}\bar{K}_{2'}^{(-)}(u)tr_{1'}\tilde{R}_{2'1'}(0)T_{1'}^{(-)}(u)\tilde{R}_{1'2'}(2u)\hat{T}_{2'}^{(-)}(u)\bar{V}_{1'}\{K_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}\mathcal{W}/\bar{f}(u)\\
&= e^{4\eta}\mathcal{W}tr_{2'}\bar{K}_{2'}^{(-)}(u)T_{2'}^{(-)}(u)tr_{1'}\tilde{R}_{1'2'}(0)\tilde{R}_{1'2'}(2u)\bar{V}_{1'}\{K_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}\hat{T}_{2'}^{(-)}(u)\mathcal{W}/\bar{f}(u)\\
&= e^{4\eta}\mathcal{W}tr_{2'}\bar{K}_{2'}^{(-)}(u)T_{2'}^{(-)}(u)tr_{1'}\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}\tilde{R}_{1'2'}(0)\tilde{R}_{1'2'}(2u)\bar{V}_{1'}\{K_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\hat{T}_{2'}^{(-)}(u)\mathcal{W}/\bar{f}(u)\\
&= e^{4\eta}\mathcal{W}tr_{2'}\bar{K}_{2'}^{(-)}(u)T_{2'}^{(-)}(u)[\bar{V}_{2'}^{t_{2'}}]^{-1}tr_{1'}\tilde{R}_{2'1'}(0)\tilde{R}_{2'1'}(2u)\bar{M}_{1'}\\
&\qquad\times\{K_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)\}^{t_{1'}}\bar{V}_{2'}^{t_{2'}}\hat{T}_{2'}^{(-)}(u)\mathcal{W}/\bar{f}(u)\\
&= e^{8\eta}\mathcal{W}tr_{2'}\bar{K}_{2'}^{(-)}(u)T_{2'}^{(-)}(u)K_{2'}^{(-)}(u)\hat{T}_{2'}^{(-)}(u)\mathcal{W} = e^{8\eta}\mathcal{W}t_-(u)\mathcal{W}.
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

在推导过程中，我们使用了以下关系

$$
\begin{aligned}
&tr_{2'}\{\tilde{R}_{1'2'}(0)\tilde{R}_{1'2'}(2u)\bar{K}_{2'}^{s-}(u)\} = e^{-4\eta}\bar{f}(u)\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}[\bar{K}_{1'}^{(+)}(-u+8\eta)]^{t_{1'}}\bar{V}_{1'},\\
&tr_{2'}\{\tilde{R}_{1'2'}(0)\tilde{R}_{1'2'}(2u)\bar{M}_{2'}[K_{\bar{2}}^{(+)}(-u+8\eta)]^{t_{2'}}\} = e^{4\eta}\bar{f}(u)\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}K_{1'}^{(-)}(u)[\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}]^{-1},\\
&\bar{V}_{1'}^{t_{1'}}\tilde{R}_{1'2'}(0)\tilde{R}_{1'2'}(2u)\bar{V}_{1'} = [\bar{V}_{2'}^{t_{2'}}]^{-1}\tilde{R}_{2'1'}(0)\tilde{R}_{2'1'}(2u)\bar{M}_{1'}\bar{V}_{2'}^{t_{2'}},\\
&\tilde{R}_{2'1'}(0)T_{1'}^{(-)}(u) = T_{2'}^{(-)}(u)\tilde{R}_{1'2'}(0),\quad \hat{T}_{1'}^{(-)}(u)\tilde{R}_{1'2'}(0) = \tilde{R}_{2'1'}(0)\hat{T}_{2'}^{(-)}(u),
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

¯其中 $f(u) = -\sinh 2\eta\sinh(u-8\eta)$。由公式(8.5)可知， $t_+(u)$ 和 $t_-(u)$ 并非彼此独立， $t_-(u)$ 可以用 $t_+(u)$ 替代。

考虑 $t_+(u)$ 与 $t_-(u)$ 之间的交叉对称性 (8.1) 后，我们发现，利用方程 (4.13)、(5.31) 和 (6.18) 可以得到融合恒等式 (6.25)。因此，在这里 (6.25) 并非独立的。不过需要指出的是，当我们研究具有周期性边界条件的 q-变形 $D_3^{(1)}$ 模型时，性质 (8.1) 不再成立，因而 (6.25) 是独立的。此时，我们必须采用类似 (6.25) 的方法来闭合融合过程。

9 非齐次 $T-Q$ 关系

根据定义，我们知道传递矩阵 $t(u)$ 是关于 e^u 的 $4N+4$ 次算子多项式。同时， $t(u)$ 具有交叉对称性 (3.11)。融合传递矩阵 $t_{\pm}(u)$ 是关于 e^u 的 $2N+4$ 次算子多项式，其中 $t_+(u)$ 和 $t_-(u)$ 满足性质 (8.1)。所有 $t(u)$ 和 $t_{\pm}(u)$ 都具有公共本征态。将 $t(u)$ 和 $t_{\pm}(u)$ 作用于某个公共本征态所得的本征值分别记为 $\Lambda(u)$ 和 $\Lambda_{\pm}(u)$。交叉对称性 (3.11) 给出

$$\Lambda(-u+8\eta)=\Lambda(u). \tag{9.1}$$

那么， $\Lambda(u)$ 的值可以由 $2N+3$ 个独立约束确定。根据性质 (8.1)，我们得到

$$\Lambda_+(-u+8\eta)=e^{8\eta}\Lambda_-(u), \tag{9.2}$$

这意味着， $\Lambda_-(u)$ 可以由 $\Lambda_+(u)$ 替代，因此我们只需考虑 $\Lambda(u)$ 和 $\Lambda_+(u)$ 的值。 $\Lambda_+(u)$ 的值可以由 $2N+5$ 个独立约束确定。因此，我们需要 $4N+8$ 个条件来求出 $\Lambda(u)$ 和 $\Lambda_+(u)$ 的值。

我们选择的独立约束为转移矩阵融合恒等式 (4.13)（ $u=\{\theta_j\}$）、(5.31)（ $u=\{\pm\theta_j\}$）和 (6.18)（ $u=\{\theta_j\}$）。将这些算子恒等式作用于 $t(u)$ 和 $t_+(u)$ 的共同本征态上，可得到本征值 $\Lambda(u)$ 和 $\Lambda_+(u)$ 之间的以下函数关系

$$\begin{aligned}\Lambda(\theta_j)\,\Lambda(-\theta_j)=&\frac{\sinh(\theta_j-6\eta)\sinh(\theta_j-8\eta)\sinh(\theta_j+6\eta)\sinh(\theta_j+8\eta)}{\sinh(\theta_j-2\eta)\sinh(\theta_j-4\eta)\sinh(\theta_j+2\eta)\sinh(\theta_j+4\eta)}\\&\times h_1(\theta_j-2\eta)h_2(\theta_j+2\eta)\tilde{h}_1(\theta_j-2\eta)\tilde{h}_2(\theta_j+2\eta)\\&\times\prod_{i=1}^{N}a(\theta_j-\theta_i)e(\theta_j-\theta_i+8\eta)a(\theta_j+\theta_i)e(\theta_j+\theta_i+8\eta),\quad j=1,\cdots,N,\end{aligned} \tag{9.3}$$

$$\begin{aligned}\Lambda(\pm\theta_j)\,\Lambda(\mp\theta_j+4\eta)=&\frac{\sinh(\pm\theta_j+4\eta)\sinh(\pm\theta_j-8\eta)}{\sinh(\pm\theta_j+2\eta)\sinh(\pm\theta_j-6\eta)}\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(\pm\theta_j-\theta_i)\tilde{\rho}_0(\pm\theta_j+\theta_i)\\&\times 4^{2N}\Lambda_+(\pm\theta_j+2\eta)\,\Lambda_+(\mp\theta_j+6\eta),\quad j=1,\cdots,N,\end{aligned} \tag{9.4}$$

$$\begin{aligned}\Lambda(\theta_j)\,\Lambda_+(\theta_j+6\eta)=&\frac{\sinh(\theta_j+6\eta)\sinh(\theta_j-8\eta)}{\sinh(\theta_j+2\eta)\sinh(\theta_j-4\eta)}\prod_{i=1}^{N}\tilde{\rho}_0(\theta_j-\theta_i)\tilde{\rho}_0(\theta_j+\theta_i)\\&\times h_2(\theta_j+2\eta)\tilde{h}_1(\theta_j-2\eta)2^{2N}\Lambda_+(-\theta_j+6\eta),\quad j=1,\cdots,N.\end{aligned} \tag{9.5}$$

此外，根据定义，我们还知道 $\Lambda(u)$ 和 $\Lambda_+(u)$ 在某些特殊点处的取值。例如，

$$\Lambda(0)=-\frac{\sinh 6\eta\sinh 8\eta}{\sinh 2\eta\sinh 4\eta}h_2(2\eta)\tilde{h}_2(2\eta)\prod_{l=1}^{N}\rho_1(\theta_l),\ \ \Lambda(2\eta)=2^{2N}\frac{\sinh 6\eta}{\sinh 4\eta}\prod_{l=1}^{N}\rho_s(\theta_l)\Lambda_+(4\eta),$$
$$\Lambda_+(0)=-\frac{\sinh 8\eta}{\sinh 2\eta}h_2(0)\tilde{h}_2(4\eta)\prod_{l=1}^{N}\rho_s(\theta_l),\ \ \Lambda_+(8\eta)=\frac{\sinh 8\eta}{\sinh 2\eta}h_2(4\eta)\tilde{h}_1(0)\prod_{l=1}^{N}\rho_s(\theta_l).\quad(9.6)$$

$\Lambda(u)$ 和 $\Lambda_+(u)$ 在 $u\to\pm\infty$ 下的渐近行为为

$$\begin{aligned}
\Lambda(u)|_{u\to+\infty}&=-\frac{1}{4^{N+1}}e^{2(N+1)u-(8N+4)\eta}\Big\{c(\tilde{c}+e^{-\tilde{c}_2})e^{4(m_1-m_2)\eta}+\tilde{c}(c+e^{-c_2})e^{4(m_2-m_1)\eta}\\
&\quad+(e^{2(m_1+m_2-N-1)\eta}+e^{-2(m_1+m_2-N-1)\eta})(c_1\tilde{c}_3e^{-2\eta}+\tilde{c}_1c_3e^{2\eta})\Big\}\ +\cdots,\\
\Lambda(u)|_{u\to-\infty}&=-\frac{1}{4^{N+1}}e^{-2(N+1)u+(8N+12)\eta}\Big\{c(\tilde{c}+e^{-\tilde{c}_2})e^{4(m_2-m_1)\eta}+\tilde{c}(c+e^{-c_2})e^{4(m_1-m_2)\eta}\\
&\quad+(e^{2(m_1+m_2-N-1)\eta}+e^{-2(m_1+m_2-N-1)\eta})(c_1\tilde{c}_3e^{-2\eta}+\tilde{c}_1c_3e^{2\eta})\Big\}\ +\cdots,\\
\Lambda_+(u)|_{u\to+\infty}&=-\frac{1}{4^{N+1}}e^{(N+2)u-4(N+1)\eta}\Big\{c(\tilde{c}+e^{-\tilde{c}_2})(e^{2(2m_1-N-1)\eta}+e^{2(N+1-2m_2)\eta})\\
&\quad+e^{2(m_2-m_1)\eta}(c_1\tilde{c}_3e^{-2\eta}+\tilde{c}_1c_3e^{2\eta})\Big\}\ +\cdots,\\
\Lambda_+(u)|_{u\to-\infty}&=-\frac{1}{4^{N+1}}e^{-(N+2)u+4(N+3)\eta}\Big\{\tilde{c}(c+e^{-c_2})(e^{2(2m_2-N-1)\eta}+e^{2(N+1-2m_1)\eta})\\
&\quad+e^{2(m_1-m_2)\eta}(c_1\tilde{c}_3e^{-2\eta}+\tilde{c}_1c_3e^{2\eta})\Big\}\ +\cdots,
\end{aligned}\qquad(9.7)$$

其中 $m_1\in[0,N]$、 $m_2\in[0,N]$和 $0\le m_1+m_2\le N$。我们应注意， $t(u)$ 和 $t_+(u)$ 的首项是算子，这与有理 $D_3^{(1)}$ 情形不同；在后一情形中，首项是常数。所有这些算子都是守恒量，并与传递矩阵 $t(u)$ 和 $t_+(u)$ 对易。这些守恒量具有显然的本征值，其由式（9.7）给出的量子数 m_1 和 m_2 刻画。这使我们想到，非对角 K-矩阵（2.4）和（2.8）只破坏了相应闭链的三个守恒 $U(1)$ 荷中的一个。

为简便起见，我们引入一些函数

$$\begin{aligned}
Z_1(u)&=\frac{\sinh(u-6\eta)\sinh(u-8\eta)}{\sinh(u-2\eta)\sinh(u-4\eta)}A(u)h_2(u+2\eta)\tilde{h}_1(u-2\eta)\,\frac{Q^{(1)}(u+4\eta)}{Q^{(1)}(u)},\\
Z_2(u)&=\frac{\sinh(u-6\eta)}{\sinh(u-2\eta)}B(u)h_1(u-6\eta)\tilde{h}_2(u-2\eta)\frac{Q^{(1)}(u-4\eta)Q^{(2)}(u+4\eta)Q^{(3)}(u+4\eta)}{Q^{(1)}(u)Q^{(2)}(u)Q^{(3)}(u)},\\
Z_3(u)&=B(u)h_2(u-2\eta)\tilde{h}_1(u-6\eta)\frac{Q^{(2)}(u+4\eta)Q^{(3)}(u-4\eta)}{Q^{(2)}(u)Q^{(3)}(u)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z_4(u) &= B(u)h_1(u-6\eta)\tilde{h}_2(u-2\eta)\frac{Q^{(2)}(u-4\eta)Q^{(3)}(u+4\eta)}{Q^{(2)}(u)Q^{(3)}(u)},\\
Z_5(u) &= \frac{\sinh(u-2\eta)}{\sinh(u-6\eta)}B(u)h_2(u-2\eta)\tilde{h}_1(u-6\eta)\frac{Q^{(1)}(u)Q^{(2)}(u-4\eta)Q^{(3)}(u-4\eta)}{Q^{(1)}(u-4\eta)Q^{(2)}(u)Q^{(3)}(u)},\\
Z_6(u) &= \frac{\sinh u\sinh(u-2\eta)}{\sinh(u-4\eta)\sinh(u-6\eta)}C(u)h_1(u-10\eta)\tilde{h}_2(u-6\eta)\frac{Q^{(1)}(u-8\eta)}{Q^{(1)}(u-4\eta)},\\
f_1(u) &= x\sinh(u-6\eta)\frac{Q^{(2)}(u+4\eta)Q^{(3)}(u+4\eta)}{Q^{(1)}(u)}F(u),\\
f_2(u) &= x\sinh(u-2\eta)\frac{Q^{(2)}(u-4\eta)Q^{(3)}(u-4\eta)}{Q^{(1)}(u-4\eta)}F(u),
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

相关函数定义如下

$$
\begin{aligned}
A(u) &= \prod_{j=1}^{N}a(u-\theta_j)a(u+\theta_j),\quad C(u)=\prod_{j=1}^{N}e(u-\theta_j)e(u+\theta_j),\\
B(u) &= \frac{\sinh u\sinh(u-8\eta)}{\sinh(u-4\eta)\sinh(u-4\eta)}\prod_{j=1}^{N}b(u-\theta_j)b(u+\theta_j),\\
Q^{(1)}(u) &= \prod_{k=1}^{L_1}\sinh\frac{1}{2}(u-\mu_k^{(1)}-2\eta)\sinh\frac{1}{2}(u+\mu_k^{(1)}-2\eta),\\
Q^{(l)}(u) &= \prod_{k=1}^{L_l}\sinh\frac{1}{2}(u-\mu_k^{(l)}-4\eta)\sinh\frac{1}{2}(u+\mu_k^{(l)}-4\eta),\quad l=2,3,\\
F(u) &= \frac{\sinh u\sinh(u-8\eta)}{\sinh(u-4\eta)}\prod_{j=1}^{N}a(u-\theta_j)a(u+\theta_j)\sinh(u-\theta_j)\sinh(u+\theta_j).
\end{aligned}
\tag{9.9}
$$

根据 $4N+8$ 约束 (9.3)-(9.7)，我们得到 $\Lambda(u)$ 和 $\Lambda_+(u)$ 的值，它们可由非齐次 $T-Q$ 关系表示

$$
\begin{aligned}
\Lambda(u) &= Z_1(u)+Z_2(u)+Z_3(u)+Z_4(u)+Z_5(u)+Z_6(u)+f_1(u)+f_2(u),\\
\Lambda_+(u) &= \prod_{i=1}^{N}a_1(u-\theta_i)a_1(u+\theta_i)h_2(u)\tilde{h}_1(u-4\eta)\frac{\sinh(u-8\eta)}{\sinh(u-2\eta)}\\
&\quad\times\left[\frac{Q^{(2)}(u+6\eta)}{Q^{(2)}(u+2\eta)}+\frac{\sinh(u)}{\sinh(u-4\eta)}\frac{Q^{(1)}(u+2\eta)Q^{(2)}(u-2\eta)}{Q^{(1)}(u-2\eta)Q^{(2)}(u+2\eta)}\right]\\
&\quad+\prod_{i=1}^{N}b_1(u-\theta_i)b_1(u+\theta_i)\frac{\sinh(u)}{\sinh(u-6\eta)}\left[h_2(u-4\eta)\tilde{h}_1(u-8\eta)\frac{Q^{(3)}(u-6\eta)}{Q^{(3)}(u-2\eta)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\sinh(u-8\eta)}{\sinh(u-4\eta)}h_1(u-8\eta)\tilde{h}_2(u-4\eta)\frac{Q^{(1)}(u-6\eta)Q^{(3)}(u+2\eta)}{Q^{(1)}(u-2\eta)Q^{(3)}(u-2\eta)}\right]\\
&\quad+x\,\sinh(u)\sinh(u-8\eta)\prod_{i=1}^{N}a_1(u-\theta_i)a_1(u+\theta_i)b_1(u-\theta_i)b_1(u+\theta_i)
\end{aligned}
\tag{9.10}
$$

$$\times\frac{Q^{(2)}(u-2\eta)Q^{(3)}(u+2\eta)}{Q^{(1)}(u-2\eta)}. \tag{9.11}$$

$\Lambda(u)$ 和 $\Lambda_+(u)$ 的正则性要求贝特根 $\{\mu_k^{(m)}\}$ 满足 Bethe Ansatz 方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\sinh(\mu_k^{(1)}-2\eta)h_2(\mu_k^{(1)}+4\eta)\tilde{h}_1(\mu_k^{(1)})}{\prod_{j=1}^N\sinh\frac{1}{2}(\mu_k^{(1)}+2\eta-\theta_j)\sinh\frac{1}{2}(\mu_k^{(1)}+2\eta+\theta_j)}\frac{Q^{(1)}(\mu_k^{(1)}+6\eta)}{Q^{(2)}(\mu_k^{(1)}+6\eta)Q^{(3)}(\mu_k^{(1)}+6\eta)}\\
&\quad+\frac{\sinh(\mu_k^{(1)}+2\eta)h_1(\mu_k^{(1)}-4\eta)\tilde{h}_2(\mu_k^{(1)})}{\prod_{j=1}^N\sinh\frac{1}{2}(\mu_k^{(1)}-2\eta-\theta_j)\sinh\frac{1}{2}(\mu_k^{(1)}-2\eta+\theta_j)}\frac{Q^{(1)}(\mu_k^{(1)}-2\eta)}{Q^{(2)}(\mu_k^{(1)}+2\eta)Q^{(3)}(\mu_k^{(1)}+2\eta)}\\
&=-x\,\sinh(\mu_k^{(1)})\sinh(\mu_k^{(1)}+2\eta)\sinh(\mu_k^{(1)}-2\eta),\quad k=1,\cdots,L_1,\\
&\frac{Q^{(1)}(\mu_l^{(2)})Q^{(2)}(\mu_l^{(2)}+8\eta)}{Q^{(1)}(\mu_l^{(2)}+4\eta)Q^{(2)}(\mu_l^{(2)})}=-\frac{\sinh(\mu_l^{(2)}+2\eta)}{\sinh(\mu_l^{(2)}-2\eta)},\quad l=1,\cdots,L_2,\\
&\frac{Q^{(1)}(\mu_l^{(3)})Q^{(3)}(\mu_l^{(3)}+8\eta)}{Q^{(1)}(\mu_l^{(3)}+4\eta)Q^{(3)}(\mu_l^{(3)})}=-\frac{\sinh(\mu_l^{(3)}+2\eta)h_2(\mu_l^{(3)}+2\eta)\tilde{h}_1(\mu_l^{(3)}-2\eta)}{\sinh(\mu_l^{(3)}-2\eta)h_1(\mu_l^{(3)}-2\eta)\tilde{h}_2(\mu_l^{(3)}+2\eta)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad l=1,\cdots,L_3,
\end{aligned}\tag{9.12}$$

其中贝特根的数量满足

$$L_1=L_2+L_3+N, \tag{9.13}$$

未确定参数 x 由下式给出

$$x=-e^{4\eta}(c_1\tilde{c}_3e^{-2\eta}+\tilde{c}_1c_3e^{2\eta})+c(\tilde{c}+e^{-\tilde{c}_2})e^{4\eta+2(L_1+1)\eta}+\tilde{c}(c+e^{-c_2})e^{4\eta-2(L_1+1)\eta}, \tag{9.14}$$

$L_2=m_1$、 $L_3=m_2$和 $L_1\in[0,2N]$。

可以验证， $\Lambda(u)$和 $\Lambda_+(u)$满足交叉对称性(9.1)、函数关系(9.3)-(9.5)、特殊点处的取值(9.6)以及渐近行为(9.7)。因此，它们分别是传递矩阵 $t(u)$和 $t_+(u)$的本征值。

哈密顿量(2.10)的本征能量可由 $\Lambda(u)$得到，如下所示

$$E=\frac{\partial\ln\Lambda(u)}{\partial u}|_{u=0,\{\theta_j=0\}}. \tag{9.15}$$

10 讨论

本文研究了具有开放边界条件的 q变形 $D_3^{(1)}$ 顶点模型的精确解。利用 R矩阵和杨-巴克斯特

可积理论的内在性质，我们构造了融合传递矩阵之间的封闭融合关系。基于这些关系并通过多项式分析，我们得到了传递矩阵和哈密顿量的精确本征谱。本文所用的方法和所得结果可直接推广到 q变形 $D_n^{(1)}$可积模型。

致谢

我们感谢 Y. Wang 教授给予的宝贵讨论和持续鼓励。谨此致谢，本文研究获得了以下资助：国家重点研发计划（项目编号：2021YFA1402104）、国家自然科学基金委员会（项目编号：12074410、12247103、12075177、12147160、11934015 和 11975183）、陕西省自然科学基础研究计划（项目编号：2021JCW-19）、澳大利亚研究理事会（项目编号：DP 190101529）、中国科学院战略性先导科技专项（项目编号：XDB33000000），以及中国博士后科学基金会（2020M680724）的资助。

参考文献

[1] V. E. Korepin、N. M. Bogoliubov 和 A. G. Izergin，《量子逆散射方法与关联函数》，剑桥大学出版社，1993年。[2] G. Mussardo，《统计场论：统计物理中精确可解模型导论》，牛津大学出版社，纽约，2010年。[3] B. Sutherland，《Beautiful Models：70 年精确可解的量子多体问题》，World Scientify Publishing，新加坡，2004年。[4] H. J. de Vega 和 E. Lopes，《物理评论快报》67 (1991) 489。[5] E. Lopes，核物理 B 370 (1992) 636。[6] H. J. de Vega 和 A. Gonz´ález-Ruiz，Mod. Phys. Lett. A 09 (1994) 2207。[7] Y. Wang、W. -L. Yang、J. Cao 和 K. Shi，《精确可解模型的非对角贝特拟设》，施普林格出版社，2015年。[8] N. Yu. Reshetikhin，《苏联物理学——实验与理论物理学杂志》57 (1983) 691。

[9] N. Yu. Reshetikhin，数学物理快报 14 (1987) 235。[10] M. Karowski，核物理 B 153 (1979) 244。[11] P. P. Kulish、N. Yu. Reshetikhin 和 E. K. Sklyanin，数学物理快报 5 (1981) 393。[12] P. P. Kulish 和 E. K. Sklyanin，物理学讲义 151 (1982) 61。[13] A. N. Kirillov 和 N. Yu. Reshetikhin，苏联数学杂志 35 (1986) 2627；物理学杂志 A 20 (1987) 1565。[14] L. Mezincescu 和 R. I. Nepomechie，物理学杂志A 25 (1992) 2533。[15] L. Mezincescu 和 R. I. Nepomechie，核物理B 372 (1992) 597。[16] G.-L. Li、J. Cao、P. Xue、Z.-R. Xin、K. Hao、W.-L. Yang、K. Shi 和 Y. Wang，高能物理学杂志 05 (2019) 067。[17] G. A. P. Ribeiro、A. Kl¨umper 和 P. A. Pearce，统计力学杂志 (2022) 113102。[18] G.-L.Li、P. Xu、P. Sun、H. Yang、X. Xu、J. Cao、T. Yang 和 W.-L. Yang，核物理B 965 (2021) 115333。[19]G. A. P. Ribeiro，关于 $Sp(2n)$可积顶点模型的配分函数，arXiv:2211.06487。[20] E. Frenkel、D. Hernandez 和 N. Reshetikhin，数学物理快报 112 (2022) 80。[21] E. K. Sklyanin，物理学杂志A 21 (1988) 2375。[22] A. Lima-Santos 和 R. Malara，核物理B 675 (2003) 661。[23] R. Malara 和 A. Lima-Santos，统计力学杂志 (2006) P09013。[24] S. Artz、L. Mezincescu 和 R. I. Nepomechie，物理学杂志A 28 (1995) 5131。[25] R. I. Nepomechie、R. A. Pimenta 和 A. L. Retore，核物理B 924 (2017) 86。[26] M. J. Martins 和 P. B. Ramos，核物理B 500 (1997) 579。[27] G.-L. Li、K. J. Shi 和 R. H. Yue，核物理B 696 (2004) 381。

[28] G.-L. Li 和 K. J. Shi，统计力学杂志 (2007年) P01018。[29] G. -L. Li、J. Cao、P. Xue、K. Hao、P. Sun、W. -L. Yang、K. Shi 和 Y. Wang，核物理B 946 (2019年) 114719。[30] G.-L. Li、J. Cao、P. Xue、K. Hao、P. Sun、W.-L. Yang、K. Shi 和 Y. Wang，高能物理学杂志 12 (2019年) 051。[31] V. V. Bazhanov，物理快报B辑 159 (1985年) 321；数学物理通讯 113 (1987年) 471。[32] M. Jimbo，数学物理通讯 102 (1986年) 537。[33] P. Ramond，《群论：物理学家概览》，剑桥大学出版社，2010年。[34] D. Chicherin、S. Derkachov 和 A. P. Isaev，物理学杂志A 46 (2013年) 485201。