arXiv:2304.01946v1 [math.OC] 4 Apr 2023

休息态可变项目与排队准入控制的动态分配指数：一种多面体方法*

José Niño-Mora 统计系 马德里卡洛斯三世大学
jose.nino@uc3m.es,
http://alum.mit.edu/www/jnimoraORCID:
0000-0002-2172-3983

发表于《数学规划》*A*辑，第93卷，第361–413页，2002年
DOI: 10.1007/s10107-002-0362-6

摘要

本文提出一种多面体方法，用于设计、分析和计算基于部分守恒定律（*PCL*）的动态分配指标，以调度二元动作（参与/休息）的马尔可夫随机项目；这些项目在休息时也可能改变状态（休息态可变多臂老虎机（*RB*））。本文拓展了作者此前的研究 [J. Niño-Mora (2001): Restless bandits, partial conservation laws and indexability. *Adv. Appl. Probab.* **33**, 76–98], ；该研究表明，在可容许线性目标下，PCL 可推出随机调度问题中具有假定结构的指数策略的最优性，并将其用于建立 Whittle（1988年）RB 指数（可索引性）存在的简单充分条件，以及一种自适应贪心指标算法。本文的新贡献包括：(i) 基于与可访问集合系统$(J,\ \mathscr{F})$（$\mathscr{F}$-扩展拟阵）相关的新多胞体的结构和算法性质，建立 PCL 框架的多面体基础；(ii) 受准入控制模型启发，提出适用于 RB 的新动态分配指标，它们扩展了 Whittle 指标，适用范围显著扩大；(iii) 运用 PCL 得到新指标存在的充分条件（*PCL* 可索引性），并提出一种新的自适应贪心指标算法；(iv) 将 PCL 可索引性解释为经典经济学边际收益递减定律的一种形式，并将指标刻画为最优边际成本率；此外还求解一个相关的最优约束控制问题；(v) 针对作为研究动机的准入控制模型，在时间折现和长期平均准则下开展 PCL 可索引性分析；在温和条件下，这为最优阈值策略给出一种新的指标刻画；(vi) 将此结果用于提出两类棘手排队控制问题的新启发式指数策略：准入控制与并行队列路由；以及在状态依赖持有成本率和生灭过程动态下，针对销售损失情形的多类别备货型队列进行调度。

关键词： 马尔可夫决策过程 – restless 多臂老虎机 – 多面体组合学 – 扩展拟阵 – 自适应贪心算法 – 动态分配指数 – 随机调度 – 阈值策略 – 指标策略 – 吉廷斯指数 – Klimov 指数 – Whittle 指数 – 队列控制 – 准入控制 – 路由 – 备货生产 – 多类别队列 – 有限缓冲区 – 守恒定律 – 可实现性能

数学主题分类（2020）： 90B36, 90B22, 90C40, 90C57, 90C08

*本研究部分经费由西班牙科学技术部（资助编号 BEC2000-1027）、北约（合作联络资助 PST.CLG.976568）以及西班牙—美国（富布赖特）科学技术交流联合委员会（项目编号 2000-20132）提供。

目录

1 引言 **4**

2 动机问题：生灭队列准入的最优控制 **6**
2.1 模型描述.2.2 最优基于指标的阈值策略.2.3 组合优化表述. 6 8 8

3 个 RB：具有假定结构的指标策略的最优性 **8**
3.1 单个 RB 的 ν收费问题.93.2 动态规划公式化与多项式时间可解性.93.3 采用具有假定结构的指标策略求解.10

4 $\mathscr{F}$扩展多面体：性质与优化 **11**
4.1 $\mathscr{F}$扩展多面体.114.2 关于 $\mathscr{F}$扩展多面体的线性规划.124.3 自适应贪心算法与分配指标.134.4 分配指标与可容许成本域分解.144.5 新版指标算法.154.6 系数的性质与解释 $c_j^{S_k}$， $\nu_j^{S_k}$，以及指标 ν_j . . . . . 174.7 单调 w_j^S'下的指标刻画.184.8 对称边际成本下 w_j^S'的递推关系.19

5 部分守恒定律 **20**
5.1 部分守恒定律.215.2 多项目调度与指标分解.22

6 PCL 可索引 RB **23**
6.1 标准线性规划表述与纯被动成本归一化.236.2 归一化 ν-收费问题的 PCL.246.3 边际成本.286.4 作为边际收益递减规律的 PCL 可索引性.306.5 推广至长期平均准则.326.6 受活动约束的最优控制.33

7 准入控制问题：PCL 可索引性分析 34
7.1 折扣准则下的 PCL-index可索引性分析.347.2 长期平均准则下的 PCL 可索引性.377.3 情形 $\lambda_j = \lambda$, $\mu_j = \mu$, $\alpha = 0$ .37

8 应 用于排队系统中的路由和按库存生产调度 **39**
8.1 用于准入控制和并行队列路由的指标策略.398.2 具有销售损失的多类别备货型队列调度的指标策略 . . . 40

9 结论 **41**

离散时间重新表述 **42**

B 边际工作负载与成本分析 42B.1 边际工作负载：计算与性质.42B.2 边际成本计算.48

Whittle 指数与阈值策略可能存在的不一致性 49

1 引言

本文提出一种多面体方法，用于设计、分析和计算动态分配指标，以调度状态可在休息时发生变化的二元动作（参与/休息）马尔可夫随机项目，即*restless* 多臂老虎机（*RB*）。本研究借鉴并推动了三个各自独立发展的研究领域：（1）随机调度中的指数策略；（2）马尔可夫决策过程（*MDP*）中的单调最优策略；（3）资源分配问题中的多面体方法。接下来，我们将简要讨论各领域的相关背景。

随机调度中的指数策略

随机调度 (参见 [27]) 研究相互竞争、随机演化活动的动态资源分配。一个重要的模型类别涉及设计一种调度策略，以便为一组马尔可夫型随机项目分配动态资源，这些项目可以处于活动或休眠状态。沿用 Whittle 的说法 [37], ，我们将此类项目称为休眠臂老虎机（*RB*），并将相应的多项目模型称为休眠臂老虎机问题（*RBP*）。“项目”一词在此采用宽泛含义，以适应具体应用。例如，项目可以表示一个队列，该队列受准入控制，其演化取决于所采用的策略，用于决定是否接纳每位到达的顾客进入系统，或将其拒绝。

指数策略对这类问题尤其具有吸引力：为每个项目的状态 j_k 赋予一个指标 $\nu_k(j_k)$ k；随后，在每个时刻，激活指标较大的项目，数量达到所需数目。20 世纪 60 年代和 70 年代，人们致力于寻找具有最优指数策略的模型，并由此形成了经典的研究成果。其中包括著名的 $c\mu$规则 [8] ，用于调度多类别 $M/G/1$ 队列；克利莫夫指数规则 [21] ，用于相应的带反馈模型；以及吉廷斯指数规则[14, 15], 用于多臂老虎机问题（*MBP*）。

MBP 是这类已得到良好求解的模型中的典范，能够带来统一性的洞见。在该模型中，休息中的项目状态不变，每个时刻只执行一个项目，并采用折扣准则。最优的 吉廷斯指数 $\nu_k(j_k)$具有深刻的解释。 [14]通过单项目子问题引入了该指数：在每个时刻，可以继续运行，也可以放弃运行；若放弃，则可获得恒定速率为 ν 的年金；此时， $\nu_k(j_k)$就是状态 j_k 下的公平被动补贴，也就是说，愿意接受的最低补贴值 ν，以便让项目 k 休息。Gittins [15] 进一步将其指标刻画为：从每个状态出发，单位期望折扣时间所对应的期望折扣奖励的最大速率，即最大奖励率。

对于一般的 RBP，其建模能力的增强是以牺牲可处理性为代价的：它是*PSPACE* 困难 [28]。因此，研究重点必须转向设计理论依据充分且易于处理的启发式指数策略。Whittle [37] 最先提出了这类策略；在 MBP 情形下，该策略可还原为 Gittins 策略，并具有某种形式的渐近最优性。参见 [36]。*Whittle* 指数 也通过单项目子问题定义为公平被动补贴，具体方式与上述 Gittins 指数的定义完全相同。惠特尔指数策略 规定，指标较大的项目应获得较高优先级。

与吉廷斯指数不同，被动转移使 Whittle 指数的适用范围有限：它仅对可索引项目有定义，而该项目的最优主动集合（应启动该项目的状态集合）会随着被动补贴的增加而缩小。由于缺乏简单的可索引性充分条件，这类指数在20世纪90年代的应用受到阻碍。 [3]提出了一种不受此类适用范围限制的替代指数。关于可索引性，我们首先在 [26] 提出了一组基于部分守恒定律概念、易于处理的充分条件，并给出了单遍指数算法。

马尔可夫决策过程中的单调最优策略

在马尔可夫决策过程的应用中，直觉往往会促使人们对最优策略的定性性质作出假设。例如，最优动作可能随状态单调变化。因此，在一个队列准入控制模型中，人们可能会假设：当队列长度超过某个临界阈值时，才应接纳到达顾客。证明此类策略的最优性，有助于设计高效的专用算法。

为此，最成熟的方法建立在格上的次模函数理论之上。参见 [32]。必须通过归纳法在有限时域上利用动态规划（*DP*）方程，确立问题价值函数的次模性。无限时域模型也具有这些性质。例如，参见 [17, 第 8] 章和 [31, 1]。

对 RB 模型的可索引性分析提出了相关但不同的定性性质，该分析以指标在状态上的单调性为表述。考虑一个排队准入控制 RB模型，其中主动动作对应于关闭入口闸门，被动动作对应于打开入口闸门。此时，Whittle 指数表示每个状态下保持闸门打开的公平补贴，按单位时间计算；或者等价地，表示每个状态下保持闸门关闭的公平收费，按单位时间计算。为了与阈值策略的最优性（见上文）保持一致，指标应随队列长度单调递增。当指标用于为相关静态休眠土匪问题定义启发式策略时，这一要求至关重要，例如第8节所讨论的问题。

然而，我们发现，当此类模型纳入状态依赖到达率时，Whittle 指数可能不具备所要求的单调性。参见附录C。基于这些考量，本文旨在拓展 Whittle 指数，使其与最优策略的假定结构相一致。

资源分配问题中的多面体方法

多面体方法在资源分配中的应用起源于组合优化，属于多面体组合学领域。参见例如 [25]。Edmonds [11, 12] 首次从底层多面体（称为多拟阵）的性质出发，解释了经典贪心算法 ——资源分配中最简单的指标规则 ——为何具有最优性。这些多面体源自该问题的线性规划表述。

将线性规划应用于马尔可夫决策过程，始于 [10, 23] 对一般有限状态、有限动作马尔可夫决策过程的线性规划表述。Klimov[21] 首次将线性规划应用于随机调度。他将带反馈的多类别 $M/G/1$ 队列最优调度问题表述为线性规划，其约束代表流量守恒定律。他采用自适应贪心算法求解该线性规划，从而得到了最优指标规则。

Coffman 和 Mitrani [7] 将一个更简单的模型——不含反馈——表述为线性规划，其约束刻画了工作守恒定律。这些定律将可实现的（期望延迟）性能区域刻画为多拟阵，从而以多面体论证说明了经典 $c\mu$规则的最优性。 [13, 30]阐明了守恒定律与多拟阵之间的关系。

Tsoucas [33] 将工作守恒定律应用于Klimov模型，得到一个基于扩展拟阵的新线性规划表述（参见[4]）。 [2], 将他的分析拓展到广义守恒律（*GCLs*）框架，为Gittins指数规则在MBP及其扩展模型中的最优性提供了多面体论证。[16]采用近似广义守恒律，证明了Klimov规则在并行服务器情形下近乎最优。关于这类可达区域方法的概述，请参见 [9] 。

守恒定律理论通过 [26], 中的部分守恒定律 *(PCL)*概念得到了扩展，并将其用于分析 Whittle 的休假模型指数。部分守恒定律蕴含了具有假定结构的指数策略在可容许线性目标下的最优性。其应用产生了*PCL* 可索引休假模型这一类别，其中 Whittle 指数存在，并可通过

对克利莫夫算法的扩展。

目标、贡献与结构

本文的首要目标是开发、分析并应用 Whittle 休假模型指数的稳健扩展，从而显著拓宽其适用范围。为此，我们将深入理解 PCL 框架及其多面体基础，这也是本文的第二个目标。

本文的贡献包括：(i) 基于与集合系统 $(J,\ \mathscr{F})$ ($\mathscr{F}$相关的扩展拟阵)相联系的新多胞体的性质，建立 PCL 的多面体基础；(ii) 受准入控制模型启发，提出适用于 RB 的新型动态分配指标，扩展了 Whittle 指标的适用范围；(iii) 运用 PCL 得出新指标存在的充分条件（*PCL* 可索引性），并提出一种新的自适应贪心指数算法；(iv) 将 PCL 可索引性解释为经典经济学规律“边际收益递减”的一种形式，并将该指标刻画为最优边际成本率；此外，还求解了一个相关的最优约束 控制问题；(v) 针对启发该研究的准入控制模型，在时间折现和长期平均准则下进行 PCL 可索引性分析；在温和条件下，这为最优阈值策略提供了新的指标刻画；(vi) 将上述结果用于提出两类困难排队控制问题的新型启发式指数策略：准入控制与并行队列路由，以及销售损失情形下多类别备货型队列的调度。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍作为研究动机的准入控制模型，并提出新的求解方法。第3 节介绍一般 RB 模型，引入新的指标，并阐述待解决的问题。第4 节介绍 $\mathscr{F}$-扩展拟阵，并研究其性质。第5 节回顾 PCL框架。第6 节将 PCL 应用于 RB 的分析，得出充分的可指数化条件和一种指标算法。第7 节将这些结果应用于准入控制模型。第8 节将新的指标用于为两个复杂的排队控制模型提出新策略。第9 节以结论作结。三个附录包含重要但非核心的材料。

2 研究动机问题：生灭队列准入的最优控制

本节讨论一个关于生灭队列准入最优控制的模型，这是一个受到广泛关注的基础问题。参见 [24, 31, 1, 19, 6]。我们将以该模型为动机，通过引入一种基于直观的最优阈值策略指标刻画的新分析方法，阐释我们的方法。

2.1 模型描述

考虑图1所示的系统。该系统是一座单服务台设施，为流入的顾客流提供服务，并配有可容纳 n 位顾客（包括等待或正在接受服务的顾客）的有限缓冲区。顾客流由门卫进行调控，门卫动态地开启或关闭入口闸门，顾客必须通过该闸门才能进入缓冲区；到达时发现闸门关闭或缓冲区已满的顾客将被拒绝并流失。

状态 $L(t)$记录时刻 $t \geq 0$ 系统中的顾客数量，并作为受控生灭过程在状态空间 $N = \{0, \ldots\ldots, n\}$上演化。当系统处于状态 i时，顾客以速率 λ_i 到达（届时会被接纳或拒绝），服务台以速率 μ_i 提供服务。

我们假设在状态 i 下会以速率 h_i持续产生持有成本，且每次顾客拒绝 都会产生收费 ν 。成本以速率 $\alpha > 0$折现。

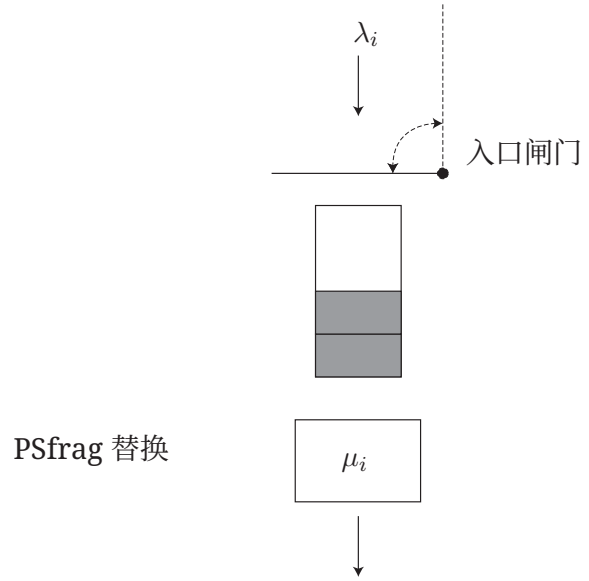


图 1：单队列的准入控制。

系统由准入控制策略 u控制，该策略规定在每个时刻 t采取动作 $a(t) \in \{0,1\}$。策略从基于状态选择动作的平稳 策略类中选取。给定策略 u 和状态 j，我们用 $u(j) \in [0,1]$ 表示采取动作$a = 1$（关闭 入口闸门）的概率，因此 $1 - u(j)$ 是采取动作 $a = 0$（打开 入口闸门）的概率。我们将 $a = 1$ 称为主动 动作，将 $a = 0$ 称为被动 动作；可以设想闸门通常处于开启状态，除非门卫介入将其关闭。我们约定 $u(n) \equiv 1$，因此动作选择实际上仅限于可控状态集合 $N^{\{0,1\}} = \{0, \ldots, n-1\}$。$N^{\{1\}} = \{n\}$中的唯一状态称为不可控状态。

用 $E_i^u[\cdot]$ 表示在策略 u 下从 i开始时的期望。令

$$v_i^u = E_i^u \left[\int_0^\infty h_{L(t)} \, e^{-\alpha t} \, dt \right] \tag{1}$$

为相应的持有成本期望总折现价值，并令

$$b_i^u = E_i^u \left[\int_0^\infty \lambda_{L(t)} \, a(t) \, e^{-\alpha t} \, dt \right] \tag{2}$$

为 顾客拒绝的期望总折现次数。成本目标 是

$$v_i^u(\nu) = v_i^u + \nu \, b_i^u.$$

准入控制问题是寻找一个使该目标最小化的策略：准入控制问题

$$v_i(\nu) = \min \left\{ v_i^u(\nu) : u \in \mathscr{U} \right\}. \tag{3}$$

我们将（3）称为 ν收费问题。根据标准的马尔可夫决策过程结果，存在一个最优策略，它既是确定性的，又独立于初始状态 i。

问题（3）的若干变体已受到广泛研究，旨在证明阈值策略（当且仅当 $L(t)$高于某个临界阈值时关闭入口闸门）的最优性，并计算最优阈值。参见 [24, 31, 6, 19, 1]。

2.2 基于最优指标的阈值策略

与以往分析不同，我们接下来提出一种基于以下观察的新颖求解方法：在“自然”的正则条件下，我们可以预期，随着拒绝费用 ν 从 $-\infty$ 增长至 $+\infty$，集合 $S(\nu)$ 中的可控状态（在问题（3）中关闭入口闸门是最优选择的状态）将单调递减，从 $N^{\{0,1\}}$ 降至 $\emptyset$，并按 $n-1$、.....、0的顺序剔除状态，这与阈值策略一致。

在这种情况下，称 ν-收费问题为相对于阈值策略可索引。于是，对每个状态 $j \in N^{\{0,1\}}$，都存在唯一的临界收费 ν_j，在该收费下，接纳和拒绝处于该状态的到达客户都同样最优。称ν_j 状态 j的动态分配指数 。由于

$$\nu_0 \le \nu_1 \le \cdots \le \nu_{n-1},$$

此类指标可为 ν-收费问题产生最优指标策略： 当且仅当 $\nu \le \nu_j$时，在状态$j \in N_{\{0,1\}}$关闭最优拒绝集合 中的入口闸门。因此，最优拒绝集合为

$$S(\nu) = \left\{ j \in N^{\{0,1\}} : \nu \le \nu_j \right\}, \quad \nu \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

2.3 组合优化建模

该 ν-收费问题（3）有一个自然的 组合优化 建模，这将在我们的求解方法中发挥关键作用。将每个平稳确定性策略表示为可控状态的子集 S，其中策略采取主动动作；将其称为 S-主动策略，记作 b_i^S，v_i^S，v_i^S（ν）。这就将 ν-收费问题（3）重新表述为寻找最优主动集合:

$$v_i(\nu) = \min \left\{ v_i^S(\nu) : S \in 2^{N^{\{0,1\}}} \right\}.$$

现在用一个集合系统$(N^{\{0,1\}}, \mathscr{F})$来表示阈值策略族，其中 $\mathscr{F} \subseteq 2^{N^{\{0,1\}}}$是由以下条件给出的嵌套可行拒绝集合族

$$\mathscr{F} = \{S_1, \ldots, S_{n+1}\}, \tag{5}$$

其中 $S_{n+1} = \emptyset$ 且

$$S_k = \{k-1, \ldots, n-1\}, \quad 1 \le k \le n. \tag{6}$$

我们将讨论并解决以下问题:

问题 1： 给出关于模型参数的充分条件，使得 ν收费问题（3）相对于阈值策略是可索引的，因此，尤其是

$$v_i(\nu) = \min \left\{ v_i^S(\nu) : S \in \mathscr{F} \right\}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

问题 2： 给出一种高效算法，用于寻找最优阈值策略/最优主动集合；或者，等价地，用于构造指标ν_j。

3 休假模型：op 具有假定结构的指数策略的最优性

本节将上述方法扩展到一般的休假模型模型。

3.1 单个休假模型的 ν收费问题

考虑一个最优动态努力分配问题：将单个随机项目建模为休假模型，其状态 $X(t)$在离散时间段 $t=0,1,\ldots\ldots$，中沿有限状态空间N演化。其演化由策略 u控制，该策略规定在每个时间段 t 采取以下两种动作中的哪一种：主动（参与项目； $a(t)=1$）或被动（让项目休息； $a(t)=0$）。用 $\mathscr{U}$ 表示状态相关策略类，即平稳策略。因此，策略 $u\in\mathscr{U}$ 是一个映射 $u: N\to[0,1]$，其中 $u(i)$（分别为 $1-u(i)$）表示在状态 i下采取动作 $a=1$ （分别为 $a=0$）的概率。

在状态 i 采取动作 a 会产生两种影响：首先，当前时期会产生成本 h_i^a，并按折现因子 $\beta\in(0,1)$进行折现；其次，下一状态以概率 p_{ij}^a变为 j。记作$\mathbf{h}^a=(h_i^a)_{i\in N}$和$\mathbf{P}^a=(p_{ij}^a)_{i,\ j\in N}$。

我们将状态划分为 $N=N^{\{0,1\}}\cup N_{\{1\}}$。其中， $N^{\{0,1\}}$是可控状态空间，在此空间中，主动动作与被动动作在某些方面有所不同；而 $N_{\{1\}}=N\setminus N^{\{0,1\}}$是不可控状态空间，在此空间中不存在有效选择。我们假设策略 $u\in\mathscr{U}$ 在不可控状态下采取主动动作，即：

$$u(i)\equiv 1,\quad i\in N^{\{1\}}.$$

设 v_i^u表示在无限时域内，从 i开始，按照策略u产生的成本的期望总折扣价值，即：

$$v_i^u=E_i^u\left[\sum_{t=0}^{\infty}h_{X(t)}^{a(t)}\,\beta^t\right].$$

除了这种成本度量之外，我们还将考虑活动度量

$$b_i^u=E_i^u\left[\sum_{t=0}^{\infty}\theta_{X(t)}^1\,a(t)\,\beta^t\right],\tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}^1=(\theta_j^1)_{j\in N}>\mathbf{0}$ 是给定的活动权重向量。一种便于理解的解释是：该模型由连续时间模型通过均匀化（参见附录A）得到，例如第2节中的模型。假设在原始模型中存在一个特定事件（例如拒绝到达顾客），且该事件只有在采取主动动作时才可能发生。设 θ_j^1 为状态 j下该事件发生的概率；那么， b_i^u 就是此类事件发生次数的期望总折现次数。

进一步在模型中加入一项活动收费 ν，每当采取主动动作且特定事件发生时，便收取该费用。注意， ν 对应于上一节中的拒绝费用。此时总成本目标为

$$v_i^u(\nu)=v_i^u+\nu\,b_i^u.$$

所关注的 ν收费问题是寻找一个使该目标最小化的策略：

$$v_i(\nu)=\min\left\{v_i^u(\nu):u\in\mathscr{U}\right\}.\tag{8}$$

同样，存在一个与 i无关的最优确定性策略。

3.2 动态规划公式及多项式时间可解性

解决 ν收费问题（8）的传统方法是建立并求解其动态规划方程，这些方程刻画了最优值函数 $v_i(\nu)$：

$$v_i(\nu)=\begin{cases}\min\limits_{a\in\{0,1\}}\ h_i^a+\nu\,\theta_i^1\,a+\beta\sum\limits_{j\in N}p_{ij}^a\,v_j(\nu) & \text{if } i\in N^{\{0,1\}}\\ h_i^1+\nu\,\theta_i^1+\beta\sum\limits_{j\in N}p_{ij}^1\,v_j(\nu) & \text{if } i\in N^{\{1\}}.\end{cases}\tag{9}$$

理论上，问题（8）可以在多项式时间内求解，时间复杂度关于状态空间的大小 $|N|$。这是因为：（i）（9）的标准线性规划重构规模为多项式级；（ii）线性规划可通过椭球法在多项式时间内求解。

然而在实践中，当 $|N|$ 较大时，使用通用计算技术求解（9）可能导致运行时间长得难以接受。此外，即使成功求得解，也不清楚如何利用它为更复杂的模型设计启发式方法，因为休假模型（RB）是这类模型的构建模块。

3.3 基于具有假定结构的指数策略求解

接下来，我们将针对 ν-收费问题提出一种指标求解方法。该方法受到第 2.2 节所述方法的启发，并对 Whittle 最初在 [37] 中提出的方法加以扩展。

与第 2.3 节一样，ν-收费问题（8）可以表述为一个组合优化问题。对于每个 $S \subset N^{\{0,1\}}$，关联一个相应的 -主动策略，该策略在 $S \cup N^{\{1\}}$ 中的状态下主动，在 $\{0,1\} \setminus S$ 中的状态下被动。记 v_i^S、b_i^S 和 $v_i^S(\nu)$。因此，ν-收费问题可重新表述为寻找一个最优的 主动集合：

$$v_i(\nu) = \min \left\{ v_i^S(\nu) : S \in 2^{N^{\{0,1\}}} \right\}. \tag{10}$$

与前文一样，我们将关注如何证明在由集合系统$(N^{\{0,1\}}, \mathscr{F})$给定的假设的一族策略中，最优策略的存在性。这里，$\mathscr{F} \subseteq 2^{N^{\{0,1\}}}$ 是相应的可行主动集合族。令 $S \subseteq N^{\{0,1\}}$。

定义 1 ($\mathscr{F}$-策略)。 我们称 S-主动策略为 $\mathscr{F}$-策略，若 $S \in \mathscr{F}$。

因此，在第 2 节的 $\mathscr{F}$-策略中，与定义 $\mathscr{F}$ 在（5）中相对应的恰好是阈值策略。我们要求集合系统（$N^{\{0,1\}}, \mathscr{F}$）具有可访问性并且可增广。见第4节中的假设 1。

接下来，我们定义 ν-收费问题的一项关键性质。令 $S(\nu) \subseteq N^{\{0,1\}}$ 表示前文所述的相应可控状态集合，其中主动动作是最优的。

定义 2（可索引性）。 我们称 ν-收费问题相对于 $\mathscr{F}$策略可索引，如果当 ν 从 $-\infty$ 增加到 $+\infty$ 时，$S(\nu)$ 从 $N^{\{0,1\}}$ 单调递减到 $\emptyset$，且 $S(\nu) \in \mathscr{F}$（对$\nu \in \mathbb{R}$）。

在可索引性成立时，每个状态 $j \in N^{\{0,1\}}$ 都对应一个临界收费 ν_j，并且

$$S(\nu) = \left\{ j \in N^{\{0,1\}} : \nu \le \nu_j \right\} \in \mathscr{F}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

定义 3（动态分配指数）。 我们称 ν_j 为控制状态 $j \in N^{\{0,1\}}$ 相对于活动度量 b^u 的动态分配指数。

注 1。 定义 2 和3 将 Whittle 的 [37] 可索引性概念及其指标推广到一般情形；当 $N^{\{0,1\}} = N$、$\mathscr{F} = 2^N$、$\theta_j^1 = 1$ 且 $j \in N$ 时，可恢复 Whittle 的定义。

关于第 2.1 节中的问题 1 和问题 2，鉴于上述讨论，我们将把它们作为以下问题的特例来研究并求解：

问题 1： 给出模型参数的充分条件，使得相对于 $\mathscr{F}$ 策略，ν 收费问题是可索引的，特别是，

$$v_i(\nu) = \min \left\{ v_i^S(\nu) : S \in \mathscr{F} \right\}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

问题 2： 给出一种高效算法，用于寻找最优的 $\mathscr{F}$ 策略；或者，等价地，用于构造指标 ν_j。

我们将在第 6 节通过将其纳入下文第 4 节和 5 节所发展的多面体框架来解决这类问题。

4 $\mathscr{F}$-扩展拟阵：性质与优化

本节介绍一种与可访问集合系统（J，$\mathscr{F}$）相关的新多胞体，它推广了 [4, 2] 中的经典拟阵和扩展多面体。正如我们将看到的，本文关注的问题可以表述为并通过在此类多面体上求解线性规划来解决。本节的大多数证明将沿用扩展多面体相应结果的证明思路。因此，本文将重点阐述这些新多面体的独特之处。有关详细内容，请参阅 [2] 。

4.1 $\mathscr{F}$-扩展拟阵

设 J 是一个含有 $|J| = n$ 个元素的有限基集，并设 $\mathscr{F} \subseteq 2^J$ 是 J的一个子集族。给定一个可行集 $S \in \mathscr{F}$，设 $\partial^-_{\mathscr{F}} S$和 $\partial^+_{\mathscr{F}} S$分别为的内边界和外边界，相对于 $\mathscr{F}$定义为

$$\partial^-_{\mathscr{F}} S = \{j \in S : S \setminus \{j\} \in \mathscr{F}\} \quad \text{and} \quad \partial^+_{\mathscr{F}} S = \{j \in J \setminus S : S \cup \{j\} \in \mathscr{F}\},$$

别 地。我们要求集合系统 $(J, \mathscr{F})$ 满足下述条件。

假设1。 满足以下条件：
(i) $\emptyset \in \mathscr{F}$.(ii) 可访问性：
$\emptyset \neq S \in \mathscr{F} \Longrightarrow \partial^-_{\mathscr{F}} S \neq \emptyset$.(iii) 可扩充性：
$J \neq S \in \mathscr{F} \Longrightarrow \partial^+_{\mathscr{F}} S \neq \emptyset$.

下面引入全 $\mathscr{F}$-串的概念。设 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ 是一个张成 J 的 n 维向量，使得 $J = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$。设

$$S_k = \{\pi_k, \ldots, \pi_n\}, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{11}$$

定义4（全 $\mathscr{F}$-串）。 若 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个全 $\mathscr{F}$-串，则

$$S_k \in \mathscr{F}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

我们用 $\Pi(\mathscr{F})$ 表示所有完整 $\mathscr{F}$-字符串的集合。给定 $j \in S \in \mathscr{F}$ 的系数 $b^S \geq 0$ 和 $w^S_j > 0$，考虑定义在 $\mathbb{R}^J$ 上的 多胞体 $P(\mathscr{F})$：

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} w^S_j \, x_j &\geq b^S, \; S \in \mathscr{F} \setminus \{J\} \\ \sum_{j \in J} w^J_j \, x_j &= b^J \\ x_j &\geq 0, \quad j \in J. \end{aligned} \tag{12}$$

对于每个 $\boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F})$，$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\pi}} = (x^{\boldsymbol{\pi}}_j)_{j \in J}$ 是以下方程的唯一解

$$w^{S_k}_{\pi_k} \, x_{\pi_k} + \cdots + w^{S_k}_{\pi_n} \, x_{\pi_n} = b^{S_k}, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{13}$$

定义5 （$\mathscr{F}$-扩展拟阵）。 我们称 $P(\mathscr{F})$ 为 $\mathscr{F}$-扩展拟阵 ，如果对于每个 $\boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F})$，$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\pi}} \in P(\mathscr{F})$。

注2。

1. 假设 1 确保存在一个完整的 $\mathscr{F}$-字符串，因此 $P(\mathscr{F}) \neq \emptyset$。

2. [4, 2] 中的扩展拟阵对应于情形 $\mathscr{F} = 2^J$。当 $j \in S \in 2^J$时，若 $w_j^S \equiv 1$ ，则可进一步得到经典拟阵。

4.2 关于 $\mathscr{F}$-扩展拟阵的线性规划

考虑以下关于 $\mathscr{F}$-扩展拟阵 $P(\mathscr{F})$ 的线性规划问题:

$$v^{\mathrm{LP}} = \min \left\{ \sum_{j \in J} c_j \, x_j : \mathbf{x} \in P(\mathscr{F}) \right\}. \tag{14}$$

我们希望设计一种高效算法来求解线性规划 (14)，为此我们首先研究 $P(\mathscr{F}$ 的顶点。下一个结果给出了部分刻画，这与扩展拟阵已有的完整刻画形成对比。

引理 1. 对于 $\boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F})$，$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\pi}}$ 是 $P(\mathscr{F})$的一个顶点。

证明. 该结论由定义 5以及多面体顶点的标准代数刻画得出。

□

□

引理 1意味着，对于某些成本向量$\mathbf{c} = (c_j)_{j \in J}$，线性规划（14）的解是形如$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\pi}}$的顶点，因此

$$v^{\mathrm{LP}} = \min \left\{ \sum_{j \in J} c_j \, x_j^{\boldsymbol{\pi}} : \boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F}) \right\}. \tag{15}$$

因此，我们将尝试在受限域内求解线性规划，其中可容许成本向量满足某个可高效检验的性质（15）。

接下来考虑对偶线性规划。将对偶变量 y^S 与可行集 $S \in \mathscr{F}$对应的原始约束相关联，可将后者表述为

$$\begin{aligned} v^{\mathrm{LP}} \quad = \quad & \max \sum_{S \in \mathscr{F}} b^S \, y^S \\ & \text{subject to} \\ & \sum_{S : j \in S \in \mathscr{F}} w_j^S \, y^S \leq c_j, \quad j \in J \\ & y^S \geq 0, \quad S \in \mathscr{F} \setminus \{J\} \\ & y^J \text{ unrestricted.} \end{aligned} \tag{16}$$

注意，由于 $P(\mathscr{F})$ 是一个非空多胞体，强对偶性保证原始线性规划和对偶线性规划具有相同的有限最优值 v^{LP}。

算法 $\mathrm{AG}_1(\cdot|\mathscr{F})$
输入： $\mathbf{c}$
输出： (可容许 $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\nu}$)

初始化：令 $S_1 := J$
令 $y^{S_1} :=$ 最小化 $\left\{ \dfrac{c_j}{w_j^{S_1}} : \; j \in \partial^-_{\mathscr{F}} S_1 \right\}$;

选择使上式达到最小值的 π_1 ； **令** $\nu_{\pi_1} := y^{S_1}$

循环：
对于 $k := 2$ 至 n，执行
  let $S_k := S_{k-1} \setminus \{\pi_{k-1}\}$
  令 $y^{S_k} :=$ 最小值 $\left\{ \dfrac{1}{w_j^{S_k}} \left[c_j - \sum_{l=1}^{k-1} y^{S_l} w_j^{S_l} \right] : \; j \in \partial^-_{\mathscr{F}} S_k \right\}$
  选择使上述值达到最小的 π_k； **令** $\nu_{\pi_k} := \nu_{\pi_{k-1}} + y^{S_k}$
结束 {for}

成本可采纳性检验：
如果 $\nu_{\pi_1} \le \cdots \le \nu_{\pi_n}$ **则令** 可容许 := *TRUE* **否则令** 可容许 :=*FALSE*

图 2：针对 $\mathscr{F}$-扩展拟阵上的线性规划的自适应贪心算法 $\mathrm{AG}_1(\cdot|\mathscr{F})$。

4.3 自适应贪心算法与分配指标

本节讨论自适应贪心算法$\mathrm{AG}_1(\cdot|\mathscr{F})$，该算法如图2所示，我们在 [26]中介绍了这一算法。它定义了一个可处理的可容许成本向量域，并据此构造出对偶线性规划（基于指标的解16）。

该算法以成本向量 $\mathbf{c}$ 为输入，并生成一个三元组作为输出 (可容许 $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\nu}$)。这里，可容许 $\in \{TRUE, FALSE\}$ 是一个布尔变量； $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \Pi(\mathscr{F})$ 是一个完整的 $\mathscr{F}$- 字符串；而 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_j)_{j \in J}$ 是一个指标向量。由于算法在 n 步内运行，因此如果对于 $S \in \mathscr{F}$， $w_j^S (j \in S)$ 的计算和 $j \in \partial^-_{\mathscr{F}} S$ 成员资格测试都能在多项式时间内完成，那么该算法便能在多项式时间 内运行。

与扩展拟阵（参见[4, 2]）对应的算法（可还原为 $\mathrm{AG}_1(\cdot|2^J)$）相比，该算法有两个新特点。首先，步骤 k 中的最小化是在集合 $\partial^-_{\mathscr{F}} S_k$上进行的，该集合通常远小于 $\partial^-_{2^J} S_k = S_k$。因此，在第 2 节的 $S_k = \{k-1, \ldots, n-1\}$和 $\partial^-_{\mathscr{F}} S_k = \{k-1\}$模型中。其次，算法以一项成本可采纳性检验结束，用于检查生成的指标序列是否非递减。我们也可以在每一步 k 检查 $\nu_{\pi_k} < \nu_{\pi_{k-1}}$来实现该检验；若不满足条件，则终止执行。

定义 6 ($\mathscr{F}$-可容许成本)。 我们称成本向量 $\mathbf{c}$ 是 $\mathscr{F}$-线性规划 *(14)*的可容许输入，若算法 $\mathrm{AG}_1(\cdot|\mathscr{F})$，在输入 $\mathbf{c}$时，返回满足以下条件的输出

$$\nu_{\pi_1} \le \nu_{\pi_2} \le \cdots \le \nu_{\pi_n}. \tag{17}$$

使得 可容许 $=$ 真。

我们将集合 $\mathscr{C}(\mathscr{F})$ 的 $\mathscr{F}$-可容许 $\mathbf{c}$'s 称为 $\mathscr{F}$-可容许成本域，即线性规划 *(14)*。注 3。

1. 在扩展拟阵情形下，我们有 $\mathscr{C}(2^J) = \mathbb{R}^J$。

2. 不难验证，定义 6 是一致的，即输出值可容许和 $\boldsymbol{\nu}$ 并不取决于算法中的破平局顺序。

定义 7（分配指标）。我们称 ν_j 是 LP（14）的分配指标。

在扩展拟阵情形下，这类指标给出了一个最优性判据。参见 [2]。下面我们推广这一结果。令 $\mathbf{c} \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$。假设 $\mathrm{AG}_1(\cdot|\mathscr{F})$ 在 $\mathbf{c}$ 上运行，输出为（可容许 $\boldsymbol{\pi}$，$\boldsymbol{\nu}$）。令 S_k 如（11）所示，并令 $\mathbf{y}^{\boldsymbol{\pi}} = \left(y^{\boldsymbol{\pi},S}\right)_{S\in\mathscr{F}}$ 定义为

$$y^{\boldsymbol{\pi},S} = \begin{cases} \nu_{\pi_k} - \nu_{\pi_{k-1}} & \text{if } S = S_k, \text{ for some } 2 \le k \le n \\ \nu_{\pi_1} & \text{if } S = S_1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{18}$$

注意到 $y^{\boldsymbol{\pi},\,S_k}$ 对于 $1 \le k \le n$ 而言，可表征为下式的唯一解：

$$w^{S_1}_{\pi_k}\, y^{S_1} + \cdots + w^{S_k}_{\pi_k}\, y^{S_k} = c_{\pi_k}, \quad 1 \le k \le n. \tag{19}$$

下一个结果的证明与其扩展拟阵对应结果的证明相同（参见 [2]）。

定理 1（基于指标的目标函数表示和最优性判据）。

（*a*）线性规划（*14*）的目标函数可表示为

$$\sum_{j\in J} c_j\, x_j = \nu_{\pi_1} \sum_{j\in S_1} w^{S_1}_j\, x_j + \sum_{k=2}^{n} (\nu_{\pi_k} - \nu_{\pi_{k-1}}) \sum_{j\in S_k} w^{S_k}_j\, x_j;$$

此外，

$$v^{\boldsymbol{\pi}} = \sum_{j\in J} c_j\, x^{\boldsymbol{\pi}}_j = \nu_{\pi_1}\, b^{S_1} + \sum_{k=2}^{n} (\nu_{\pi_k} - \nu_{\pi_{k-1}})\, b^{S_k}.$$

（*b*）如果条件（*17*）成立，使得 $\mathbf{c} \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$，则 $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\pi}}$ 和 $\mathbf{y}^{\boldsymbol{\pi}}$ 分别是线性规划（*14*）和（*16*）的最优原始-对偶解对。最优值为

$$v^{\mathrm{LP}} = \nu_{\pi_1}\, b^{S_1} + \sum_{k=2}^{n} (\nu_{\pi_k} - \nu_{\pi_{k-1}})\, b^{S_k}. \tag{20}$$

4.4 分配指标与可行成本域分解

扩展拟阵的分配指标具有有用的分解性质（参见 [2]），下面我们将其扩展到 $\mathscr{F}$-扩展拟阵。

假设集合系统 $(J,\ \mathscr{F})$ 按如下方式构造。给定 m 个集合系统 $(J_k,\ \mathscr{F}_k)$，其中 $1 \le k \le m$，且满足假设 1，其中 J_1、……、J_m 两两不相交。令

$$J = \bigcup_{k=1}^{m} J_k,$$

$$\mathscr{F} = \left\{ S = \bigcup_{k=1}^{m} S_k : S_k \in \mathscr{F}_k, 1 \le k \le m \right\}. \tag{21}$$

容易验证，集合系统 $(J,\ \mathscr{F})$ 也满足假设 1。

假设给定 $b^S \geq 0$ 和 $w_j^S > 0$，对于 $j \in S \in \mathscr{F}$，满足 $P(\mathscr{F})$ 由 (12) 定义，是一个$\mathscr{F}$-扩展拟阵。于是，定义 5 意味着，每个 $P_k(\mathscr{F}_k)$ 在 $\mathbb{R}^{J_k}$ (其中 b^{S_k} 且 $w_{j_k}^{S_k}$，对于$j_k \in S_k \in \mathscr{F}_k$) 都是一个 $\mathscr{F}_k$-扩展拟阵。

我们要求系数 w_j^S 满足以下条件。

假设2。对于 $1 \leq k \leq m$,

$$w_{j_k}^S = w_{j_k}^{S \cap J_k}, \quad S \in \mathscr{F}, j_k \in S \cap J_k.$$

给定成本向量 $\mathbf{c} = (c_j)_{j \in J}$，令 $\mathbf{c}^k = (c_{j_k})_{j_k \in J_k}$对每个 k。考虑由 (14) 给出的相应线性规划，以及

$$v^{k,\mathrm{LP}} = \min \left\{ \sum_{j_k \in J_k} c_{j_k}\, x_{j_k} : \mathbf{x}^k \in P_k(\mathscr{F}_k) \right\}, \tag{22}$$

其可容许成本域分别为 $\mathscr{C}(\mathscr{F})$ 和 $\mathscr{C}(\mathscr{F}_k)$。令 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_j)_{j \in J}$（分别为 $\boldsymbol{\nu}^k = (\nu_{j_k}^k)_{j_k \in J_k}$）表示算法以 $\mathbf{c}$（分别以 $\mathbf{c}_k$）为输入时生成的指标向量。

接下来我们陈述分解结果，不作证明，因为这可沿着 [2] 中定理3证明的相同思路得出。

定理 2 (可容许成本域与指标分解)。 在假设 *2* 下，有如下结论：

(a) $\mathbf{c} \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$ 当且仅当$\mathbf{c}^k \in \mathscr{C}(\mathscr{F}_k)$ 对 $1 \leq k \leq m$ 成立，即

$$\mathscr{C}(\mathscr{F}) = \prod_{k=1}^{m} \mathscr{C}(\mathscr{F}_k).$$

(b) 对于 $1 \leq k \leq m$,

$$\nu_{j_k} = \nu_{j_k}^k, \quad j_k \in J_k.$$

注4。

1. 定理 2 (a) 表明，线性规划（14）的可容许成本域可分解为对应域的乘积，即 m （22）中的线性规划。 $\mathscr{F}$-可容许性检验因此可分解为针对 $\mathbf{c}$ 的 m 更简单的任务，这些任务可以并行执行。

2. 定理 2(b) 表明，计算 ν_j 线性规划 (14) 的指标也可以分解为m 更简单的并行任务，每项任务都涉及计算 $\nu_{j_k}^k$ 相应的线性规划 (22) 的指标。

4.5 指标算法的新版本

我们发现，上述算法不太适用于模型分析。因此，我们开发了重新表述的版本 $\mathrm{AG}_2(\cdot|\mathscr{F})$，如图3所示。这是对 Klimov 的 [21] 算法的扩展；Klimov 的算法可由 $\mathrm{AG}_2(\cdot|2^J)$ 还原。稍后，我们将应用 $\mathrm{AG}_2(\cdot|\mathscr{F})$ 来计算本文引入的 RB 指数。我们指出，Varaiya 等人 [34] 首次将 Klimov 的算法用于计算经典（非休假）多臂老虎机的 Gittins 指数。

算法 $\mathrm{AG}_2(\cdot|\mathscr{F})$:
输入： $\mathbf{c}$
输出： (可容许 $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\nu}$)

初始化：**令** $S_1 = J$; **let** $\nu_j^{S_1} := c_j / w_j^{S_1}, \quad j \in J$
选择 $\pi_1 \in \operatorname{argmin}\left\{\nu_j^{S_1} : j \in \partial^-_{\mathscr{F}} S_1\right\}$; **令** $\nu_{\pi_1} := \nu_{\pi_1}^{S_1}$

循环:
对 $k := 2$ **到** n **执行**
让 $S_k := S_{k-1} \setminus \{\pi_{k-1}\}$
令 $\nu_j^{S_k} := \nu_j^{S_{k-1}} + \left(\dfrac{w_j^{S_{k-1}}}{w_j^{S_k}} - 1\right)\left[\nu_j^{S_{k-1}} - \nu_{\pi_{k-1}}^{S_{k-1}}\right], \quad j \in S_k$
选择 $\pi_k \in \operatorname{argmin}\left\{\nu_j^{S_k} : j \in \partial^-_{\mathscr{F}} S_k\right\}$; **令** $\nu_{\pi_k} := \nu_{\pi_k}^{S_k}$
结束 {for}

成本可采纳性检验:
若 $\nu_{\pi_1} \leq \cdots \leq \nu_{\pi_n}$ **那么令** 可容许 $:=$ 真 **否则令** 可容许 $:=$假

图 3：用于在 $\mathscr{F}$-扩展多面体上求解线性规划的自适应贪心算法 $\mathrm{AG}_2(\cdot|\mathscr{F})$。

后者基于引入系数 $c_j^{S_k}$，这些系数（相对于正在生成的完整$\mathscr{F}$-字符串 $\boldsymbol{\pi}$ ）通过递推关系定义为

$$\begin{aligned} c_j^{S_1} &= c_j, \quad j \in S_1 = J \\ c_j^{S_k} &= c_j^{S_{k-1}} - \frac{c_{\pi_{k-1}}^{S_{k-1}}}{w_{\pi_{k-1}}^{S_{k-1}}}\left[w_j^{S_{k-1}} - w_j^{S_k}\right], \quad j \in S_k, 2 \leq k \leq n, \end{aligned} \tag{23}$$

这使得可以简化 $\mathrm{AG}_1(\cdot|\mathscr{F})$ 中的表达式。我们还将写作

$$\nu_j^{S_k} = \frac{c_j^{S_k}}{w_j^{S_k}}, \quad j \in S_k, 1 \leq k \leq n. \tag{24}$$

由（23），可知比值 $\nu_j^{S_k}$由递推关系刻画

$$\begin{aligned} \nu_j^{S_1} &= \frac{c_j}{w_j^{S_1}}, \quad j \in S_1 = J \\ \nu_j^{S_k} &= \nu_j^{S_{k-1}} + \left(\frac{w_j^{S_{k-1}}}{w_j^{S_k}} - 1\right)\left[\nu_j^{S_{k-1}} - \nu_{\pi_{k-1}}^{S_{k-1}}\right], j \in S_k, 2 \leq k \leq n, \end{aligned} \tag{25}$$

下一个结果给出了两种算法之间的关键关系。设 $\boldsymbol{\pi}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$ 由算法 AG_1（$\cdot|\mathscr{F}$）在输入 $\mathbf{c}$上生成，并设 S_k 由式（11）给出。

引理 2。对于 $1 \leq k \leq n$ 和 $j \in S_k$,

$$\nu_j^{S_k} = \begin{cases} \dfrac{c_j}{w_j^{S_1}}, & \text{if } k = 1 \\ \nu_{\pi_{k-1}} + \dfrac{c_j - \nu_{\pi_1} w_j^{S_1} - \sum_{l=2}^{k-1}\left(\nu_{\pi_l} - \nu_{\pi_{l-1}}\right) w_j^{S_l}}{w_j^{S_k}}, & \text{if } k \geq 2; \end{cases}$$

此外，

$$\nu_{\pi_k} = \nu_{\pi_k}^{S_k}. \tag{26}$$

证明。 我们对 k 进行归纳。情形 $k = 1$ 由（23）得出。

现在假设对于 $k-1$（其中 $k \le n$），结论成立，因此

$$\nu_j^{S_{k-1}} = \nu_{\pi_{k-2}} + \frac{c_j - \nu_{\pi_1} w_j^{S_1} - \sum_{l=2}^{k-2} \left(\nu_{\pi_l} - \nu_{\pi_{l-1}}\right) w_j^{S_l}}{w_j^{S_{k-1}}}, \quad j \in S_{k-1},$$

并且 $\nu_{\pi_{k-1}} = \nu_{\pi_{k-1}}^{S_{k-1}}$。 然后，应用归纳假设和（23），得到如下结论：对于 $j \in S_k$,

$$\begin{aligned}
\nu_j^{S_k} &= \frac{c_j^{S_{k-1}} - \nu_{\pi_{k-1}} \left[w_j^{S_{k-1}} - w_j^{S_k}\right]}{w_j^{S_k}} \\
&= \frac{\nu_{\pi_{k-2}} w_j^{S_{k-1}} + c_j - \nu_{\pi_1} w_j^{S_1} - \sum_{l=2}^{k-2} \left(\nu_{\pi_l} - \nu_{\pi_{l-1}}\right) w_j^{S_l} - \nu_{\pi_{k-1}} \left[w_j^{S_{k-1}} - w_j^{S_k}\right]}{w_j^{S_k}} \\
&= \nu_{\pi_{k-1}} + \frac{c_j - \nu_{\pi_1} w_j^{S_1} - \sum_{l=2}^{k-1} (\nu_{\pi_l} - \nu_{\pi_{l-1}}) w_j^{S_l}}{w_j^{S_k}}.
\end{aligned}$$

C将最后一个恒等式与（18）–（19）结合，得到 $\nu_{\pi_k} = \nu_{\pi_k}^{S_k}$，从而完成证明 f. □

□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 3。 算法 $\mathrm{AG}_1(\cdot|\mathscr{F})$ 和 $\mathrm{AG}_2(\cdot|\mathscr{F})$ 等价。

证明。 该结果由引理 2 以及对各算法的描述可得 . □

□

4.6 系数 $c_j^{S_k}$、 $\nu_j^{S_k}$ 以及指标 ν_j 的性质与解释

鉴于系数 $c_j^{S_k}$、 $\nu_j^{S_k}$ 和指标 ν_j 在本文中的核心作用，讨论它们的性质与解释颇有意义。以下假设 $\boldsymbol{\pi}$、$\boldsymbol{\nu}$ 是 $\mathrm{AG}_2(\cdot|\mathscr{F})$ 在输入 $\mathbf{c} \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$ 时生成的。

下一个结果表明， $c_j^{S_k}$表示 边际或线性规划的约化成本（14）。证明可由归纳法轻易得出，因此从略。

命题1。对于 $1 \le m \le n-1$,

$$v^{\mathrm{LP}} = \sum_{k=1}^{m} \nu_{\pi_k} \left[b^{S_k} - b^{S_{k+1}}\right] + \sum_{j \in S_{m+1}} c_j^{S_{m+1}} x_j^{\boldsymbol{\pi}}. \tag{27}$$

注5. 命题 1 进一步阐明了 $\mathrm{AG}_2(\cdot|\mathscr{F})$。恒等式 (27) 表明，一旦最优 m字符串的前 $\mathscr{F}$个元素 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_m, \cdot, \ldots, \cdot)$ 确定，其构造便通过最小化 约化目标函数 $\sum_{j \in S_{m+1}} c_j^{S_{m+1}} x_j$来继续进行。

接下来，我们讨论以下问题。在算法 $\mathrm{AG}_2(\cdot|\mathscr{F})$ 的步骤 k 中，下一个元素 π_k 是通过对 $j \in \partial_{\mathscr{F}}^- S_k$ 进行最小化来选取的，因此

$$\nu_{\pi_k} = \min\left\{\nu_j^{S_k} : j \in \partial_{\mathscr{F}}^- S_k\right\}.$$

因此，ν_{π_k} 是 $j \in \partial_{\mathscr{F}}^- S_k$上的局部最优边际成本率。接下来我们将证明，$\nu_{\pi_k}$ 是通常更大的集合 S_k上的最优边际成本率，即，

$$\nu_{\pi_k} = \min\left\{\nu_j^{S_k} : j \in S_k\right\}.$$

我们需要以下初步结果，它可通过对 m进行归纳法轻易证明。

引理 3。对于 $1 \le m \le n$,

$$\nu_{\pi_k}^{S_m} = \nu_{\pi_m} + \frac{1}{w_{\pi_k}^{S_m}} \sum_{l=m+1}^{k} \left(\nu_{\pi_l} - \nu_{\pi_{l-1}}\right) w_{\pi_k}^{S_l}, \quad m \le k \le n.$$

现在我们可以证明上文讨论的指标刻画。

命题2。 对于 $1 \le m \le n$，指标ν_{π_m} 刻画为

$$\nu_{\pi_m} = \min\left\{\nu_j^{S_m} : j \in S_m\right\}. \tag{28}$$

证明。 由引理 3，对于 $m \le k \le n$，有

$$\nu_{\pi_k}^{S_m} = \nu_{\pi_m} + \frac{1}{w_{\pi_k}^{S_m}} \sum_{l=m+1}^{k} \left(\nu_{\pi_l} - \nu_{\pi_{l-1}}\right) w_{\pi_k}^{S_l} \ge \nu_{\pi_m},$$

其中，不等式由指标排序（17）得出。 □

□

4.7 单调 w_j^S 下的指标刻画

我们发现，在应用中，系数 w_j^S 通常在 S 上非递减。

假设 3. 对于 $j \in S \subset T$， S， $T \in \mathscr{F}$,

$$w_j^S \le w_j^T.$$

本节将说明，假设 3 蕴含一些有趣的附加性质，其中包括一种新的指标刻画。令 $\boldsymbol{\pi}$， $\boldsymbol{\nu}$， S_k 与第4.6节中相同。

引理 4. 在假设 *3*下，有如下结论:

(a) 对于 $1 \le k \le n-1$,

$$\nu_j^{S_k} \le \nu_j^{S_{k+1}}, \quad j \in S_{k+1}.$$

(*b*) 对于 $1 \le k < l \le n$,

$$\nu_{\pi_k} = \nu_{\pi_k}^{S_k} \le \nu_{\pi_l}^{S_k} \le \nu_{\pi_l}^{S_{k+1}} \le \cdots \le \nu_{\pi_l}^{S_{l-1}} \le \nu_{\pi_l}^{S_l} = \nu_{\pi_l}.$$

证明。 （a）由（25）和（26），结合 $w_j^{S_k} - w_j^{S_{k+1}} \geq 0$，可得

$$\nu_{\pi_k} \leq \nu_j^{S_k} \Longrightarrow \nu_j^{S_k} \leq \nu_j^{S_{k+1}}.$$

由于第一个不等式由命题 2成立，因此得到所需结果 .

（b）该结果可直接由部分（a）和命题 2得出。 □

□

接下来，我们给出上文提到的新指标刻画。

定理 4. 在假设 *3*下，指标 ν_j 刻画为

$$\nu_j = \max\left\{\nu_j^S : j \in S \in \{S_1, \ldots, S_n\}\right\}, \quad j \in J.$$

证明. 该结果可直接由引理 4（b）得出。 □

□

注 6. 定理 4 将指标刻画为 相对于可行集的最大边际成本率 。这与命题 2中的结果形成对照。

4.8 对称边际成本下 w_j^S 的递推关系

回顾一下，边际成本 $c_j^{S_k}$是相对于给定的 $\boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F})$ 定义的。这使得我们无法将（23）扩展为系数 c_j^S（ $S \in \mathscr{F}$）的定义，因为 S 的构造顺序可能导致不同的取值。然而，在某些应用中，包括休假模型（参见第 6节），这些系数是对称的。

定义8 (对称边际成本**)**。 如果以下递推关系为 c_j^S（其中 $j \in S \in \mathscr{F}$）给出一致的定义，我们就称边际成本是对称的：

$$\begin{aligned} c_j^J &= c_j, \quad j \in J \\ c_j^{S\setminus\{i\}} &= c_j^S - \frac{c_i^S}{w_i^S}\left[w_j^S - w_j^{S\setminus\{i\}}\right] \end{aligned} \tag{29}$$

注意，在边际成本具有对称性的情况下，我们还可以通过自然扩展递推关系（25），进一步定义边际成本率 ν_j^S（ $j \in S \in \mathscr{F}$ ）。接下来的结果表明，在假设 3 下，边际成本的对称性等价于 二阶递推 对于 w_j^S成立，这有助于计算这些量。

命题3。 在假设 *3*下，边际成本对称，当且仅当对于 $S \in \mathscr{F}$， $i_1 \in \partial_{\mathscr{F}}^- S \cap \partial_{\mathscr{F}}^-(S\setminus\{i_2\})$，$i_2 \in \partial_{\mathscr{F}}^- S \cap \partial_{\mathscr{F}}^-(S\setminus\{i_1\})$，且 $j \in S\setminus\{i_1,\ i_2\}$，有

$$w_j^{S\setminus\{i_1,i_2\}} = \frac{\dfrac{w_{i_1}^S}{w_{i_1}^{S\setminus\{i_2\}}} w_j^{S\setminus\{i_2\}} + \dfrac{w_{i_2}^S}{w_{i_2}^{S\setminus\{i_1\}}} w_j^{S\setminus\{i_1\}} - w_j^S}{\dfrac{w_{i_1}^S}{w_{i_1}^{S\setminus\{i_2\}}} + \dfrac{w_{i_2}^S}{w_{i_2}^{S\setminus\{i_1\}}} - 1}. \tag{30}$$

证明。 该结果可通过递归地以两种不同方式计算 $c^{S\setminus\{i_1,i_2\}}{}_j$ 得出，依据的是（29）：一种计算沿着序列 $S \to S\setminus\{i_1\} \to S\setminus\{i_1,\ i_2\}$ 进行，另一种沿着序列 $S \to S\setminus\{i_2\} \to S\setminus\{i_1,\ i_2\}$ 进行。两种计算分别得到 $c^{S\setminus\{i_1,i_2\}}{}_j$ 的不同表达式。令相应边际成本项的系数相等，即可得到所述恒等式。

□

□

5 部分守恒定律

本节回顾部分守恒定律（*PCL*）框架，该框架由 [26], 提出，并强调其理论基础是 $\mathscr{F}$-扩展拟阵理论。

考虑一个调度模型，其中包含有限集合 J，由 n 作业类别组成。通过调度策略 u将工作量分配给相互竞争的作业，该策略从可容许 策略空间 $\mathscr{U}$ 中选取。策略 u 在类别 j上的性能由性能度量 $x_j^u \geq 0$给出。记$\mathbf{x}^u = (x_j^u)_{j\in J}$。对于每个覆盖这些类别的全字符串 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$，关联一个相应的 $\boldsymbol{\pi}$优先级策略；若 $l > k$，则为类别 π_l 赋予高于 π_k 的优先级 。记为 $x_j^{\boldsymbol{\pi}}$。给定 $S \subseteq J$，若某策略为任意类别 $i \in S$ 赋予高于任意类别 $j \in S^c = J \setminus S$的优先级，则称该策略优先处理 S类作业 。

我们将关注如何解决调度问题

$$v = \min\left\{\sum_{j\in J} c_j\, x_j^u : u \in \mathscr{U}\right\}, \tag{31}$$

即寻找一个可容许策略，使其最小化给定的线性成本目标。受应用问题的启发，我们将探寻在何种条件下，给定策略族中存在具有假定结构的最优策略。与第 3.3 节一样，我们用满足假设 集合系统$(J, \mathscr{F})$ 来表示后者。假设 1 成立。设 $\boldsymbol{\pi}$如上所述。回顾定义 全 $\mathscr{F}$ 字符串 中的概念，该定义见4。

定义 9 ($\mathscr{F}$-策略)。 我们称 $\boldsymbol{\pi}$-优先级策略为 $\mathscr{F}$-策略，如果 $\boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F})$，即 $\boldsymbol{\pi}$是集合系统 $(J, \mathscr{F})$ 的一个完整 $\mathscr{F}$-串。

注　释 7。 集合 $S \in \mathscr{F}$ 表示 $\mathscr{F}$-策略下的可行的高优先级类别子集。

考虑以下问题:

1. 给出使 $\mathscr{F}$-策略最优的充分条件，从而

$$v = \min\left\{\sum_{j\in J} c_j\, x_j^{\boldsymbol{\pi}} : \boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F})\right\}.$$

2. 给出一种高效算法，用于求出最优的 $\mathscr{F}$-策略。

为解决此类问题，考虑可实现性能区域

$$\mathscr{X} = \{\mathbf{x}^u : u \in \mathscr{U}\},$$

它使我们能够将（31）重构为数学规划问题

$$v = \min\left\{\sum_{j\in J} c_j\, x_j : \mathbf{x} \in \mathscr{X}\right\}.$$

接下来讨论时，我们必须假设 $\mathscr{X}$ 具有适当的性质。

5.1 部分守恒定律

假设为每个作业类别和可行高优先级集合 $j \in S \in \mathscr{F}$ 关联一个系数 $w_j^S > 0$，使得 $\sum_{j\in S} w_j^S x_j^u$ 表示系统中与 S-作业相对应的工作负载 度量，或称 S- 工作负载，其策略为 u。我们将 w_j^S 称为类别 j 的边际 S-工作负载。将最小 S-工作负载记为

$$b^S = \inf\left\{\sum_{j\in S} w_j^S x_j^u : u \in \mathscr{U}\right\}, \quad S \in \mathscr{F}.$$

定义 10 （部分守恒定律）。 如果性能向量 $\mathbf{x}^u$ 相对于 $\mathscr{F}$-策略满足以下条件，我们就称其满足部分守恒定律（*PCL*）： (i) 对于 $S \in \mathscr{F}\setminus\{J\}$,

$$\sum_{j\in S} w_j^S x_j^{\boldsymbol{\pi}} = b^S, \quad \text{under any } \boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F}) \text{ giving priority to } S\text{-jobs.}$$

(ii) $\sum_{j\in J} w_j^J x_j^{\boldsymbol{\pi}} = b^J$，在任意 $\boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F})$。

注 8。

1. 满足上述 PCL 意味着，对于每个 $S \in \mathscr{F}$，任何优先处理 S-类作业的 $\mathscr{F}$-策略都会使 S-工作负载最小化。

2. 广义守恒律 在 [2] 中可在 $\mathscr{F} = 2^N$时恢复。 强守恒律 在 [30] 中则可在 $w_j^S \equiv 1$时进一步恢复。

在下文中假设$\mathbf{x}^u$ 满足上述 PCL。由此得到对可实现性能区域 $\mathscr{X}$的部分刻画 $P(\mathscr{F})$，基于多胞体（12）。

定理 5 （可实现性能）。 $P(\mathscr{F})$ 是一个 $\mathscr{F}$-扩展拟阵，满足 $\mathscr{X} \subseteq P(\mathscr{F})$。 $\mathscr{F}$-策略的性能向量 $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\pi}}$ 是 $P(\mathscr{F})$的顶点。

证明。 PCL 蕴含 $\mathscr{X} \subseteq P(\mathscr{F})$。令 $\boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F})$。根据 PCL，性能向量$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\pi}}$是式（13）的解。由于$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\pi}} \in \mathscr{X} \subseteq P(\mathscr{F})$，定义5意味着 $P(\mathscr{F})$ 是一个 $\mathscr{F}$-扩展拟阵。根据引理1，$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\pi}}$是 $P(\mathscr{F})$的顶点。 □

□

注 9。

1. 在 GCL 情形下（$\mathscr{F} = 2^J$），有 $\mathscr{X} = P(2^J)$。见 [2 中的定理 4。].

2. 根据定理 5，(14) 是 (*31*) 的线性规划松弛，因此 $v^{\mathrm{LP}} \le v$。这进一步表明，对于某些 $\mathscr{F}$策略，(31) 在某些成本向量 $\mathbf{c}$下具有最优性，因此 $v^{\mathrm{LP}} = v$；尤其是在$\mathscr{F}$可容许成本向量 $\mathbf{c} \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$ 下，线性规划 (14) 也具有最优性。

接下来我们将证明，在 PCL 条件下，对于适当的线性目标函数，具有假定结构的指标策略可以求解调度问题。设 $\mathbf{c} \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$，并设 $\boldsymbol{\pi} \in \Pi(\mathscr{F})$ 和$\boldsymbol{\nu} = (\nu_j)_{j\in J}$ 由第 4 节中的任意指标算法在输入$\mathbf{c}$上生成。设 S_k 由 (11) 给出，并设 v^{LP} 为由 (14) 给出的线性规划最优值。

定理 6 (指标 $\mathscr{F}$-策略的最优性)。 给予指标 ν_j 较大的类别更高优先级的 $\boldsymbol{\pi}$-优先级策略是最优的。其值为 $v = v^{\mathrm{LP}}$。

证明。 该结果可直接由定理 1 和定理 5结合得出。 □

□

注 10。 请注意，根据定理 1，在任意策略 $u \in \mathscr{U}$ 下，均有

$$\sum_{j\in J} c_j\, x_j^u = \nu_{\pi_1} \sum_{j\in S_1} w_j^{S_1}\, x_j^u + \sum_{k=2}^{n} (\nu_{\pi_k} - \nu_{\pi_{k-1}}) \sum_{j\in S_k} w_j^{S_k}\, x_j^u.$$

5.2 多项目调度与指标分解

本节讨论问题（31）表示一个多项目调度模型的情形。该模型是第 4.4 节中分解性质的自然应用场景。我们将在第 6 节应用下述结果的一个特例。此前，[2] （在广义守恒律下）以及 [26] （在 PCL 下）已建立了分解结果。以下是后者的一个改进版本。

考虑由有限个 $m \geq 2$ 项目组成的集合，每个项目 $k \in K = \{1,\dots,m\}$ 在有限的状态空间 N_k中演化。通过调度策略 $u \in \mathscr{U}$动态地将资源分配给各项目，其中 $\mathscr{U}$ 是可行策略的空间，它规定在每个项目中应采取以下两种动作之一：投入运行（$a_k = 1$）或休息（$a_k = 0$）。项目 k 的状态划分为 $N_k = N_k^{\{0,1\}} \cup N_k^{\{1\}}$。当状态 i_k 位于可控状态空间 $N_k^{\{0,1\}}$ 时，该项目既可以投入运行，也可以休息；而当其位于不可控状态空间 $N_k^{\{1\}}$ 时，则必须投入运行。我们假设各项目的状态空间互不相交。记 $J_k = N_k^{\{0,1\}}$。

策略 u 在项目 k 的状态 $j_k \in J_k$ 下的性能由性能度量$x^{k,\ u}_{j_k} \geq 0$给出。记作 $\mathbf{x}^{k,\ u} = (x^{k,\ u}_{j_k})_{j_k\in J_k}$。

所关注的多项目调度问题是

$$v = \min\left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j_k\in J_k} c_{j_k}^k\, x_{j_k}^{k,u} : u \in \mathscr{U} \right\},$$

即，寻找一个使所述线性性能目标最小化的策略。该问题符合公式（31），其中作业类别对应于项目状态。

PCL框架要求对各类别设定优先级。在当前情形下，这可以依据项目之间的自然优先级来确定。因此，我们将每个全字符串 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$（其中 $n = |J|$）解释为相应的 $\boldsymbol{\pi}$-优先级策略。

我们还必须指定一个集合系统（J, $\mathscr{F}$），以定义 $\mathscr{F}$-策略族。假设已给定一组策略，用于分别独立运行每个项目 k，即规定项目处于哪些可控状态时应启动，并以适当的集合系统（J_k, $\mathscr{F}_k$）表示。项目 k的 $\mathscr{F}_k$-策略通过为每个集合 $S_k \in \mathscr{F}_k$ 关联一个相应的 S_k-主动策略来构造：当项目状态属于 $S_k \cup N^{\{1\}}$时启动项目，否则令其休息。现在按照（21）构造（J, $\mathscr{F}$）。

进一步假设：(i) 性能向量 $\mathbf{x}^u = (x_j^u)_{j\in J}$相对于 $\mathscr{F}$-策略满足 PCL；并且 (ii) 边际工作负荷 w_j^S 满足假设2。

假设每个项目 k 的成本向量 $\mathbf{c}^k = (c_{j_k}^k)_{j_k\in J_k}$ 是 $\mathscr{F}_k$-可容许的。那么，根据定理 2(a)，可得 $\mathbf{c} = (c_j)_{j\in J}$，其中 $c_{j_k} = c_{j_k}^k$，是 $\mathscr{F}$-可容许的。令 $\boldsymbol{\nu}^k = (\nu_{j_k}^k)_{j_k\in J_k}$为项目 k 的指标向量。下面的结论由定理 2得出。

定理 7 (多项目调度的指标分解)。 任何 $\mathscr{F}$策略 $\boldsymbol{\pi}$ 若优先安排状态 j_k 的指标 $\nu_{j_k}^k$ 较大的项目 k，则都是最优的。

6 个 PCL 可索引 RB

本节回到第 3 节讨论的 RB 模型。我们将通过采用 PCL 框架来解决第 3.3 节提出的问题。

6.1 标准线性规划表述与纯被动成本归一化 on

接下来回顾 ν-收费问题 (8) 的标准线性规划表述，它是其动态规划方程线性规划表述（9）的对偶。我们将利用它把问题化简为纯被动成本归一化版本，并以此为重点进行分析。

问题 ν-收费问题（8）的标准线性规划表述为

$$
\begin{aligned}
v_i(\nu) \quad = \quad & \min \mathbf{x}^0\,\mathbf{h}^0 + \mathbf{x}^1(\mathbf{h}^1 + \nu\,\boldsymbol{\theta}^1) && (32)\\
& \text{subject to} \\
& \mathbf{x}^0\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^0) + \mathbf{x}^1\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^1) = \mathbf{e}_i && (33)\\
& x_j^0 = 0, \quad j \in N^{\{1\}}, && (34)\\
& \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

其中$\mathbf{x}^a = (x_j^a)_{j\in N}$, $\boldsymbol{\theta}^1 = (\theta_j^1)_{j\in N}$，且$\mathbf{e}_i$是 $\mathbb{R}^N$ 中第 i 个单位坐标向量。向量根据需要采用行形式或列形式。在此线性规划中，变量 x_j^a 对应于标准状态-动作占用测度

$$
x_{ij}^{a,u} = E_i^u \left[\sum_{t=0}^{\infty} 1\{X(t) = j, a(t) = a\}\,\beta^t \right],
$$

给出在策略 u下，从 i开始，在状态 j 采取行动 a 的期望总折现次数。因此，(34) 表明，在不可控状态下，项目必须处于主动状态。

线性规划约束 (33) 表明

$$
\mathbf{x}^1 = \mathbf{e}_i\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^1)^{-1} - \mathbf{x}^0\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^0)\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^1)^{-1},
$$

因此，其目标函数 (32) 可改写为

$$
\mathbf{e}_i\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^1)^{-1}\,\mathbf{h}^1 + \mathbf{x}^0\,\widehat{\mathbf{h}}^0 + \nu\,\mathbf{x}^1\,\boldsymbol{\theta}^1 = v_i^{N^{\{0,1\}}} + \mathbf{x}^0\,\widehat{\mathbf{h}}^0 + \nu\,\mathbf{x}^1\,\boldsymbol{\theta}^1, \tag{35}
$$

其中 $\widehat{\ }\mathbf{h}^0 = \left(\widehat{h}_j^0\right)_{j\in N}$ 是 归一化被动成本向量，其定义为

$$
\widehat{\mathbf{h}}^0 = \mathbf{h}^0 - (\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^0)\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^1)^{-1}\,\mathbf{h}^1. \tag{36}
$$

还需注意，恒等式 (36) 以及不可控状态的定义给出

$$
\widehat{h}_j^0 = 0, \quad j \in N^{\{1\}}.
$$

下文将重点讨论以下归一化 ν收费问题

$$
\widehat{v}_i(\nu) = \min \left\{ \sum_{j\in N^{\{0,1\}}} \widehat{h}_j^0\,x_{ij}^{0,u} + \nu\,b_i^u : u \in \mathscr{U} \right\}, \tag{37}
$$

其最优值与 $v_i(\nu)$ 的关系为

$$
v_i(\nu) = v_i^{N^{\{0,1\}}} + \widehat{v}_i(\nu).
$$

6.2 归一化 ν-收费问题的 PCL

接下来，我们将问题（37）转化为第 5.2 节中 PCL 的多项目调度情形。将（37）重新解释为一个双项目调度模型：在原项目中添加一个具有校准项目和单一状态 $*$的项目。在每个时刻必须有一个项目处于运行状态；当原项目处于休息状态时，则运行校准项目。

如第 5.2 节所述，设双项目模型的可控状态空间为 $\mathbf{b}$ e

$$J^* = N^{\{0,1\}} \cup \{*\}.$$

我们将尝试为性能向量 $\mathbf{x}_i^u = (x_{ij}^u)_{j\in J^*}$ 建立 PCL，其中

$$x_{ij}^u = \begin{cases} x_{ij}^{0,u} & \text{if } j \in N^{\{0,1\}} \\ b_i^u & \text{if } j = *. \end{cases} \tag{38}$$

注意，归一化的 ν-收费问题可据此表述为

$$\widehat{v}_i(\nu) = \min\left\{ \sum_{j\in N^{\{0,1\}}} \widehat{h}_j^0\, x_{ij}^u + \nu\, x_{i*}^u : u \in \mathscr{U} \right\}.$$

优先级的解释方面，例如，校准项目的状态 $*$优先级高于原项目的状态 j，意味着后者在状态 j下处于休息状态。

回顾第 3.3 节，我们给定了一个适当的集合系统（$N^{\{0,1\}}$，$\mathscr{F}$），它定义了 $\mathscr{F}$-策略族（参见定义 1）。按照第 5.2 节中的方法，为双项目模型构造集合系统（J^*，$\mathscr{F}^*$），方法是令

$$\mathscr{F}^* = \{S^* = S_1 \cup S_2 : S_1 \in \mathscr{F}, S_2 \in \{\emptyset, \{*\}\}\}.$$

我们将尝试证明，性能向量 $\mathbf{x}_i^u$ 相对于 $\mathscr{F}^*$ 满足 PCL，因此必须定义合适的系数 $w_j^{S^*}$ 和 b^{S^*}。

我们首先定义 边际工作负荷 w_j^S，其中 $j \in N$，$S \subseteq N^{\{0,1\}}$，用 活动度量b_i^S（参见第 3.1 节）来表示。后者的特征如下：

$$b_i^S = \begin{cases} \theta_i^1 + \beta \sum\limits_{j\in N} p_{ij}^1\, b_j^S & \text{if } i \in S \cup N^{\{1\}} \\ \beta \sum\limits_{j\in N} p_{ij}^0\, b_j^S, & \text{if } i \in N^{\{0,1\}} \setminus S; \end{cases} \tag{39}$$

下面将使用以下记号：给定 $\mathbf{d} = (d_j)_{j\in N}$、$\mathbf{A} = (a_{i,\ j})_{i,\ j\in N}$ 和 S，$T \subseteq N$，记 $\mathbf{d}_S = (d_j)_{j\in S}$ 和 $\mathbf{A}_{ST} = (a_{ij})_{i\in S,\ j\in T}$。因此，可以将上述方程改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^S_{S\cup N^{\{0,1\}}} &= \boldsymbol{\theta}^1_{S\cup N^{\{0,1\}}} + \beta\, \mathbf{P}^1_{S\cup N^{\{0,1\}},N}\, \mathbf{b}^S \\ \mathbf{b}^S_{N^{\{0,1\}}\setminus S} &= \beta\, \mathbf{P}^0_{N^{\{0,1\}}\setminus S,N}\, \mathbf{b}^S. \end{aligned}$$

现在令

$$w_i^S = \theta_i^1\, 1\{i \in N^{\{0,1\}}\} + \beta \sum_{j\in N} (p_{ij}^1 - p_{ij}^0)\, t_j^S, \quad i \in N; \tag{40}$$

也就是说，

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^S_{N^{\{0,1\}}} &= \boldsymbol{\theta}^1_{N^{\{0,1\}}} + \beta \left(\mathbf{P}^1_{N^{\{0,1\}},N} - \mathbf{P}^0_{N^{\{0,1\}},N}\right) \mathbf{b}^S \\ \mathbf{w}^S_{N^{\{1\}}} &= \beta \left(\mathbf{P}^1_{N^{\{1\}},N} - \mathbf{P}^0_{N^{\{1\}},N}\right) \mathbf{b}^S = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{41}$$

其中，最后一个恒等式由假设 $p^1_{ij} = p^0_{ij}$ 对 $i \in N^{\{1\}}$成立推出。系数 w_i^S 因此表示在初始状态 i下进行被动到主动的动作互换所导致的活动度量 b^S 的边际增量。

下面给出一个预备结果，进一步说明$\mathbf{b}^S$ 与$\mathbf{w}^S$之间的关系。证明从上述内容通过直接代数运算即可得到，故略去。

引理 5. 以下恒等式成立：

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^0)\,\mathbf{b}^S &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}^S_S \\ \mathbf{0}_{N^{\{0,1\}}\setminus S} \\ \boldsymbol{\theta}^1_{N^{\{1\}}} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\theta}^1 - (\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^1)\,\mathbf{b}^S &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{S\cup N^{\{1\}}} \\ \mathbf{w}^S_{N^{\{0,1\}}\setminus S} \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{42}$$

受假设2的启发，我们通过如下方式补全边际工作负载定义：对于 $j \in J^*$和 $S^* = S \cup \{*\}$，其中 $S \subseteq N^{\{0,1\}}$,

$$w_j^{S^*} = \begin{cases} w_j^S & \text{if } j \in N^{\{0,1\}} \\ 1 & \text{if } j = *. \end{cases}$$

接下来需要定义函数 $b_i^{S^*}$，它出现在 PCL 的右侧（现在依赖于初始状态 i）。对于 $S^* \subseteq J^*$，令：

$$b_i^{S^*} = \begin{cases} b_i^S & \text{if } S^* = S \cup \{*\}, \emptyset \neq S \subseteq N^{\{0,1\}} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

接下来的结果给出一组工作负载分解定律，即联系主动动作和被动动作所对应工作负载项的线性方程。

命题 4 （工作负载分解定律）。对于 $u \in \mathscr{U}$和 $S \subseteq N^{\{0,1\}}$,

$$b_i^u + \sum_{j\in S} w_j^S\, x_{ij}^{0,u} = b_i^S + \sum_{j\in N^{\{0,1\}}\setminus S} w_j^S\, x_{ij}^{1,u}.$$

证明。 依次使用方程（33）和（42），可得

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\mathbf{x}_i^{0,u}\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^0) + \mathbf{x}_i^{1,u}\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^1) - \mathbf{e}_i\right]\,\mathbf{b}^S \\ &= \mathbf{x}_i^{0,u}\,(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^0)\,\mathbf{b}^S + \mathbf{x}_i^{1,u}\,\left[(\mathbf{I} - \beta\,\mathbf{P}^1)\,\mathbf{b}^S - \boldsymbol{\theta}^1\right] - \mathbf{e}_i\,\mathbf{b}^S + \mathbf{x}_i^{1,u}\,\boldsymbol{\theta}^1 \\ &= \mathbf{x}_{i,S}^{0,u}\,\mathbf{w}_S^S - \mathbf{x}_{i,N\setminus S}^{1,u}\,\mathbf{w}_{N\setminus S}^S - b_i^S + b_i^u, \end{aligned}$$

利用引理 5进行化简后，即得所需结果。 □

□

下面进一步阐明系数 b_j^S 与 w_j^S 之间的关系。

推论1. 对于 $i \in N$ 和 $S \subseteq N^{\{0,1\}}$,

$$\begin{aligned} b_i^{S\cup\{j\}} &= b_i^S + w_j^S\, x_{ij}^{1,S\cup\{j\}}, \quad j \in N^{\{0,1\}} \setminus S \\ b_i^S &= b_i^{S\setminus\{j\}} + w_j^S\, x_{ij}^{0,S\setminus\{j\}}, \quad j \in S. \end{aligned}$$

证明。 令 $u = S \cup \{j\}$ 以及 $u = S \setminus \{j\}$ 分别代入命题 4即可得证。 □

□

命题4提出了满足 PCL 的以下条件。

假设4。边际工作负荷 w_j^S 满足以下条件：对于 $S \in \mathscr{F}$,

$$w_j^S > 0, \quad j \in N^{\{0,1\}}.$$

假设4体现了 b^u的单调性，如下所示。

命题5。假设4 等价于以下条件：对于 $S \in \mathscr{F}$,

$$\begin{aligned} b_j^S &< b_j^{S\cup\{j\}}, \quad j \in N^{\{0,1\}} \setminus S \\ b_j^S &> b_j^{S\setminus\{j\}}, \quad j \in S. \end{aligned} \tag{43}$$

证明。根据推论 1 可得该结果。注意，对于 $j \in N^{\{0,1\}} \setminus S$，有 $x^{1,\ S\cup\{j\}}_{jj} > 0$；对于 $j \in S$，有 $x^{0,\ S\setminus\{j\}}_{jj} > 0$。 □

□

现在我们可以建立所需的 PCL 了。

定理8 (PCL)。 在假设 4下，性能向量 $\mathbf{x}_i^u$ 相对于 $\mathscr{F}^*$- 策略满足 *PCL*。

证明。 该结果由命题 4 与假设4结合可得。例如，考虑以下情形$S^* = S \cup \{*\}$，其中 $\emptyset \neq S \in \mathscr{F}$。对于任意策略 $u \in \mathscr{U}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathscr{F}^*} w_j^{S^*}\, x_{ij}^u &= b_i^u + \sum_{j\in S} w_j^S\, x_{ij}^{0,u} \\ &= b_i^S + \sum_{j\in N^{\{0,1\}}\setminus S} w_j^S\, x_{ij}^{1,u} \\ &\geq b_i^S = b_i^{S^*}, \end{aligned}$$

若将优先级给予 S^*-作业，即在状态 $j \in N^{\{0,1\}} \setminus S$ 采取被动动作，则最后一个不等式取等号。其他情形类似。 □

□

We 接下来定义一类将被证明为可索引的 RB。令 $n = |N^{\{0,1\}}|$.

定义11 (PCL 可索引 RB)。 若该 RB 相对于活动度量b^u 和 $\mathscr{F}$-策略满足以下条件，我们称其为*PCL* 可索引：

(i) 正边际工作负荷： 假设4 成立。
（ii）指标单调性：设（可容许 $\boldsymbol{\pi}$，$\boldsymbol{\nu}$）是第 4 节中任意指标算法在输入 $\widehat{\mathbf{h}}^0_{N^{\{0,1\}}}$上得到的输出。那么，这些指标满足

$$\nu_{\pi_1} \leq \cdots \leq \nu_{\pi_n}, \tag{44}$$

即，可容许 =真，或者 $\widehat{\mathbf{h}}^0_{N^{\{0,1\}}} \in \mathscr{C}$（$\mathscr{F}$）。

备注 k 11. [26] 中 PCL 可索引性的定义在 $\theta_j^1 \equiv 1$ 情形下得到恢复。

以下假设休假模型是 PCL 可索引的。向任意指标算法输入 $\widehat{\mathbf{h}}^0_{N^{\{0,1\}}}$，以得到$\mathscr{F}$字符串 $\boldsymbol{\pi}$和指标向量 $\boldsymbol{\nu}$。令 $S_k = \{\pi_k, \ldots\ldots, \pi_n\}$，其中 $1 \le k \le n$。下面的结果表明，PCL 可索引性蕴含可索引性（参见定义2）。

定理 9 (PCL 可索引性 $\Longrightarrow$可索引性)。休假模型具有可索引性，状态 j 的动态分配指数为 ν_j，其中 $j \in N^{\{0,1\}}$。

证明。定理 7适用于标准化 ν-收费问题的双项目表述。因此，(i) 校准项目状态的优先级指数为 $\nu_* = \nu$；(ii) 原项目可控状态 j 的动态分配指数为 ν_j。根据定义 2 对定理 7进行解释，即可得到该结果。

□

□

由上述内容可得若干推论，首先可将 ν-收费问题重新表述为一个在 $\mathscr{F}^*$-扩展拟阵上的线性规划。考虑多面体 $P_i(\mathscr{F}^*) \subset \mathbb{R}^{J^*}$，其定义如式（12）所示，并相对于上述参数 $w_j^{S^*}$ 和 $b_i^{S^*}$ 定义。

推论 2。 $P_i(\mathscr{F}^*)$ 是一个 $\mathscr{F}^*$-扩展拟阵。ν-收费问题可重新表述为以下线性规划

$$v_i(\nu) = v_i^{N^{\{0,1\}}} + \min\left\{ \sum_{j \in N^{\{0,1\}}} \widehat{h}_j^0 \, x_j + \nu \, x_* : \mathbf{x} \in P_i(\mathscr{F}^*) \right\}.$$

下一个结果（如图4所示）刻画了 $v_i(\nu)$。令 $S_{n+1} = \emptyset$。

PSfrag 替换

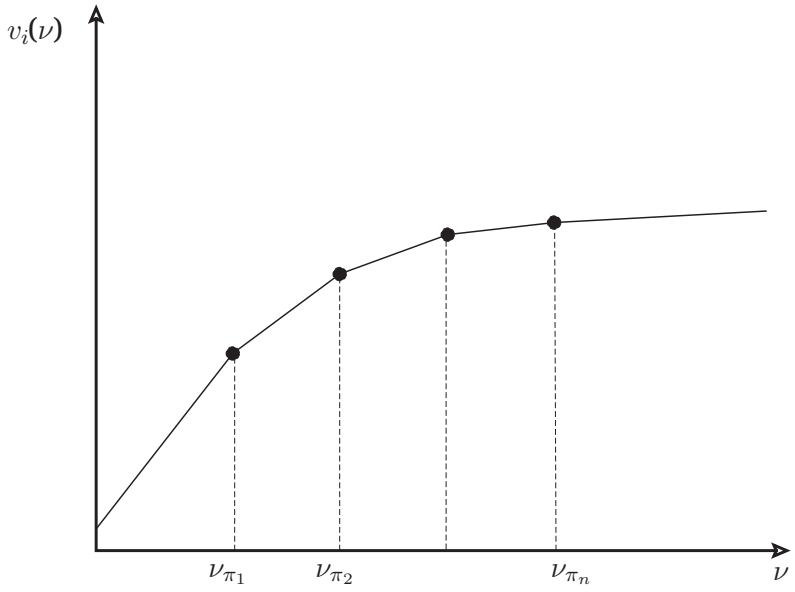


图 4：最优值函数 $v_i(\nu)$ 对活动收费 ν 的依赖关系。

Cor论 3. 函数 $v_i(\nu)$ 在 ν 上连续、凹且分段线性，并且

$$\begin{aligned} v_i(\nu) &= \min\left\{ v_i^{S_k}(\nu) : 0 \le k \le n \right\} \\ &= \begin{cases} v_i^{S_1}(\nu) = v_i^{S_1} + \nu \, b_i^{S_1}, & \text{if } \nu \in (-\infty, \nu_{\pi_1}] \\ v_i^{S_k}(\nu) = v_i^{S_k} + \nu \, b_i^{S_k}, & \text{if } \nu \in [\nu_{\pi_{k-1}}, \nu_{\pi_k}], 2 \le k \le n \\ v_i^{S_{n+1}}(\nu) = v_i^{S_{n+1}} + \nu \, b_i^{S_{n+1}}, & \text{if } \nu \in [\nu_{\pi_n}, +\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

证明。 这些恒等式由定理 9 和定义 2得出。它们表明 $v_i(\nu)$ 在 ν上是连续凹分段线性函数，因为它是关于 ν的线性函数的最小值。 □

□

6.3 边际成本

回顾一下，在第 4.5 节中，我们引入了 边际成本 c_j^S来简化指标计算。本节将进一步讨论 RB 设置中这类系数的性质。

我们先根据价值测度 v_i^S，为 $j \in N, S \subseteq N^{\{0,1\}}$ 定义系数 c_j^S。对于每个 S， v_i^S 由以下线性方程刻画：

$$v_i^S = \begin{cases} h_i^1 + \beta \sum_{j \in N} p_{ij}^1 \, v_j^S & \text{if } i \in S \\ h_i^0 + \beta \sum_{j \in N} p_{ij}^0 \, v_j^S & \text{if } i \in N \setminus S; \end{cases}$$

或者，用向量表示法表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S^S &= \mathbf{h}_S^1 + \beta \, \mathbf{P}_{SN}^1 \, \mathbf{v}^S \\ \mathbf{v}_{N\setminus S}^S &= \mathbf{h}_{N\setminus S}^0 + \beta \, \mathbf{P}_{N\setminus S,N}^0 \, \mathbf{v}^S. \end{aligned} \tag{45}$$

现在定义

$$c_i^S = h_i^0 - h_i^1 + \beta \sum_{j \in N} (p_{ij}^0 - p_{ij}^1) \, v_j^S, \quad i \in N, \tag{46}$$

即：

$$\mathbf{c}^S = \mathbf{h}^0 - \mathbf{h}^1 + \beta \left(\mathbf{P}^0 - \mathbf{P}^1 \right) \mathbf{v}^S, \tag{47}$$

系数 c_i^S因此表示成本度量 v^S 中，由初始状态 i下被动动作与主动动作互换所产生的边际增量。

由此立即可得

$$c_j^S = 0, \quad j \in N^{\{1\}}. \tag{48}$$

此外，(45)–(47可直接推出引理5的以下对应结论。

引理 6。 以下恒等式成立：

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^0 - (\mathbf{I} - \beta \, \mathbf{P}^0) \, \mathbf{v}^S &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_S^S \\ \mathbf{0}_{N\setminus S} \end{bmatrix} \\ (\mathbf{I} - \beta \, \mathbf{P}^1) \, \mathbf{v}^S - \mathbf{h}^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_S \\ \mathbf{c}_{N\setminus S}^S \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{49}$$

下一个结果是命题 4的成本类比。

命题 6 (成本分解定律)。 对于 $u \in \mathscr{U}$ 和 $S \subseteq N^{\{0,1\}}$,

$$v_i^S + \sum_{j \in S} c_j^S \, x_{ij}^{0,u} = v_i^u + \sum_{j \in N^{\{0,1\}} \setminus S} c_j^S \, x_{ij}^{1,u}. \tag{50}$$

证明。 依次使用公式（33）和（49），可得

$$\begin{aligned}0 &= \left[\mathbf{x}_i^{0,u}\left(\mathbf{I}-\beta\,\mathbf{P}^0\right)+\mathbf{x}_i^{1,u}\left(\mathbf{I}-\beta\,\mathbf{P}^1\right)-\mathbf{e}_i\right]\,\mathbf{v}^S\\ &= \mathbf{x}_i^{0,u}\,\left[\left(\mathbf{I}-\beta\,\mathbf{P}^0\right)\mathbf{v}^S-\mathbf{h}^0\right]+\mathbf{x}_i^{1,u}\,\left[\left(\mathbf{I}-\beta\,\mathbf{P}^1\right)\mathbf{v}^S-\mathbf{h}^1\right]-\\ &\quad\ \mathbf{e}_i\,\mathbf{v}^S+\mathbf{x}_i^{1,u}\,\mathbf{h}^1+\mathbf{x}^{0,u}(i)\,\mathbf{h}^0\\ &= -\mathbf{x}_{i,S}^{0,u}\,\mathbf{c}_S^S+\mathbf{x}_{i,N\setminus S}^{1,u}\,\mathbf{c}_{N\setminus S}^S-v_i^S+v_i^u,\end{aligned}$$

由此得到该结果，利用（48）。 □

□

系数 v_j^S 与 c_j^S 的关系将在下文阐明（参见推论 1）。

推论4。 以下恒等式成立：对于 $i\in N$ 和 $S\subseteq N^{\{0,1\}}$,

$$\begin{aligned}v_i^S &= v_i^{S\cup\{j\}}+c_j^S\,x_{ij}^{1,S\cup\{j\}},\quad j\in N^{\{0,1\}}\setminus S\\ v_i^{S\setminus\{j\}} &= v_i^S+c_j^S\,x_{ij}^{0,S\setminus\{j\}},\quad j\in S.\end{aligned}$$

证明。分别在命题 $u=S\cup\{j\}$ 和 $u=S\setminus\{j\}$ 中令 6，即可得到 . □

□

下一个结果进一步阐明时间与价值度量之间，以及边际工作负荷与边际成本之间的关系。

命题7。 在假设 4下，以下结论成立：对于 $j\in S\in\mathscr{F}$,

(a) $\mathbf{v}^{S\setminus\{j\}}-\mathbf{v}^S=\dfrac{c_j^S}{w_j^S}\left(\mathbf{b}^S-\mathbf{b}^{S\setminus\{j\}}\right)=\dfrac{c_j^{S\setminus\{j\}}}{w_j^{S\setminus\{j\}}}\left(\mathbf{b}^S-\mathbf{b}^{S\setminus\{j\}}\right).$

(b) $\dfrac{c_j^S}{w_j^S}=\dfrac{c_j^{S\setminus\{j\}}}{w_j^{S\setminus\{j\}}}.$

(c) $\mathbf{c}^S-\mathbf{c}^{S\setminus\{j\}}=\dfrac{c_j^S}{w_j^S}\left(\mathbf{w}^S-\mathbf{w}^{S\setminus\{j\}}\right).$

证明。 (a) 这一部分由命题 4 和命题 6得出。
(b) 该结论由(a)和命题 5得出。
(c) 由式(41)，可直接得到

$$\mathbf{w}^S-\mathbf{w}^{S\setminus\{j\}}=\beta\,\left(\mathbf{P}^1-\mathbf{P}^0\right)\,\left(\mathbf{b}^S-\mathbf{b}^{S\setminus\{j\}}\right).\tag{51}$$

同理，由式(47)，可得

$$\mathbf{c}^S-\mathbf{c}^{S\setminus\{j\}}=\beta\,\left(\mathbf{P}^0-\mathbf{P}^1\right)\,\left(\mathbf{v}^S-\mathbf{v}^{S\setminus\{j\}}\right).\tag{52}$$

结合部分（a）与（51）–（52），即可得到该结果。 □

□

注 12。

1. 命题7 表明，由（ c_j^S 定义的指标（46）扩展了由（2 9).

2. 根据构造可知， c_j^S均对称（参见定义8）。因此，边际工作负荷满足命题3中的递推关系。

3. 注意，结合恒等式（36）、（45）和（49，可得

$$\widehat{\mathbf{h}}^0 = \mathbf{c}^J. \tag{53}$$

6.4 PCL 可索引性即边际收益递减规律

本节讨论 PCL 可索引性（参见定义11）作为经典经济学边际收益递减规律的一种形式的直观解释。假设如上所述，该项目具有 PCL 可索引性，并令 $\boldsymbol{\pi}$， $\boldsymbol{\nu}$ 和 S_k 如第6.2节所述。假设初始状态服从一个概率分布，该分布对每个状态赋予正概率 $p_i > 0$ $i \in N$。记$\mathbf{p} = (p_i)_{i\in N}$， $b^S = \sum_{i\in N} p_i\, b_i^S$以及 $v^S = \sum_{i\in N} p_i\, v_i^S$。

定理10（指标刻画与边际收益递减）。 *(a)*

$$b^{S_{n+1}} < b^{S_n} < \cdots < b^{S_1}.$$

（*b*）对于 $1 \le k \le n$，动态分配指数 ν_{π_k} 为

$$\begin{aligned}\nu_{\pi_k} &= \frac{v^{S_{k+1}} - v^{S_k}}{b^{S_k} - b^{S_{k+1}}} \\ &= \min\left\{\frac{v^{S_k\setminus\{j\}} - v^{S_k}}{b^{S_k} - b^{S_k\setminus\{j\}}} : j \in S_k\right\} \\ &= \max\left\{\frac{v^{S_k} - v^{S_k\cup\{j\}}}{b^{S_k\cup\{j\}} - b^{S_k}} : j \in N^{\{0,1\}} \setminus S_k\right\}.\end{aligned}$$

（*c*）边际收益递减：

$$\frac{v^{S_2} - v^{S_1}}{b^{S_1} - b^{S_2}} \le \frac{v^{S_3} - v^{S_2}}{b^{S_2} - b^{S_3}} \le \cdots \le \frac{v^{S_{n+1}} - v^{S_n}}{b^{S_n} - b^{S_{n+1}}}.$$

证明。 （a）此部分由命题 5 和 $\mathbf{p} > \mathbf{0}$。

（b）第一个恒等式由命题 7、恒等式（26）以及部分（a）得出。接着，第二个恒等式由命题 2中的（28）得出。第三个恒等式进一步由推论 3得出。

（c）该结论由部分（a）、（b）以及（17）中的不等式得出。 □

□

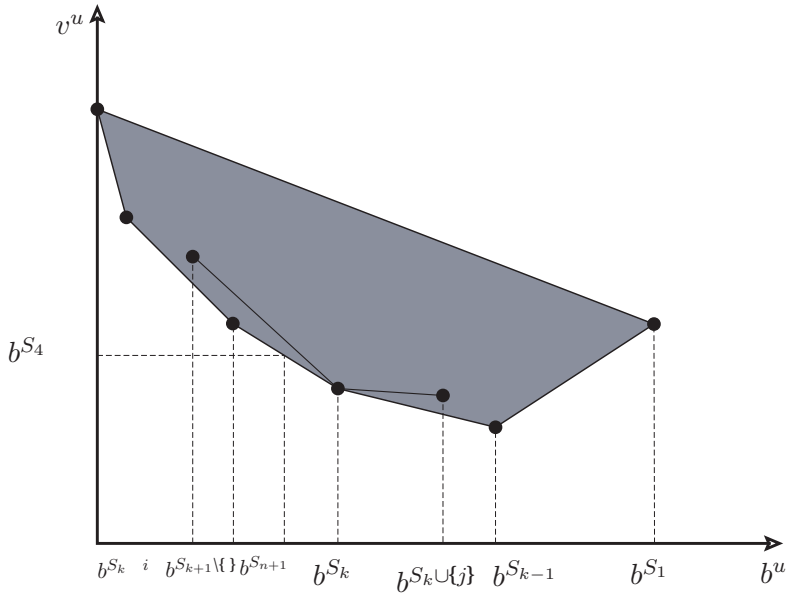
注 13。

1. 部分（a）表明，沿集合/策略序列 $\emptyset = S_{n+1} \subset S_n \subset \cdots \subset S_1 = N^{\{0,1\}}$，忙碌或主动时间（以 b^u 衡量）严格递增。

2. 部分（b）将指标刻画为 ν_{π_k} 一种局部最优边际成本率：它是由状态 $j \in S_k$ 上的主动到被动的动作切换所导致的，边际活动减少 b^{S_k} 每单位对应的成本增加 v^{S_k} 的最小比率。此外， ν_{π_k} 是由状态 $j \in N^{\{0,1\}}$ 上的被动到主动的动作互换所导致的，边际活动增加 b^{S_k} 每单位对应的成本减少 v^{S_k} 的最大比率。

3. 部分（c）表明，单位边际活跃时间增加所对应的边际成本最优减少率会随着基准活跃时间的增加而递减。因此，这体现了边际收益递减规律。

PSfrag 替换



Fi图 5：活动-成本图：PCL 可索引性与边际收益递减。

图 5 通过一幅活动-成本图展示了该结果，其中阴影区域表示可实现的活动-成本对区域$(b^u,\ v^u)$。在关于3的假设下，我们还可以得到关于非递减边际工作负载的以下指标刻画。

定理 11。 在假设 *3*下，

$$\nu_j = \max\left\{\frac{v_j^{S\setminus\{j\}} - v_j^S}{b_j^S - b_j^{S\setminus\{j\}}} : j \in S \in \{S_1,\dots,S_n\}\right\},\quad j \in N^{\{0,1\}}. \tag{54}$$

证明。 该结果可直接由定理 4 和命题 7得出。 □

□

注 14。

1. 定理 11 是休假模型中与经典多臂老虎机的 吉廷斯指数 刻画相对应的结果（$\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$ 和 $\mathbf{h}^0 = \mathbf{0}$），其形式为 单位时间的最优平均成本（奖励）率，最初见于 [15]。在经典情形下，定理 11 给出

$$\nu_j = \max\left\{\frac{-v_j^S}{b_j^S} : j \in S \in \{S_1,\dots,S_n\}\right\},\quad j \in N^{\{0,1\}},$$

因为 $b_j^{S\setminus\{j\}} = v_j^{S\setminus\{j\}} = 0$。实际上，[15] 中的 Gittins 指数刻画是

$$\nu_j = \max\left\{\frac{-v_j^S}{b_j^S} : j \in S \in 2^N\right\},\quad j \in N,$$

2. 我们提出开放问题：找出使（54）得以推广的条件

$$\nu_j = \max\left\{ \frac{v_j^{S\setminus\{j\}} - v_j^S}{b_j^S - b_j^{S\setminus\{j\}}} : j \in S \in \mathscr{F} \right\}, \quad j \in N^{\{0,1\}}.$$

6.5 扩展至长期平均准则

在适当的遍历性条件下，通过标准的极限（陶伯）论证，上述关于时间折扣准则的结果可直接扩展至长期平均准则。假设该模型是沟通的，即在某个平稳策略下，每个状态都能从其他任一状态到达。进一步假设，对于每个 $S \in \mathscr{F}$， S-主动策略都是单链的，即它诱导出一个常返类，以及一组（可能为空的）暂态状态。那么众所周知，量度$b_i^u(\beta)$、 $v_i^u(\beta)$、 $x^{a,u}_{ij}(\beta)$（这里明确写出了对 β 的依赖），乘以因子 $1-\beta$ 后，将收敛到与初始状态 i 无关的极限值，具体如下

$$\bar{b}^u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E_i^u \left[\sum_{t=0}^{T} \theta^1_{X(t)}\, a(t) \right] = \lim_{\beta\nearrow 1} (1-\beta)\, b_i^u(\beta),$$

$$\bar{v}^u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E_i^u \left[\sum_{t=0}^{T} h^{a(t)}_{X(t)} \right] = \lim_{\beta\nearrow 1} (1-\beta)\, v_i^u(\beta),$$

$$\bar{x}^{a,u}_j = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E_i^u \left[\sum_{t=0}^{T} 1\{X(t)=j, a(t)=a\} \right] = \lim_{\beta\nearrow 1} (1-\beta)\, x^{a,u}_{ij}(\beta).$$

因此， $\bar{b}^u$、 $\bar{v}^u$ 和 $\bar{x}^{a,u}_j$ 是相应的长期平均量，亦即稳态量。

接下来，我们论证未缩放的量 $w_i^S(\beta)$ 和 $c_i^S(\beta)$ 在 $\beta \uparrow 1$ 时收敛至有限极限 $\bar{w}_i^S$和 $\bar{c}_i^S$。先来看边际工作负荷 $w_i^S(\beta)$。对于 $i \in N$ 和 $S \in \mathscr{F}$，我们可以写成

$$b_i^S(\beta) = \frac{\bar{b}^S}{1-\beta} + a_i^S + O(1-\beta), \quad \text{as } \beta \nearrow 1, \tag{55}$$

w这里的值 a_i^S由该方程确定，但相差一个加法常数 s

$$\bar{b}^S + a_i^S = \begin{cases} \theta_i^1 + \sum_{j\in N} p_{ij}^1\, a_j^S & \text{if } i \in S \cup N^{\{1\}} \\ \sum_{j\in N} p_{ij}^0\, a_j^S & \text{if } i \in N^{\{0,1\}} \setminus S. \end{cases}$$

现在，将 $b_i^S(\beta)$ 按式（55）代入式（40），并令 $\beta \nearrow 1$，得到

$$\bar{w}_i^S = \lim_{\beta\nearrow 1} w_i^S(\beta) = \theta_i^1\, 1\{i \in N^{\{0,1\}}\} + \sum_{j\in N} (p_{ij}^1 - p_{ij}^0)\, a_j^S, \quad i \in N.$$

对于边际成本 $c_i^S(\beta)$，我们采用类似的方法。记

$$v_i^S(\beta) = \frac{\bar{v}^S}{1-\beta} + f_i^S + O(1-\beta), \quad \text{as } \beta \nearrow 1, \tag{56}$$

其中，数值 f_i^S由以下方程确定，但相差一个加法常数：

$$\bar{v}^S + f_i^S = \begin{cases} h_i^1 + \sum_{j\in N} p_{ij}^1 f_j^S & \text{if } i \in S \\ \\ h_i^0 + \sum_{j\in N} p_{ij}^0 f_j^S & \text{if } i \in N \setminus S. \end{cases}$$

现在，将（ v_i^S（β）由（56）给出，代入（46），并令 $\beta \nearrow 1$，得到

$$\bar{c}_i^S = \lim_{\beta\nearrow 1} c_i^S(\beta) = h_i^0 - h_i^1 + \sum_{j\in N} (p_{ij}^0 - p_{ij}^1) f_j^S, \quad i \in N.$$

因此，先前的结果可推广到长期平均情形。

6.6 受活动约束的最优控制

在应用中，通常需要对平均活动率施加约束。例如，参见 [19]及其中的参考文献。这一点与上文讨论的长期平均准则尤为相关，接下来我们将重点讨论这一准则。

我们关注的约束控制问题是：在长期平均活动率为 $b^u = t$ 的策略中，寻找使成本度量$\bar{v}^u$最小化的平稳策略：

$$\bar{v}_t = \min\left\{\bar{v}^u : \bar{b}^u = t, u \in \mathscr{U}\right\}. \tag{57}$$

假设该项目如第 6.4 节所述为 PCL 可索引，并令 $\boldsymbol{\pi}$， $\boldsymbol{\nu}$和 S_k 分别为其最优 $\mathscr{G}$字符串、指标向量和主动集合。假设对于某个 $1 \le k \le n$,

$$\bar{b}^{S_{k+1}} < t < \bar{b}^{S_k},$$

并令

$$p = \frac{t - \bar{b}^{S_{k+1}}}{\bar{b}^{S_k} - \bar{b}^{S_{k+1}}}, \qquad q = 1 - p.$$

记 (S_{k+1}, π_k, p) 为如下平稳策略：在状态 $j \in S_{k+1} \cup N^{\{1\}}$上采取主动策略；在状态$\pi_k$ 上以概率 p采取主动策略；其他情况下采取被动策略。下一结论可由第 6.4 节直接推出，因此省略其证明。另见图 5。

命题 8. 以下结论成立：

(a) 策略 (S_{k+1}, π_k, p) 是问题（57）的最优策略；其最优值为

$$\bar{v}_t = (1-p)\,\bar{v}^{S_{k+1}} + p\,\bar{v}^{S_k}.$$

（*b*）函数 $\bar{v}_t$ 在 t 上是分段线性凹函数，且

$$\frac{d}{dt}\bar{v}_t = \nu_{\pi_k}, \quad \bar{b}^{S_{k+1}} < t < \bar{b}^{S_k}.$$

注 15. 命题 8(b) 将指标 ν_{π_k} 刻画为最优约束值函数 v_t 关于所需活动水平 t的导数。

7 准入控制问题：PCL-index可索引性分析

本节将回到第 2 节介绍的准入控制模型。我们将通过开展 PCL-index可索引性分析，解决第 2.3 节提出的问题。与本节相关但属于辅助内容的重要材料，请参阅附录。

在下文中，我们将记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$、$d_i = \mu_i - \lambda_i$ 和

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}.$$

接下来，我们陈述对模型参数所要求的正则性条件。

假设 5. 以下条件成立：
(i) 凹且非递减的 d_i：$0 \le \Delta d_{i+1} \le \Delta d_i$、$1 \le i \le n-1$ 和 $\Delta d_1 > 0$。(ii) 凸且非递减的 h_i：$\Delta h_{i+1} \ge \Delta h_i \ge 0$、$1 \le i \le n-1$.

注 16. 假设5 远不如 Chen 和 Yao 在 [6] 中提出的条件严格。此外，除了要求 d_i 在其条件 (5.5a) 中为非递减外，他们还要求 μ_i 在其条件 (5.5b) 中为凹且非递减。他们还施加了其他条件，包括持有成本的线性 。

7.1 折扣准则下的 PCL 可索引性分析

我们将证明，针对由集合系统 阈值策略所构成的策略族，该模型具有 PCL 可索引性：$(N^{\{0,1\}}, \mathscr{F})$，其中 $\mathscr{F} = \{S_1, \ldots, S_{n+1}\}$ 由式（5）–（6）给出。活动度量 b_i^u由式（2）给出，这相当于在式（$\theta_j^1 = \lambda_j/(\alpha + \Lambda)$）中令，其中 $j \in N$，且 Λ为均匀化率 *(*参见附录A)。

我们首先必须计算边际工作负荷系数 $w_i^{S_k}$；其完整递推关系见图 6。该递推关系涉及系数 a_i，其由式（67）给出。

命题 9. 对于 w_i^S，其中 $i \in N^{\{0,1\}}$和 $S \in \mathscr{F}$，边际工作负载 按图 *6*所示的递推关系计算。

证明. 利用恒等式（66），将附录 B.1 中引理 9 和引理 12 给出的关于各项 $\Delta b^S(i)$的方程改写为关于 w_i^S的方程，即可得出该结果。 □

□

注 17。 图 6 中的递推关系还进一步给出了系数 w_i^S 当 $\alpha = 0$时。这些即为第 7.2 节讨论的长期平均边际工作负荷。

下一个结果给出了边际工作负荷所需的性质。

命题 10 （正的非递减 w_i^S）。 在假设 *5* (*i*) 下：(*a*) $w_i^S > 0$，对于 $i \in N^{\{0,1\}}$，$S \in \mathscr{F}$，因此假设 *4*成立。(*b*) w_i^S在 $S \in \mathscr{F}$上是非递减的，$i \in S$ 固定，因此假设 *3* 成立。

证明。 两部分均可直接由附录 13 中的引理B.1得出。 □

□

图 7 展示了附录B.1 中关于边际工作负荷的递归关系和不等式（箭头表示计算方向）。 主导 项构成递归关系的骨干，并以方框标出。

Ma际成本分析见附录B.2，由此得到以下递推关系 .

$w_i^{S_1}$**的计算：**

$$\frac{w_0^{S_1}}{\lambda_0} = \frac{\alpha + \Delta d_1}{\alpha + \mu_1}; \quad \frac{w_i^{S_1}}{\lambda_i} = \frac{\alpha + \Delta d_{i+1} + \dfrac{w_{i-1}^{S_1}}{\rho_{i-1}}}{\alpha + \mu_{i+1}}, \quad 1 \le i \le n-1$$

$w_i^{S_2}$**的计算：**

$$\frac{w_0^{S_2}}{\lambda_0} = \frac{\alpha + \Delta d_1}{\alpha + \lambda_0 + \mu_1}; \quad \frac{w_i^{S_2}}{\lambda_i} = \frac{\alpha + \Delta d_{i+1} + \dfrac{w_{i-1}^{S_2}}{\rho_{i-1}}}{\alpha + \mu_{i+1}}, \quad 1 \le i \le n-1$$

$w_i^{S_{k+1}}$ **的计算，对于** $2 \le k \le n$**：**

$$\frac{w_{k-1}^{S_{k+1}}}{\lambda_{k-1}} = \frac{1}{a_k} \frac{\alpha + \Delta d_k + \dfrac{w_{k-2}^{S_k}}{\rho_{k-2}}}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k}; \quad \frac{w_{k-2}^{S_{k+1}}}{\rho_{k-2}} = -(\alpha + \Delta d_k) + \frac{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k}{\lambda_{k-1}} w_{k-1}^{S_{k+1}}$$

$$\frac{w_i^{S_{k+1}}}{\lambda_i} = \frac{\alpha + \Delta d_{i+1} + \dfrac{w_{i-1}^{S_{k+1}}}{\rho_{i-1}}}{\alpha + \mu_{i+1}}, \quad k \le i \le n-1$$

$$\frac{w_i^{S_{k+1}}}{\rho_i} = -(\alpha + \Delta d_{i+2}) + \frac{\alpha + \lambda_{i+1} + \mu_{i+2}}{\lambda_{i+1}} w_{i+1}^{S_{k+1}} - w_{i+2}^{S_{k+1}}, \quad 0 \le i \le k-3$$

图 6：边际工作负载的递归计算 $w_i^{S_k}$。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{w_0^{S_1}} & > & \boxed{w_0^{S_2}} & < & \cdots & \cdots & \cdots & < & w_0^{S_{n+1}} \\
\downarrow & & \downarrow & \searrow & & & & & \uparrow \\
w_1^{S_1} & > & w_1^{S_2} & > & \ddots & \cdots & \cdots & < & w_1^{S_{n+1}} \\
\downarrow & & \downarrow & & & \ddots & & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & \searrow & \uparrow \\
w_{n-1}^{S_1} & > & w_{n-1}^{S_2} & > & \cdots & \cdots & \cdots & > & \boxed{w_{n-1}^{S_{n+1}}}
\end{array}$$

图 7：边际工作负载之间的关系 $w_i^{S_k}$。

命题 11. 边际成本 $c_k^{S_{k+2}}$，对于 $0 \le k \le n-1$，计算如下

$$c_0^{S_2} = \frac{\lambda_0}{\alpha + \lambda_0 + \mu_1} \Delta h_1$$
$$c_k^{S_{k+2}} = \frac{\lambda_k}{a_{k+1}} \frac{\Delta h_{k+1} + \frac{c_{k-1}^{S_{k+1}}}{\rho_{k-1}}}{\alpha + \lambda_k + \mu_{k+1}}, \quad 1 \le k \le n-1.$$

现在我们可以证明该模型的 PCL 可索引性，并计算其指标。递归地构造ν_0、……、 ν_{n-1}：

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{\Delta h_1}{\alpha + \Delta d_1} \\ \nu_j &= \nu_{j-1} + \frac{\Delta h_{j+1} - \nu_{j-1}(\alpha + \Delta d_{j+1})}{\alpha + \Delta d_{j+1} + \frac{w_{j-1}^{S_{j+1}}}{\rho_{j-1}}}, \quad 1 \le j \le n-1. \end{aligned} \tag{58}$$

我们需要以下初步结果。

引理 7。 在假设 5下，有：

(a) $\frac{\Delta h_j}{\alpha + \Delta d_j} \le \frac{\Delta h_{j+1}}{\alpha + \Delta d_{j+1}}, \quad 1 \le j \le n-1.$

(b) $\nu_j \le \frac{\Delta h_{j+1}}{\alpha + \Delta d_{j+1}}, \quad 0 \le j \le n-1.$

(c) $\nu_0 \le \nu_1 \le \cdots \le \nu_{n-1}.$

证明。 （a）该结果直接由假设5得出。

（b）对 j进行归纳。情形 $j = 0$ 由（58）成立。现在假设

$$\nu_{j-1} \le \frac{\Delta h_j}{\alpha + \Delta d_j}.$$

于是，根据部分（a），可得

$$\nu_{j-1} \le \frac{\Delta h_{j+1}}{\alpha + \Delta d_{j+1}}.$$

注意，现在（58）中的最后一个恒等式可以改写为

$$\nu_j = \frac{\Delta h_{j+1}}{\alpha + \Delta d_{j+1}} + \frac{\frac{w_{j-1}^{S_{j+1}}}{\rho_{j-1}}}{\alpha + \Delta d_{j+1} + \frac{w_{j-1}^{S_{j+1}}}{\rho_{j-1}}} \left[\nu_{j-1} - \frac{\Delta h_{j+1}}{\alpha + \Delta d_{j+1}} \right].$$

由于 $\alpha + \Delta d_{j+1} > 0$ 和 $w_{j-1}^{S_{j+1}} > 0$，由最后一个恒等式可得

$$\nu_{j-1} \le \frac{\Delta h_{j+1}}{\alpha + \Delta d_{j+1}} \iff \nu_j \le \frac{\Delta h_{j+1}}{\alpha + \Delta d_{j+1}},$$

至此，归纳法得证。

（c）这由（a）和（b）两部分以及（58）. □

□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 12 （PCL 可索引性：折扣准则）。 在假设 5下，相对于阈值策略和拒绝测度 b^u，该准入控制模型具有 *PCL* 可索引性。其动态分配指数为 ν_j，由式（58）给出，并满足式（54）。

证明。 利用式（26）和命题 7（b），我们需要证明

$$\nu_j = \frac{c_j^{S_{j+2}}}{w_j^{S_{j+2}}}, \quad 0 \le j \le n-1.$$

利用命题 j，根据命题 6 和命题 11，通过对 10 和定理 54 作归纳即可得到。此外，命题 54表明该指标满足式（54）。 □

□

7.2 长期平均准则下的 PCL 可索引性

与第 6.5 节类似，上述 PCL 可索引性分析可推广至准入控制模型的长期平均版本。相关的拒绝测度和成本度量为

$$\bar{b}^u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E^u \left[\int_0^T \lambda_{L(t)}\, a(t)\, dt \right],$$

$$\bar{v}^u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E^u \left[\int_0^T h_{L(t)}\, dt \right].$$

当 $w_j^{S_k}$、 $c_j^{S_k}$和ν_j 在 $\alpha \searrow 0$ 时的极限值（等价于在第 $\beta \nearrow 1$ 节 6.5 中令 $\alpha = 0$ ）可通过在给定的递推关系中取相应值而得。下面给出结论。

推论 5 （PCL 可索引性：长期平均准则）。 在假设 5下，按照长期平均准则，该准入控制模型相对于阈值策略具有 *PCL* 可索引性¯和拒绝测度 b^u。其指标满足

$$\bar{\nu}_j = \max \left\{ \frac{\bar{v}^{S\setminus\{j\}} - \bar{v}^S}{\bar{b}^S - \bar{b}^{S\setminus\{j\}}} : j \in S \in \{S_1, \dots, S_n\} \right\}, \quad j \in N^{\{0,1\}}.$$

7.3 情形 $\lambda_j = \lambda$, $\mu_j = \mu$, $\alpha = 0$

本节推导 $\lambda_j = \lambda$, $\mu_j = \mu$时的长期平均指标。注意 $\rho_j = \rho = \lambda/\mu$。正如我们将在第 8节看到的， $\rho > 1$ 这一情形在应用中往往很受关注。

以下结果可由归纳法轻易得出，因此我们省略其证明。首先注意，系数 a_j由（67）定义，对于 $1 \le j \le n-1$，其取值为

$$a_j = \frac{1}{1+\rho} \frac{1+\cdots+\rho^j}{1+\cdots+\rho^{j-1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\rho} \dfrac{\rho^{j+1}-1}{\rho^j - 1} & \text{if } \rho \ne 1 \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{j+1}{j} & \text{if } \rho = 1. \end{cases}$$

关于边际工作负荷，我们有

$$
\begin{aligned}
w_j^{S_1} &= \lambda, \quad 1 \le j \le n-1 \\
w_0^{S_2} &= \frac{1}{1+\rho}\,\lambda \\
w_{j-1}^{S_{j+1}} &= \frac{1}{1+\rho}\,\frac{w_{j-2}^{S_j}}{a_j}, \quad 2 \le j \le n.
\end{aligned}
$$

这样的递推关系给出

$$
w_{j-1}^{S_{j+1}} = \frac{\lambda}{(1+\rho)^j \prod_{i=1}^{j} a_i} = \frac{\lambda}{1+\cdots+\rho^j}, \quad 1 \le j \le n.
$$

因此，指标递推关系（58）化简为

$$
\begin{aligned}
\nu_0 &= \frac{\Delta h_1}{\mu} \\
\nu_j &= \nu_{j-1} + \Delta h_{j+1}\,\frac{1+\cdots+\rho^j}{\mu}, \quad 1 \le j \le n-1,
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
\nu_j = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{j+1} \Delta h_i \left(1+\cdots+\rho^{i-1}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\sum_{i=1}^{j+1} \Delta h_i\,\frac{\rho^i-1}{\rho-1} & \text{if } \rho \ne 1 \\[2ex] \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\sum_{i=1}^{j+1} i\,\Delta h_i & \text{if } \rho = 1. \end{cases} \tag{59}
$$

注 18。 式（59）的一个推论是，在此情形下，在放宽成本率假设、仅要求成本率 h_i 单调不减的条件下，指标仍为单调的，因此模型是 PCL 可索引的；成本率无需像假设5（ii）那样是凸函数。

在线性成本情形 $h_j = h\,j$ 下，我们得到

$$
\nu_j = \frac{h}{\mu}\sum_{i=1}^{j+1}\left(1+\cdots+\rho^{i-1}\right) = \begin{cases} \dfrac{h}{\mu}\left[\dfrac{\rho^{j+2}-1}{(\rho-1)^2} - \dfrac{j+2}{\rho-1}\right] & \text{if } \rho \ne 1 \\[2ex] \dfrac{h}{\mu}\,\dfrac{(j+1)\,(j+2)}{2} & \text{if } \rho = 1. \end{cases} \tag{60}
$$

在二次成本情形 $h_j = h\,j^2$ 下，当 $\rho \ne 1$ 时，我们得到

$$
\nu_j = \frac{h}{\mu}\left[\left(\frac{2j+1}{(\rho-1)^2} - \frac{2}{(\rho-1)^3}\right)\rho^{j+2} - \frac{j\,(j+2)}{\rho-1} + \frac{3}{(\rho-1)^2} + \frac{2}{(\rho-1)^3}\right] \tag{61}
$$

并且，当 $\rho = 1$,

$$
\nu_j = \frac{h}{\mu}\,\frac{(j+1)\;(j+2)\;(4j+3)}{6}.
$$

8 排队系统中的路由和备货生产调度应用

本节中，我们将应用第7 节中得到的准入控制指数，来为两个困难的排队控制问题开发新的启发式指数策略。

8.1 用于准入控制和并行队列路由的指标策略

考虑一个系统，顾客以速率 λ 按泊松流到达。顾客到达后，可以被拒绝，也可以被路由至 m 《队列》之一接受服务。队列 k 设有有限缓冲区，最多可容纳 n_k 位顾客。其服务时间服从指数分布；当时刻 $t \geq 0$ 队列中有 $L_k(t)$ 位顾客时，服务速率为 $\mu_k(j_k)$，其中 $j_k \in N_k = \{0,\dots,n_k\}$。当所有缓冲区都已满时，到达的顾客将被拒绝。

队列 k 中的顾客以 $h_k(j_k)$的费率产生持有成本，而 $L_k(t) = j_k$，按 $\alpha > 0$的费率进行时间折现。此外，每拒绝一位顾客，就会产生拒绝费用 ν 。我们关注的问题是，寻找一种平稳的准入控制和路由策略，规定是否接纳每位到达的顾客；若接纳，则将其路由至哪个未满队列，从而使无限时域内产生的持有成本与拒绝费用之和的期望折现总额最小。

我们假设模型参数满足以下条件。

假设6. 对于 $1 \leq k \leq m$，以下结论成立：
(i) </style}凹且非递增的 (j_k)：$0 \leq \Delta\mu_k(j_k+1) \leq \Delta\mu_k(j_k) \quad 1 \leq j_k < n_k$.(ii) 凸且非递减的 $h_k(j_k)$：$0 \leq \Delta h_k(j_k) \leq \Delta h_k(j_k+1) \quad 1 \leq j_k < n_k$。

我们的目标是设计一种有充分依据且易于处理的 启发式 策略，为此我们将使用 第7节提出的 准入控制指数。这一思路基于以下观察：该模型是一个由 m 单队列 准入控制休假模型 组成的 RBP，正如前文所研究的那样，其中 每个时刻至多只能开放一个 m入口闸门。

设 $\nu_k(j_k)$ 为队列 k 的准入控制指标，表示顾客发现队列 k 处于状态 $j_k < n_k$ 时对应的公平拒绝费用。这种解释引出了以下准入控制与路由指标策略：

1. 将到达的顾客分配到一个未满队列中，其当前状态 $j_k < n_k$ 满足 指标最小 $\nu_k(j_k)$，且满足条件 $\nu_k(j_k) < \nu$；若有这样的队列可用。
2. 否则，拒绝该顾客。

当队列彼此对称（忽略缓冲区长度可能不同的情况），且取消准入控制能力（令 $\nu = \infty$）时，此类策略便简化为著名的最短队列路由策略。众所周知，在适当的假设下，后者是最优的。参见 [38, 18, 20]。

在恒定服务率 $\mu_k(j_k) = \mu_k$ 和线性持有成本 $h_k(j_k) = h_k\, j_k$下，在长期平均准则（$\alpha = 0$）下，恒等式（60）给出路由指数

$$\nu_k(j_k) = \frac{h_k}{\mu_k}\left[\frac{\rho_k^{j_k+2}-1}{(\rho_k-1)^2} - \frac{j_k+2}{\rho_k-1}\right], \tag{62}$$

其中 $\rho_k = \lambda/\mu_k$。重载流量 情形 $\rho_k > 1$ 值得在应用中重点关注，因为每个队列都没有能力处理全部业务流量；在这种情况下，当有 2 个队列时，该策略所确定的状态空间中的切换曲线 $(j_1,\ j_2)$ 渐近呈线性，其极限斜率为 $\ln \rho_1/\ln \rho_2$，当 $j_1,\ j_2 \to \infty$。上述指标策略可直接扩展到具有无限缓冲区的模型。

请注意，线性成本情形下的标准启发式方法会将顾客分配到指标最小的队列 $\widehat{\nu}_k(j_k) = h_k(j_k+1)/\mu_k$。

8.2 多类别备货型队列销售损失情形下的调度指标策略

接下来，我们考虑一个销售损失情形下的多类别备货型队列调度模型（参见[5, 第 4]章），该模型扩展了 Veatch 和 Wein 在 [35] 中研究的一个较简单模型（其中生产率和需求率为常数，且持有成本为线性）。

一个灵活的生产设施以备货生产模式生产 m 种产品，分别标记为 $k = 1$、.....、m。该生产设施一次最多只能生产一种产品。成品 k 存放在专用库存中，最多可容纳 n_k 件。当库存中有 $L_k(t) = j_k$ 件时，生产设施可按 $\mu_k(j_k)$ 的速率生产此类产品，相应的客户订单则以 $\lambda_k(j_k)$ 的速率到达。我们假设生产时间和到达间隔时间相互独立且服从指数分布。如果 $j_k \geq 1$，产品 k的订单会立即由库存满足，否则该订单将流失。在任意时刻，生产设施可以保持闲置，也可以遵循平稳策略投入生产。

产品 k 产生依赖状态的库存持有成本，每单位时间的成本率为 $c_k(j_k)$；每笔流失订单产生缺货成本，成本为 s_k；产品以依赖状态的价格 $r_k(j_k)$出售。因此，产品 k在状态 j_k 下每单位时间的净成本率为

$$h_k(j_k) = c_k(j_k) + s_k\,\lambda_k(0)\,1\{j_k = 0\} - r_k(j_k)\,\lambda_k(j_k)\,1\{j_k > 0\}.$$

我们进一步假设，每件完工件的生产补贴率为 ν。成本和收益按速率 $\alpha > 0$随时间折现。

我们假设模型参数满足以下条件（参见假设5）。令$d_k(j_k) = \lambda_k(j_k) - \mu_k(j_k)$ 对于 $j_k \geq 1$。为与先前的分析保持一致，记作 $\Delta d_k(1) = \lambda_k(1) - \Delta\mu_k(1)$。

假设7。对于 $1 \leq k \leq m$，以下条件成立：
(i) 凹且非递减的 $d_k(j_k)$：$0 \leq \Delta d_k(j_k+1) \leq \Delta d_k(j_k)$ $1 \leq j_k < n_k$，且 $\Delta d_k(1) > 0$.(iii) 凸且非递减的 $h_k(j_k)$：$0 \leq \Delta h_k(j_k) \leq \Delta h_k(j_k+1)$ $0 \leq j_k < n_k$.

目标是设计一种依赖于状态的生产调度策略，动态规定是否进行生产；若进行生产，则规定生产哪种产品，从而最小化无限时域内累计成本的期望总折现价值。

前面推导出的准入控制指数可直接用于为此类问题构造启发式指标策略。其思路是注意到，当前模型是一个由 m 个前文研究过的单队列准入控制项目组成的 RBP，其中参数 λ 与 μ 的作用互换。因此，打开队列k的入口闸门就相当于生产产品 k。于是，每个时刻至多打开一个入口闸门。

设 $\nu_k(j_k)$ 为队列 k 的准入控制指数，表示在临界生产补贴下，在状态 j_k 时，选择闲置还是生产产品 k 应当无差异。根据这一解释，可得到以下生产控制指数策略：

1. 若有可选产品，则生产库存水平 $j_k < n_k$ 未满且具有最小指标 $\nu_k(j_k)$ 的产品 k，并且该指标满足$\nu_k(j_k) < \nu$。
2. 否则，让生产设施闲置。

请注意，也可以将 $-\nu$ 等价地视为每个完工件的生产成本率。因此，指标 $-\nu_k(j_k)$ 表示产品 k 的临界生产成本。进一步请注意，对于相同的产品，只要 $\nu_k(j_k) < \nu$，该策略规定应生产当前具有最少库存 j_k 的产品 k 。

接下来，我们利用第 7.3 节的结果，为若干特殊情形给出指标的显式公式；这些情形对应于恒定的到达率和服务率 $\lambda_k(j_k) = \lambda_k$， $\mu_k(j_k) = \mu_k$，并采用 长期平均 准则 $\alpha = 0$。令 $\rho_k = \lambda_k/\mu_k \neq 1$。

先考虑 线性库存持有成本和恒定销售价格的情形 s,

$$h_k(j_k) = c_k\, j_k + s_k\, \lambda_k\, 1\{j_k = 0\} - r_k\, \lambda_k\, 1\{j_k > 0\}.$$

那么，第 7.3 节的结果给出生产指数

$$\nu_k(j_k) = \frac{c_k}{\mu_k}\left[\frac{\rho_k^{-j_k-1} - 1}{(1-\rho_k)^2} - \frac{j_k+1}{1-\rho_k}\right] - r_k - s_k. \tag{63}$$

注 19。

1. 指标（63）等于 Whittle 对 [35] 缩放因子 $1/\mu_k$。然而，尽管对于单产品问题，这两个指标给出相同的（最优）策略，但在多产品问题中，若 各自不同，该因子会导致它们给出 μ_k不同的策略。

2. 当每种产品的库存单位数达到或超过相应的临界基准库存水平时，指标策略会使生产设施闲置。因此，闲置策略 可由对冲点 （参见 [35]）刻画，该对冲点由这些基准库存水平构成。

3. (63)中的指标也为具有无限存储容量的模型$n_k = \infty$提供了一种策略。在这种情形下，若 $\rho_k > 1$ 对于某个产品 k成立，则 $\nu_k(j_k) < 0$。因此，当 $\nu = 0$时，生产设施绝不会闲置。

接下来考虑库存持有成本为二次函数的情形，此时

$$h_k(j_k) = c_k\, j_k^2 + s_k\, \lambda_k\, 1\{j_k = 0\} - r_k\, \lambda_k\, 1\{j_k > 0\}.$$

由（61）可得生产指数

$$\begin{aligned}\nu_k(j_k) = \frac{c_k}{\mu_k}\Bigg[&\left(\frac{2j_k+3}{(1-\rho_k)^2} - \frac{2}{(1-\rho_k)^3}\right)\rho_k^{-j_k-1} \\ &- \frac{(j_k+1)^2}{1-\rho_k} - \frac{1}{(1-\rho_k)^2} + \frac{2}{(1-\rho_k)^3}\Bigg] - r_k - s_k.\end{aligned} \tag{64}$$

9 结论

我们针对多种随机调度问题，开发了一种用于构建动态分配指数的多面体方法。我们认为，这些成果展现了多面体方法在随机优化领域尚未开发的潜力。我们着重指出两个正在开展的后续研究方向：如 [3] 所示，对所提出的启发式指数策略进行实证检验；以及如 [16] 所示，对其性能进行近似分析和渐近分析。

离散时间重新表述

我们采用标准的均匀化技术（参见 [22]），将所研究的模型重新表述为离散时间模型；该技术分两步进行：(i) 将原始过程 $L(t)$ 重新表述为~一个等价的均匀化过程 $L(t)$，其转移速率恒为 Λ；过程 $L(t)$ 通过在速率为 Λ 的泊松过程所对应的时刻对 $L(t)$ 进行采样得到；这些时刻既包括实际转移，也包括不会引起状态变化的虚拟转移；(ii) 将过程 $L(t)$ 重新表述为离散时间过程 $X(t)$，方法是将转移间隔视为离散时间段。

注意，$\Lambda > 0$ 是有效的均匀转移率当且仅当它满足

$$\lambda_i + \mu_i \leq \Lambda, \quad i \in N.$$

由此得到的离散时间过程 $X(t)$，对于 $t = 0,\ 1,\ \ldots\ldots$，是一个休假模型（参见第3节），其由以下要素刻画：

-State space: $N = \{0, 1, \ldots, n\}$; $N^{\{0,1\}} = \{0, \ldots, n-1\}$; $N^{\{1\}} = \{n\}$.

-动作： $a = 0$（被动；打开入口闸门）和 $a = 1$（主动；关闭入口闸门 ）.

-转移概率矩阵： 在动作 $a = 1$下,

$$\mathbf{P}^1 = \frac{1}{\Lambda}\begin{bmatrix} \Lambda & & & & & \\ \mu_1 & \Lambda-\mu_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_n & \Lambda-\mu_n \end{bmatrix};$$

并且，在动作 $a = 0$下,

$$\mathbf{P}^0 = \frac{1}{\Lambda}\begin{bmatrix} \Lambda-\lambda_0 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & \Lambda-\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_n & \Lambda-\mu_n \end{bmatrix}.$$

-单周期持有成本： $\mathbf{c}^0 = \mathbf{c}^1 = \dfrac{1}{\alpha+\Lambda}\mathbf{h}$。

-折扣因子： $\beta = \dfrac{\Lambda}{\alpha+\Lambda}$.

B 边际工作负载与成本分析

B.1 边际工作负载：计算与性质

接下来，我们将计算准入控制模型的边际工作负荷 $w_i^{S_k}$，并确立其所需的性质。

缩放后的 $w_i^{S_k}$值的计算

为避免依赖均匀化率 Λ，我们将计算的系数 w_i^S对应于经过40式缩放，缩放因子为 $\alpha+\Lambda$。由于

$$\mathbf{P}^1-\mathbf{P}^0=\frac{1}{\Lambda}\begin{bmatrix}\lambda_0 & -\lambda_0 & & & & \\ & \lambda_1 & -\lambda_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & -\lambda_{n-1} & \\ & & & & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{65}$$

我们有

$$w_i^S=\begin{cases}\lambda_i\left[1-\Delta b_{i+1}^S\right] & \text{if } 0\le i\le n-1\\ 0 & \text{if } i=n.\end{cases} \tag{66}$$

计算 w_i^S的值因此可归结为计算 Δb_i^S的值。为研究后者，我们首先通过其在（ $b_i^{S_k}$）中的定义方程来刻画系数39。我们将 λ_i^S视为在状态下的出生率 i ，并采用 S-主动策略，即

$$\lambda_i^S=\lambda_i\,1\{i\in N^{\{0,1\}}\setminus S\},\quad i\in N.$$

注意，对于 $1\le k\le n+1$，有 $\lambda_i^{S_k}=\lambda_i\,1\{0\le i<k-1\}$。

L引理 8. 对于 $1\le k\le n+1$，系数 $b_i^{S_k}$由以下方程刻画：　　s

$$\begin{aligned}(\alpha+\Lambda)\,b_0^{S_k}&=\lambda_0-\lambda_0^{S_k}+(\Lambda-\lambda_0^{S_k})\,b_0^{S_k}+\lambda_0^{S_k}\,b_1^{S_k}\\ (\alpha+\Lambda)\,b_i^{S_k}&=\lambda_i-\lambda_i^{S_k}+\mu_i\,b_{i-1}^{S_k}+(\Lambda-\lambda_i^{S_k}-\mu_i)\,b_i^{S_k}+\lambda_i^{S_k}\,b_{i+1}^{S_k},\ 1\le i\le n-1\\ (\alpha+\Lambda)\,b_n^{S_k}&=\lambda_n+\mu_n\,b_{n-1}^{S_k}+(\Lambda-\mu_n)\,b_n^{S_k}.\end{aligned}$$

下一个结果立即给出系数 $\Delta b_i^{S_k}$的刻画。

引理 9. 对于 $1\le k\le n+1$，系数 $\Delta b_i^{S_k}$由以下方程刻画

$$\begin{aligned}(\alpha+\lambda_0^{S_k}+\mu_1)\,\Delta b_1^{S_k}&=\Delta\lambda_1-\Delta\lambda_1^{S_k}+\lambda_1^{S_k}\,\Delta b_2^{S_k}\\ (\alpha+\lambda_{i-1}^{S_k}+\mu_i)\,\Delta b_i^{S_k}&=\Delta\lambda_i-\Delta\lambda_i^{S_k}+\mu_{i-1}\,\Delta b_{i-1}^{S_k}+\lambda_i^{S_k}\,\Delta b_{i+1}^{S_k},\ 2\le i\le n-1\\ (\alpha+\lambda_{n-1}^{S_k}+\mu_n)\,\Delta b_n^{S_k}&=\Delta\lambda_n+\lambda_{n-1}^{S_k}+\mu_{n-1}\,\Delta b_{n-1}^{S_k}.\end{aligned}$$

接下来，我们基于以下观察，构建一个递归过程来求解引理 9中的方程：(i) 方程给出

$$\Delta b_1^{S_1}=\frac{\Delta\lambda_1}{\alpha+\mu_1},$$

据此可计算其余的 $\Delta b_i^{S_1}$；(ii) 对于 $1\le k\le n$，一旦有了主元系数 $\Delta b_k^{S_{k+1}}$，就可以得到其余的 $\Delta b_i^{S_{k+1}}$；(iii) 第一个主元是

$$\Delta b_1^{S_2}=\frac{\lambda_1}{\alpha+\lambda_0+\mu_1}.$$

因此，若能将主元 $\Delta b_{k+1}^{S_{k+2}}$表示为 $\Delta b_k^{S_{k+1}}$关于 $1\le k\le n-1$的函数，就可以据此建立递推关系，计算出所有系数 $\Delta b_i^{S_k}$。

接下来，我们借助 [6]，试图建立连续主元之间的关系。对于 $1 \le k \le n-1$，考虑以下向量（其中 $\mathbf{x}^T$ 表示向量 $\mathbf{x}$的转置）

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{b}^k &= \left(\Delta b_1^{S_{k+1}}, \ldots, \Delta b_k^{S_{k+1}}\right)^T \\
\Delta \widehat{\mathbf{b}}^k &= \left(\Delta b_1^{S_{k+2}}, \ldots, \Delta b_k^{S_{k+2}}\right)^T \\
\mathbf{b}^k &= \frac{\lambda_k}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k}\, \mathbf{e}_k \\
\widehat{\mathbf{b}}^k &= \frac{\lambda_k\, \Delta b_{k+1}^{S_{k+2}}}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k}\, \mathbf{e}_k,
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{e}_k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的第 k 个单位坐标向量。进一步设 $\mathbf{B}^k$ 为 $k \times k$ 矩阵

$$\mathbf{B}^k = \begin{bmatrix}
0 & \frac{\lambda_1}{\alpha+\lambda_0+\mu_1} & & & \\
\frac{\mu_1}{\alpha+\lambda_1+\mu_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\alpha+\lambda_1+\mu_2} & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & \frac{\mu_{k-1}}{\alpha+\lambda_{k-1}+\mu_k} & 0
\end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{B}^1 = 0$。下一个结果将引理 9中的若干方程重新表述。

引理 10。对于 $1 \le k \le n-1$:

(a) $\Delta \mathbf{b}^k = \mathbf{b}^k + \mathbf{B}^k \Delta \mathbf{b}^k$. (

b) $\Delta \widehat{\ } \mathbf{b}^k = \widehat{\ } \mathbf{b}^k + \mathbf{B}^k \Delta \widehat{\ } \mathbf{b}^k$.

回顾一下，$d_i = \mu_i - \lambda_i$，并且我们要求 d_i 满足假设 5。接下来，引入系数

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 1 \\ \dfrac{\det\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^k\right)}{\det\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{k-1}\right)} & \text{if } 2 \le k \le n. \end{cases} \tag{67}$$

引理 11。 在假设 5*(i)* 下，以下结论成立:

(a) 对于 $1 \le k \le n$, $a_k > 0$。

(b) a_k*'s* 可以通过递归计算，方法是令 $a_1 = 1$ *and*

$$a_k = 1 - \frac{\lambda_{k-1}\, \mu_{k-1}}{(\alpha + \lambda_{k-2} + \mu_{k-1})\,(\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k)}\, \frac{1}{a_{k-1}}, \quad 2 \le k \le n.$$

(c) $\dfrac{\alpha + \mu_k}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k} < a_k < 1, \quad 2 \le k \le n.$

证明。 (a) 在假设5(i) $\mathbf{B}^k$ 的行和小于 1，因此其谱半径也小于 1。由此可得 $\det\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}^k\right)>0$，这就证明了结论。

（b）根据 a_k 的定义和恒等式可得递推关系

$$\det(\mathbf{I}-\mathbf{B}^k)=\det(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{k-1})-\frac{\lambda_{k-1}\,\mu_{k-1}}{(\alpha+\lambda_{k-2}+\mu_{k-1})\,(\alpha+\lambda_{k-1}+\mu_k)}\,\det(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{k-2})$$

（c）令 $2\le k\le n$。由（a）和（b）可知 $a_k<1$。下面证明 t

$$a_k>\frac{\alpha+\mu_k}{\alpha+\lambda_{k-1}+\mu_k},\quad 1\le k\le n,$$

通过对 k进行归纳法。 $k=1$ 的情形是显然的。假设该结果对 $k-1$成立，即

$$a_{k-1}>\frac{\alpha+\mu_{k-1}}{\alpha+\lambda_{k-2}+\mu_{k-1}}.$$

于是，部分（b）和归纳假设得到

$$\begin{aligned}a_k&=1-\frac{\lambda_{k-1}}{\alpha+\lambda_{k-1}+\mu_k}\,\frac{\dfrac{\mu_{k-1}}{\alpha+\lambda_{k-2}+\mu_{k-1}}}{a_{k-1}}\\&>1-\frac{\lambda_{k-1}}{\alpha+\lambda_{k-1}+\mu_k}=\frac{\alpha+\mu_k}{\alpha+\lambda_{k-1}+\mu_k},\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

□

现在可以开始联系连续主元。

引理 12。对于 $1\le k\le n-1$,

$$a_{k+1}\left[1-\Delta b_{k+1}^{S_{k+2}}\right]=\frac{\alpha+\Delta d_{k+1}+\mu_k\left[1-\Delta b_k^{S_{k+1}}\right]}{\alpha+\lambda_k+\mu_{k+1}};$$

或者，等价地,

$$w_k^{S_{k+2}}=\frac{\lambda_k}{a_{k+1}}\,\frac{\alpha+\Delta d_{k+1}+\dfrac{w_{k-1}^{S_{k+1}}}{\rho_{k-1}}}{\alpha+\lambda_k+\mu_{k+1}}.$$

证明。 固定 $1\le k\le n-1$。由引理 10 以及 $\mathbf{h}^k$、 $\widehat{\ }\mathbf{h}^k$的定义，可得

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{b}^k-\Delta\widehat{\mathbf{b}}^k&=(\mathbf{I}-\mathbf{B}^k)^{-1}\,(\mathbf{b}^k-\widehat{\mathbf{b}}^k)\\&=\frac{\lambda_k\left[1-\Delta b_{k+1}^{S_{k+2}}\right]}{\alpha+\lambda_{k-1}+\mu_k}\,(\mathbf{I}-\mathbf{B}^k)^{-1}\,\mathbf{e}^k.\end{aligned}\tag{68}$$

现在注意到，矩阵 $\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}^k\right)^{-1}$ 中位置为（k，k）的元素是

$$\frac{\det\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{k-1}\right)}{\det\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}^k\right)},$$

根据定义，该元素等于 $1/a_k$，由上面的最后一个恒等式可知

$$\Delta b_k^{S_{k+1}} - \Delta b_k^{S_{k+2}} = \frac{1}{a_k} \frac{\lambda_k \left(1 - \Delta b_{k+1}^{S_{k+2}}\right)}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k}. \tag{69}$$

将前面的恒等式与

$$\Delta b_{k+1}^{S_{k+2}} = \frac{\lambda_{k+1}}{\alpha + \lambda_k + \mu_{k+1}} + \frac{\mu_k}{\alpha + \lambda_k + \mu_{k+1}} \Delta b_k^{S_{k+2}},$$

（参见引理 9），并代入以 a_k 表示的 a_{k+1} （参见引理 11），即可得到所需的恒等式（经过直接的代数运算）。 □

□

边际工作负荷的性质

接下来，我们将证明边际工作负荷的一些性质，这些性质将在第 7 节中用到。

引理 13。 在假设 5 (*i*) 成立的条件下，对 $\alpha \geq 0$，有：

(a) $w_{k-1}^{S_{k+1}} > 0, \quad 1 \leq k \leq n.$

(b) $w_{i-1}^{S_{k+2}} > w_{i-1}^{S_{k+1}}, \quad 1 \leq i \leq k \leq n-1.$

(c) $w_{i-1}^{S_{k+1}} > 0 \Longrightarrow w_i^{S_{k+1}} > 0, \quad 1 \leq k \leq i \leq n-1.$

(d) $w_i^{S_{k+1}} > w_i^{S_{k+2}}, \quad 1 \leq k \leq i \leq n-1.$

证明。 （a）对 k 进行归纳。情形 $k = 1$ 由图 $w_0^{S_2}$6 中的表达式以及假设 5 (i) 得证。现在假设 $w_{k-2}^{S_k} > 0$。我们有

$$\frac{w_{k-1}^{S_{k+1}}}{\lambda_{k-1}} = \frac{1}{a_k} \frac{\alpha + \Delta d_k + \dfrac{w_{k-2}^{S_k}}{\rho_{k-2}}}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k} > 0,$$

其中，恒等式取自图6，不等式则由归纳假设以及假设5(i) 和 $a_k > 0$ （引理11）。

(b) 利用（66），我们可以将恒等式（68）改写为

$$\Delta \mathbf{b}^k - \Delta \widehat{\mathbf{b}}^k = \frac{w_k^{S_{k+2}}}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k} \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^k\right)^{-1} \mathbf{e}_k.$$

现在，由于$\mathbf{B}^k$ 的谱半径小于 1（参见引理11的证明），矩阵 $\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^k\right)^{-1}$的各分量均为正，因此 $\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^k\right)^{-1} \mathbf{e}_k > \mathbf{0}$。将此与部分（b）及上面的最后一个恒等式结合，可得 $\Delta \mathbf{b}^k - \Delta \widehat{\mathbf{b}}^k > \mathbf{0}$，即：

$$\Delta b_i^{S_{k+1}} > \Delta b_i^{S_{k+2}}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

根据（66），这些不等式给出了所需结果。

(c) 该结果由下式得出

$$\frac{w_i^{S_{k+1}}}{\lambda_i} = \frac{\alpha + \Delta d_{i+1} + \dfrac{w_{i-1}^{S_{k+1}}}{\rho_{i-1}}}{\alpha + \mu_{i+1}}, \quad k \le i \le n-1$$

（参见图 6），以及假设 5（i）。

（d）由（66）可知，该结果等价于

$$\Delta b_{i+1}^{S_{k+1}} < \Delta b_{i+1}^{S_{k+2}}, \quad 1 \le k \le i \le n-1. \tag{70}$$

现在，由引理 9 可知，对于 $1 \le k \le n-1$,

$$\begin{aligned}(\alpha + \mu_i)\,\Delta b_i^{S_{k+1}} &= \mu_{i-1}\,\Delta b_{i-1}^{S_{k+1}}, \quad k+1 \le i \le n-1\\ (\alpha + \mu_i)\,\Delta b_i^{S_{k+2}} &= \mu_{i-1}\,\Delta b_{i-1}^{S_{k+2}}, \quad k+2 \le i \le n-1,\end{aligned}$$

因此

$$\Delta b_i^{S_{k+2}} - \Delta b_i^{S_{k+1}} = \frac{\mu_{i-1}}{\alpha + \mu_i}\,(\Delta b_{i-1}^{S_{k+2}} - \Delta b_{i-1}^{S_{k+}}), \quad k+2 \le i < n.$$

鉴于上一个恒等式，要证明（70），只需证明

$$\Delta b_{k+1}^{S_{k+2}} - \Delta b_{k+1}^{S_{k+1}} > 0,$$

我们接下来证明这一点。考虑 $k = 0$的情形。根据引理9，可得

$$\begin{aligned}\Delta b_1^{S_2} - \Delta b_1^{S_1} &= \frac{\lambda_1}{\alpha + \lambda_0 + \mu_1} - \frac{\Delta\lambda_1}{\alpha + \mu_1}\\ &= \frac{\lambda_0}{\alpha + \mu_1}\,\frac{\alpha + \Delta d_1}{\alpha + \lambda_0 + \mu_1} > 0,\end{aligned}$$

其中，不等式由假设5(i) 得出。现在考虑 $k \ge 1$的情形。再次利用引理9，可得

$$\begin{aligned}(\alpha + \lambda_k + \mu_{k+1})\,\Delta b_{k+1}^{S_{k+2}} &= \lambda_{k+1} + \mu_k\,\Delta b_k^{S_{k+2}}\\ (\alpha + \mu_{k+1})\,\Delta b_{k+1}^{S_{k+1}} &= \Delta\lambda_{k+1} + \mu_k\,\Delta b_k^{S_{k+1}}.\end{aligned}$$

利用 i 接着，利用最后两个恒等式（69）和（66）、部分（a）以及引理11(c)，可得

$$\begin{aligned}(\alpha + \mu_{k+1})\,(\Delta b_{k+1}^{S_{k+2}} - \Delta b_{k+1}^{S_{k+1}}) &= \lambda_k\left[1 - \Delta b_{k+1}^{S_{k+2}}\right] + \mu_k\,(\Delta b_k^{S_{k+2}} - \Delta b_k^{S_{k+2}})\\ &= \left[1 - \frac{\mu_k/a_k}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k}\right] w_k^{S_{k+2}} > 0,\end{aligned}$$

按要求完成。证明至此结束。 □

□

B.2 边际成本计算

本节旨在计算边际成本 $c_i^{S_k}$，方法与前文计算边际工作负荷类似。同样，为消除对均匀化率 Λ的依赖，以下各项 c_i^S对应于式（46）中定义的各项，经过缩放，缩放因子为 $\alpha+\Lambda$。

我们首先建立系数 v_i^S 与 c_i^S 之间的关系。由（46）和（65），可得

$$c_i^S = \lambda_i \, \Delta v_{i+1}^S, \quad 0 \le i \le n-1.$$

因此，我们必须计算 $\Delta v_i^{S_k}$。首先通过（ $v_i^{S_k}$）计算 45。

引理 14。 对于 $1 \le k \le n+1$，系数 $v_i^{S_k}$由以下方程刻画

$$\begin{aligned}
(\alpha+\Lambda)\, v_0^{S_k} &= h_0 + (\Lambda - \lambda_0^{S_k})\, v_0^{S_k} + \lambda_0^{S_k}\, v_1^{S_k} \\
(\alpha+\Lambda)\, v_i^{S_k} &= h_i + \mu_i\, v_{i-1}^{S_k} + (\Lambda - \lambda_i^{S_k} - \mu_i)\, v_i^{S_k} + \lambda_i^{S_k}\, v_{i+1}^{S_k}, \quad 1 \le i \le n-1 \\
(\alpha+\Lambda)\, v_n^{S_k} &= h_n + \mu_n\, v_{n-1}^{S_k} + (\Lambda - \mu_n)\, v_n^{S_k}.
\end{aligned}$$

因此，系数 $\Delta v_i^{S_k}$可由下式刻画。

引理 15。 对于 $1 \le k \le n+1$，系数 $\Delta v_i^{S_k}$由以下方程刻画

$$\begin{aligned}
(\alpha + \lambda_0^{S_k} + \mu_1)\, \Delta v_1^{S_k} &= \Delta h_1 + \lambda_1^{S_k}\, \Delta v_2^{S_k} \\
(\alpha + \lambda_{i-1}^{S_k} + \mu_i)\, \Delta v_i^{S_k} &= \Delta h_i + \mu_{i-1}\, \Delta v_{i-1}^{S_k} + \lambda_i^{S_k}\, \Delta v_{i+1}^{S_k}, \quad 2 \le i \le n-1 \\
(\alpha + \lambda_{n-1}^{S_k} + \mu_n)\, \Delta v_n^{S_k} &= \Delta h_n + \mu_{n-1}\, \Delta v_{n-1}^{S_k}.
\end{aligned}$$

接下来，我们将按照附录*B.1* 中计算 $\Delta v_k^{S_{k+1}}$ 的方法，推导计算 主元 项的递推关系 $\Delta b_k^{S_{k+1}}$。注意，引理 15给出

$$\Delta v_1^{S_1} = \frac{\Delta h_1}{\alpha + \mu_1},$$

因此

$$c_0^{S_1} = \frac{\lambda_0}{\alpha + \mu_1}\, \Delta h_1.$$

它还给出了第一个这样的主元：

$$\Delta v_1^{S_2} = \frac{\Delta h_1}{\alpha + \lambda_0 + \mu_1},$$

因此

$$c_0^{S_2} = \frac{\lambda_0}{\alpha + \lambda_0 + \mu_1}\, \Delta h_1.$$

接下来，我们建立连续主元之间的关系。将这些向量与 $1 \le k \le n-1$ 相关联：

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{v}^k &= \left(\Delta v_1^{S_{k+1}}, \ldots, \Delta v_k^{S_{k+1}}\right)^T \\
\Delta \widehat{\mathbf{v}}^k &= \left(\Delta v_1^{S_{k+2}}, \ldots, \Delta v_k^{S_{k+2}}\right)^T \\
\mathbf{h}^k &= \left(\frac{\Delta h_1}{\alpha + \lambda_0 + \mu_1}, \ldots, \frac{\Delta h_k}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k}\right) \\
\widehat{\mathbf{h}}^k &= \mathbf{h}^k + \frac{\lambda_k\, \Delta v_{k+1}^{S_{k+2}}}{\alpha + \lambda_{k-1} + \mu_k}\, \mathbf{e}_k.
\end{aligned}$$

下一个结果是引理 10 的对应结果。

引理 16。对于 $1 \le k \le n-1$,

(a) $\Delta \mathbf{v}^k = \mathbf{h}^k + \mathbf{B}^k \, \Delta \mathbf{v}^k$;

(b) $\Delta \widehat{\mathbf{v}}^k = \widehat{\mathbf{h}}^k + \mathbf{B}^k \, \Delta \widehat{\mathbf{v}}^k$.

主元之间的关系 $\Delta v_k^{S_{k+1}}$和 $\Delta v_{k+1}^{S_{k+2}}$，以及其边际成本重述如下。证明与引理 12 的证明类似，因此省略。

引理 17。对于 $1 \le k \le n-1$,

$$a_{k+1} \, \Delta v_{k+1}^{S_{k+2}} = \frac{\Delta h_{k+1}}{\alpha + \lambda_k + \mu_{k+1}} + \frac{\mu_k}{\alpha + \lambda_k + \mu_{k+1}} \, \Delta v_k^{S_{k+1}};$$

或者，等价地,

$$c_k^{S_{k+2}} = \frac{\lambda_k}{a_{k+1}} \, \frac{\Delta h_{k+1} + \dfrac{c_{k-1}^{S_{k+1}}}{\rho_{k-1}}}{\alpha + \lambda_k + \mu_{k+1}}.$$

C Whittle 指数相对于阈值策略可能存在的不一致性

读者可能会想知道，新指数（定义 3 中引入）所提供的参数 θ_j^1 带来的额外灵活性，是否显著扩大了原始 Whittle 指数的适用范围。接下来，我们将通过展示在准入控制模型中，Whittle 指数无法按照与阈值策略一致的方式对状态进行排序（在假设 5给定的参数范围内），来论证确实如此。

回想一下，Whittle 指数源于相应的 ν收费问题：当入口闸门关闭时，以速率 ν 收取成本。也就是说，对应的活动度量 可通过令 （对于 $\{0, \ldots, n\}$）得到

如果指标ν_j 在 $j \in \{0, \ldots, n-1\}$上随阈值策略保持一致，则称准入控制模型的指标策略与阈值策略一致。

考虑缓冲区大小为 $n = 2$、服务率为 $\mu_j = \mu$，且成本率为$h_j = h \, j$的情况。假设到达率 λ_j 在 j上严格递减，即

$$\Delta\lambda_2 < 0, \Delta\lambda_1 < 0. \tag{71}$$

由此可得，假设 5成立。

特别地，取 $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, $\mu = \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{1}{33}$, $h = 1$。选取均匀化率 $\Lambda = 3$，使得 $\beta = \Lambda/(\alpha + \Lambda) = \frac{99}{100}$。

相应的休假模型在 Whittle 意义下是可索引的，并且具有 Whittle 指标

$$\nu_2 = 0 < \nu_1 = \frac{3300}{6767} < \nu_0 = \frac{11\,022}{19\,111}.$$

因此，它们给出了一种与阈值策略不一致的状态排序。

然而，这种不一致仅会在状态依赖到达率下出现；在恒定到达率 λ 下，扩展指标等于 Whittle 的指标乘以因子 $1/\lambda$。

致谢

作者曾在随机网络会议（威斯康星州麦迪逊，2000年6月）、第27届随机过程及其应用会议（英国剑桥，2001年7月）、第11届INFORMS应用概率会议（纽约，2001年7月）、Dagstuhl计算机与制造系统调度研讨会（德国瓦德恩，2002年6月）以及Eurandom研讨会（荷兰埃因霍温，2001年2月）上介绍了本文的初步版本。作者感谢K. Glazebrook、G. Weiss和P. Whittle教授进行的精彩讨论，也感谢两位审稿人提出的建议，这些建议有助于改进本文的表述。

参考文献

[1] Altman, E. 和 Stidham, S., Jr.（1995）：具有两个动作的马尔可夫决策过程的单调策略最优性及其在延迟信息下队列控制中的应用。《排队系统》**21**，267–291。[2] Bertsimas, D. 和 Niño-Mora, J.（1996）：守恒定律、扩展拟阵与多臂老虎机问题：一种用于可索引系统的多面体方法。《数学运筹学》**21**，257–306。[3] Bertsimas, D. 和 Niño-Mora, J.（2000）：Restless 多臂老虎机、线性规划松弛与原始-对偶指标启发式。运筹学**48**，80–90。[4] Bhattacharya, P. P.、Georgiadis, L. 和 Tsoucas, P.（1992）：扩展拟阵：性质与优化。载于 E. Balas、G. Cornuejols 和 W. R. Pulleyblank 编，《第二届整数规划与组合优化会议论文集》（IPCO II），宾夕法尼亚州匹兹堡，第298–315页。[5] Buzacott, J. A. 和 Shanthikumar, J. G.（1993）：《制造系统的随机模型》。Prentice-Hall，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯。[6] Chen, H. 和 Yao, D. D.（1990）：具有状态相关容量上限的排队系统的最优强度控制。IEEE 自动控制汇刊**35**，459–464。[7] Coffman, E. G., Jr. 和 Mitrani, I.（1980）：单服务器队列可实现的等待时间性能特征。运筹学**28**，810–821。[8] Cox, D. R. 和 Smith, W. L.（1961）：《队列》。Methuen，伦敦。[9] Dacre, M.、Glazebrook, K.D. 和 Niño-Mora, J.（1999）：随机系统最优控制的可达区域方法，附讨论。英国皇家统计学会会刊，B辑，统计方法学**61**，747–791。[10] D'Epénoux, F.（1960）：关于随机条件下生产与储存问题。RAIRO 运筹学研究**14** 3-16；（英文译文）概率生产与库存问题。《管理科学》**10**，98–108，1963年。[11] Edmonds, J.（1970）：次模函数、拟阵及若干多面体。载于 R. Guy、H. Hanani、N. Sauer 和 J. Schönheim 编，《组合结构及其应用》（1969年卡尔加里国际会议论文集，艾伯塔省卡尔加里），第69–87页。Gordon and Breach，纽约。[12] Edmonds

, J. (1971)：拟阵与 greedy alg算法。数学程序。g程序。[1]，127–136。

[13] Federgruen, A. 和 Groenevelt, H.（1988年）：一般排队系统中可实现性能的刻画与优化。《运筹学》**36**，733–741。[14] Gittins, J. C. 和 Jones, D. M.（1974年）：序贯试验设计的动态分配指数。载于：J. Gani 编，《统计学进展》，第 241–266 页。North-Holland，阿姆斯特丹。[15] Gittins, J. C.（1979年）：多臂老虎机过程与动态分配指标。附讨论。《英国皇家统计学会会刊》B 辑《统计方法学》**41**，148–177。[16] Glazebrook, K. D. 和 Niño-Mora, J.（2001年）：多类别 $M/M/m$ 队列的并行调度：可实现性能的近似优化与重交通优化。《运筹学》**49**，609–623。[17] Heyman, D. P. 和 Sobel, M. J.（1984年）：《运筹学中的随机模型》，第二卷：随机优化。麦格劳-希尔，纽约。[18] Hordijk, A. 和 Koole, G.（1990年）：广义最短队列策略的最优性。《概率、工程与信息科学》**4**，477–487。[19] Hordijk, A. 和 Spieksma, F.（1989年）：排队系统的约束准入控制。《应用概率进展》**21**，409–431。[20] Johri, P. K.（1990年）：状态依赖服务时间下最短队列服务规则的最优性。《欧洲运筹学杂志》**41**，157–161。[21] Klimov, G. P.（1974年）：分时服务系统 I。《概率论与应用》**19**，532–551。[22] Lippman, S.（1975年）：将一种新方法应用于指数排队系统的优化。《运筹学》**23**，687–710。[23] Manne, A.（1960年）：线性规划与序贯决策。《管理科学》**6**，259–267。[24] Naor, P.（1969年）：通过征收通行费调节队列长度。《计量经济学》**37**，15–24。[25] Nemhauser, G. L. 和 Wolsey, L. A.（1988年）：《整数与组合优化》。Wiley，纽约。[26] Niño-Mora, J.（2001年）：restless 多臂老虎机、部分守恒定律与可索引性。《应用概率进展》**33**，76–98。[27] Niño-Mora, J.（2001年）：随机调度。载于：C. A. Floudas 和 P. M. Pardalos 编，《优化百科全书》，第五卷，第 367–372 页。Kluwer，多德雷赫特。[28] Papadimitriou, C. H. 和 Tsitsiklis, J. N.（1999年）：最优排队网络控制的复杂性。《数学运筹学研究》**24**，293–305。[29] Puterman, M. L.（1994年）：《马尔可夫决策过程：离散随机动态规划》。Wiley，纽约。[30] Shanthikumar, J. G. 和 Yao, D. D.（1992年）：多类别排队系统：拟阵多面体结构与最优调度控制。《运筹学》**40**，增刊第 2 期，293–299。[31] Stidham, S., Jr.（1985年）：排队系统准入的最优控制。IEEE 自动控制汇刊**AC-30**，705–713。[32] Topkis, D. T.（1978年）：在格上最小化次模函数。《运筹学》**26**，305–321。

[33] Tsoucas, P.（1991年）：Klimov 模型中可实现性能的区域。研究报告 RC16543，IBM T. J. Watson 研究中心，纽约州约克镇高地。[34] Varaiya, P. P., Walrand, J. C. 和 Buyukkoc, C.（1985年）：多臂老虎机问题的扩展：折扣情形。IEEE 自动控制汇刊 **AC-30**，426–439。[35] Veatch, M. H. 和 Wein, L. M.（1996年）：多类别备货型队列的调度：指数策略与对冲点。运筹学 **44**，634–647。[36] Weber, R. R. 和 Weiss, G.（1990年）：关于 restless 多臂老虎机的一种指标策略。应用概率学杂志**27**，637–648。[37] Whittle, P.（1988年）：restless 多臂老虎机：变化世界中的活动分配。载于：J. Gani 编，《应用概率学庆典》，应用概率学杂志特刊**25A**，第287–298页。[38] Winston, W.（1977年）：最短队列服务规则的最优性。应用概率学杂志**14**，181–189。