arXiv:2304.01960v1 [math.AT] 4 Apr 2023

动机与实余边理论中的同调切片谱序列

CHRISTIAN CARRICK、MICHAEL A. HILL 和 DOUGLAS C. RAVENEL

ABSTRACT. 对于一个动机谱 $E \in \mathcal{SH}(k)$，记其全局截面谱为 $\Gamma(E)$，其中 E 被视为 Sm_k 上的谱层。Voevodsky 的切片滤过确定了一个收敛到 $\Gamma(E)$ 同伦群的谱序列。本文介绍一个谱序列，它改为收敛到 $\Gamma(E)$ 的模 2 同调，并详细研究 $E = BPGL\langle m\rangle$ for$k = \mathbb{R}$ 的情形。我们证明，该谱序列包含作为永久循环的 $\mathcal{A}_*$-余模代数 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2$，并确定了一族在 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2$ 与 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2$ 之间插值的微分。利用这一结果，我们完整计算了 $m \leq 3$ 的谱序列。

在高度 2 的情形下，$BPGL\langle 2\rangle$ 的 Betti 实现是 C_2-谱$BP_{\mathbb{R}}\langle 2\rangle$，Hill 和 Meier 已证明它的一种形式是 $\mathrm{tmf}_1(3)$ 的等变模型。因此，我们的谱序列给出了余模代数 $H_*\mathrm{tmf}_0(3)$ 的计算。由此，我们推导出一个新的（2-局部）Wood 型分裂

$$\mathrm{tmf} \wedge X \simeq \mathrm{tmf}_0(3)$$

这是 Davis 和 Mahowald 对 X 某个 10 胞腔复形所作预测的 tmf-模分裂。

CONTENTS

1. 引言 2 1.1. 动机 2 1.2. 主要结果 4 1.3. 致谢 8 1.4. 记号与约定 8 2. 广义同调的切片谱序列 9 2.1. 一般切片塔 10 2.2. 同调切片谱序列（HSSS）12 2.3. Betti 实现与算术方块 14 2.4. 边缘同态 17 3. 通过算术方块计算 $\Gamma(BPGL\langle m\rangle)$ 的同调 17 3.1. $i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle$ 17 的算术方块 3.2. $i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL$ 21 的 Mayer–Vietoris 序列3.3. $BPGL\langle m\rangle$ 25 的边同态的像4. $BPGL\langle m\rangle$ 27 的 HSSS 4.1. 切片 E_2 页 27 4.2. Steenrod 代数子代数上的微分 29 5. $\Gamma(BPGL\langle m\rangle)$ 对于 $m \leq 3$ 34 的同调

本材料基于美国国家科学基金会通过编号为 2105019 的资助项目所支持的工作。

5.1. Γ(BPGL⟨1⟩) 的同调 35 5.2. Γ(BPGL⟨2⟩) 的同调 35 5.3. Γ(BPGL⟨3⟩) 的同调 42 6. 等变同伦的 HSSS 52 参考文献 57

1. Introduction

经典的截断布朗–彼得森谱 $BP\langle m\rangle$ 具有一个由二阶循环群作用的结构，该作用通过复上同调上的复共轭作用 MU给出。这些不动点在较低高度下有熟知的几何模型 m，并给出连通实 K-理论 ko 的高高度类比。我们通过将计算提升到更简单的 $\mathbb{R}$-动机稳定同伦范畴中的计算，给出一个收敛到这些不动点谱的同调的谱序列。

1.1. 动机。 稳定同伦的色性方法提供了一种通过逐步过程计算球面的稳定同伦群的方法。这个过程源自形式群模叠上的高度滤过，在稳定同伦中由 Bousfield 局部化映射体现。Hopkins–Ravenel 的色性收敛定理 [34] 指出， p-局部球谱可以恢复为其色性塔的极限

$$S^0_{(p)} \simeq \varprojlim \left(\cdots \to L_n S^0 \to L_{n-1} S^0 \to \cdots \to L_0 S^0 \right)$$

其中， L_n 表示对高度为 n 的 Morava E 理论 $E(k,\Gamma)$ 进行 Bousfield 局部化；其中 Γ 是特征为 p 的完美域上的高度为 n 的形式群 k 。谱 $L_n S^0$ 经由色性断裂方块，由有限多个步骤从 $K(i)$-局部球面 $L_{K(i)}S^0$ （$i \le n$）构造而成。反过来，谱 $L_{K(n)}S^0$ 可描述为一个同伦不动点谱

$$L_{K(n)}S^0 \simeq E(k,\Gamma)^{h\mathbb{G}_n}$$

根据 Devinatz–Hopkins 的一个定理 [11], ，其中 $\mathbb{G}_n = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 是 Morava 稳定子群。原则上，这将稳定同伦论中的许多问题归结为理解 $\mathbb{G}_n$-等变谱 $E(k,\ \Gamma)$。

然而，实际上很难接触到这些内容，即使在较低的高度也是如此。Ravenel [35]和 Hopkins–Miller [36] 观察到， $L_{K(n)}S^0$ 可以很好地由 $\mathbb{G}_n$ 的有限子群处的 $E(k,\ \Gamma)$ 不动点近似，而且这些理论更容易计算。这些理论

$$EO_n(G) := E(k,\Gamma)^{hG}$$

被称为 Hopkins–Miller 高阶实 K 理论。

$EO_n(G)$ 在以易于理解的方式承载丰富信息方面已被证明非常有效。例如，对这些理论的研究促成了 Kervaire 不变量问题的解决：在 $p \ge 5$ ，Ravenel [35] 给出了解答；在 $p = 2$ ，Hill–Hopkins–Ravenel [19]给出了解答。在素数 $p = 3$ 处，Goerss–Henn–Mahowald–Rezk[13]利用它们构造了 $K(2)$ 局部球面的一个显式有限分解，为 Shimomura–Wang [37]对 $\pi_* L_{K(2)} S^0$ 的计算提供了概念框架。我们也请读者参阅 [4] 的引言，其中对这些理论及其发展历程作了精彩讨论。

连通模型。在实际应用中，研究 $EO_n(G)$ 会受到这些理论规模的限制。 $EO_n(G)$ 是非连通的，其模 p 同调消失，因此无法直接从 Adams 谱序列的角度理解这些理论。此外，$EO_n(G)$ 的同伦群并非按次数有限生成，因此取连通覆盖并不能带来实质性的改进。因此，研究 $EO_n(G)$ 的一个关键特征，便是寻找具有良好有限性性质的连通模型 $eo_n(G)$。

在高度为 $h = 2^{n-1}m$ 且满足 $p = 2$ 时，群 $\mathbb{G}_h$ 包含一个与 $G = C_{2^n}$ 同构的子群；Beaudry–Hill–Shi–Zeng 在此情形下通过实余边理论 [5] 定义并研究了 $EO_h(G)$ 的良好连通模型候选。这些理论被称为 $BP^{((G))}\langle m\rangle$，由于它们是不动点来自几何作用的 G-谱，因此尤其易于处理；相比之下， $E(k,\ \Gamma)$ 上的作用则通过障碍理论定义。这一点的重要体现是， $BP^{((G))}\langle m\rangle$ 具有良好理解的切片滤过，具体见 Hill–Hopkins–Ravenel [19]。

在即将开展的工作中， [9], 第一和第二作者使用切片滤过建立 $BP^{((G))}\langle m\rangle$ 的所需有限性性质，证明其不动点是 Mahowald—Rezk[29] 意义下的 $m|G|/2$ 型 fp 谱。然而，对于显式计算，我们希望了解余模 $H_*BP^{((G))}\langle m\rangle^G$，因此本文的主要目标是通过探索 $G = C_2$ 的情形，着手开展此类同调计算。

这一 $G = C_2$ 情形。 阶为 2 的循环群常被用作一般等变同伦计算的测试对象，尤其用于研究 $EO_n(G)$'s 和 $BP^{((G))}\langle m\rangle$'s。在这一情形下，人们已经了解很多；例如，Hahn–Shi 在 [16] 中对计算 $\pi_*EO_n(C_2)$ 的同伦不动点谱序列进行了所有高度下的完整计算。Li–Shi–Wang–Xu 证明，同伦群中一大类球面元素可由 $EO_n(C_2)$'s 检测到[27]。Kitchloo–Wilson 对 $EO_n(C_2)$'s 进行了深入研究；他们利用这些理论证明了新的实射影空间不可浸入结果 [25] [24]，这表明这些理论的用途远不止作为测试对象。

对于 $G = C_2$，连通模型 $BP^{((G))}\langle m\rangle$ 最初由 Hu–Kriz 定义[22]，也称为 $BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle$'s，因为它们为经典的截断 Brown–Peterson 谱 $BP\langle m\rangle$ 提供模型，并带有通过复共轭实现的 C_2-作用。在较低高度下 m， $BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle$'s 及其不动点具有熟悉的几何模型:

m	$BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle$	$BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle^{C_2}$
-1	$H\underline{\mathbb{F}_2}$	$H\mathbb{F}_2$
0	$H\underline{\mathbb{Z}}_{(2)}$	$H\mathbb{Z}_{(2)}$
1	$\mathrm{k}_{\mathbb{R}}$	ko
2	$\mathrm{tmf}_1(3)$	$\mathrm{tmf}_0(3)$

这里，$\mathrm{k}_{\mathbb{R}}$ 表示 Atiyah [1], 意义下的连通实 K-理论，而 $\mathrm{tmf}_1(3)$ 和 $\mathrm{tmf}_0(3)$ 是具有层结构的拓扑模形式谱（参见 [20]和 [21]）。

$\mathbb{R}$-动机的同伦。对于实代数簇 X，其复点集合 $X(\mathbb{C})$ 带有复解析拓扑，相对于该拓扑，

C_2 =Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$) 的作用是连续的。这推广为一个对称幺半左伴随

$$\beta : \mathcal{SH}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}p^{C_2}$$

从 $\mathbb{R}$ 动机稳定同伦范畴到真正的 C_2 谱的函子，称为 Betti 实现。实余边理论和 $BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle$ 沿着 β 提升为 $\mathbb{R}$ 动机类比物，称为动机配边和 $BPGL\langle m\rangle$。

因此，我们沿着 β 将 $H_*BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle^{C_2}$ 的计算提升为 $\mathbb{R}$ 动机稳定同伦范畴中一个更简单、更基础的计算，我们也正是在这一背景下进行计算。在动机背景中，不动点（–）^{C_2} 的作用由整体截面函子 $\Gamma : \mathcal{SH}(k) \to \mathcal{S}p$ 承担；它是唯一的保余极限对称幺半函子的右伴随

$$i_* : \mathcal{S}p \to \mathcal{SH}(k)$$

对于 $E \in \mathcal{SH}(k)$， $\Gamma(E)$ 可计算为映射谱 $F(\mathrm{Spec}(k)_+, E)$，它位于 $\mathcal{SH}(k)$ 中，因此是 E 的全局截面；将其视为 Sm_k 上的谱层，其中 Sm_k 是 $\mathrm{Spec}(k)$ 上光滑概形的范畴。

采用动机的观点进行研究，其优势在于我们可以在计算中舍弃所谓的负锥。正如我们在第 6 节所示，负锥在一点的 C_2-等变同调中的存在会导致严重的复杂性。在第 2 节中，我们给出一种方法，将此处研究的 C_2-等变计算与相应的 $\mathbb{R}$-动机计算进行比较，并借此证明它们在非正权重下必须一致。实际上，这意味着我们可以舍弃负锥，同时仍能在次数 $a + b\sigma$ for$b \leq 0$ 中得到正确结果，尤其是在整数次数下。

1.2. **主要结果**。

第 *2* 节。 我们首先在第 2 节中定义同调切片谱序列（HSSS）。该谱序列由将 $E \in \mathcal{SH}(k)$ 的切片塔与动机谱 $i_*H\mathbb{F}_2$ 作 smash 积得到，从而产生一个 $\mathcal{A}_*$-余模的谱序列。我们证明，当 E 是切片连通时，该谱序列具有强消失线，并收敛到余模 $H_*\Gamma(E)$（命题 2.6）。

对于我们关于 $BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle$ 的应用，我们比较整体截面函子 Γ和真正固定点函子（–）^{C_2}，从而得到一个自然变换

$$\Gamma(E) \to \beta(E)^{C_2}$$

我们证明，在许多情况下它是一个等价。特别是，

命题 1.1 (推论 2.20)。 对于所有 m，存在一个谱的等价

$$\Gamma(BPGL\langle m\rangle) \to BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle^{C_2}$$

第*3*节。 在 [6]，中，Behrens–Shah 将 Tate 方形沿 β 上的 C_2-等变同伦提升为一个算术方块

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E[\rho^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}] & \longrightarrow & E^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}][\rho^{-1}] \end{array}$$

对于 $E \in \mathcal{SH}(\mathbb{R})$。与 Tate 方形不同，这通常不是一个拉回，但我们证明，在许多情况下，应用 Γ(–) 后它会成为一个拉回。对于

$E = i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL$，我们完全确定了算术方块对双分次同伦群的影响；权重零的结果如下。

命题 1.2 (命题 3.13)。 在同伦群上， $i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL$ 的算术方块由下式给出

$$\begin{array}{ccc} H_*\Gamma(BPGL) & \longrightarrow & \mathcal{A}_* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathbb{F}_2[z,\chi_i|i\geq 1]^{\widehat{}}_z & \hookrightarrow & \mathbb{F}_2[z,\chi_i|i\geq 1]^{\widehat{}}_z[z^{-1}] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \xi_i \\ \downarrow \\ \chi_i z^{2^i-1} + \chi_{i-1}z^{-1} \end{array}$$

其中 $|z| = -1$ 和 $|\chi_i| = 2(2^i - 1)$。

这通过相应的 Mayer–Vietoris 序列（定理 3.15）给出了 $\mathcal{A}_*$-余模 $H_*\Gamma(BPGL)$ 的一个相当显式的描述。这纠正了 Hu–Kriz 的一个错误；他们在 [23] 中给出了类似的公式（见注 3.9）。此算术方块的 ρ-局部部分因以下关于从动机 Brown–Peterson 谱到模 2 动机 Eilenberg–MacLane 谱的约化映射 $BPGL \to M\mathbb{F}_2$ 的意外事实而变得复杂。

定理 1.3 (定理 3.10)。复合映射

$$H\mathbb{F}_2 \simeq \Gamma(BPGL[\rho^{-1}]) \to \Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]) \simeq \prod_{i\geq 0} \Sigma^i H\mathbb{F}_2$$

具有分量 Sq^i： $H\mathbb{F}_2 \to \Sigma^i H\mathbb{F}_2$。

等变地，将 $\Phi^{C_2}(H\mathbb{F}_2)$ 识别为 $H\mathbb{F}_2^{tC_2}$ 的连通覆盖后，复合映射

$$H\mathbb{F}_2 \simeq \Phi^{C_2}BP_{\mathbb{R}} \to \Phi^{C_2}H\underline{\mathbb{F}_2} \simeq \prod_{i\geq 0} \Sigma^i H\mathbb{F}_2$$

具有分量 Sq^i： $H\mathbb{F}_2 \to \Sigma^i H\mathbb{F}_2$。

我们将 Mahowald 定理应用于 $H\mathbb{F}_2$，从而证明定理 1.3。此处出现的映射的描述来自与 Nikolaus–Scholze 的 Tate 值 Frobenius 的比较 [31]。我们认为这一事实本身也值得关注。

第 *4* 节。 $BPGL\langle m\rangle$ 的 HSSS 具有直接的 E_2 页。

命题 1.4 (推论 4.5)。 $BPGL\langle m\rangle$ 的 *HSSS* 的 E_2 页同构为一个 $\mathcal{A}_*$ 余模代数，具体为

$$(\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2)[\rho, x_1, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m]$$

其中

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2 \cong H_*H\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_2[\zeta_1^2, \zeta_2, \ldots]$$

三重次数如下所示。

$$\begin{aligned} |\zeta_i| &= (2^i - 1, 0, 1 - 2^i) \\ |\rho| &= (-1, -1, 1) \\ |x_1| &= (0, -1, 0) \\ |\bar{v}_i| &= (2(2^i - 1), 2^i - 1, 0) \end{aligned}$$

其中我们使用 *Adams*三重分次 $(t-s, w, s)$，分别表示（茎、权、滤过）。 ρ 和 $\bar{v}_i$ 是余模本原元，并

$$\psi(x_1) = 1 \otimes x_1 + \xi_1 \otimes \rho$$

我们对第3节算术方块结果的主要应用，是确定 $BPGL\langle m\rangle$ 的 HSSS 中一大类永久循环。这是通过边缘同态得到的

$$H_*\Gamma(BPGL\langle m\rangle) \to H_*\Gamma(P^0 BPGL\langle m\rangle) = H_*H\mathbb{Z}$$

定理1.5 (定理 4.18)。 在权重零时， $BPGL\langle m\rangle$ 的 *HSSS* 中边缘同态的像恰好是

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2 \subset \mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2$$

类 x_1， ρ 和 $\bar{v}_i$ 都是永久循环，因此子代数

$$(\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2)[\rho, x_1, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m]$$

E_2 的所有元素都由永久循环构成。我们还利用算术方块确定负权重中的一类永久循环。

命题1.6 (推论 3.19)。 归纳定义的类 $x_0 = \rho$, x_1 上面的类，以及

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \zeta_{n-i}^{2^i}$$

对于所有的 n 和 m，它们都是 $BPGL\langle m\rangle$ 的 *HSSS* 中的永久循环。 x_n 的三重次数为 $(2^n-2, -1, 2-2^n)$，其余作用如下

$$\psi(x_n) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i^{2^{n-i}} \otimes x_{n-i}$$

从直观上看， x_n 类可以被视为形如 $[\xi_n\rho]$ 的不可分解元。我们确定了 $BPGL\langle m\rangle$ 的 HSSS 中的一族微分，它们可以用 x_n 表示。对这些微分取同调时，类 x_n 会作为马西积出现。

定理1.7 (定理 4.16)。 在 $BPGL\langle m\rangle$ 的 *HSSS* 中，我们有以下微分

$$d_{2^{i+1}-1}(\zeta_j^{2^{i+1-j}}) = \overline{v}_i \rho^{2^i-1}\left(p_{j-1}\left(\frac{x_1}{\rho}, \dots, \frac{x_{j-1}}{\rho}\right)\right)^{2^{i+1-j}}$$

对所有 $1 \le i \le m$ 和 $1 \le j \le i+1$，其中 p_j 是多项式

$$\zeta_j = p_j(\xi_1, \dots, \xi_j)$$

由霍普夫代数 $\mathcal{A}_*$中的求逆公式给出。

类 x_n 不能被 ρ整除，但展开此表达式时，出现的所有 ρ 指数均为非负数。根据启发式方法 $x_n = [\xi_n\rho]$，此表达式可以更简洁地写作

$$d_{2^{i+1}-1}(\zeta_j^{2^{i+1-j}}) = \overline{v}_i[\rho^{2^i-1}\zeta_{j-1}^{2^{i+1-j}}]$$

由于每个 $\zeta_j^{2^{i+1-j}}$ 都支持一个非零的 $d_{2^{i+1}-1}$，其平方在下一页上是一个非零的圈。到 $i = m+1$ 时这一过程停止，因此在两者之间进行插值。

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2[\zeta_1^2, \zeta_2, \dots]$$

and

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2[\zeta_1^{2^{m+1}}, \zeta_2^{2^m}, \dots, \zeta_{m+1}^2, \zeta_{m+2}, \dots]$$

第 *5* 节。这些微分是显式的，但由于 $\mathcal{A}_*$ 中的求逆公式而相当复杂，这使得计算关于这些微分的同调颇为困难，尽管这纯粹是代数问题。这限制了我们对该谱序列一般行为的理解，使其无法超越定理 1.7 和 1.5。不过，我们提出以下猜想。

猜想1.8。 $BPGL\langle m\rangle$ 的 *HSSS* 中所有微分均由定理*1.7*中的微分通过莱布尼茨法则生成。特别地，该谱序列在 $E_{2^{m+1}}$ 处坍缩。

给定猜想1.8，计算 $H_*\Gamma(BPGL\langle m\rangle)$ 就转化为一个纯代数问题：在模余模代数扩张问题的意义下，计算相对于这些微分的同调。在第 5 节中，我们验证了 $m \leq 3$ 的这一猜想，并完整计算了相应的谱序列。

在高度1时，这恢复了 H_*ko 的经典计算，且无需使用 Wood 余纤维序列，也无需了解 π_*ko。在高度 2 时，根据 Hill–Meier 的定理， C_2-谱 $\mathrm{tmf}_1(3)$ 是 $BP_{\mathbb{R}}\langle 2\rangle$ [21] 的一种形式，因此我们的计算确定了 $\mathcal{A}_*$-余模代数 $H_*\mathrm{tmf}_0(3)$。

定理 1.9 (定理 5.11)。 存在一个 $\mathcal{A}_*$-余模代数的同构

$$H_*\mathrm{tmf}_0(3) \cong \mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(2)_*} M_2$$

其中， M_2 是由平方零扩张 $\mathbb{F}_2\{1\}\oplus M_2$ 给出的 $\mathcal{A}(2)_*$-余模代数，而 M_2 是下方图 *1* 所示的 $\overline{\mathcal{A}(2)}_*$-余模。

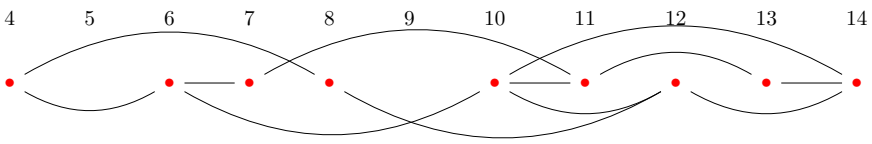


FIGURE 1. $\mathcal{A}(2)_*$-余模 M_2

在 Hill–Lawson [20], 的工作之前，人们尚不知道如何将谱 $\mathrm{Tmf}_0(3)$（从而将拓扑模形式的周期谱 $\mathrm{TMF}_0(3)$ 的连通模型 $\mathrm{tmf}_0(3)$）构造为导出代数栈的全局截面，其中带有层结构。在 [10], Davis 和 Mahowald 提出了若干便于计算的直接定义。特别是，他们构造了一个特定的 10 胞腔复形 X [10, 定理 2.1] ，并提出 $\mathrm{tmf}\wedge X$ 作为这样的连通模型。

定理 1.9 中的计算使我们能够将此定义与 Hill–Lawson 的导出代数几何定义联系起来。我们使用 Adams 谱序列构造映射 $X \to \mathrm{tmf}_0(3)$，从而得到以下 Wood 型分裂。

定理 1.10 (推论 5.13)。 存在一个 tmf-模的 *2*-局部等价

$$\mathrm{tmf}_0(3) \simeq \mathrm{tmf}\wedge X$$

在有理化后， X 的秩为 4，这对应于栈映射$\mathcal{M}_0$(3) $\to \mathcal{M}_{ell}$ 是一个 4 重覆盖这一事实。经基变换后，这也给出了 $\mathrm{Tmf}_0(3)$ 和 $\mathrm{TMF}_0(3)$ 的相应分解。

在高度 3 时，尚无关于 $BP_{\mathbb{R}}\langle 3\rangle$ 的熟知几何模型，但我们的计算首次将计算 $H_*eo_n(G)$ 的研究拓展至 $p = 2$ 的高度 3，同时也展示了高度为 > 2 时这些计算的惊人复杂性。关于余模代数 M_3 的描述，请参阅第 5.3 节。

定理 1.11（定理 5.22）。 对于 $BPGL\langle 3\rangle$ ，*HSSS* 的 E_∞ 页同构于平方零扩张

$$(\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(3)_*} M_3) \oplus (\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(2)_*} \overline{M}_2)$$

对于 M_3，这是一个显式的 $\mathcal{A}$（3）$_*$-余模代数，维数为 *165*，其中 $M_3\overline{\cdot}M_2\overline{=}0$，且 M_2 是定理 *1.9* 中的余模。

原则上，我们可以继续研究高度 4 及更高高度；我们看不出有什么理由认为这些方法不能推广。然而，我们无法对高度 m 的余模 M_m 给出一般性描述；而即使在高度 3，恰当地说明这项计算也是一项艰巨的任务。

第 *6* 节。 我们在第 6 节通过定义并探讨等变稳定同伦中的 HSSS 来结束本文。Hill–Hopkins–Ravenel 的切片谱序列 [19]已被证明是计算 G-谱 E 的不动点E^G 的同伦群的有效工具，而这里介绍的方法则可以计算 E^G 的同调 。

当 $G = C_2$ 时， $BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle$ 的 HSSS 与本文主体部分研究的动机谱序列密切相关。然而，等变点同调中的负锥带来了一些意想不到的差异。我们特别证明，$k_{\mathbb{R}}$ 的 $RO(C_2)$-分次 HSSS 存在如下形式的奇异微分

$$d_5(2u_{2\sigma}^{-1}\cdot\zeta_1^2\zeta_2) = \bar{v}_1^2$$

这个微分在负锥中留下一个类，并消去正锥中的一个类。

1.3.**致谢**。 作者感谢 Lennart Meier 和 Danny Shi 的有益交流。第一和第二作者感谢 Hausdorff 数学研究所在本工作部分完成期间给予的款待与支持。我们的切片谱序列图表使用 Hood Chatham 的 spectralsequences 软件包制作，Ada ms 谱序列图表则使用 Bruner 的 ext 软件制作。

1.4. **记号与约定**。

(1) 本文中我们在素数 $p = 2$ 处工作，因此同调 $H_*(-)$ 始终表示模 2 同调 $H_*(-;\mathbb{F}_2)$，我们的 Steenrod 代数均为 2-primary 版本。(2) Sm_k 表示 $\mathrm{Spec}(k)$ 上光滑概形的范畴， $\mathcal{SH}(k)$ 表示 k-动机谱的范畴。 $\mathcal{SH}(k)_{\mathrm{cell}}$ 表示胞腔范畴，即由双分次球 $S^{s,w}$生成的局部化子范畴。(3) $\pi^{\mathbb{R}}_{s,w}(-)$ 表示 $\mathbb{R}$-动机谱的双分次同伦群，其中 s 表示茎或拓扑次数， w 表示权。

(4) $M\mathbb{Z}$ 和 $M\mathbb{F}_2$ 分别是整系数和模 2 $\mathbb{R}$动机同调谱，因此 $\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}M\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[\rho,\tau^2]/(2\rho)$ 和 $\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}M\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2[\rho,\tau]$，其中 $|\rho| = (-1,-1)$ 和 $|\tau| = (0,-1)$。

(5) $\mathcal{A}_*$ 表示经典模 2 对偶 Steenrod 代数，因此

$$\mathcal{A}_* = \mathbb{F}_2[\xi_1,\xi_2,\ldots]$$

其中 $|\xi_i| = 2^i - 1$ 是通常的 Milnor 生成元，ζ_i 表示 ξ_i的共轭元。$\mathcal{A}(m)_*$ 表示商 Hopf 代数

$$\mathcal{A}(m)_* = \mathbb{F}_2[\xi_1,\ldots,\xi_{m+1}]/(\xi_1^{2^{m+1}},\ldots,\xi_{m+1}^2)$$

and

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2[\zeta_1^{2^{m+1}},\zeta_2^{2^m},\ldots,\zeta_{m+1}^2,\zeta_{m+2},\ldots]$$

对偶地，$\mathcal{A}$ 表示模 2 Steenrod 代数，$\mathcal{A}(m)$表示由 Sq^{2^i} （$i \le m$时）生成的子代数，并且

$$\mathcal{A}//\mathcal{A}(m) = \mathcal{A}\otimes_{\mathcal{A}(m)}\mathbb{F}_2$$

(6) $\mathcal{A}^{\mathbb{R}}$ 表示 $\mathbb{R}$-动机的模 2 Steenrod 代数，我们使用以下生成元记号

$$\mathcal{A}^{\mathbb{R}}_{*,*} = \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}M\mathbb{F}_2[\bar{t}_1,\bar{t}_2,\ldots,\tau_0,\tau_1,\ldots]/(\tau_i^2 = \tau\bar{t}_{i+1} + \rho\tau_{i+1} + \rho\tau_0\bar{t}_{i+1})$$

其中 $|t_i| = (2(2^i-1)\ 2^i-1)$以及 $|\tau_i| = (2(2^i-1)+1,\ 2^i-1)$。我们使用以下商 Hopf 代数记号

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{*,*}(m) = \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}M\mathbb{F}_2[\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_m]/(\tau_i^2 = \rho\tau_{i+1})$$

此外，$c(-)$ 表示 $\mathcal{A}^{\mathbb{R}}_*$ 中的 Hopf 共轭，$_*$。

(7) $\mathcal{S}p$ 表示谱范畴，而 $\mathcal{S}p^G$ 表示真正的 G-谱。对于一个 G-谱 X，$\pi_\star(X)$ 表示 X 的 $RO(G)$-分次同伦群。

(8) 我们令 $i_*:\ \mathcal{S}p \to \mathcal{SH}(k)$ 表示唯一的保对称幺半结构和余极限的函子，并令 $\Gamma(-)$ 表示其右伴随。$\beta:\ \mathcal{SH}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}p^{C_2}$ 表示 C_2-等变 Betti 实现函子。

(9) 我们的谱序列采用 Adams 三重分次，因此，三重次数为 $(t-s,\ w,\ s)$ 的类位于茎 $t-s$、权 w 和滤过 s。第 5 节中的所有图表均处于权 $w=0$。

2. The slice spectral sequence for generalized homology

本节定义动机稳定同伦中的 HSSS，并确立其基本性质。在第 2.1 节中，我们在 $\mathcal{SH}(k)$ 的一般性层面上进行研究，其中k 是一个完美域，并使用 Spitzweck-Ostvaer 的非常有效切片滤过[38]。由于 Morel 连通性定理，这使我们能够在广泛的一般情形下获得强收敛。然而，对于我们所考虑的谱——即代数配边谱 MGL 的标准商——有效、胞腔有效、非常有效和胞腔非常有效切片塔都彼此重合，正如 Heard [17] 所示。

这个滤过确定了一个动机谱塔。我们的谱序列是将这些塔逐点与一个普通谱作 smash 乘积而得到的，这里利用了 $\mathcal{SH}(k)$ 是张量于 $\mathcal{S}p$ 上的。这种构造类似于经典 Atiyah–Hirzebruch 谱序列的一种构造：在该构造中，对谱的 Postnikov 塔也进行同样的操作。

在第 2.3 节中，我们将讨论具体化到 $\mathcal{SH}_{\mathrm{cell}}(\mathbb{R})$，即 $\mathbb{R}$-动机谱的细胞子范畴；在此我们使用 Behrens 和 Shah [6] 关于 Betti 实现的结果，将其与 C_2-等变稳定同伦进行比较。

2.1. **一般切片塔。** 我们从非常有效切片滤过开始。这是对 Voevodsky 切片滤过的一种修正 [42], ，由 Spitzweck–Ostvaer[38] 提出，并由 Bachmann [3]进一步研究。读者会注意到，我们将通常的分次约定加倍，因此切片塔的运行速度减半；我们将在下文的注 2.2 中解释这一点。

按照 [17, 节 3],中的讨论，我们令

$$\mathcal{K}_{2t} = \{\Sigma^{2a,a}\Sigma^{\infty}_{+}X; a \geq t, X \in \mathrm{Sm}_k\} \subset \mathcal{SH}(k)$$

并令 $\mathcal{K}_{2t+1} = \mathcal{K}_{2t}$。设 $\mathcal{SH}(k)^{t,\mathrm{veff}}$ 表示由 $\mathcal{K}_t$在余极限和扩张下生成的 $\mathcal{SH}(k)$ 的全子范畴，则我们有一个滤过

$$\cdots \subset \mathcal{SH}(k)^{t+1,\mathrm{veff}} \subset \mathcal{SH}(k)^{t,\mathrm{veff}} \subset \mathcal{SH}(k)^{t-1,\mathrm{veff}} \subset \cdots$$

$\mathcal{SH}(k)$ 的滤过，并称 E 为切片 $\geq t$ ，若 $E \in \mathcal{SH}(k)^{t,\mathrm{veff}}$。与任意 $E \in \mathcal{SH}(k)$相关联的，我们有一个自然的余纤维序列

$$P_{t+1}E \to E \to P^t E$$

使得 $P_{t+1}E \in \mathcal{K}_{t+1}$，并且

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{SH}(k)}(K, P^t E) \simeq *$$

对于所有 $K \in \mathcal{SH}(k)^{t+1,\ \mathrm{veff}}$。我们将映射的纤维 $P^t_t E$ 定义为

$$P^t E \to P^{t-1}E$$

E 的 t-切片。切片滤过在 E 之下给出一个自然的谱塔:

$$\cdots \to P^t E \to P^{t-1}E \to \ldots.$$

余极限总是可缩的，而极限是 E。

现在，给定任意 $K \in \mathcal{SH}(k)$，我们可以将 E 的切片塔与 K 作 smash 积，从而得到一个新的过滤的动机谱 $K \otimes P^{\bullet}E$。应用（双分次）同伦群后，得到一个谱序列。

定义 2.1. E 的 K-同调切片谱序列是与过滤的动机谱 $K \otimes P^{\bullet}E$ 相关联的谱序列。我们将其统称为

$$E_*^{s,w,t}(E; K).$$

特别地， E_2项由下式给出

$$E_2^{s,w,t}(E; K) = K_{t-s,w}\big(P^t_t E\big).$$

我们采用 Adams 分次（$t-s$， w， s），使得 d_r 微分改变三重次数 b y （-1， 0， r）。

注记 2.2。 我们选择将分次加倍，以便与两个密切相关的谱序列保持一致： $k = \mathbb{R}$: 等变同伦中的切片谱序列，以及经典 Atiyah–Hirzebruch 谱序列。对我们所考虑的谱序列应用 Betti 实现，可以得到 C_2-等变同伦中的类似切片谱序列（见第 6 节）；若将基变换到 $\mathbb{C}$ 并对 τ取逆，则可得到经典 Atiyah–Hirzebruch 谱序列。我们的分次选择在这两种情况下都恢复了这些谱序列的标准分次约定。

例 2.3。 当 $K = S^{0,0}$ 是球谱时，这就是 E的普通切片谱序列。当 $K = S^{0,0}[\rho^{-1}]$时，这就是 E的 ρ-局部化切片谱序列。

由于 Morel 连通性定理 [30, 第 5 节3]，普通切片谱序列对任意 E 都强收敛。与任意动机谱 K 作 smash 积时，则不再能保证这一点。关于以下结果，参见 [38, 命题 5.11]。

命题 2.4. 设 K 在切片意义下有下界。那么， E 的 K-同调切片谱序列条件收敛，具体而言，自然映射

$$K \otimes E \to \lim_{\leftarrow}(K \otimes P^{\bullet}E)$$

在双分次同伦群上诱导一个同构，并且 $\operatorname{colim}(K \otimes P^{\bullet}E) \simeq *$。

此外，若 E 在切片意义下有下界，则谱序列强收敛，具体而言，对于任意给定的茎， E_2 非零的滤过至多只有有限多个。

证明。 由于各范畴 $\mathcal{K}_t$ 构成 $\mathcal{SH}(k)$ 的一组紧生成元，谱 $\operatorname{colim} P^{\bullet}E$ 是可缩的。与 K作 smash 积后，我们利用 smash 积与余极限可交换这一事实。

存在一个纤维序列

$$\lim_{\leftarrow}(K \otimes P_{t+1}E) \to K \otimes E \to \lim_{\leftarrow}(K \otimes P^{t}E)$$

根据假设， K 对于某个固定的 n是 $\geq n$ 切片，因此对所有 t， $K \otimes P_{t+1}E$ 都是 $\geq n + t + 1$切片。由 Morel 连通性定理可知，若 $E \in \mathcal{SH}(k)^{t,\mathrm{veff}}$，则$\pi_{s,w}E = 0$ 对 $s < t/2 + w$成立。因此，在固定权 w下，$\pi_{s,w}(K \otimes P_{t+1}E)$在 $s < w + (n + t + 1)/2$时消失。 s 的这一消失范围随 t严格递增，因此极限的双分次同伦群消失。若 E 在下方切片有界，则相同的连通性约束意味着，在固定权下，对给定的茎，只有有限多个切片会有贡献。□

注 2.5。 如果没有对 K的下界，即使E 是 0-连通的，结论也会微妙得多，而且比较映射可能不是同构。例如，当 $K = EGL(n) = v_n^{-1}BPGL\langle n\rangle$ 且 $E = MGL$时，将 E 的切片伴随分次与 K 作 smash 积会得到零谱。

在我们的应用中， K 和 E 都将是切片连通的，这使我们的收敛性结果更加精确，从而得到强消失线。

命题 2.6. 若 E 和 K 是切片 ≥ 0，则 E 的权重零 K-同调切片谱序列是一个右半平面谱序列，集中在直线 $y = x$ 和 $y = -x$之间。也就是说，这些群

$$E_2^{s,0,t}(E; K)$$

在 $s > t - s$ 或 $t < 0$时消失。

证明. 若 E是切片 ≥ 0，则当 $t < 0$时有 $P_t^t E \simeq *$，由此得到下方的消失线。上方的消失线如上所述，由 Morel 连通性定理推出；特别是，由于 $K \otimes P_t^t E$是切片 $\geq t$，当 $(t - s) < t/2$时，$(K \otimes P_t^t E)_{*,0}(K \otimes P_t^t E)$ 消失。这条消失线等价于 $(t - s) < s$。□

切片滤过具有乘法结构，因此我们得到如下结论。

命题 2.7. 如果 K 和 E 都是环谱，那么这是一个代数谱序列。

事实上，借助关于 K 的自然性，我们还可以考察更多结构。由于该谱序列源自 E 的一个与 K 完全独立的滤过，因此所有结构都与 K-余运算相容。

命题 2.8. 若 K 是平坦同调理论，则对任意 E，其 K-同调切片谱序列都是一个 $K_{*,*}K$-余模的谱序列。若 E 是一个环，则这是一个 $K_{*,*}K$-余模代数的谱序列。

例 2.9. 设 $k = \mathbb{R}$ 和 $K = M\mathbb{F}_2$（即动机模 2 埃伦伯格–麦克莱恩谱）。这给出了一个 $\mathcal{A}^{\mathbb{R}}_{*,*}$-余模的谱序列，它收敛到 E 的双分次动机同调，其 E_2 页为 E 的切片伴随分次的双分次动机同调。若 E 是一个环谱，则这是一个 $\mathcal{A}^{\mathbb{R}}_{*,*}$-余模代数的谱序列。

2.2. **同调切片谱序列（HSSS）**。

2.2.1. 全局截面同调。 存在一个本质上唯一的保余极限对称幺半函子

$$i_* \colon \mathcal{S}p \to \mathcal{SH}(k).$$

此函子有一个右伴随

$$\Gamma(-) : \mathcal{SH}(k) \to \mathcal{S}p$$

它将动机谱 E 映射为映射谱

$$F(S^{0,0}, E)$$

将 E 视为 Sm_k上的谱层，由于 $S^{0,\ 0} = \mathsf{Spec}(k)_+$，我们可以将其理解为取 E的全局截面。现在我们定义所关注的主要谱序列。

定义 2.10。 对于 $E \in \mathcal{SH}(k)$， E 的同调切片谱序列 （HSSS）是定义 2.1 中的谱序列 $E^{s,\ \ w\ t,}_{*}(E; i_* H\mathbb{F}_2)$。

也就是说，我们将 E 的切片塔与 $i_* H\mathbb{F}_2$ 张量起来，并取与所得塔相关联的谱序列。我们先给出以下引理，它由伴随关系 $i_* \dashv \Gamma$立即推出。

引理 2.11. 对于 $E \in \mathcal{SH}(k)$，我们有阿贝尔群的一个同构

$$\pi_{s,w} E \cong \pi_s \Gamma(\Sigma^{0,-w} E)$$

当 E 是环谱时，这便是双分次环的一个同构。

由于单位元在 $\mathcal{SH}(k)$中是紧的， i_* 保紧对象，因此$\Gamma(-)$存在右伴随。特别地，$\Gamma(-)$保余极限，由此得到以下投影公式。

命题 2.12. 对于任意谱 K 和 $E \in \mathcal{SH}(k)$，我们有

$$\Gamma(i_* K \otimes E) \simeq K \otimes \Gamma(E)$$

在 $K = H\mathbb{F}_2$ 的情况下应用引理 2.11，可得如下结论。

推论 2.13。 对于任意 $E \in \mathcal{SH}(k)$，谱$\Gamma(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes E)$ 的同伦群是 $\Gamma(E)$的模2 同调群:

$$(i_*H\mathbb{F}_2)_{*,0}E \cong H_*\Gamma(E)$$

由于 $H\mathbb{F}_2$ 是一个 E_∞-环谱，因此 $i_*H\mathbb{F}_2$ 也是如此。由于 $H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{F}_2$ 是由球面生成的自由结合代数的张量积，对 i_* 取相应对象后同样如此。

命题 2.14。 我们有结合 $i_*H\mathbb{F}_2$-代数之间的一个等价

$$i_*H\mathbb{F}_2^{\otimes 2} \simeq i_*H\mathbb{F}_2[\zeta_1, \dots],$$

其中，和经典情形一样， ζ_i 的拓扑次数为 $(2^i - 1)$，且其权为 0。

在同伦中，由函子性，对 ζ_i 各项诱导的余作用也仍是通常的余作用。换言之，动机谱 $i_*H\mathbb{F}_2 \otimes E$ 记录了 $\Gamma(E)$ 的模 2 同调的全部信息，甚至包括对偶 Steenrod 余作用。

推论 2.15。 E 的 *HSSS* 是一个二重分次 $\mathcal{A}_*$-余模的谱序列，并收敛到 $H_*\Gamma(\Sigma^{0,-*}E)$。如果 E 是一个环谱，则这是一个二重分次 $\mathcal{A}_*$-余模代数的谱序列。

2.2.2. 全局截面同调与动机同调。 整体截面函子也是弱幺半函子，因此给定 E_∞-幺半群 R 在 $\mathcal{SH}(k)$中， $\Gamma(R)$是一个 E_∞-环谱。伴随 $i_* \dashv \Gamma$ 的余单位给出一个 E_∞-映射

$$i_*\Gamma(R) \to R.$$

由引理 2.11 可知，当 $R = M\mathbb{Z}$或 $R = M\mathbb{F}_2$时，动机 Eilenberg–MacLane 谱的全局截面谱分别为 $H\mathbb{Z}$ 和 $H\mathbb{F}_2$。因此我们有典范的 E_∞-映射

$$i_*H\mathbb{Z} \to M\mathbb{Z} \text{ and } i_*H\mathbb{F}_2 \to M\mathbb{F}_2$$

我们将在许多情况下利用这些映射来识别切片伴随分次。

将函子 i_* 作用于普通同伦群，可得一个典范的代数映射

$$\mathcal{A}_* = \pi_\star(H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{F}_2) \xrightarrow{i_*} \pi_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes i_*H\mathbb{F}_2) \to \pi_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2) =: \mathcal{A}^k_{*,*}$$

如果后一个对偶 Steenrod 代数在$\pi^k_{*\perp *}(M\mathbb{F}_2)$是平坦的，那么我们就有一个 Hopf 代胚结构，并且我们的代数映射以下述意义与余作用相容。

命题 2.16。 如果 $E \in \mathcal{SH}$（k），那么我们有一个自然映射

$$H_*\Gamma(E) \to H_{*,*}(E; M\mathbb{F}_2)$$

当 $\mathcal{A}^k_{*,\ *}$ 是平坦的时，这是通过映射得到的 $\mathcal{A}^k_{*,\ *}$-余模的映射

$$\mathcal{A}_* \to \mathcal{A}^k_{*,*}$$

2.3. **Betti 实现与算术方块**。 本节中，我们现在将注意力限制在 $k = \mathbb{R}$ ，并在胞腔语境中进行研究。也就是说，我们在范畴 $\mathcal{SH}_{\text{cell}}(\mathbb{R})$ 中工作，它是由双分次球 $S^{s,\,w}$ 生成的 $\mathcal{SH}(\mathbb{R})$ 的局部化子范畴。此外，我们默认处处都在 2-完备语境中工作，因此我们的 $\mathcal{SH}_{\text{cell}}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathcal{SH}_{\text{cell}}(\mathbb{R})^\wedge_2$，而我们的 $\mathcal{S}p^{C_2}$ 表示 $(\mathcal{S}p^{C_2})^\wedge_2$。

$\mathbb{R}$动机稳定同伦与 C_2等变稳定同伦之间存在密切联系，这种联系通过 Betti 实现函子建立

$$\beta : \mathcal{SH}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}p^{C_2}$$

若 X 是 Spec($\mathbb{R}$) 上的光滑概形，则其复点集合 $X(\mathbb{C})$可赋予复解析拓扑，并且 C_2 =Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$)在 $X(\mathbb{C})$上的作用是连续的。函子 β 是将 $X \mapsto \Sigma^\infty_+ X(\mathbb{C})$沿典范函子 $\text{Sm}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{SH}(\mathbb{R})$作左 Kan 延拓得到的。

沿函子 β 进行推送与拉回计算极为有效（例如参见 [12], [7], 和 [15] ）。因此，人们一直致力于从概念上精确刻画 β 所建立的联系（参见 [12], [18], [2], 和 [6]）。Behrens– Shah 将这些结果结合并加以推广，从而将 β 刻画为 $\mathcal{SH}_{\text{cell}}(\mathbb{R})$上的局部化函子。特别地，他们证明，在对一个素数完成化之后，该函子

$$\text{Sing} : \mathcal{S}p^{C_2} \to \mathcal{SH}_{\text{cell}}(\mathbb{R})$$

是 β 的全忠实右伴随，因此我们可以将 $\mathcal{S}p^{C_2}$ 视为 $\mathcal{SH}_{\text{cell}}(\mathbb{R})$ 的反射子范畴，其反射函子由 β [6, 给出。定理 1.12]。

另一方面，可以用拉回方来描述 $\mathcal{S}p^{C_2}$ 。对于 $E \in \mathcal{S}p^{C_2}$，存在一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \tilde{E}C_2 \otimes E \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(EC_{2+}, E) & \longrightarrow & \tilde{E}C_2 \otimes F(EC_{2+}, E) \end{array}$$

称为 E 的*Tate* 方形，它是一个拉回。Behrens–Shah [6, 定理 1.10] 将这一构造推广到了所有 $E \in \mathcal{SH}_{\text{cell}}(\mathbb{R})$，形成一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E[\rho^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^\wedge_\rho[\tau^{-1}] & \longrightarrow & E^\wedge_\rho[\tau^{-1}][\rho^{-1}] \end{array}$$

我们称之为 E 的算术方块。一般而言，这个方块并非拉回，但 Behrens–Shah 的结果推出了以下结论。

命题 2.17。 $E \in \mathcal{SH}_{\text{cell}}(\mathbb{R})$ 属于全忠实右伴随的本质像

$$\text{Sing} : \mathcal{S}p^{C_2} \to \mathcal{SH}_{\text{cell}}(\mathbb{R})$$

当且仅当 E 的算术方块是一个拉回。特别地，函子$\beta(-)$ 可视为 $\mathcal{SH}_{\mathrm{cell}}(\mathbb{R})$ 的自函子，它由该拉回给出

$$\begin{array}{ccc} \beta(E) & \longrightarrow & E[\rho^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{E_\rho}[\tau^{-1}] & \longrightarrow & \widehat{E_\rho}[\tau^{-1},\rho^{-1}] \end{array}$$

反过来，这将真正固定点函子 $(-)^{C_2}\colon\ \mathcal{S}p^{C_2}\to\mathcal{S}p$ 描述为第 2.2.1 节整体截面函子的一个特例。

命题 2.18. 真正固定点函子 $(-)^{C_2}$ 等价于复合映射 $\Gamma\circ\mathrm{Sing}$。

反射函子 β 的单位映射给出一个自然变换

$$\eta_E:\Gamma(E)\to\Gamma(\beta(E))$$

我们将证明，在许多重要情形下， η_E 是一个等价；也就是说，在这些情形下，对 E 的算术方块应用 $\Gamma(-)$ 后会成为一个拉回。这可通过对 E的切片塔逐步应用归纳法得出，前提是以下基例成立。

命题 2.19. 映射

$$\Gamma(\Sigma^{s,w}M\mathbb{Z})\to\Gamma(\Sigma^{s,w}\beta(M\mathbb{Z}))$$

当 $w>-2$ 时是一个等价。等价地，映射

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}M\mathbb{Z}\to\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}\beta(M\mathbb{Z})$$

在权 <2 上是一个同构。

证明。 一方面，这由引理 2.11 以及 β 诱导出一个同构这一事实立即得出

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}M\mathbb{Z}\to\pi^{C_2}_{*,*}H\underline{\mathbb{Z}}$$

在权 <2 上（见 [12]）。

然而，我们也可以直接论证。根据 Voevodsky 的计算 [41]

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}M\mathbb{Z}=\mathbb{Z}[\tau^2,\rho]/(2\rho)$$

其中 $|\tau|=(0,-2)$ 且 $|\rho|=(-1,-1)$，可见对 $M\mathbb{Z}$ 的算术方块应用双分次同伦群后得到方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\tau^2,\rho]/(2\rho) & \longrightarrow & \mathbb{F}_2[\tau^2,\rho^{\pm}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[\tau^{\pm2},\rho]/(2\rho) & \longrightarrow & \mathbb{F}_2[\tau^{\pm2},\rho^{\pm}] \end{array}$$

由此得到的 Mayer–Vietoris 序列在权 $w<2$ 上是正合的，因此结论可由引理 2.11 和命题 2.17 得出。□

特别地，当 E 具有 $\sum^{2t,\,t}M\mathbb{Z}$ 这种形式时，我们还有 η_E 是一个等价。对于具有这种形式的切片、且切片连通的 E ，通过与命题 2.4 类似的论证，可得如下结果。

推论 2.20. 假设 $E \in \mathcal{SH}_{\mathrm{cell}}(\mathbb{R})$ 满足以下性质：对于所有 $t \geq 0$,

$$P^{2t}_{2t}E = \bigoplus_{I_t} \Sigma^{2t,t} M\mathbb{Z}$$

并且当 $t < 0$ 时， $P^{2t}_{2t}E$ 消失。于是

$$\Gamma(\Sigma^{s,w}E) \to \Gamma(\Sigma^{s,w}\beta(E))$$

当 $w > -2$ 时，这是一个等价。等价地，诱导映射

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}E \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}\beta(E)$$

是权为 $w < 2$ 的同构。

推论 2.21。 设 $E \in \mathcal{SH}_{\mathrm{cell}}(\mathbb{R})$ 与推论 *2.20* 中相同。于是

$$H_*\Gamma(\Sigma^{s,w}E) \to H_*\Gamma(\Sigma^{s,w}\beta(E))$$

是 $w > -2$ 的同构。等价地，映射

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes E) \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes \beta(E)) = \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(\beta(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes E))$$

是权为 $w < 2$ 时的同构。

特别地，结合推论 2.21 与命题 2.17，可以利用动机谱的双分次同调，计算 $\Gamma(E)$ 在权为 $w < 2$ 时的双分次同调

$$\Gamma(E[\rho^{-1}]) \qquad \Gamma(\widehat{E_\rho}[\tau^{-1}]) \qquad \Gamma(\widehat{E_\rho}[\tau^{-1}, \rho^{-1}])$$

方法是应用 Mayer–Vietoris 序列。我们将在第3节中对 $E = BPGL$（代数配边谱的 2-局部直和项）应用这一结果。

回顾一下，存在一个分类映射 $L \to MGL^{\mathbb{R}}_{*,*}$ ，它在形如 $(2k, k)$ 的双分次上是同构，其中 $L \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$ 是 Lazard环，且 $|a_i| = (2i, i)$（关于这一同构，见 [17] ；关于 Lazard 环的描述，见 [33] ）。如果一个 MGL-模等价于 MGL 除以某些多项式所得的商，且这些多项式模分解元同余于 a_i ，我们就称该模为 MGL 的标准商。根据 Hopkins–Morel 和 Levine–Tripathi 的以下定理 [26]， MGL 的标准商满足推论 2.20 的假设。

命题 2.22. 设 $I \subset L$ 是由某些 a_i生成的理想。那么 MGL/I 的切片伴随分次为

$$M\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]/I := M\mathbb{Z}[a_i | i \notin I]$$

在 2-局部下， MGL 分裂为该谱的若干移位之和

$$BPGL := MGL/(a_i | i \neq 2^k - 1)$$

按照惯例，我们令 $\bar{v}_i := a_{2^i-1}$，并且我们对 HSSS 的计算将聚焦于截断版本

$$BPGL\langle m \rangle = BPGL/(\bar{v}_{m+1}, \bar{v}_{m+2}, \ldots)$$

2.4. **边缘同态**。对于任意 $E \in \mathcal{SH}_{\mathrm{cell}}(\mathbb{R})$，我们都有一个自然的动机谱映射

$$E \to P^k E,$$

因此，我们可以考虑由此诱导的切片塔映射。由于我们有一个滤过谱的映射，因此诱导出一个谱序列映射。 $P^k E$ 的切片谱序列恰好是 E的切片谱序列的截断：我们舍弃次数为$(t-s,\ s)$且满足 $t > k$的所有类。

截断切片塔有一个非常重要的情形： $k = 0$的情形。对于 MGL的标准商 E，命题 2.22 表明 $P^0 E \simeq M\mathbb{Z}$。因此，我们有一个 HSSS 映射

$$E_*^{s,w,t}\big(E; i_* H\mathbb{F}_2\big) \to E_*^{s,w,t}\big(M\mathbb{Z}; i_* H\mathbb{F}_2\big).$$

后者集中在线 $t = 0$上；但认识到它来自一个滤过谱的映射后，我们便看到这给出了边缘同态

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes E) \to H^{\mathbb{R}}_{*,*}\big(i_* H\mathbb{F}_2; \mathbb{Z}\big).$$

同样，这个映射是一个$\mathcal{A}^{\mathbb{R}}_{*,\ *}$-余模（代数）的映射。根据定义，边缘同态像中的每个类都能沿着这个映射提升，因此我们有如下结论。

命题 2.23。 *HSSS* 中边同态的像由永久循环组成。

3. Homology of $\Gamma(BPGL\langle m\rangle)$ via the arithmetic square

我们在上一节中看到，计算同调群$H_*\Gamma(E)$等同于计算动机同伦群

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,0}(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes E)$$

并且，当 E 如命题 2.22 所述时，可以从 $i_* H\mathbb{F}_2 \otimes E$的算术方块中恢复这个 $\mathcal{A}_*$-余模。在本节中，我们将探讨 $E = BPGL\langle m\rangle$情形下的这一方法。

3.1. $i_* H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle$**的算术方块**。

3.1.1. **-局部部分。**在本节中，我们确定 $i_* H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle$算术方块的底行，即映射

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}, \rho^{-1}]$$

应用函子 $(-)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}]$ 的主要优点是，它将 $i_* H\mathbb{F}_2$同调转换为 $M\mathbb{F}_2$-同调。

命题 3.1. 典范映射 $i_* H\mathbb{F}_2 \to M\mathbb{F}_2$ 诱导出一个等价

$$(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes E)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}] \to (M\mathbb{F}_2 \otimes E)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}]$$

对任意 $E \in \mathcal{SH}_{\mathrm{cell}}(\mathbb{R})$。

证明. 所讨论的映射是通过取这些映射的极限得到的

$$i_* H\mathbb{F}_2 \otimes E \otimes C(\rho^i)[\tau^{-1}] \to M\mathbb{F}_2 \otimes E \otimes C(\rho^i)[\tau^{-1}]$$

（参见 [6, 定理 1.10]）。通过对 $C(\rho^i)$进行滤化，只需证明当 $i = 1$时此映射是等价。根据 [6, 命题 8.3], , 该映射

$$C(\rho) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C}_+)$$

在施加 2-完备化和胞腔化后变为等价。因此，只需证明该映射

$$i_*H\mathbb{F}_2 \otimes \mathrm{Spec}(\mathbb{C}_+)[\tau^{-1}] \to M\mathbb{F}_2 \otimes \mathrm{Spec}(\mathbb{C}_+)[\tau^{-1}]$$

是一个等价；为此，只需将基变换到 $\mathbb{C}$，并证明

$$i_*H\mathbb{F}_2[\tau^{-1}] \to M\mathbb{F}_2[\tau^{-1}]$$

根据 [6, 定理 1.7]，它是 $\mathcal{SH}(\mathbb{C})$ 中的一个等价。最后，根据 [6, 定理 1.1], ，只需应用 $\mathbb{C}$-Betti 实现，它给出 $H\mathbb{F}_2$ 的恒等映射。□

$-1 \le m \le \infty$ 上 $BPGL\langle m\rangle$ 的动机同调与经典情形的描述类似。我们有如下 Ormsby [32, 定理 3.8] 的计算。

命题 3.2。 $BPGL\langle m\rangle$ 的动机同调为

$$H^{\mathbb{R}}_{*,*}BPGL\langle m\rangle \cong \mathcal{A}^{\mathbb{R}}_{*,*}\square_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{*,*}(m)}M\mathbb{F}_{2*,*} = \frac{\mathbb{F}_2[\rho,\tau,\bar{t}_i,c(\tau_j)|i\ge 1, j\ge m+1]}{(c(\tau_j)^2 = c(\tau_{j+1})\rho + c(\bar{t}_{j+1})\tau)}$$

推论 3.3. 映射

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1},\rho^{-1}]$$

由包含映射给出

$$\frac{\mathbb{F}_2[\rho,\tau^{\pm},\bar{t}_i,c(\tau_j)|i\ge 1, j\ge m+1]}{(c(\tau_j)^2 = c(\tau_{j+1})\rho + c(\bar{t}_{j+1})\tau)}^{\widehat{}}_{\rho} \hookrightarrow \frac{\mathbb{F}_2[\rho,\tau^{\pm},\bar{t}_i,c(\tau_j)|i\ge 1, j\ge m+1]}{(c(\tau_j)^2 = c(\tau_{j+1})\rho + c(\bar{t}_{j+1})\tau)}^{\widehat{}}_{\rho}[\rho^{-1}]$$

证明。 根据命题 3.1，我们可以转而证明关于该映射的这一断言

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1},\rho^{-1}]$$

这由命题 3.2 得出。 □

注 3.4。 使用第 2.1 节的谱序列以及 $K = M\mathbb{F}_2$ 和 $E = BPGL\langle m\rangle$，可以重新得到 Ormsby 的计算。该计算与使用 Atiyah–Hirzebruch 谱序列对 $H_*BP\langle m\rangle$ 进行的经典计算完全相同。

3.1.2. -局部部分。 推论 3.3 确定了 $i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle$ 的算术方块的底行。这一计算的关键依据是，在 τ-局部化下， $i_*H\mathbb{F}_2$ 同调与 $M\mathbb{F}_2$ 同调一致。另一方面，在 ρ-局部化下，我们有以下 [6, 定理 1.2]。

命题 3.5。该函子

$$\Gamma : \mathcal{SH}(\mathbb{R})_{\mathrm{cell}}[\rho^{-1}] \to \mathcal{S}p$$

是一个范畴等价，其逆函子由 $i_*(-)[\rho^{-1}]$ 给出。

通过诉诸 C_2-等变同伦，并使用 [6, 定理 1.5] 和 [14, 命题 4.9], ，或者直接通过调整 [14, 命题 4.9] 的论证以适用于动机背景，很容易得到以下结果。

引理 3.6. 在此等价下， Γ 将 $BPGL[\rho^{-1}]$ 映射到 $H\mathbb{F}_2$。将$(\bar{v}_{m+1}, \bar{v}_{m+2}, \ldots)$锥化后，我们有 $\Gamma(BPGL\langle m\rangle[\rho^{-1}]) \simeq H\mathbb{F}_2[y^{2^{m+1}}]$，作为一个 $H\mathbb{F}_2$-模，其中 $|y| = 1$。

$i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL$的算术方块中的粘合映射

$$i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL[\rho^{-1}] \to (i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)^\wedge_\rho[\tau^{-1}, \rho^{-1}]$$

在双分次同伦上由某个形如以下形式的环映射给出

$$\mathcal{A}_*[\rho^{\pm}] \to \mathbb{F}_2[\rho, \tau^{\pm}, \bar{t}_i]^\wedge_\rho[\rho^{-1}]$$

为了确定这个粘合映射，我们可以将两个群都嵌入

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2)^\wedge_\rho[\tau^{-1}, \rho^{-1}]$$

通过托姆约化映射 $BPGL \to M\mathbb{F}_2$和典范映射 $i_*H\mathbb{F}_2 \to M\mathbb{F}_2$。理解这些嵌入归结为理解复合映射

$$i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}] \simeq BPGL[\rho^{-1}] \to M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]$$

我们计算中的许多微妙之处源于这样一个观察：这个映射与 2.2.2 中的典范映射并不同伦

$$i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}] \to M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]$$

当然，这两个映射在同伦上的作用相同；我们需要转向同调才能区分它们。以下内容使我们能够描述典范映射在同调上的作用。

命题 3.7. 将经典 *Milnor* 生成元 ξ_i 视为$\mathcal{A}^{\mathbb{R}}_{*,*}$的元素，经由复合映射

$$\mathcal{A}_* = \pi_*(H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{F}_2) \xrightarrow{i_*} \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes i_*H\mathbb{F}_2) \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2) = \mathcal{A}^{\mathbb{R}}_{*,*}$$

可得递归公式

$$\bar{t}_0 := 1$$
$$\rho^{2^i}\bar{t}_i = \xi_{i-1}^2(\tau_0\rho + \tau) + \xi_i\rho + \bar{t}_{i-1}\tau^{2^{i-1}}$$

证明. 我们借助 C_2-等变同伦，其中相应公式由 Hu–Kriz [22, 定理 6.18]计算得出。通过分解 $\mathbb{R}$，可得动机情形下的结果

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_* & \longrightarrow & \mathcal{A}^{\mathbb{R}}_{*,*} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{A}^{C_2}_{*,*} \end{array}$$

□

令 can 表示等价映射

$$\mathrm{can} : H\mathbb{F}_2[y] \xrightarrow{\simeq} \Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}])$$

其中 $H\mathbb{F}_2[y]$是由次数为 1 的类 y 生成的自由 E_1-$H\mathbb{F}_2$-代数，而 can 的定义是赋予 $\Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}])$ 一个 $H\mathbb{F}_2$-代数结构，该结构经由 2.2.2 的典范映射给出，并将 y映至 $\tau/\rho \in \pi_1\Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}])$。

命题 3.8. 该映射

$$H\mathbb{F}_2 \simeq \Gamma(BPGL[\rho^{-1}]) \to \Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]) \xrightarrow{\mathrm{can}^{-1}} H\mathbb{F}_2[y]$$

不与单位映射 η： $H\mathbb{F}_2 \to H\mathbb{F}_2[y]$ 同伦。

证明。 如果确实如此，则复合映射

$$i_*H\mathbb{F}_2 \otimes i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}] \simeq i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL[\rho^{-1}] \to M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]$$

将与典范映射同伦

$$i_*H\mathbb{F}_2 \otimes i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}] \to M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]$$

根据命题 3.7，此映射将类 ξ_1 映到 $\rho t_1 + \tau_0$。这将意味着 τ_0 属于（单射）映射

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}, \rho^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}, \rho^{-1}]$$

因为约化映射 $BPGL \to M\mathbb{F}_2$ 可经由 $M\mathbb{Z}$ 分解。Voevodsky关系

$$\tau_i^2 = \tau\bar{t}_{i+1} + \rho\tau_{i+1} + \rho\tau_0\bar{t}_{i+1}$$

于是将意味着所有 τ_i 都属于此映射的像，因此它是一个同构，这与结论矛盾。□

注记 3.9。 在 [23], Hu–Kriz 利用各向同性分离序列计算了同调群 $H_*BP^{C_2}_{\mathbb{R}}$。根据推论 2.20，这等同于计算

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,0}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)$$

我们的计算与他们的不同，这与第 114 页似乎存在的一处错误有关：他们声称 $\eta_R(u_\sigma^{-1})$ 属于约化映射的像

$$f : \pi_\star(\tilde{E}C_2 \otimes F(EC_{2+}, H\underline{\mathbb{F}_2} \otimes BP_{\mathbb{R}})) \to \pi_\star(\tilde{E}C_2 \otimes F(EC_{2+}, H\underline{\mathbb{F}_2} \otimes H\underline{\mathbb{F}_2}))$$

用他们的记号来说，该断言是 $f(\rho) = \eta_R(\sigma)$。如前述命题的证明所示，这将意味着 τ_0 属于此映射的像，从而导致矛盾。

命题 3.8 中的复合映射给出了某个 环映射

$$H\mathbb{F}_2 \to H\mathbb{F}_2[y]$$

我们通过证明它具有足够丰富的结构，使 Mahowald 定理能够应用于 $H\mathbb{F}_2$ [28]，从而识别该映射。

定理 3.10。该复合映射

$$H\mathbb{F}_2 \simeq \Gamma(BPGL[\rho^{-1}]) \to \Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]) \xrightarrow{\text{can}^{-1}} H\mathbb{F}_2[y] \simeq \prod_{i\geq 0} \Sigma^i H\mathbb{F}_2$$

具有分量 Sq^i： $H\mathbb{F}_2 \to \Sigma^i H\mathbb{F}_2$。

证明。 我们首先注意到，该映射

$$H\mathbb{F}_2 = \Gamma(i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]) \simeq \Gamma(BPGL[\rho^{-1}]) \to \Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}])$$

是一个 E_∞ 映射，因为它可以分解为

$$\Gamma(i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]) \simeq \Gamma(BPGL[\rho^{-1}]) \to \Gamma(MGL_{(2)}[\rho^{-1}]) \to \Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}])$$

第一个映射是单位映射 $H\mathbb{F}_2 \to MO$，它是 E_∞，而映射 $MGL_{(2)} \to M\mathbb{F}_2$ 是 E_∞。

关于 $H\mathbb{F}_2$ 的 Mahowald 定理意味着在 E_2 代数中存在一个推出方形 $\mathcal{S}p$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Free}_{E_2}(\mathbb{S}) & \xrightarrow{\bar{0}} & \mathbb{S} \\ {\scriptstyle \bar{2}}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S} & \longrightarrow & H\mathbb{F}_2 \end{array}$$

这给出

$$\pi_0\mathrm{Map}_{E_2}(H\mathbb{F}_2, \Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}])) \cong \pi_1\Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]) = \mathbb{F}_2$$

因此，这样的 E_2-映射唯一，且不与单位映射同伦 η。最后我们指出，Tate 值 Frobenius

$$\varphi_2 : H\mathbb{F}_2 \to H\mathbb{F}_2^{tC_2}$$

Nikolaus–Scholze 的是一个可经由连通覆盖分解的 E_∞ 映射

$$H\mathbb{F}_2[y] \simeq \Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]) \simeq \Phi^{C_2}H\underline{\mathbb{F}_2}$$

并且具有上述由 [31, p. IV.1.5] 给出的描述。 □

3.2. **的 Mayer–Vietoris 序列** $i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL$。 定理 3.10 可用于明确描述 $i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL$ 的算术方块中的粘合映射。要确定它对同伦的作用，我们需要以下引理。

引理 3.11. 由……诱导的同伦映射

$$H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{F}_2 \xrightarrow{1\otimes Sq^i} H\mathbb{F}_2 \otimes \Sigma^i H\mathbb{F}_2$$

是帽积

$$- \cap Sq^i : \mathcal{A}_* \xrightarrow{\Delta} \mathcal{A}_* \otimes \mathcal{A}_* \xrightarrow{1\otimes\langle -, Sq^i\rangle} \mathcal{A}_{*-i}$$

证明. 由 $1 \otimes Sq^i$ 诱导的同伦映射是一个 $\mathcal{A}_*$-余模映射，而 $\mathcal{A}_{*-i}$ 是一个余自由 $\mathcal{A}_*$-余模。只需证明复合映射

$$\mathcal{A}_* \xrightarrow{(1\otimes Sq^i)_*} \mathcal{A}_{*-i} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{F}_2[i]$$

与复合映射一致

$$\mathcal{A}_* \xrightarrow{\Delta} \mathcal{A}_* \otimes \mathcal{A}_* \xrightarrow{1\otimes\langle -, Sq^i\rangle} \mathcal{A}_{*-i} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{F}_2[i]$$

其中 $\epsilon : \mathcal{A}_* \to \mathbb{F}_2$ 是霍普夫代数 $\mathcal{A}_*$ 中的余单位映射。在同构 $\mathcal{A} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{A}_*, \mathbb{F}_2)$ 下，后一个映射对应于 Sq^i。前一个映射也如此，因为配对 $\mathcal{A}_* \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathcal{A} \to \mathbb{F}_2$ 是由 $\mathcal{S}p$ 中的映射诱导的

$$(H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{F}_2) \otimes_{H\mathbb{F}_2} F(H\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2) \to H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{F}_2 \xrightarrow{\mu} H\mathbb{F}_2$$ □

命题 3.12. 映射

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)[\rho^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)\widehat{}_\rho[\tau^{-1}, \rho^{-1}]$$

由映射给出

$$\varphi : \mathcal{A}_*[\rho^{\pm}] \to \mathbb{F}_2[\tau^{\pm}, \rho, \bar{t}_i]\widehat{}_\rho[\rho^{-1}]$$

的 $\mathbb{F}_2[\rho^{\pm}]$-代数映射

$$\varphi(\xi_i) = \rho^{2^i-1}\bar{t}_i + \Big(\frac{\tau^{2^{i-1}}}{\rho}\Big)\bar{t}_{i-1}$$

证明。 该图表

$$\begin{array}{ccc}(i_*H\mathbb{F}_2\otimes BPGL)[\rho^{-1}] & \longrightarrow & (M\mathbb{F}_2\otimes M\mathbb{F}_2)[\rho^{-1}]\\ \downarrow & & \downarrow\\ (M\mathbb{F}_2\otimes BPGL)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1},\rho^{-1}] & \longrightarrow & (M\mathbb{F}_2\otimes M\mathbb{F}_2)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1},\rho^{-1}]\end{array}$$

在双分次同伦上给出为

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A}_*[\rho^{\pm}] & \longrightarrow & \mathcal{A}_*[\tau,\eta_R(\tau),\rho^{\pm}]\\ \downarrow\varphi & & \downarrow\\ \mathbb{F}_2[\rho,\tau^{\pm},\bar{t}_i]^{\widehat{}}_{\rho}[\rho^{-1}] & \longrightarrow & \mathcal{A}_*[\tau^{\pm},\eta_R(\tau)^{\pm},\rho]^{\widehat{}}_{\rho}[\rho^{-1}]\end{array}$$

注意，顶部映射 不是 $\mathcal{A}_*$-代数的映射；这正是命题 3.8 的内容。底部映射和右侧映射都是单射，因此只需确定顶部映射。结合定理 3.10 和引理 3.11，这就是将...
...发送的 $\mathbb{F}_2[\rho^{\pm}]$-代数映射

$$\xi_i\mapsto\sum_{j\geq 0}(\xi_i\cap Sq^j)\cdot\left(\frac{\eta_R(\tau)}{\rho}\right)^j$$

利用 $\mathcal{A}_*$ 上的余积公式以及 Sq^j 与 ξ_1^j 互为对偶这一事实，我们得到

$$\xi_i\mapsto\xi_i+\xi_{i-1}^2\frac{\eta_R(\tau)}{\rho}$$

最后，我们应用命题 3.7 的关系。 □

现在我们转向权重零，并设 $\chi_i:=\tau^{2^i-1}t_i$ 和 $z:=\rho/\tau=y^{-1}$。到目前为止，第3节的结果可概括如下。

命题 3.13. $i_*H\mathbb{F}_2\otimes BPGL$ 的算术方块为

$$\begin{array}{ccc}H_*\Gamma(BPGL) & \longrightarrow & \mathcal{A}_*\\ \downarrow & & \downarrow\varphi\\ \mathbb{F}_2[z,\chi_i|i\geq 1]^{\widehat{}}_z & \hookrightarrow & \mathbb{F}_2[z,\chi_i|i\geq 1]^{\widehat{}}_z[z^{-1}]\end{array}\qquad\begin{array}{c}\xi_i\\ \downarrow\\ \chi_iz^{2^i-1}+\chi_{i-1}z^{-1}\end{array}$$

$|z|=-1$ 和 $|\chi_i|=2(2^i-1)$。

为计算相应的 Mayer–Vietoris 序列，我们先证明如下结果。

命题 3.14. 命题 *3.13* 中的算术方块满足以下性质：

(1) 映射 φ 是单射。(2) 映射 $\mathbb{F}_2[z,\chi_i|i\geq 1]^{\widehat{}}_z\oplus\mathcal{A}_*\to\mathbb{F}_2[z,\chi_i|i\geq 1]^{\widehat{}}_z[z^{-1}]$ 在非零次数上是单射。(3) 这些映射

$$H_*\Gamma(BPGL)\to H_*\Gamma(BPGL[\rho^{-1}])=\mathcal{A}_*$$

and

$$H_*\Gamma(BPGL)\to\pi^{\mathbb{R}}_{*,0}(i_*H\mathbb{F}_2\otimes BPGL)^{\widehat{}}_{\rho}[\tau^{-1}]$$

在非零次数中都为零。

(4) 在正次数 j 中，以下序列是短正合的

$0 \to (\mathbb{F}_2[z, \chi_i | i \geq 1]_z^\frown)_{j+1} \oplus \mathcal{A}_{j+1} \to (\mathbb{F}_2[z, \chi_i | i \geq 1]_z^\frown[z^{-1}])_{j+1} \xrightarrow{\partial} H_j\Gamma(BPGL) \to 0$

证明。 对于（1），我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)[\rho^{-1}] & \longrightarrow & \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2)[\rho^{-1}] \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \\ \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)^\frown_\rho[\tau^{-1}, \rho^{-1}] & \longrightarrow & \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2)^\frown_\rho[\tau^{-1}, \rho^{-1}] \end{array}$$

且右侧和底部的映射都是单射。我们已经看到，顶部的映射是由该映射诱导的

$$i_*H\mathbb{F}_2 \otimes i_*H\mathbb{F}_2 \xrightarrow{1\otimes 1\otimes i_*(\varphi_2)} i_*H\mathbb{F}_2 \otimes i_*H\mathbb{F}_2[y]$$

φ_2 与单位映射 $H\mathbb{F}_2 \xrightarrow{\eta} H\mathbb{F}_2[y]$ 相差一个 $H\mathbb{F}_2[y]$ 的自同构，因此是一个收缩的包含映射。

对于 (2)，由于 φ 是单射，映射

$$\mathbb{F}_2[z, \chi_i | i \geq 1]_z^\frown \oplus \mathcal{A}_* \to \mathbb{F}_2[z, \chi_i | i \geq 1]_z^\frown[z^{-1}]$$

当且仅当存在一个类 $0 \neq x \in \mathcal{A}_j$，使得映射在次数 $j \neq 0$ 处不是单射

$$\varphi(x) \in \text{image}\left(\mathbb{F}_2[z, \chi_i | i \geq 1]_z^\frown \hookrightarrow \mathbb{F}_2[z, \chi_i | i \geq 1]_z^\frown[z^{-1}]\right)$$

然而请注意，由于 $\varphi(\xi_i) = z^{-1}(\chi_i z^{2^i} + \chi_{i-1})$，单项式 $\xi_{i_1}^{j_1} \cdots \xi_{i_n}^{j_n}$ 被映射到

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_{i_1}^{j_1} \cdots \xi_{i_n}^{j_n}) &= z^{-j_1}(\chi_{i_1} z^{2^{i_1}} + \chi_{i_1-1})^{j_1} \cdots z^{-j_n}(\chi_{i_n} z^{2^{i_n}} + \chi_{i_n-1})^{j_n} \\ &= z^{-(j_1+\cdots+j_n)} \chi_{i_1-1}^{j_1} \cdots \chi_{i_n-1}^{j_n} + \cdots \end{aligned}$$

其中省略的项具有 $z^m r(\chi_i)$ with $m > -(j_1 + \cdots + j_n)$ 的形式，其中$r(\chi_i)$ 是关于 χ_i 的某个多项式。特别地，对于一个多项式

$$p(\xi_i) = \sum_{k=1}^{N} \xi_{i_{k,1}}^{j_{k,1}} \cdots \xi_{i_{k,n_k}}^{j_{k,n_k}}$$

在 $\mathcal{A}_*$ 中，令

$$M := \max\{j_{k,1} + \cdots + j_{k,n_k} : 1 \leq k \leq N\}$$

$$q(\xi_i) := \sum_{k\,:\, j_{k,1}+\cdots+j_{k,n_k}=M} \xi_{i_{k,1}}^{j_{k,1}} \cdots \xi_{i_{k,n_k}}^{j_{k,n_k}}$$

使得 $p(\xi_i) = q(\xi_i) + r(\xi_i)$，其中

$$r(\xi_i) := \sum_{k\,:\, j_{k,1}+\cdots+j_{k,n_k}<M} \xi_{i_{k,1}}^{j_{k,1}} \cdots \xi_{i_{k,n_k}}^{j_{k,n_k}}$$

Then

$$\varphi(p(\xi_i)) = z^{-M} q(\chi_{i-1}) + \cdots$$

其中省略的项形如 $z^m s(\chi_i)$，且带有 $m > -M$，其中 $s(\chi_i)$ 是关于 χ_i 的某个多项式。注意到 $q(\chi_{i-1}) \neq 0$，因此，如同 $M > 0$，这个和不可能属于算术方块中底部映射的像。(3) 和 (4) 可直接由 Mayer–Vietoris 序列得到。□

这已经足以将 $H_*\Gamma(BPGL)$ 描述为一个 $\mathcal{A}_*$-余模。关于以下讨论，参见 [23]。令 $K(\rho)$ 由余纤维序列定义

$$K(\rho) \to S^{0,0} \to S^{0,0}[\rho^{-1}]$$

我们有一个左余模的长正合序列 $\mathcal{A}_*$

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_*\Gamma(BPGL\otimes K(\rho)) \to H_*\Gamma(BPGL) \to \mathcal{A}_* \xrightarrow{\partial} H_{*-1}\Gamma(BPGL\otimes K(\rho)) \to \cdots$$

命题 3.14 给出了左余模 $\mathcal{A}_*$ 的一个分裂

$$H_*\Gamma(BPGL) \cong \mathbb{F}_2\{1\} \oplus \operatorname{coker}(\partial)$$

为了描述 coker(∂)，由于我们的算术方块在权重零处是一个拉回，根据 Proposition2.17and Corollary2.20，我们有一个图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_* & \xrightarrow{\partial} & H_{*-1}\Gamma(BPGL \otimes K(\rho)) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ \mathbb{F}_2[z,\chi_i]^{\widehat{}}_z[z^{-1}] & \longrightarrow & H_{*-1}\Gamma(BPGL \otimes K(\rho)) \end{array}$$

由于 $\mathbb{F}_2[z,\chi_i]^{\widehat{}}_z \to \mathbb{F}_2[z,\chi_i]^{\widehat{}}_z[z^{-1}]$ 是一个单射，我们得到

$$\begin{aligned} \Sigma H_*\Gamma(BPGL \otimes K(\rho)) &= \operatorname{coker}(\mathbb{F}_2[z,\chi_i]^{\widehat{}}_z \to \mathbb{F}_2[z,\chi_i]^{\widehat{}}_z[z^{-1}]) \\ &= \mathbb{F}_2[z^{-1},\chi_i]\{z^{-1}\} \end{aligned}$$

结合我们对 φ 的明确描述，我们得出：

定理 3.15。 $H_*\Gamma(BPGL)$ 分裂为左 $\mathcal{A}_*$-余模

$$H_*\Gamma(BPGL) = \mathbb{F}_2\{1\} \oplus \operatorname{coker}(\partial)$$

其中， ∂ 可以描述为该映射

$$\begin{aligned} \partial : \mathcal{A}_* &\to \Sigma^{-1}\mathbb{F}_2[z^{-1},\chi_i]\{z^{-1}\} \\ \xi_i &\mapsto \chi_i z^{2^i-1} + \zeta_{i-1}z^{-1} \end{aligned}$$

应理解为在生成元 ξ_i 上具有乘法性，而在结果中，将 y 的所有非负次幂设为 0。映射 ∂ 在正次数上是单射。

注记 3.16。 可以用显式公式描述 coker(∂) 上的 $\mathcal{A}_*$-余模结构。不过，我们省略这些公式，因为我们认为它们过于复杂，不具实用价值。相较之下，正如我们将看到的， $BPGL$ 的 HSSS 将 $H_*\Gamma(BPGL)$ 描述为一个显式且直观的 $\mathcal{A}_*$-余模代数的子商。

我们指出，还可以按照定理 3.15 中的做法，利用各向异性分离序列中的边界映射，将 $H_*\Gamma(BPGL\langle m\rangle)$ 相当明确地描述为一个 $\mathcal{A}_*$-余模。不过，由于这些公式较为复杂，我们仍然倾向于使用 HSSS 来描述同调的整体结构。

3.3. **的边缘同态的像** $BPGL\langle m\rangle$。我们将在第 5 节看到，对于 $BPGL\langle m\rangle$ 的 HSSS，映射 $E_2 \to E_2[\rho^{-1}]$ 到 ρ 局部化谱序列在 E_2 上是单射，因此，利用我们关于算术方块的结果，可以根据局部化谱序列的像确定边缘同态的像。

边缘同态具有自然性，从而得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle) & \longrightarrow & \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle)[\rho^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\rho^{-1}] \end{array}$$

在这个方形图的左侧，我们在权重零处有一个同构

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2 \cong H_*H\mathbb{Z} \cong \pi^{\mathbb{R}}_{*,0}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})$$

它来自典范映射 $i_*H\mathbb{Z} \to M\mathbb{Z}$。在右侧，利用等价

$$i_*H\mathbb{F}_2[y^{2^{m+1}}][\rho^{-1}] \simeq BPGL\langle m\rangle[\rho^{-1}]$$

引理 3.6 的等价，右侧的映射变为典范包含

$$\mathcal{A}_*[y^{2^{m+1}}, \rho^{\pm}] \hookrightarrow \mathcal{A}_*[y^2, \rho^{\pm}]$$

因此，根据这些识别来描述底部映射，就使我们处于定理 3.10 的情形中；该定理确定了两个识别

$$H_*\Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]) \cong \mathcal{A}_*[y]$$

具体而言，典范映射 $i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}] \to M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]$ 给出一个等价$H\mathbb{F}_2[y] \simeq \Gamma($ $M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}])$，从而确定一个上述形式的同构，记作 $\cong_{\text{can}}$。另一方面，映射 $i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}] \simeq BPGL[\rho^{-1}] \to M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]$确定了一个相同形式的同构，记作 $\cong_{BP}$。定理 3.10 和命题 3.12 的证明告诉我们如何在这些识别之间转换。

命题 3.17. 复合

$$\mathcal{A}_*[y] \cong_{\text{can}} H_*\Gamma(M\mathbb{F}_2[\rho^{-1}]) \cong_{BP} \mathcal{A}_*[y]$$

将

$$y \mapsto y$$
$$\zeta_i \mapsto \zeta_i + \zeta_{i-1}y^{2^{i-1}}$$

证明。 定理 3.10 和引理 3.11 将这个复合映射的逆描述为若干帽积之和。利用同余关系

$$\zeta_m \equiv \xi_1^{2^m-1} \mod (\xi_2, \xi_3, \ldots)$$

可知，这个复合映射的逆将

$$\zeta_m \mapsto \sum_{i=0}^{m} \zeta_i y^{2^m-2^i}$$

这就推出了所声称的描述。 □

推论 3.18。 $BPGL\langle m\rangle$ 的 *HSSS* 中边同态的像包含 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2 \subset H_*H\mathbb{Z}$。

证明。 我们断言每个生成元的像

$$\zeta_1^{2^{m+1}}, \zeta_2^{2^m}, \dots, \zeta_{m+1}^2, \zeta_{m+2}, \dots,$$

沿映射 $E_2 \to E_2[\rho^{-1}]$ 的 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2$ 属于 ρ 局部化谱序列的边缘同态的像。事实上，命题 3.17 表明，局部化映射将

$$\begin{aligned} \zeta_i^{2^{m+2-i}} &\mapsto \zeta_i^{2^{m+2-i}} + \zeta_{i-1}^{2^{m+2-i}} y^{2^{m+1}} && \text{for } i \le m+2 \\ \zeta_i &\mapsto \zeta_i + \zeta_{i-1} y^{2^{i-1}} && \text{for } i > m+2 \end{aligned}$$

使得这些生成元中的每一个都落在子代数 $\mathcal{A}_*[y^{2^{m+1}}] \subset E_2[\rho^{-1}]$ 中。

我们在推论 4.5 中证明 $E_2 \to E_2[\rho^{-1}]$ 是单射，因此只需证明这些类中的每一个

$$\begin{aligned} &\zeta_i^{2^{m+2-i}} + \zeta_{i-1}^{2^{m+2-i}} y^{2^{m+1}} && \text{for } i \le m+2 \\ &\zeta_i + \zeta_{i-1} y^{2^{i-1}} && \text{for } i > m+2 \end{aligned}$$

都存在沿映射的提升

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle) \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle)[\rho^{-1}]$$

$i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle$ 的算术方块的 Mayer–Vietoris 序列表明，只需证明这些类中的每一个沿着该映射的像

$$\varphi_m : \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle)[\rho^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle)^{\wedge}_{\rho}[\tau^{-1}, \rho^{-1}]$$

属于该映射的像

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle)^{\wedge}_{\rho}[\tau^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle)^{\wedge}_{\rho}[\tau^{-1}, \rho^{-1}]$$

映射 φ_m 由命题 3.12 描述，结合其将$y^{2^{m+1}}$ 映射到 $(\eta_R(\tau)/\rho)^{2^{m+1}}$这一事实。

嵌入到情形 $m = -1$中，映射 φ 沿着命题 3.17 中复合的逆函子将这些类映回，即映到上述每个生成元沿着该映射的像

$$i_* : \mathcal{A}_* \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2)^{\wedge}_{\rho}[\tau^{-1}, \rho^{-1}]$$

该映射的像

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL\langle m\rangle)^{\wedge}_{\rho}[\tau^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{F}_2)^{\wedge}_{\rho}[\tau^{-1}, \rho^{-1}]$$

是一个子$\mathcal{A}_*$-余模，因此只需证明其像包含

$$i_*(\zeta_{m+2}), i_*(\zeta_{m+3}), \dots$$

对关系进行共轭后 [27,定理 2.12],可得

$$i_*(\zeta_i) = \frac{1}{\tau}\big(c(\tau_{i-1})\eta_R(\tau)^{2^{i-1}} + \rho^{2^i} c(\tau_i)\big)$$

结论现由命题 3.2 得出。 □

类似地推论可得，权 -1 中边缘同态像包含以下类。

推论 3.19。对于所有 $m \geq 0$，类 $\rho\xi_m$ 都可以沿映射提升

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL) \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)[\rho^{-1}]$$

因此，沿着 $E_2 \to E_2[\rho^{-1}]$ 对 $\rho\xi_m \in E_2[\rho^{-1}]$ 的任意提升都属于边缘同态的像。

证明。根据命题 3.12，我们有

$$\varphi(\rho\xi_m) = \rho^{2^m}\bar{t}_m + \tau^{2^{m-1}}\bar{t}_{m-1}$$

□

4. The HSSS for $BPGL\langle m\rangle$

4.1. 切片 E_2 页。根据命题 2.22，$BPGL\langle m\rangle$ 的 HSSS 有 E_2 页

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z}[\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_m]) = \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_m]$$

因此，我们接下来计算双分次同伦环

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})$$

这里有一些出乎意料的乘法性质；我们先确定其加法结构。

命题 4.1. 映射 $M\mathbb{Z} \to i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z}$ 确定了左 $\mathcal{A}_*$-余模的一个同构

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z}) \cong (\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2)[\tau^2] \oplus \bigoplus_{i\geq 0, j>0} \mathcal{A}_*\{\tau^{2i}\rho^j\}$$

证明. Voevodsky 对 $\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}M\mathbb{Z}$ 的计算 [41]（另见 [15]）表明，$H\mathbb{Z}$-模

$$\Gamma\left(\bigoplus_{b\in\mathbb{Z}} \Sigma^{0,b}M\mathbb{Z}\right)$$

分裂为

$$\bigoplus_{i\geq 0} H\mathbb{Z}\{\tau^{2i}\} \oplus \bigoplus_{i\geq 0, j>0} H\mathbb{F}_2\{\tau^{2i}\rho^j\}$$

对其取同调后即可得到结论。 □

计算这个环中的乘积颇有微妙之处，这些微妙之处源于下面这个类。

定义 4.2. 令 x_1 表示双次数为 $(0, -1)$ 的 $[\rho\zeta_1]$ 中的类。我们用方括号强调 x_1 在

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})$$

特别地，不存在类 ζ_1，因为 $\zeta_1 \notin \mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2$，且 x_1 不能被 ρ 整除。

$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})$ 中的大部分环结构由环映射决定

$$\pi_*(H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{Z}) \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})$$

and

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{Z}) \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})$$

然而，类 x_1 不属于由这些映射的像生成的子代数。为了确定涉及 x_1 的乘积，我们改为在 ρ 局部化下进行研究。

命题 4.3. 存在一个双分次环的同构

$$\mathcal{A}_*[y_2, \rho^{\pm}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\rho^{-1}]$$

其中 $|y_2| = 2$，且局部化映射

$$\phi : \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z}) \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\rho^{-1}]$$

映射为

$$\tau^2 \mapsto \rho^2 y_2 \qquad x_1 \mapsto \zeta_1 \rho \qquad \zeta_1^2 \mapsto \zeta_1^2 + y_2 \qquad \zeta_i \mapsto \zeta_i + \zeta_{i-1} y_2^{2^{i-2}}$$

其中 ζ_1^2、ζ_i 被视为

$$(\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)[\tau^2]$$

前述命题中所描述的直和项中的元素。

证明。 我们定义映射

$$\mathcal{A}_*[y_2, \rho^{\pm}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\rho^{-1}]$$

通过映射

$$\mathcal{A}_*[\rho^{\pm}] \cong \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)[\rho^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\rho^{-1}]$$

将 y_2 送到沿右单位映射的 τ^2/ρ^2 的像

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{Z})[\rho^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\rho^{-1}]$$

这是一个同构，因为 $M\mathbb{Z}[\rho^{-1}] \simeq i_*H\mathbb{F}_2[y_2][\rho^{-1}]$。

关于映射 ϕ 的断言，注意到命题 4.1 蕴含

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})$$

是 ρ-无挠的，因此 ϕ 是一个单射。映射

$$\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2 \cong \pi^{\mathbb{R}}_{*,0}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z}) \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,0}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\rho^{-1}] \cong \mathcal{A}_*[y_2]$$

由命题 3.17 描述，因为左侧和右侧的表示分别来自典范结构和 $BPGL$ $H\mathbb{F}_2$-代数结构。现在 $x_1 \mapsto \rho\xi_1$，因为 $\rho\xi_1$ 是该双次数中唯一的非零类。□

推论 4.4。 在环 $\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})$ 中，我们有关系

$$x_1^2 = \zeta_1^2 \rho^2 + \tau^2$$

证明。 前述命题的映射 ϕ 是单射环映射，并且有

$$\phi(\zeta_1^2\rho^2 + \tau^2) = \zeta_1^2\rho^2 + y_2\rho^2 + y_2\rho^2 = \phi(x_1^2) \qquad \square$$

推论 4.5。映射

$$(\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)[\rho, x_1] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})$$

是左 $\mathcal{A}_*$-余模代数的同构，其中 ρ 是本原的，并且

$$\psi(x_1) = 1 \otimes x_1 + \xi_1 \otimes \rho$$

证明。 该映射的源与目标是双分次 $\mathbb{F}_2$-向量空间，且具有相同的（有限）分次维数。因此，只需证明该映射是满射；由推论 4.4 可知这一点成立，因为 τ^2 属于像。□

4.2. **Steenrod 代数子代数上的微分**。推论 4.5 给出了我们 E_2页

$$E_2^{*,*,*}(BPGL\langle m\rangle; i_*H\mathbb{F}_2) \cong (\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2)[\rho, x_1, \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_m]$$

这些类 ρ，x_1，$\overline{v_1}$，$\dots$，$\overline{v_m}$ 都是永久循环，而子代数

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2 \subset \mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2$$

根据推论 3.18，由永久循环构成。在本节中，我们描述该谱序列中一族定义在 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2$ 上的微分，它们在$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2$ 与 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2$之间进行插值。

对于所有 i，$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(i-1)_*}\mathbb{F}_2$ 都是一个自由 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(i)_*}\mathbb{F}_2$-模，由下式给出

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(i-1)_*}\mathbb{F}_2 \cong (\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(i)_*}\mathbb{F}_2) \otimes E(\zeta_1^{2^i}, \zeta_2^{2^{i-1}}, \dots, \zeta_{i+1})$$

我们证明，对于 $i \le m$，这些生成元 $\zeta_j^{2^{i+1-j}}$ 各自承载一个 $d_{2^{i+1}-1}$ （定理 4.16）。这些生成元的平方都是圈，因此我们还需要处理 $E_{2^{i+1}}$ 上的 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(i)_*}\mathbb{F}_2$，以及各种马西积（见定义 4.7）；这是因为 $d_{2^{i+1}-1}$ 在这些生成元上的取值在代数上并不独立。根据这些微分，我们推得边缘同态的像恰好是恰好 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2$ （定理 4.18）。

为了确定这些微分，我们对 m 作归纳论证，并利用推论 3.18 推导出，微分 $d_{2^{m+1}-1}$ 必须将 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m-1)_*}\mathbb{F}_2$中的类映到 $E_{2^{m+1}-1}$的 ρ-挠无部分。随后可由 ρ局部化谱序列的结构确定该微分，而我们已完全确定了这一结构（命题 4.6）。

本节中，我们对 HSSS 使用以下记号。

$$E_r^{*,*,*}\langle m\rangle := E_r^{*,*,*}(BPGL\langle m\rangle; i_*H\mathbb{F}_2)$$
$$E_r^{*,*,*}\langle m\rangle[\rho^{-1}] := E_r^{*,*,*}(BPGL\langle m\rangle; i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}])$$

4.2.1. 局部化谱序列。我们首先确定局部化谱序列的结构

$$E_r[\rho^{-1}] = E_r^{*,*,*}(BPGL; i_*H\mathbb{F}_2[\rho^{-1}])$$

有限 $E_r\langle m\rangle[\rho^{-1}]$ 的谱序列 m 可通过对 $i > m$设定$f_i = 0$ 从该谱序列读出。

命题 4.6。在谱序列 $E_r[\rho^{-1}]$中，我们有

(1) $E_2[\rho^{-1}] \cong \mathcal{A}_*[y_2, f_1, f_2, \dots][\rho^{\pm}]$, *where*
- $f_m = \rho^{2^m-1}\overline{v}_m$ *so that* $|f_m| = (2^m - 1, 0, 2^m - 1)$
- $\mathcal{A}_*$ *is the image of the edge homomorphism*

$$\mathcal{A}_* \cong \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)[\rho^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\rho^{-1}] = \mathcal{A}_*[y_2]$$

and y_2 *is the image of the class* τ^2/ρ^2 *along the map*

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(M\mathbb{Z})[\rho^{-1}] \to \pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes M\mathbb{Z})[\rho^{-1}]$$

- *If* $q \in \mathcal{A}_i$, *the tridegree of* q *is* $(i, 0, -i)$, *and* $|y_2| = (2, 0, -2)$

(2) 除非 $k = 2^{m+1} - 1$，否则微分 $d_k[\rho^{-1}] = 0$ 对于 $m \ge 1$ 成立，并且

$$E_{2^{m+1}-1}[\rho^{-1}] = \mathcal{A}_*[y_2^{2^{m-1}}, f_m, f_{m+1}, \dots][\rho^{\pm}]$$

(3) 微分 $d_{2^{m+1}-1}[\rho^{-1}]$ 由以下内容确定

$$d_{2^{m+1}-1}[\rho^{-1}](y_2^{2^{m-1}}) = f_m$$

证明。 关于 $E_2[\rho^{-1}]$ 的描述由命题 4.3 得出。边缘同态的像由永久循环构成，因此唯一不是永久循环的代数生成元是 y_2；又由于谱序列必须收敛到

$$\pi^{\mathbb{R}}_{*,*}(i_*H\mathbb{F}_2 \otimes BPGL)[\rho^{-1}] \cong \mathcal{A}_*[\rho^{\pm}]$$

每个 f_i 都必须被某个微分命中。根据次数，所述微分模式是唯一的可能性。□

命题 4.3 还给出了映射 $E_2 \to E_2[\rho^{-1}]$的描述，并且 $E^{*,2}{}^{**}$,$(BPGL;\ i_*H\mathbb{F}_2)$ 中有一些重要的永久循环，它们沿该映射提升类 $\rho\xi_m$。

定义 4.7。 按照定义 4.2 定义 $x_0 = \rho, x_1$ ，并递归地

$$x_m = \sum_{i=0}^{m-1} x_i \zeta_{m-i}^{2^i}$$

对于 $m > 1$。 x_m 的三重次数在 E^*、$_r{}^{**}$、$(BPGL;\ i_*H\mathbb{F}_2)$ 中为 $(2^m - 2,\ -1,\ 2 - 2^m)$。

命题 4.8。映射 $E_2 \to E_2[\rho^{-1}]$ 将

$$\zeta_1^2 \mapsto \zeta_1^2 + y_2 \qquad \zeta_i \mapsto \zeta_i + \zeta_{i-1} y_2^{2^{i-2}} \qquad x_m \mapsto \rho\xi_m$$

证明。 前两条由命题 4.3 立即得到，而该结论

$$x_m \mapsto \rho\xi_m$$

由对 m 的归纳法得出。 □

$E_2 \to E_2[\rho^{-1}]$ 是单射这一事实也给出了这些类上的余作用。

推论 4.9。 在 E_2 上，类 x_m 满足以下余作用公式

$$\psi(x_0) = 1 \otimes x_0$$

$$\psi(x_m) = \sum_{i=0}^{m} \xi_i^{2^{m-i}} \otimes x_{m-i}$$

4.2.2. 关于$(\mathcal{A}(m)//\mathcal{A}(m-1))^*$的微分。余纤维序列

$$\Sigma^{2(2^m-1),2^m-1} BPGL\langle m\rangle \xrightarrow{\cdot\overline{v}_m} BPGL\langle m\rangle \to BPGL\langle m-1\rangle$$

使我们能够建立归纳论证，以确定一族微分，其中$E^{*,\ r}{}^{**}\langle m\rangle,$ 。我们先陈述一个关于谱序列态射的标准引理。

引理 4.10。假设 $E^{s,\ r}{}^{t}(1) \to E^{s,\ r}{}^{t}(2)$ 是一个谱序列态射，且映射在 $t < N$ 时为同构。那么

(1) 映射 $E^{s,\ r}{}^{t}(1) \to E^{s,\ r}{}^{t}(2)$ 在 $t + r < N + 2$ 时为同构。(2) 映射 $E^{s,\ r}{}^{t}$ (1) $\to E^{s,\ r}{}^{t}(2)$ 在 $t < N$ 时为单射。

在我们的情形下，有如下结论。

命题 4.11. 对于 $t < 2^{m+1} - 2$，映射

$$P^t BPGL\langle m\rangle \to P^t BPGL\langle m-1\rangle$$

是一个等价。

证明。 我们有一个 $BPGL$-模的余纤维序列

$$\Sigma^{2(2^m-1),2^m-1} BPGL\langle m\rangle \xrightarrow{\bar{v}_m} BPGL\langle m\rangle \to BPGL\langle m-1\rangle$$

$\bar{v}_m$-乘法的源是切片 2(2^m − 1)-连通的，结论由此得出。

□

We begin by showing that each of the classes $\zeta_j^{2^{i+1-j}}$ survives to $E_{2^{i+1}-1}$.

命题 4.12。对于 $m \geq 1$，在 $E^{*,*,*}\langle m\rangle$，

$$d_r(\zeta_j^{2^{i+1-j}}) = 0$$

对所有 $1 \leq i \leq m$、 $1 \leq j \leq i+1$ 和 $r < 2^{i+1} - 1$。

证明。 我们对 m进行归纳。当 $m = 1$时，这由以下事实可得： $d_2 = 0$；事实上，对于所有 k 和 m 都有 $d_{2k} = 0$，因为 $BPGL\langle m\rangle$ 的奇切片消失。由命题 4.11 和引理 4.10，谱序列之间的映射

$$E_r^{s,0,t}\langle m\rangle \to E_r^{s,0,t}\langle m-1\rangle$$

只要 $t < 2^{m+1} - 2$就是单射。类 $\zeta_j^{2^{i+1-j}}$ 具有 $t = 0$，因此命题的$i < m$ 情形由归纳假设得出。 $i = m$ 情形则以同样方式由以下事实得出：类 $\zeta_j^{2^{m+1-j}}$ 是 $E^{*,*,*}\langle m-1\rangle$ 中的永久循环，这由推论 3.18 得出。□

因此，我们知道， $\zeta_j^{2^{i+1-j}}$ 上第一个可能非零的微分是一个$d_{2^{i+1}-1}$。我们证明该微分非零，并且可以从局部化谱序列 $E^{*,*,*}\langle m\rangle[\rho^{-1}]$中的相应微分读出。为此，我们需要知道该微分的像落在谱序列的一个 ρ-挠无部分中；为此需要以下引理。

引理 4.13。 在 $E^{*,*,*}\langle m\rangle$ 中，对于 $k < 2^{m+1} - 1$，不存在以下形式的微分

$$d_k(x) = \bar{v}_m p(\rho, x_1) q(\zeta_i) + r(\overline{v}_i, \rho, x_1) s(\zeta_i)$$

其中

$$\begin{aligned} q(\zeta_i), s(\zeta_i) &\in \mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2 \\ p(\rho, x_1) &\in \mathbb{F}_2[\rho, x_1] \\ r(\overline{v}_i, \rho, x_1) &\in \mathbb{F}_2[\rho, x_1, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{m-1}] \end{aligned}$$

使得 pq 非零。

证明。 反设，对于某个 $k < 2^{m+1} - 1$，存在一个非零微分 $d_k(x) = y$，其对应某个 y，且具有上述形式。令 k 为满足此性质的最小值。由此可知， y 是 ρ-挠无的；由于 y 在 E_2 上是 ρ-挠无的，若有 $\rho^N y = 0 \in E_k$，则必存在某个 $k' < k$ 对应的非零微分 $d_{k'}(x') = \rho^N y$，这与 k 的最小性矛盾。

由于 $y \in E_k$ 是 ρ-挠无的，它在局部化谱序列$E^{*,*,*}\langle m\rangle[\rho^{-1}]$ 中的像非零。由自然性可知，这确定了局部化谱序列中的一个非零微分d_k。这与命题 4.6 中给出的微分描述相矛盾。□

注 4.14。 特别地，令 $rs = 0$，可得子空间

$$B_m := \overline{v}_m \cdot \mathrm{Sym}^{2^m-1}(\mathbb{F}_2\{\rho, x_1\}) \cdot (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)$$

of E_2 不会接受任何微分 d_r 对于 $r < 2^{m+1} - 1$。特别是，B_m 的 d_1、…、d_r 圈对于 $r < 2^{m+1} - 1$ 构成 ρ-挠无子空间 $E_{2^{m+1}-1}$，因为 B_m 在 E_2 上是 ρ-挠无的。

命题 4.15. 在 $E_{2^{m+1}-1}\langle m\rangle$ 中，复合

$$\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(m-1)_*} \mathbb{F}_2 \hookrightarrow E_{2^{m+1}-1} \xrightarrow{d_{2^{m+1}-1}} E_{2^{m+1}-1}$$

落在……的子空间中

$$\overline{v}_m \cdot \mathrm{Sym}^{2^m-1}(\mathbb{F}_2\{\rho, x_1\}) \cdot (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)$$

在 $E_{2^{m+1}-1}$ 中存活下来。

证明。 类 $z := d_{2^{m+1}-1}(\zeta_i^{2^{m+1-i}})$ 可以写成如下形式的单项式之和

$$y := \rho^a x_1^b m(\overline{v}_i) q(\zeta_i)$$

写成 E_2 的一个子商中的元素，其中 $m(v_i)$ 是 $\mathbb{F}_2[v_1, \dots, v_m]$ 中的单项式，而 $q(\zeta_i)$ 是 $\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2$ 中的单项式。注意，类 $\zeta_i^{2^{m+1-i}}$ 具有 $t = 0$，因此 y 具有 $t = 2^{m+1} - 2$。由此可知，对于任意 $j \le m$，$v_m \cdot \overline{v_j}$ 都不整除 $m(v_i)$。

因此，我们有 z 可以写成

$$\overline{v}_m p(\rho, x_1) q(\zeta_i) + r(\rho, x_1, \overline{v}_i) s(\zeta_i)$$

如引理所述。类 $v_m p(\rho, x_1) q(\zeta_i)$ 属于

$$\overline{v}_m \cdot \mathrm{Sym}^{2^m-1}(\mathbb{F}_2\{\rho, x_1\}) \cdot (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)$$

因为 z 的权重为零。注意，由于自然性以及以下事实， pq 非零

$$d_{2^{m+1}-1}[\rho^{-1}](y_2^{2^{m-1}}) = f_m$$

根据命题 4.6。我们断言 $r(v_i, \rho, x_1) s(\zeta_i) = 0 \in E_{2^{m+1}-1}$，从而完成证明。

若 $r(v_i, \rho, x_1) s(\zeta_i) \neq 0 \in E_{2^{m+1}-1}$，因为

$$\zeta_i^{2^{m+1-i}} \in E_r^{*,*,*}\langle m-1\rangle$$

是一个永久循环，因此我们必须有 $r(v_i, \rho, x_1) s(\zeta_i) = 0$ 作用于 $E^{*,*,*}_{2^{m+1}-1}\langle m-1\rangle$，上。于是，后一个谱序列中必定存在形如以下的微分

$$d_k(x) = r(\overline{v}_i, \rho, x_1) s(\zeta_i)$$

对于 $k < 2^{m+1} - 1$。类 x 位于

$$E_k^{2^{m+1-i}-1-k, 0, 2^{m+1}-1-k}\langle m-1\rangle$$

并且根据引理 4.10 (1)，映射

$$E_k^{2^{m+1-i}-1-k, 0, 2^{m+1}-1-k}\langle m\rangle \to E_k^{2^{m+1-i}-1-k, 0, 2^{m+1}-1-k}\langle m-1\rangle$$

是一个同构。因此，微分 $d_k(x)$ 提升为 $E^{*,*,*}_{k}\langle m\rangle$ 中的一个微分，形式为

$$d_k(\tilde{x}) = \overline{v}_m p'(\rho, x_1) q'(\zeta_i) + r'(\rho, x_1, \overline{v}_i) s'(\zeta_i)$$

但根据引理 4.13，我们必须有 $p'q'=0$，而 $E^{*,\ k}{}^{**}\langle m\rangle \to E^{*,\ ,\ k}{}^{**}\langle m-1\rangle$，映射

$$r'(\rho,x_1,\overline{v}_i)s'(\zeta_i)\mapsto r(\rho,x_1,\overline{v}_i)s(\zeta_i)$$

类似于引理 4.13 的论证表明 $r's'=rs\in E_k\langle m\rangle$。 □

定理 4.16. 在 $E^{*,**}_{2^{i+1}-1,}(BPGL\langle m\rangle;\, i_*H\mathbb{F}_2)$中，我们有以下微分

$$d_{2^{i+1}-1}(\zeta_j^{2^{i+1-j}})=\overline{v}_i\rho^{2^i-1}\left(p_{j-1}\left(\frac{x_1}{\rho},\dots,\frac{x_{j-1}}{\rho}\right)\right)^{2^{i+1-j}}$$

对所有的 $1\le i\le m$ 和 $1\le j\le i+1$，其中 p_j 是多项式

$$\zeta_j=p_j(\xi_1,\dots,\xi_j)$$

由霍普夫代数 $\mathcal{A}_*$ 中的求逆公式给出。

证明. 由引理 4.13 和命题 4.15 可知，这些微分落在谱序列中一个无 ρ-挠的部分，因此我们使用自然性和命题 4.6。特别地，映射 $E_2\to E_2[\rho^{-1}]$ 将

$$\zeta_j^{2^{i+1-j}}\mapsto \zeta_j^{2^{i+1-j}}+\zeta_{j-1}^{2^{i+1-j}}y_2^{2^{i-1}}$$

and

$$d_{2^{i+1}-1}[\rho^{-1}](\zeta_j^{2^{i+1-j}}+\zeta_{j-1}^{2^{i+1-j}}y_2^{2^{i-1}})=\zeta_{j-1}^{2^{i+1-j}}f_i$$

□

注记 4.17。 这些微分还有另一种理解方式。复合映射

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(i-1)_*}\mathbb{F}_2\hookrightarrow E_{2^{i+1}-1}\xrightarrow{d_{2^{i+1}-1}}\Sigma E_{2^{i+1}-1}\to\Sigma E_{2^{i+1}-1}[\rho^{-1}]$$

的值落在 $\Sigma\mathcal{A}_*\cdot f_i\cong\mathcal{A}_{*-2^i}$ 中，而该复合中的最后一个映射在

$$d_{2^{i+1}-1}(\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(i-1)_*}\mathbb{F}_2)$$

上是单射，这是由引理 4.13 和命题 4.15 得出的。定理给出的公式表明，这个映射与 $\mathcal{A}_*$-余模映射一致

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(i-1)_*}\mathbb{F}_2\xrightarrow{-\cap Sq^{2^i}}\mathcal{A}_{*-2^i}$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}\Delta(\zeta_j^{2^{i+1-j}})&=\sum_{l+k=j}\zeta_l^{2^{i+1-j}}\otimes\zeta_k^{2^{i+1-j+l}}\\&\equiv\sum_{l+k=j}\zeta_l^{2^{i+1-j}}\otimes(\xi_1^{2^k-1})^{2^{i+1-j+l}}\in\mathcal{A}_*\otimes\mathcal{A}_*/(\xi_2,\xi_3,\dots)\\&\equiv\sum_{l+k=i}\zeta_l^{2^{i+1-j}}\otimes\xi_1^{2^{i+1}-2^{i+1-j+l}}\in\mathcal{A}_*\otimes\mathcal{A}_*/(\xi_2,\xi_3,\dots)\end{aligned}$$

这里用到了同余关系

$$\zeta_k\equiv\xi_1^{2^k-1}\mod(\xi_2,\xi_3,\dots)$$

右侧的张量因子是 $\xi_1^{2^i}$ 当且仅当 $l=j-1$，因此在右侧与 Sq^{2^i} 配对，得到 $\zeta_{j-1}^{2^{i+1-j}}$。

定理 4.18. 权重零下边同态的像在

$$E_\infty^{*,*,*}(BPGL\langle m\rangle;i_*H\mathbb{F}_2)$$

恰好是 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2$。

证明。我们通过归纳法进行证明，其中 $m = 0$ 的情形显然。由归纳法、命题 4.12 和引理 4.10 (1)，可知类 $x \in \mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2$ 是一个 $d_2, \dots, d_{2^{m+1}-2}$-圈，当且仅当 $x \in \mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m-1)_*}\mathbb{F}_2$。如注 4.17 所述，$d_{2^{m+1}-1}$ 到 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m-1)_*}\mathbb{F}_2$ 的限制可与映射

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m-1)_*}\mathbb{F}_2 \xrightarrow{-\cap Sq^{2^m}} \mathcal{A}_{*-2^m}$$

此映射的核恰为 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2$，因为 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(m)_*}\mathbb{F}_2$ 与商 $\mathcal{A}//\mathcal{A}(m)$ 对偶，而 $\mathcal{A}(m)$ 是由以下类生成的 Steenrod 代数的子代数

$$\{Sq^{2^i} : 0 \le i \le m\} \qquad \square$$

5. The homology of $\Gamma(BPGL\langle m\rangle)$ 的 for $m \le 3$

在第 4 节中，我们确定了 $BPGL\langle m\rangle$ 的 HSSS 的 E_2 页、边同态的像以及一族微分。除去余模代数扩张问题后，计算 $H_*\Gamma(BPGL\langle m\rangle)$ 可归结为两个问题：

(1) 证明定理 4.16 中的微分全部 都是 $BPGL\langle m\rangle$ 的 HSSS 中的微分。特别要证明该谱序列在 $E_{2^{m+1}}$ 上塌缩。(2) 计算关于这些微分的同调。

据我们所知，除了利用第3.3节中边缘同态像的信息，以及通过求解较小 m 值时问题 (2) 所提供的稀疏性论证之外，没有其他方法可以解决问题 (1)。问题 (2) 纯属代数问题；然而，随着 m 增大，计算很快就会变得非常复杂，并且需要使用代数 Bockstein 谱序列。

尽管如此，我们还是针对 $m \le 3$ 完全解决了这两个问题，从而完全确定了 HSSS 的 E_∞ 页（作为余模代数）。此外，我们解决了 $m \le 2$ 的所有余模代数扩张问题。对于 $m = 3$，我们可以逐个以临时方式解决这些扩张问题，但这类扩张数量众多，因此我们不打算在此纳入这项计算。

当 $m = 1$ 时，kgl 是 $BPGL\langle 1\rangle$ 的一种形式，并且 Γ(kgl) $\simeq$ ko，因此这给出了 H_* ko 的快速计算，无需了解 π_*ko 或 Wood 余纤维序列。当 $m = 2$ 时，我们有一个等价

$$\Gamma(BPGL\langle 2\rangle) \simeq BP_{\mathbb{R}}\langle 2\rangle^{C_2}$$

由命题 2.18 得出；Hill 和 Meier 的一个定理表明，$\mathrm{tmf}_1(3)$ 是 $BP_{\mathbb{R}}\langle 2\rangle$ [21] 的一种形式。由于 $\mathrm{tmf}_1(3)^{C_2} \simeq \mathrm{tmf}_0(3)$，我们给出了余模代数的完整计算

$$H_*\mathrm{tmf}_0(3)$$

这是新的（定理 5.11）。我们利用这一结果推导出 tmf-模的 Wood 型分裂

$$\mathrm{tmf} \wedge X \simeq \mathrm{tmf}_0(3)$$

其中，X 是一个特定的 10 胞腔复形，Davis 和 Mahowald[10]曾预测过它。

当 $m = 3$ 时，目前尚不清楚 $\Gamma(BPGL\langle 3\rangle)$ 是否具有环结构。不过，我们可以利用 $BPGL$ 的环结构，以及 $BPGL\langle 3\rangle$ 的 HSSS 是 $BPGL$ 的 HSSS 上的一个模这一事实。

5.1. **的同调** $\Gamma(BPGL\langle 1\rangle)$。结合推论 4.5、定理 4.16 和推论 3.18，我们得到如下结论。

定理 5.1. 存在一个 $\mathcal{A}_*$-余模代数的谱序列，其 E_2-项为

$$E_2^{*,*,*} = \mathbb{F}_2[\zeta_1^2, \zeta_2, \ldots][\rho, x_1, \bar{v}_1]$$

它收敛到 $H_*\Gamma(BPGL\langle 1\rangle)$。我们有 d_3-微分

$$d_3(\zeta_1^2) = \rho\bar{v}_1 \qquad\qquad d_3(\zeta_2) = x_1\bar{v}_1$$

由下列元素生成的子代数

$$\rho, x_1, x_2, \bar{v}_1, \zeta_1^4, \zeta_2^2, \zeta_3, \ldots$$

由永久循环构成。

我们在图 2 中展示了该谱序列的 E_3 页。黑点表示对偶 Steenrod 代数中的类，棕点表示可被 $\bar{v}_1$ 整除的类。棕色结构线表示乘以 $\rho\bar{v}_1$，它检测 $\eta \in \pi_1 S^0$ （见 [27]）；此外，我们用绿色画出了命题 2.6 的消失线。相对于这些微分计算同调是直接的。

推论 5.2. 在 $BPGL\langle 1\rangle$ 的 *HSSS* 中，我们有

$$E_\infty = E_4 = \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^4, \zeta_2^2, \zeta_3, \ldots][\rho, x_1, x_2, \bar{v}_1]}{(\rho\bar{v}_1, x_1\bar{v}_1, x_2\bar{v}_1, x_2^2 + \rho^2\zeta_2^2 + x_1^2\zeta_1^4)}$$

在权重零处，这些关系意味着来自非零权重生成元的 E_∞ 上没有贡献，因此我们恢复了 ko 的经典同调计算（见图 3）。每个非零茎都恰好只有一个非零滤过，因此不存在非平凡的余模代数扩张。

推论 5.3. 存在一个 $\mathcal{A}_*$-余模代数同构

$$H_*(\mathrm{ko}) \cong \mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(1)_*}\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2[\zeta_1^4, \zeta_2^2, \zeta_3, \ldots]$$

5.2. **() 的同调**。 我们接下来讨论高度 2，并在图 8 中展示 HSSS 的 E_7 页。与之前一样，黑点表示对偶 Steenrod 代数中的类，红点表示可被 $\bar{v}_1$ 整除的类。橙色结构线表示乘以 $\rho^3\bar{v}_2$，它检测 $\nu \in \pi_3 S^0$；我们还用绿色画出了命题 2.6 的消失线。

定理 5.4。 存在一个 $\mathcal{A}_*$-余模代数谱序列，其 E_2-项为

$$E_2^{*,*,*} = \mathbb{F}_2[\zeta_1^2, \zeta_2, \ldots][\rho, x_1, \bar{v}_1, \bar{v}_2]$$

它收敛到 $H_*\Gamma(BPGL\langle 2\rangle)$。我们有如下微分

$$d_3(\zeta_1^2) = \rho\bar{v}_1 \qquad d_3(\zeta_2) = x_1\bar{v}_1 \qquad d_7(\zeta_1^4) = \rho^3\bar{v}_2$$
$$d_7(\zeta_2^2) = \rho x_1^2\bar{v}_2 \qquad d_7(\zeta_3) = (x_1^3 + \rho^2 x_2)\bar{v}_2$$

由这些类生成的 E_2 子代数

$$\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots$$

由永久循环组成。

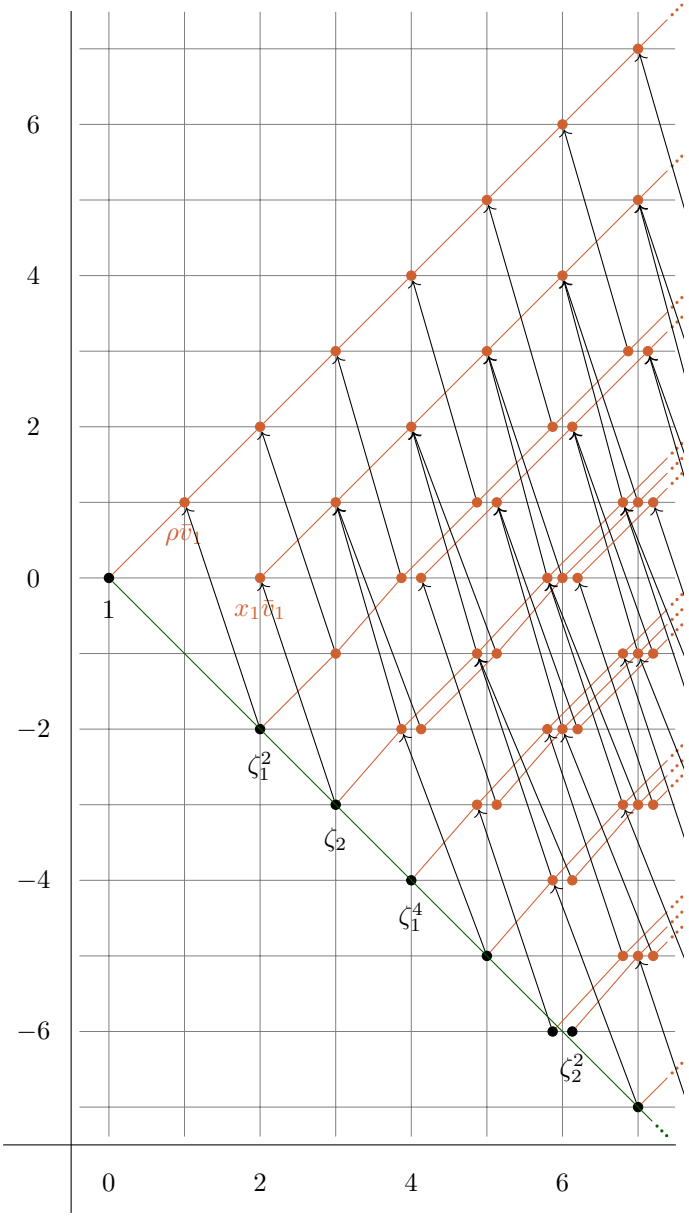


FIGURE 2. $BPGL\langle 1\rangle$ 的 HSSS 第 E_3 页。

d_3 由此可得公式：作为微分分次代数，有同构$E^{*,3}$ (
$BPGL\langle 2\rangle$; $i_*H\mathbb{F}_2$) $\cong E^{*,3}$ ($BPGL\langle 1\rangle$; $i_*H\mathbb{F}_2$)$[\bar{v}_2]$并据此得出以下结论。

推论5.5。 $E_4 = E_7$ 页为

$$\frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^4, \zeta_2^2, \zeta_3, \ldots][\rho, x_1, x_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2]}{(\rho\bar{v}_1, x_1\bar{v}_1, x_2\bar{v}_1, x_2^2 + \rho^2\zeta_2^2 + x_1^2\zeta_1^4)}$$

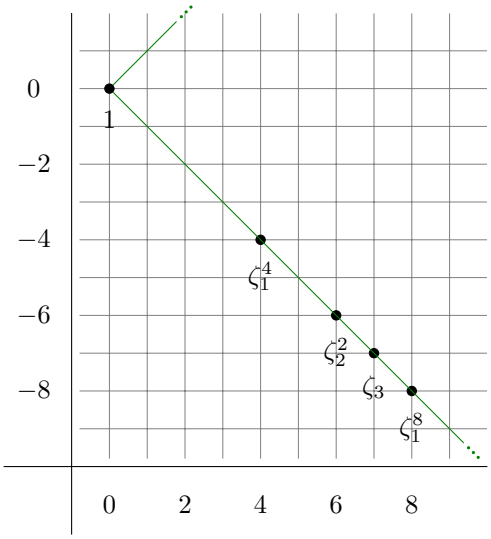


FIGURE 3. HSSS 的 E_∞ 页对应于 $BPGL\langle 1\rangle$。

关于 d_7 计算同调要棘手得多，因为与 E_3 不同， E_7 并非 ρ-挠无关，因此必须考虑若干马西积。例如，我们有 d_7-圈

$$\bar{v}_1\zeta_1^4 \in \langle \bar{v}_1, \rho^3, \bar{v}_2\rangle$$

不过，我们主要关注权重零中的计算，而这些类都无法对权重零的茎作出贡献。事实上，我们观察到如下结果。

命题 5.6。微分分次代数的映射

$$E_7 \to E_7/(\bar{v}_1) = \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^4, \zeta_2^2, \zeta_3, \ldots][\rho, x_1, x_2, \bar{v}_2]}{(x_2^2 + \rho^2\zeta_2^2 + x_1^2\zeta_1^4)}$$

在权 ≤ 0 上是一个同构。

证明。关系 $\rho\bar{v}_1 = x_1\bar{v}_1 = x_2\bar{v}_1 = 0$ 表明，该映射在权 ≤ 0 上是一个同构。它是微分分次代数的映射，因为理想 $(\bar{v}_1) \subset E_7$ 包含于 $\ker(d_7)$ 中。□

因此，我们转而计算较简单的微分分次代数 $(E_7/(\bar{v}_1), d_7)$ 的同调。我们断言，$\ker(d_7)$ 是由以下类生成的 $E_7/(\bar{v}_1)$ 的子代数

$$\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_2, \zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots$$

由此可得如下表示

$$\ker(d_7) = \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_2]}{(x_2^4 + \rho^4\zeta_2^4 + x_1^4\zeta_1^8, x_3^2 + \rho^2\zeta_3^2 + x_1^2\zeta_2^4 + x_2^2\zeta_1^8)}$$

根据对该核的这一描述来表示我们的微分，可得

$$\begin{aligned} d_7(\zeta_1^4) &= \rho^3\bar{v}_2 & d_7(\zeta_2^2) &= \rho x_1^2\bar{v}_2 \\ d_7(\zeta_3) &= (x_1^3+\rho^2 x_2)\bar{v}_2 & d_7(\zeta_1^4\zeta_2^2) &= \rho x_2^2\bar{v}_2 \\ d_7(\zeta_1^4\zeta_3) &= (x_1x_2^2+\rho^2x_3)\bar{v}_2 & d_7(\zeta_2^2\zeta_3) &= (x_1^2x_3+x_2^3)\bar{v}_2 \\ d_7(\zeta_1^4\zeta_2^2\zeta_3) &= (x_1^2x_2\zeta_1^8+x_2^2x_3+\rho^2x_1\zeta_2^4)\bar{v}_2 \end{aligned}$$

令 I_2 为由此关系列表生成的 $\ker(d_7)$ 中的理想，则可得

$$H_*(E_7/(\bar{v}_1)) = \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^8,\zeta_2^4,\zeta_3^2,\zeta_4,\ldots][\rho,x_1,x_2,x_3,\bar{v}_2]}{I_2+(x_2^4+\rho^4\zeta_2^4+x_1^4\zeta_1^8, x_3^2+\rho^2\zeta_3^2+x_1^2\zeta_2^4+x_2^2\zeta_1^8)}$$

剩下需要验证的是，所述元素列表确实生成 $\ker(d_7)$。我们通过运行 ρ-Bockstein谱序列来完成这一点；由于 $E_7/(\bar{v}_1)$ 是（分次） ρ-完备的，该谱序列是收敛的。我们首先计算 ρ-进滤过的伴随分次。

命题 5.7。 E_0-页的 *ρ-Bockstein*谱序列为

$$\frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^4,\zeta_2^2,\zeta_3,\ldots][\rho,x_1,x_2,\bar{v}_2]}{(x_2^2+x_1^2\zeta_1^4)}$$

该谱序列收敛于 $E_7/$（$\bar{v}_1$）的同调。我们有如下微分

$$\delta_0(\zeta_3) = x_1^3\bar{v}_2 \qquad \delta_1(\zeta_2^2) = \rho x_1^2\bar{v}_2 \qquad \delta_3(\zeta_1^4) = \rho^3\bar{v}_2$$

E_0 中 $\delta_0(\zeta_3)$的湮灭子理想是平凡的，因此 δ_0 不会产生任何马西积循环。由此得到以下结论。

命题 5.8. *ρ-Bockstein*谱序列的 E_1页为

$$\frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^4,\zeta_2^2,\zeta_3^2,\zeta_4,\ldots][\rho,x_1,x_2,\bar{v}_2]}{(x_2^2+x_1^2\zeta_1^4, x_1^3\bar{v}_2)}$$

为计算 E_2页，我们注意到类 x_3 是 $E_7/(\bar{v}_1)$中的一个圈，因此它在 ρ-Bockstein谱序列中投影为一个永久循环。我们也将其投影记为

$$x_1\zeta_2^2 + x_2\zeta_1^4$$

x_3。

命题 5.9. *ρ-Bockstein*谱序列的 E_3页为

$$\frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^4,\zeta_2^4,\zeta_3^2,\zeta_4,\ldots][\rho,x_1,x_2,x_3,\bar{v}_2]}{(x_3^2+x_2^2\zeta_1^8+x_1^2\zeta_2^4, x_2^2+x_1^2\zeta_1^4, x_1^3\bar{v}_2, \rho x_1^2\bar{v}_2, (x_1^2x_3+x_2^3)\bar{v}_2)}$$

证明. δ_1 的核作为代数由以下类生成

$$\rho, x_1, x_2, \bar{v}_2, \zeta_1^4, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots$$

以及 $\zeta_2^2\cdot\mathrm{ann}_{E_1}(\rho x_1^2\bar{v}_2)$，并且我们断言 $\mathrm{ann}_{E_1}(\rho x_1^2\bar{v}_2) = (x_1)$。为此，令

$$R := \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^4,\zeta_2^2,\zeta_3^2,\zeta_4,\ldots][\rho,x_1,x_2,\bar{v}_2]}{(x_2^2+x_1^2\zeta_1^4)}$$

存在一个满射 $\pi\colon R\to R/(x_1^3\bar{v}_2) = E_1$，因此如果

$$\pi(r)\cdot\rho x_1^2\bar{v}_2 = 0$$

于是 $r\rho x_1^2\bar{v}_2 \in (x_1^3\bar{v}_2) \subset (x_1^3)$ 在 R 中。利用 R 对于 T 一个 x_1-无挠环具有 $T[\rho,\bar{v}_2]$ 的形式，可得 $r\in(x_1)$。

因此，映射

$$S := \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^4, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_2]}{(x_3^2 + x_2^2\zeta_1^8 + x_1^2\zeta_2^4, x_2^2 + x_1^2\zeta_1^4, x_1^3\bar{v}_2, (x_1^2x_3 + x_2^3)\bar{v}_2)} \to \ker(\delta_1)$$

是满射。为证明它是单射，注意到映射

$$S \to S[y]/(y^2 + \zeta_2^4, x_1y + x_3 + x_2\zeta_1^4)$$

是单射，并且通过设定 $y = \zeta_2^2$，很容易将后者识别为 E_1。现在，$\mathrm{im}(\delta_1)$ 是 S 中由 $\rho x_1^2\bar{v}_2$ 生成的理想，结论随即得出。□

命题 5.10. *ρ-Bockstein*谱序列的 E_4 页由以下商给出：

$$\mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_2]$$

再对由以下元素生成的理想取商

$x_3^2 + x_2^2\zeta_2^4 + x_1^2\zeta_1^8$	$x_2^4 + x_1^4\zeta_1^8$	$x_1^3\bar{v}_2$
$\rho x_1^2\bar{v}_2$	$\rho^3\bar{v}_2$	$(x_1^2x_3 + x_2^3)\bar{v}_2$
$x_2^2x_3\bar{v}_2 + \zeta_1^8x_1^2x_2\bar{v}_2$	$x_2^2\rho\bar{v}_2$	$x_1x_2^2\bar{v}_2$

证明。 δ_3 的核由以下类生成

$$\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_2, \zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots$$

以及 $\zeta_1^4 \cdot \mathrm{ann}_{E_3}(\rho^3\bar{v}_2)$，并且我们断言 $\mathrm{ann}_{E_3}(\rho^3\bar{v}_2) = (x_1^2)$。为证明这一点，令

$$R := \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^4, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_2]}{(x_3^2 + x_1^2\zeta_2^4 + x_2^2\zeta_1^8, x_2^2 + x_1^2\zeta_1^4)}$$

我们有一个满射

$$\pi : R \to R/(\rho x_1^2\bar{v}_2, x_1^3\bar{v}_2, (x_1^2x_3 + x_2^3)\bar{v}_2) = E_3$$

因此，如果 $\pi(r) \cdot \rho^3\bar{v}_2 = 0$，那么

$$r\rho^3\bar{v}_2 \in (\rho x_1^2\bar{v}_2, x_1^3\bar{v}_2, (x_1^2x_3 + x_2^3)\bar{v}_2) \subset (x_1^2)$$

在 R 中。利用 R 对于任意 x_1-挠无环 T 环都具有 $T[\rho, \bar{v}_2]$ 的形式这一事实，我们可知 $r \in (x_1^2)$。

特别地，当 $x_1^2\zeta_1^4 = x_2^2$ 时，我们不会得到任何新的马西积循环，因此映射

$$S := \mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_2]/J \to \ker(\partial_7)$$

是满射，其中 J 是由命题陈述中所列元素生成的理想，并去掉了元素 $\rho^3\bar{v}_2$。为证明该映射是单射，注意到映射

$$S \to S[y]/(y^2 + \zeta_1^8, x_1^2y + x_2^2)$$

是单射，而后者通过令 $y = \zeta_1^4$ 很容易识别为 E_3。 □

其余代数生成元都是永久循环，因此 ρ-Bockstein 谱序列在 E_4 上塌缩。这验证了命题 5.6 之后的讨论。

5.2.1. *tmf(3)* 的同调。转到权重零时，我们得到子代数$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(2)_*}\mathbb{F}_2$ 以及以下十个元素

$$\begin{array}{ccc} 1 \in H_0 & \rho^2 x_1 \bar{v}_2 \in H_4 & \rho^2 x_2 \bar{v}_2 \in H_6 \\ \rho x_1 x_2 \bar{v}_2 \in H_7 & x_1^2 x_2 \bar{v}_2 \in H_8 & \rho^2 x_3 \bar{v}_2 \in H_{10} \\ \rho x_1 x_3 \bar{v}_2 \in H_{11} & x_1^2 x_3 \bar{v}_2 \in H_{12} & \rho x_2 x_3 \bar{v}_2 \in H_{13} \\ x_1 x_2 x_3 \bar{v}_2 \in H_{14} & & \end{array}$$

这些构成一个 $\mathcal{A}(2)_*$-余模代数 M_2，维数为 10，其余作用由推论 4.9 以及 ρ 和 $\bar{v}_2$ 是本原元这一事实确定。我们在图 1 中展示了 M_2，其中省略了单位类，因为它生成一个平凡余模直和项。

定理 5.11. $\mathrm{tmf}_0(3) \simeq \Gamma(BPGL\langle 2\rangle)$ 的同调作为$\mathcal{A}_*$-余模代数同构于

$$\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(2)_*} M_2$$

其中，$\overline{M_2}$ 与图 *1* 中相同，且 M_2 中的乘法平方为零。

证明. 根据命题 5.6 后的讨论，该描述可由 $BPGL\langle 2\rangle$ 的 HSSS 的 E_∞ 页得到。此页显示于图 9。

现在只需注意到，HSSS 中不存在非平凡的余模代数扩张。事实上，M_2 中的每个类在其对应的茎中都处于最高滤过，因此投影 $H_*\mathrm{tmf}_0(3) \to M_2$ 是一个 $\mathcal{A}(2)_*$-余模代数的映射，它与一个 $\mathcal{A}_*$-余模代数的同构互为伴随。

$$H_*\mathrm{tmf}_0(3) \to \mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(2)_*} M_2 \qquad \square$$

在 Hill–Lawson [20], 的结果出现之前，人们尚不知道如何通过导出代数几何方法构造周期谱 $\mathrm{TMF}_0(3)$ 的连通模型 $\mathrm{tmf}_0(3)$。尽管如此，人们已对这类谱的计算方面进行了详细研究，Davis-Mahowald 也提出了这类谱的若干种定义。特别是，他们构造了一个特定的 10 胞腔复形 X，并认为谱 tmf $\wedge X$ 是一个良好的连通模型。他们给出了 X的显式构造，而我们则通过 Toda 障碍理论证明它的存在。

命题 5.12。设 N 是一个 $\mathcal{A}$-模，其在维数3、5、6、7、9、10、11、12、13各有一个生成元，且以下 *Steenrod* 平方在维数为 *3* 的生成元 g 上非零

$$\mathrm{Sq}^2, \mathrm{Sq}^3, \mathrm{Sq}^4, \mathrm{Sq}^4\mathrm{Sq}^2, \mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^2, \mathrm{Sq}^6\mathrm{Sq}^2 = \mathrm{Sq}^8, \mathrm{Sq}^6\mathrm{Sq}^3, \mathrm{Sq}^7\mathrm{Sq}^3$$

并且 $\mathrm{Sq}^6(g) = 0$。那么存在唯一的 *2*-完备有下界谱 Y，满足 $H^*Y \cong N$。此外，存在一个映射 $Y \to S^0$，扩展 2ν。

证明。Toda 障碍理论（见 [8, 定理 3.2] 或 [39]）表明，只需证明其中的 -2 茎

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{*,*}(N, N)$$

是平凡的。使用 Bruner 的软件很容易验证这一点，我们在图 4 中展示了该图表。-1-茎在滤过高于 1 的位置不含任何类，因此唯一性得以成立。映射 $Y \to S^0$ 的存在性也可以直接通过 Adams 谱序列验证，这正是 [10, 定理 2.1(b)] 中采用的论证。□

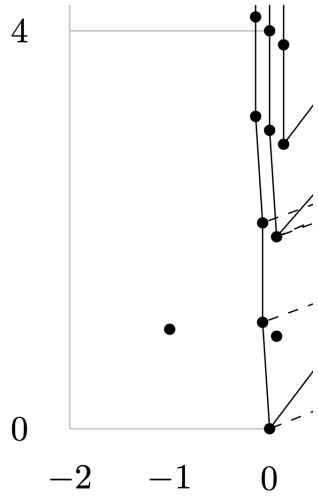


FIGURE 4. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(N,\ N)$

很容易验证，$\mathcal{A}$-模 N 具有这样的性质：其对$\mathcal{A}(2)$的限制与 $\mathcal{A}(2)_*$-余模 $\Sigma^{-1}M_2$对偶。由此可得以下结论。

推论 5.13. 令 X 为命题 *5.12* 中构造的映射 $Y \to S^0$ 的余纤维。存在一个 tmf-模的 *2*-局部等价

$$\mathrm{tmf} \wedge X \to \mathrm{tmf}_0(3)$$

证明。 tmf 和 tmf_0(3) 的同伦群在每个次数上都是有限生成的，因此只需构造一个 2-完备等价；只要存在任意映射 $X \to \mathrm{tmf}_0$(3)，使其诱导出 $\mathcal{A}_*$-余模映射 $H_*X \to \mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(2)_*}M_2$，而该映射与 $\mathcal{A}(2)_*$-余模 M_2 的恒等映射伴随，即可得到此等价。

为此，只需证明在 Adams 谱序列中

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_*}(H_*X, H_*\mathrm{tmf}_0(3)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)_*}(M_2, M_2) \implies [X, \mathrm{tmf}_0(3)]^\wedge_2$$

恒等映射 ι 是永久循环。根据命题 5.12，X 的 4-骨架是 2-胞腔复形 $C(2\nu)$。由于 $2\nu = 0 \in \pi_3\mathrm{tmf}_0$(3)（见 [21] 或 [27]），单位映射$S^0 \to \mathrm{tmf}_0$(3) 可延拓到 $C(2\nu)$ 上，这意味着 Adams 谱序列之间的映射

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_*}(H_*X, H_*\mathrm{tmf}_0(3)) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_*}(H_*C(2\nu), H_*\mathrm{tmf}_0(3))$$

将 ι 映射为一个永久循环。

我们使用 Bruner 的 ext 软件在图 5 中生成前者，在图 6a 中生成后者。该映射在双次数 $(0,0)$、$(-1,2)$ 和 $(-1,3)$ 上是同构，并将 ι 映射到图 6a 中左侧 h_0-塔的生成元。由自然性可知，图 5 中的 ι 不支撑 $d_{<4}$。我们断言，图 6a 中右侧 h_0-塔的生成元支撑一个非平凡的 d_2。由此，非平凡的d_2 提升到图 5；进而由 h_0-线性可知，-1 茎在 E_3-页上是平凡的。

还需要证明图 6a 中所声称的 d_2 结论。这可由自然性经由映射

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_*}(H_*C(2\nu), \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_*}(H_*C(2\nu), H_*\mathrm{tmf}_0(3))$$

并且我们在图 6b 中展示前一 E_2 页。由于

$$D(C(2\nu)) \not\simeq S^{-4} \vee S^0$$

双次数 (0,0) 处的类必须支持一个微分。由同伦中的长正合序列可轻易得出 $\pi_{-1}D(C(2\nu)) = \pi_3 C(2\nu) = \mathbb{Z}/2$，这就推出了所声称的 d_2。□

推论5.14. tmf_0 的 *Adams* 谱序列(3) 不会在E_2上退化。特别地，我们有 $d_2(x) = h_0h_2$，其中 x 是双次数$(4, 0)$处的非平凡类。

证明。 所声称的 d_2 可由自然性通过映射 $C(2\nu) \to \mathrm{tmf}_0(3)$ 得出，其中 $C(2\nu)$ 的 Adams 谱序列支持在推论 5.13 的证明中讨论的非平凡 d_2 。我们在图 7 中展示了 $\mathrm{tmf}_0(3)$ 的 Adams E_2 页。□

注记 5.15。 推论5.14与动机Adams谱序列形成对比：后者对 $BPGL\langle m\rangle$ 所有 m 都会塌缩（ $BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle$的 C_2-等变Adams谱序列也是如此）。

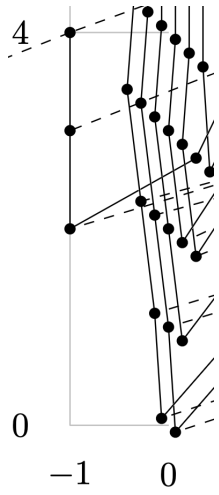


FIGURE 5. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_*}(H_*X, H_*\mathrm{tmf}_0(3))$

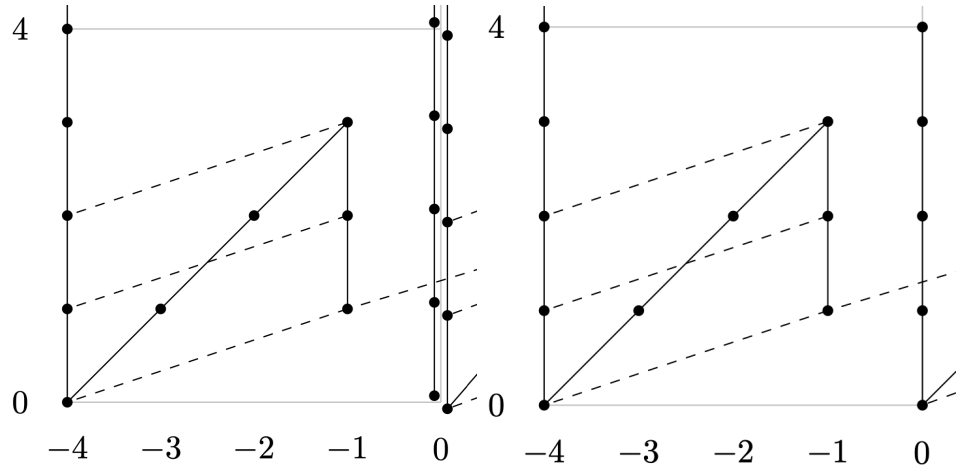
5.3. **()的同调**。 我们沿用与 $m = 2$情形类似的论证来计算 $BPGL\langle 3\rangle$的HSSS。 E_{15} 页见图 10，约定与之前相同，其中 $\bar{v}_3$ 类用蓝点表示，蓝色结构线表示乘以 $\rho^7\bar{v}_3$，它检测 $\sigma \in \pi_7 S^0$。

定理 5.16。 存在一个 $\mathcal{A}_*$-余模代数谱序列，其 E_2项为

$$E_2^{*,*,*} = \mathbb{F}_2[\zeta_1^2, \zeta_2, \ldots][\rho, x_1, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3]$$

我们有微分

$$d_3(\zeta_1^2) = \rho\bar{v}_1 \qquad d_3(\zeta_2) = x_1\bar{v}_1 \qquad d_7(\zeta_1^4) = \rho^3\bar{v}_2$$
$$d_7(\zeta_2^2) = \rho x_1^2\bar{v}_2 \qquad d_7(\zeta_3) = (x_1^3 + \rho^2 x_2)\bar{v}_2 \qquad d_{15}(\zeta_1^8) = \rho^7\bar{v}_3$$
$$d_{15}(\zeta_2^4) = \rho^3 x_1^4\bar{v}_3 \quad d_{15}(\zeta_3^2) = (\rho x_1^6 + \rho^5 x_2^2)\bar{v}_3 \quad d_{15}(\zeta_4) = (x_1^7 + \rho^2 x_1^4 x_2 + \rho^4 x_1 x_2^2 + \rho^6 x_3)\bar{v}_3$$



(A) $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_*}(H_*C(2\nu)\ H_*\mathrm{tmf}_0(3))$ (B) $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_*}(H_*C(2\nu)\ H_*S^0)$

FIGURE 6

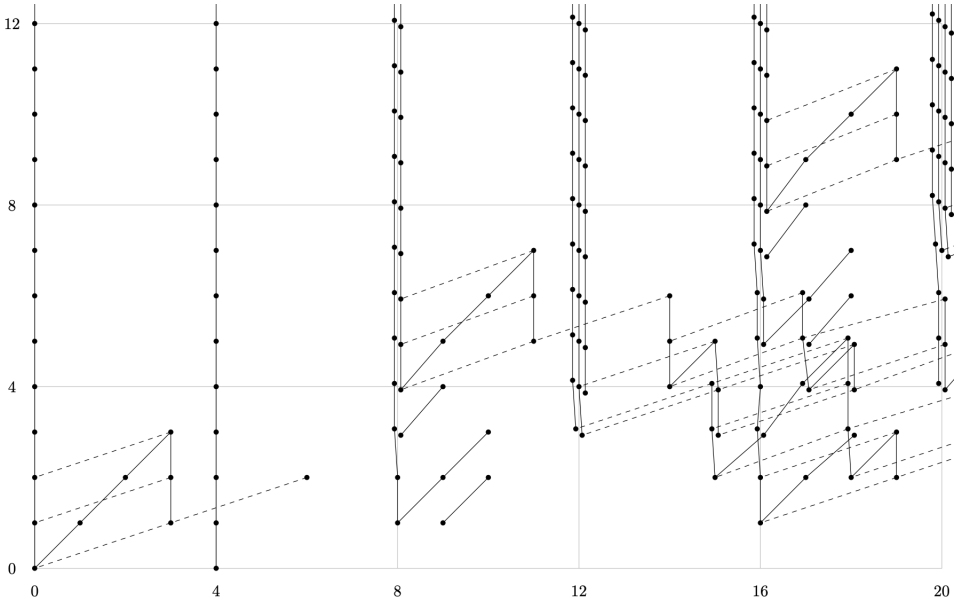


FIGURE 7. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_*}(\mathbb{F}_2, H_*\mathrm{tmf}_0(3))$

由这些类生成的 E_2 子代数

$$\rho, x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \zeta_1^{16}, \zeta_2^8, \zeta_3^4, \zeta_4^2, \zeta_5, \dots$$

由永久循环组成。

由 $d_{\leq 7}$ 的公式可知，作为微分分次代数，有一个同构

$$E_{15}^{*,*,*}(BPGL\langle 3\rangle; i_*H\mathbb{F}_2) \cong E_8^{*,*,*}(BPGL\langle 2\rangle; i_*H\mathbb{F}_2)[\bar{v}_3]$$

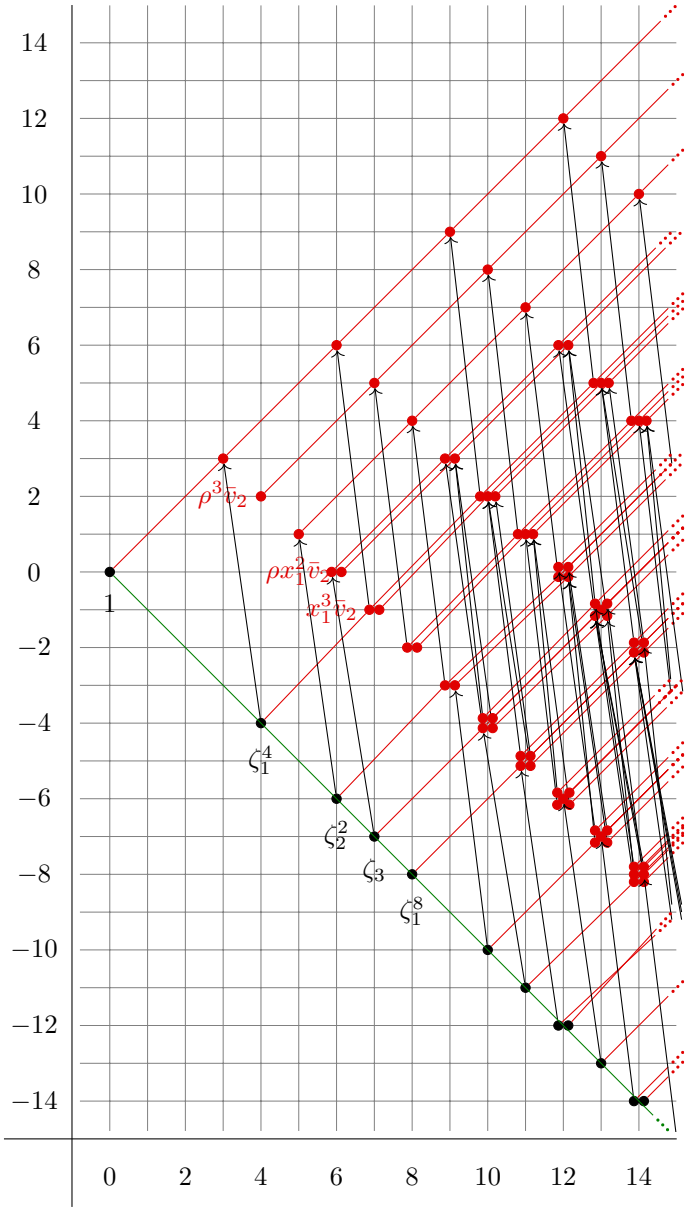


FIGURE 8. E_7 的 HSSS 页，适用于 $BPGL\langle 2\rangle$。

理想 $(v_1,\ v_2)\subset E_{15}$ 包含于 $\ker(d_{15})$ 中，并且我们有微分分次代数之间的映射

$$E_{15}\to E_{15}/(\overline{v}_1,\overline{v}_2^2)\to E_{15}/(\overline{v}_1,\overline{v}_2)$$

由于 $d_3,\ v_1$ 在权重 0 上没有贡献；由于 $d_7,{}^-v_2^2$ 在权重 0 上也没有贡献。事实上，第一个映射在非正权重上是同构，第二个映射是满射，其核平方为零，由 d_{15}-圈组成（出于次数方面的原因）。利用这一点，不难

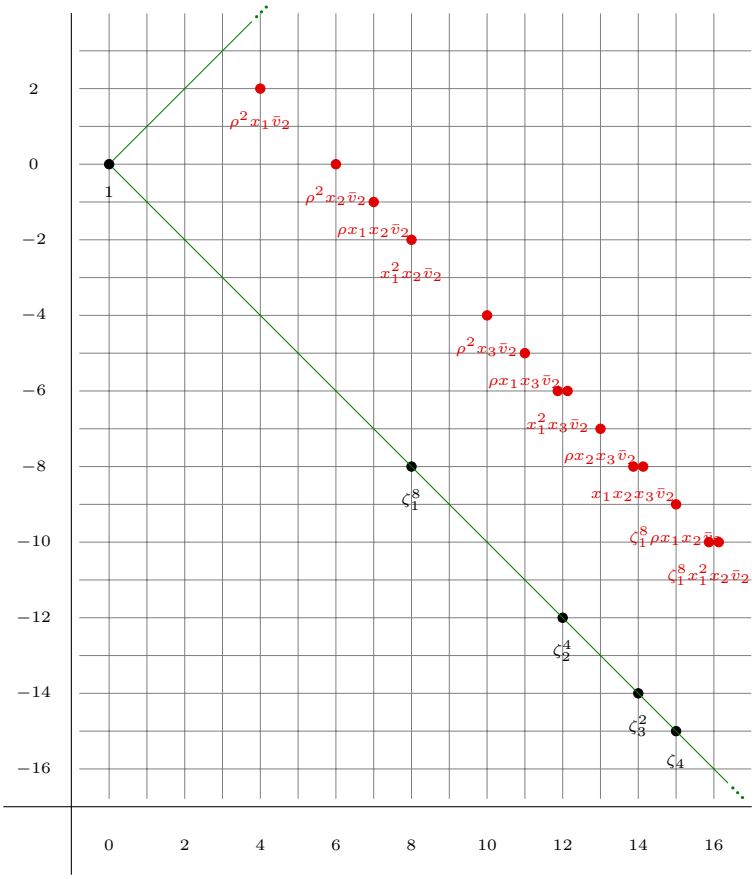


FIGURE 9. 对于 $BPGL\langle 2\rangle$ 的 HSSS 的 E_∞ 页。

从 $H_*(E_{15}/(v_1,\ v_2))$ 中恢复 E_{16} 页，并且我们有一个同构

$$E_{15}/(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \cong \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_3]}{(x_2^4 + \zeta_1^8 x_1^4 + \zeta_2^4 \rho^4, x_3^2 + \zeta_1^8 x_2^2 + \zeta_2^4 x_1^2 + \zeta_3^2 \rho^2)}$$

其中 d_{15} 由上面给出的四个显式微分确定。

我们断言，$\ker(d_{15})$ 是由这些类生成的 $E_{15}/(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ 的子代数

$$\zeta_1^{16}, \zeta_2^8, \zeta_3^4, \zeta_4^2, \zeta_5, \ldots, \rho, x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{v}_3$$

由此可得，我们有如下表示

$$\ker(d_{15}) = \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^{16}, \zeta_2^8, \zeta_3^4, \zeta_4^2, \zeta_5, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{v}_3]}{(x_2^8 + \rho^8\zeta_2^8 + x_1^8\zeta_1^{16}, x_3^4 + \rho^4\zeta_3^4 + x_1^4\zeta_2^8 + x_2^4\zeta_1^{16}, x_4^2 + \rho^2\zeta_4^2 + x_1^2\zeta_3^4 + x_2^2\zeta_2^8 + x_3^2\zeta_1^{16})}$$

将我们的微分用这一核的描述来表示，可得

$$\begin{aligned}
d_{15}(\zeta_1^8) &= \rho^7 \bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_2^4) &= \rho^3 x_1^4 \bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_3^2) &= (\rho x_1^6 + \rho^5 x_2^2)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_4) &= (x_1^7 + \rho^2 x_1^4 x_2 + \rho^4 x_1 x_2^2 + \rho^6 x_3)\bar{v}_3
\end{aligned}$$

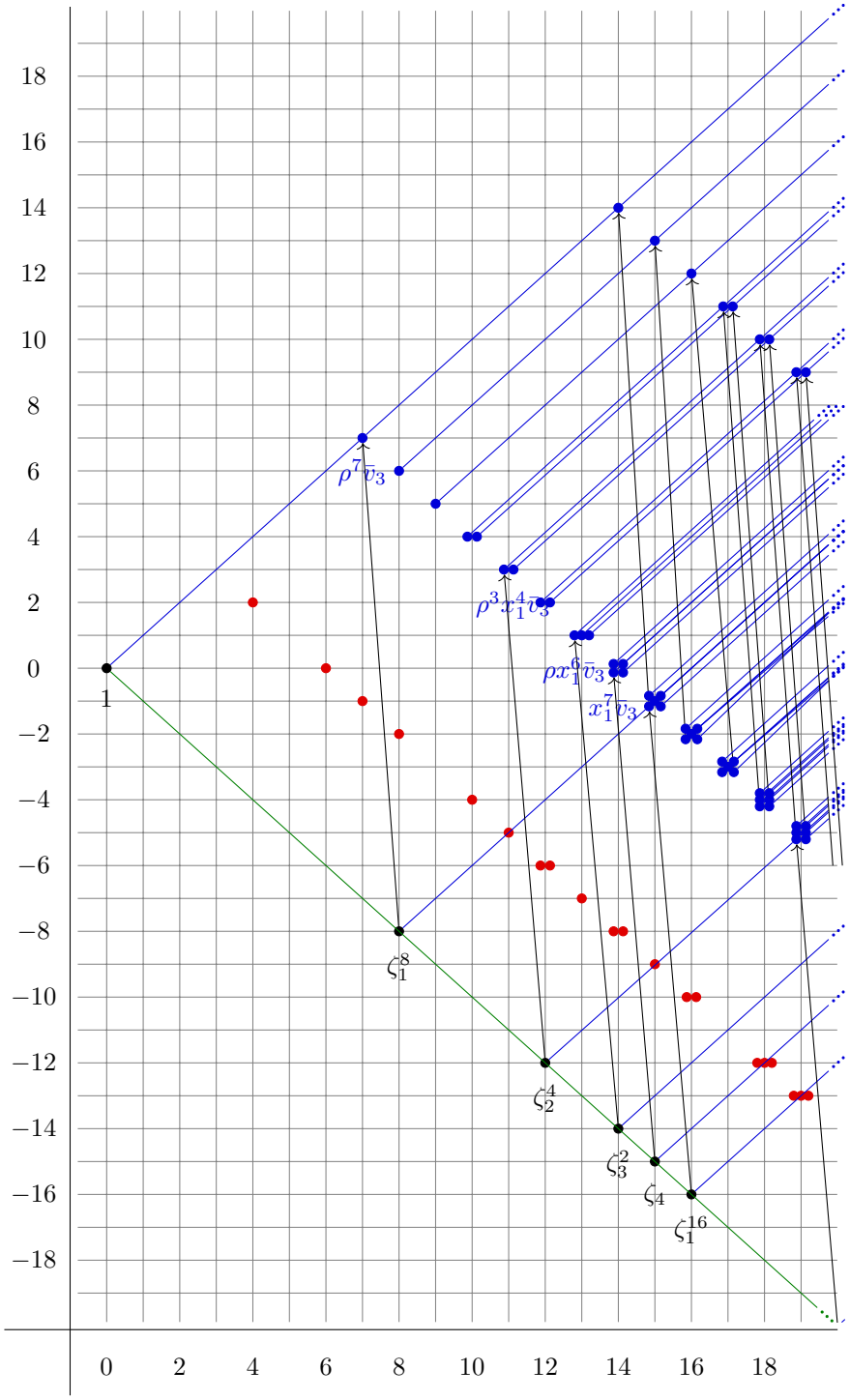


FIGURE 10. E_{15} 的 HSSS 中的 $BPGL\langle 3\rangle$ 页。

$$
\begin{aligned}
d_{15}(\zeta_1^8\zeta_2^4) &= \rho^3 x_2^4 \bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_1^8\zeta_3^2) &= (\rho^5 x_3^2 + \rho x_1^2 x_2^4)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_1^8\zeta_4) &= (x_1^3 x_2^4 + \rho^2 x_2^5 + \rho^4 x_1 x_3^2 + \rho^6 x_4)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_2^4\zeta_3^3) &= (\rho x_1^4 x_3^2 + \rho x_2^6)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_2^4\zeta_4) &= (x_1^5 x_3^2 + x_1 x_2^6 + \rho^2 x_1^4 x_4 + \rho^2 x_2^4 x_3)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_3^2\zeta_4) &= (x_2^7 + x_1^6 x_4 + x_1^4 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 x_3 + \rho^4 x_2^2 x_4 + \rho^4 x_3^3)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_1^8\zeta_2^4\zeta_3^2) &= (\rho x_2^4 x_3^2 + \rho x_1^4 x_2^2 \zeta_1^{16} + \rho^5 x_1^2 \zeta_2^8)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_1^8\zeta_2^4\zeta_4) &= (x_1 x_2^4 x_3^2 + x_1^5 x_2^2 \zeta_1^{16} + \rho^2 x_2^4 x_4 + \rho^2 x_1^4 x_3 \zeta_1^{16} + \rho^4 x_1^3 \zeta_2^8 + \rho^6 x_2 \zeta_2^8)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_1^8\zeta_3^2\zeta_4) &= (x_1^2 x_2^4 x_4 + x_2^5 x_3^2 + x_1^4 x_2^3 \zeta_1^{16} + \rho^4 x_3^3 x_4 + \rho^4 x_2^2 x_3 \zeta_1^{16} + \rho^4 x_1^2 x_2 \zeta_2^8 + \rho^6 x_1 \zeta_3^4)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_2^4\zeta_3^2\zeta_4) &= (x_1^4 x_3^2 x_4 + x_2^6 x_4 + x_2^4 x_3^3 + x_1^4 x_2^2 x_3 \zeta_1^{16} + (x_1^6 x_2 + \rho^4 x_1^2 x_3 + \rho^4 x_2^3)\zeta_2^8 + \rho^2 x_1^5 \zeta_3^4)\bar{v}_3 \\
d_{15}(\zeta_1^8\zeta_2^4\zeta_3^2\zeta_4) &= (x_2^4 x_3^2 x_4 + x_1^2 x_2^5 \zeta_2^8 + x_1^4 x_2^2 x_4 \zeta_1^{16} + x_1^4 x_3^3 \zeta_1^{16} + x_2^6 x_3 \zeta_1^{16} + \rho^2 x_1 x_2^4 \zeta_3^4 \\
&\quad + \rho^4 x_1^2 x_4 \zeta_2^8 + \rho^4 x_2 x_3^2 \zeta_2^8)\bar{v}_3
\end{aligned}
$$

令 I_3 为由这组关系生成的 ker(d_{15}) 中的理想，由此可得 $H_*(E_{15}/(\bar{v}_1,\ \bar{v}_2))$ $= \ker(d_{15})/I_3$。接下来需要验证所声称的元素列表确实生成 ker(d_{15})。我们像之前一样运行 ρ-Bockstein 谱序列，而论证过程与 $m = 2$ 情形非常相似。

命题 5.17. *E_0-页的 ρ-Bockstein谱序列如下：*

$$\frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_3]}{(x_2^4 + \zeta_1^8 x_1^4, x_3^2 + \zeta_1^8 x_2^2 + \zeta_2^4 x_1^2)}$$

我们有如下微分

$$\delta_0(\zeta_4) = x_1^7 \bar{v}_3 \qquad \delta_1(\zeta_3^2) = \rho x_1^6 \bar{v}_3 \qquad \delta_3(\zeta_2^4) = \rho^3 x_1^4 \bar{v}_3 \qquad \delta_7(\zeta_1^8) = \rho^7 \bar{v}_3$$

$\delta_0(\zeta_4)$ 在 E_0 中的湮灭子理想是平凡的，因此 δ_0 不会产生任何马西积循环。由此得到以下结论。

命题 5.18. *E_1-页的 ρ-Bockstein谱序列如下：*

$$\frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4^2, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, \bar{v}_3]}{(x_2^4 + \zeta_1^8 x_1^4, x_3^2 + \zeta_1^8 x_2^2 + \zeta_2^4 x_1^2, x_1^7 \bar{v}_3)}$$

E_1 中 $\delta_1(\zeta_3^2)$的湮灭子理想是（x_1），由此得到我们的马西积 x_4。

命题 5.19. *ρ-Bockstein谱序列的 E_3页由以下多项式环的商给出*

$$\mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^4, \zeta_4^2, \zeta_5, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{v}_3]$$

再对由以下元素生成的理想取商

$$
\begin{aligned}
&x_2^4 + \zeta_1^8 x_1^4, && x_3^2 + \zeta_1^8 x_2^2 + \zeta_2^4 x_1^2, \\
&x_4^2 + x_1^2 \zeta_3^4 + x_2^2 \zeta_2^8 + x_3^2 \zeta_1^{16}, && x_1^7 \bar{v}_3, \\
&(x_2^7 + x_1^6 x_4 + x_1^4 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 x_3)\bar{v}_3, && \rho x_1^6 \bar{v}_3.
\end{aligned}
$$

证明。 $\mathrm{ann}^{E_1}(\rho x_1^6 v_3)$ 的描述表明，该映射

$$S := \mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^4, \zeta_4^2, \zeta_5, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{v}_3]/J \to \ker(\delta_1)$$

是满射，其中 J 是由命题陈述中的元素列表（去掉 $\rho x_1^6\bar{v}_3$ ）生成的理想。为证明它是单射，注意该映射

$$S \to S[y]/(y^2+\zeta_3^4, x_1y + x_2\zeta_2^4 + x_3\zeta_1^8 + x_4)$$

是单射，而后者很容易通过设定 $y=\zeta_3^2$ 识别为 E_1 。 □

命题 5.20. E_7-页的 ρ-*Bockstein* 谱序列由多项式环的商给出

$$\mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^8, \zeta_3^4, \zeta_4^2, \zeta_5, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{v}_3]$$

由以下元素生成的理想

$$\begin{array}{ll}
x_2^4 + \zeta_1^8 x_1^4, & x_3^4 + \zeta_1^{16}x_2^4 + \zeta_2^8 x_1^4, \\
x_4^2 + x_1^2\zeta_3^4 + x_2^2\zeta_2^8 + x_3^2\zeta_1^{16}, & x_1^7\bar{v}_3, \\
(x_2^7 + x_1^6x_4 + x_1^4x_2x_3^2 + x_1^2x_2^4x_3)\bar{v}_3, & \rho x_1^6\bar{v}_3, \\
\rho^3 x_1^4\bar{v}_3, & (x_1^5x_3^2 + x_1x_2^6)\bar{v}_3, \\
(\rho x_1^4x_3^2 + \rho x_2^6)\bar{v}_3, & (x_1^4x_3^2x_4 + x_2^6x_4 + x_2^4x_3^3 + x_1^4x_2^2x_3\zeta_1^{16} + x_1^6x_2\zeta_2^8)\bar{v}_3.
\end{array}$$

证明。 我们断言 $\mathrm{ann}_{E_3}(\rho^3x_1^4\bar{v}_3) = (x_1^2)$。为此，令

$$R = \frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^4, \zeta_4^2, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{v}_3]}{(x_2^4 + \zeta_1^8x_1^4, x_3^2 + \zeta_1^8x_2^2 + \zeta_2^4x_1^2, x_4^2 + x_1^2\zeta_3^4 + x_2^2\zeta_2^8 + x_3^2\zeta_1^{16})}$$

存在一个满射

$$\pi : R \to R/(x_1^7\bar{v}_3, \rho x_1^6\bar{v}_3, (x_2^7 + x_1^6x_4 + x_1^4x_2x_3^2 + x_1^2x_2^4x_3)\bar{v}_3) \cong E_3$$

因此，如果 $\pi(r)\cdot\rho^3x_1^4\bar{v}_3 = 0$，我们有

$$r\rho^3x_1^4\bar{v}_3 \in (x_1^7\bar{v}_3, \rho x_1^6\bar{v}_3, (x_2^7 + x_1^6x_4 + x_1^4x_2x_3^2 + x_1^2x_2^4x_3)\bar{v}_3) \subset (x_1^6)$$

利用 $R = T[\rho, \bar{v}_3]$ 对于 T是一个 x_1-挠无环，我们得到 $rx_1^4 \in (x_1^6)$，因而 $r \in (x_1^2)$。由于 $x_1^2\zeta_2^4 = x_3^2 + \zeta_1^8x_2^2$，这不会产生新的圈。

因此，该映射

$$S := \mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^8, \zeta_3^4, \zeta_4^2, \zeta_5, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{v}_3]/J \to \ker(\delta_3)$$

是满射，其中 J 是由命题陈述中的元素列表生成的理想，去掉 $\rho^3x_1^4\bar{v}_3$ 后得到。要证明它是单射，注意到映射

$$S \to S[y]/(y^2 + \zeta_2^8, x_1^2y + x_2^2\zeta_1^8 + x_3^2)$$

是单射，并且通过令 $y=\zeta_2^4$，很容易将后者识别为 E_3 。 □

命题 5.21。 ρ-*Bockstein* 谱序列的 E_8 页由多项式环的商给出

$$\mathbb{F}_2[\zeta_1^{16}, \zeta_2^8, \zeta_3^4, \zeta_4^2, \zeta_5, \ldots][\rho, x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{v}_3]$$

模去由以下元素生成的理想

$x_2^8+\zeta_1^{16}x_1^8, x_4^2+x_1^2\zeta_3^4+x_2^2\zeta_2^8+x_3^2\zeta_1^{16}, \zeta_3^4+\zeta_1^{16}x_2^4+\zeta_2^8x_1^4,$
$x_2^7+x_1^6x_4+x_1^4x_2x_3^2+x_1^2x_2^4x_3)\bar{v}_3, \quad \rho x_1^6\bar{v}_3,$
$\rho^3x_1^4\bar{v}_3, (\rho x_1^4x_3^2+\rho x_2^6)\bar{v}_3, \rho^7\bar{v}_3, (\rho^5x_3^2+\rho x_1^2x_2^4)$
$\bar{v}_3,$ $(x_1^5x_3^2+x_1x_2^6)\bar{v}_3,$
$(x_1^4x_3^2x_4+x_2^6x_4+x_2^4x_3^3+x_1^4x_2^2x_3\zeta_1^{16}+x_1^6x_2\zeta_2^8)\bar{v}_3,$
$\rho^3x_2^4\bar{v}_3,$
$(x_1^3x_2^4+\rho^2x_2^5+\rho^4x_1x_3^2+\rho^6x_4)\bar{v}_3,$
$(\rho x_2^4x_3^2+\rho x_1^4x_2^2\zeta_1^{16}+\rho^5x_1^2\zeta_2^8)\bar{v}_3.$

$(x_1x_2^4x_3^2+x_1^5x_2^2\zeta_1^{16}+\rho^2x_2^4x_4+\rho^2x_1^4x_3\zeta_1^{16}+\rho^4x_1^3\zeta_2^8+\rho^6x_2\zeta_2^8)\bar{v}_3$
$(x_1^2x_2^4x_4+x_2^5x_3^2+x_1^4x_2^3\zeta_1^{16}+\rho^4x_3^3x_4+\rho^4x_2^2x_3\zeta_1^{16}+\rho^4x_1^2x_2\zeta_2^8+\rho^6x_1\zeta_3^4)\bar{v}_3$
$(x_2^4x_3^2x_4+x_1^2x_2^5\zeta_2^8+x_1^4x_2^2x_4\zeta_1^{16}+x_1^4x_3^3\zeta_1^{16}+x_2^6x_3\zeta_1^{16}+\rho^2x_1x_2^4\zeta_3^4+\rho^4x_1^2x_4\zeta_2^8+\rho^4x_2x_3^2\zeta_2^8)\bar{v}_3$

证明。 我们断言 $\mathrm{ann}_{E_7}(\rho^7\bar{v}_3)=(x_1^4)$。为此，令

$$R=\frac{\mathbb{F}_2[\zeta_1^8,\zeta_2^8,\zeta_3^4,\zeta_4^2,\ldots][\rho,x_1,x_2,x_3,x_4,\bar{v}_3]}{(x_2^4+\zeta_1^8x_1^4, x_3^4+\zeta_1^{16}x_2^4+\zeta_2^8x_1^4, x_4^2+x_1^2\zeta_3^4+x_2^2\zeta_2^8+x_3^2\zeta_1^{16})}$$

存在一个满射 $\pi:\ R\to R/I\cong E_7$，其中 I 是由以下元素生成的理想

$x_1^7\bar{v}_3,$ $(x_2^7+x_1^6x_4+x_1^4x_2x_3^2+x_1^2x_2^4x_3)\bar{v}_3,$
$\rho x_1^6\bar{v}_3,$ $\rho^3x_1^4\bar{v}_3,$
$(x_1^5x_3^2+x_1x_2^6)\bar{v}_3,$ $(\rho x_1^4x_3^2+\rho x_2^6)\bar{v}_3,$
$(x_1^4x_3^2x_4+x_2^6x_4+x_2^4x_3^3+x_1^4x_2^2x_3\zeta_1^{16}+x_1^6x_2\zeta_2^8)\bar{v}_3.$

因此，如果 $\pi(r)\cdot\rho^7\bar{v}_3=0\in E_7$，那么 $r\rho^7\bar{v}_3\in I$。不难验证 $I\subset(x_1^4)$，因此，由于 R 具有如下形式：对于 T 来说， $T[\rho,\bar{v}_3]$ 是一个 x_1-挠无环，我们有 $r\in(x_1^4)$。像之前那样推理，便得到所声称的表示。□

其余代数生成元都是永久循环，因此 ρ-Bockstein 谱序列在 E_8 上退化。这验证了命题 5.17 前的讨论，从而 $H_*(E_{15}/(\bar{v}_1,\ \bar{v}_2))$ 具有所声称的 $\mathcal{A}_*$-余模代数描述。在权重零时，我们有

$$H_*(E_{15}/(\bar{v}_1,\bar{v}_2))\cong\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(3)_*}M_3$$

而机器计算给出了 $\mathcal{A}(3)_*$-余模代数M_3 的以下一组基，其维数为 165。

$$\begin{array}{ccc}
1\in H_0 & \rho^6x_1\bar{v}_3\in H_8 & \rho^5x_1^2\bar{v}_3\in H_9\\
\rho^6x_2\bar{v}_3\in H_{10} & \rho^4x_1^3\bar{v}_3\in H_{10} & \rho^5x_1x_2\bar{v}_3\in H_{11}\\
\rho^4x_1^2x_2\bar{v}_3\in H_{12} & \rho^2x_1^5\bar{v}_3\in H_{12} & \rho^5x_2^2\bar{v}_3\in H_{13}\\
\rho^3x_1^3x_2\bar{v}_3\in H_{13} & \rho^6x_3\bar{v}_3\in H_{14} & \rho^4x_1x_2^2\bar{v}_3\in H_{14}\\
\rho^2x_1^4x_2\bar{v}_3\in H_{14} & \rho^5x_1x_3\bar{v}_3\in H_{15} & \rho^3x_1^2x_2^2\bar{v}_3\in H_{15}\\
\rho x_1^5x_2\bar{v}_3\in H_{15} & \rho^4x_1^2x_3\bar{v}_3\in H_{16} & \rho^4x_2^3\bar{v}_3\in H_{16}
\end{array}$$

$$\rho^2 x_1^3 x_2^2 \bar{v}_3 \in H_{16} \quad x_1^6 x_2 \bar{v}_3 \in H_{16} \quad \rho^5 x_2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{17}$$
$$\rho^3 x_1^3 x_3 \bar{v}_3 \in H_{17} \quad \rho^3 x_1 x_2^3 \bar{v}_3 \in H_{17} \quad \rho x_1^4 x_2^2 \bar{v}_3 \in H_{17}$$
$$\rho^4 x_1 x_2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{18} \quad \rho^2 x_1^4 x_3 \bar{v}_3 \in H_{18} \quad \rho^2 x_1^2 x_2^3 \bar{v}_3 \in H_{18}$$
$$x_1^5 x_2^2 \bar{v}_3 \in H_{18} \quad \rho^3 x_1^2 x_2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{19} \quad \rho x_1^5 x_3 \bar{v}_3 \in H_{19}$$
$$\rho x_1^3 x_2^3 \bar{v}_3 \in H_{19} \quad \rho^4 x_2^2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{20} \quad \rho^2 x_1^3 x_2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{20}$$
$$\rho^2 x_1 x_2^4 \bar{v}_3 \in H_{20} \quad x_1^6 x_3 \bar{v}_3 \in H_{20} \quad x_1^4 x_2^3 \bar{v}_3 \in H_{20}$$
$$\rho^5 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{21} \quad \rho^3 x_1 x_2^2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{21} \quad \rho x_1^4 x_2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{21}$$
$$\rho^6 x_4 \bar{v}_3 \in H_{22} \quad \rho^4 x_1 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{22} \quad \rho^2 x_1^2 x_2^2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{22}$$
$$\rho^2 x_2^5 \bar{v}_3 \in H_{22} \quad x_1^5 x_2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{22} \quad \rho^5 x_1 x_4 \bar{v}_3 \in H_{23}$$
$$\rho^3 x_1^2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{23} \quad \rho^3 x_2^3 x_3 \bar{v}_3 \in H_{23} \quad \rho x_1^3 x_2^2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{23}$$
$$\rho x_1 x_2^5 \bar{v}_3 \in H_{23} \quad \rho^4 x_1^2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{24} \quad \rho^4 x_2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{24}$$
$$\rho^2 x_1^3 x_2^2 \bar{v}_3 \in H_{24} \quad \rho^2 x_1 x_2^3 x_3 \bar{v}_3 \in H_{24} \quad x_1^4 x_2^2 x_3 \bar{v}_3 \in H_{24}$$
$$x_1^2 x_2^5 \bar{v}_3 \in H_{24} \quad \rho^5 x_2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{25} \quad \rho^3 x_1^3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{25}$$
$$\rho^3 x_1 x_2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{25} \quad \rho x_1^4 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{25} \quad \rho x_1^2 x_2^3 x_3 \bar{v}_3 \in H_{25}$$
$$\rho^4 x_1 x_2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{26} \quad \rho^2 x_1^4 x_4 \bar{v}_3 \in H_{26} \quad \rho^2 x_1^2 x_2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{26}$$
$$\rho^2 x_2^4 x_3 \bar{v}_3 \in H_{26} \quad x_1^5 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{26} \quad x_1^3 x_2^3 x_3 \bar{v}_3 \in H_{26}$$
$$\rho^3 x_1^2 x_2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{27} \quad \rho^3 x_2^2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{27} \quad \rho x_1^5 x_4 \bar{v}_3 \in H_{27}$$
$$\rho x_1^3 x_2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{27} \quad \rho x_1 x_2^4 x_3 \bar{v}_3 \in H_{27} \quad \rho^4 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{28}$$
$$\rho^2 x_1^3 x_2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{28} \quad \rho^2 x_1 x_2^2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{28} \quad x_1^6 x_4 \bar{v}_3 \in H_{28}$$
$$x_1^4 x_2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{28} \quad x_1^2 x_2^4 x_3 \bar{v}_3 \in H_{28} \quad \rho^4 x_2^2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{28}$$
$$\rho^3 x_1 x_2^2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{29} \quad \rho^5 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{29} \quad \rho^3 x_1 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{29}$$
$$\rho x_1^4 x_2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{29} \quad \rho x_1^2 x_2^2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{29} \quad \rho x_2^5 x_3 \bar{v}_3 \in H_{29}$$
$$\rho^2 x_1^2 x_2^2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{30} \quad \rho^4 x_1 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{30} \quad \rho^2 x_1^2 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{30}$$
$$\rho^2 x_2^3 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{30} \quad x_1^5 x_2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{30} \quad x_1^3 x_2^2 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{30}$$
$$x_1 x_2^5 x_3 \bar{v}_3 \in H_{30} \quad \rho^3 x_1^2 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{31} \quad \rho^3 x_2 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{31}$$
$$\rho x_1^3 x_2^2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{31} \quad \rho x_1^3 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{31} \quad \rho x_1 x_2^3 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{31}$$
$$\rho^3 x_2^3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{31} \quad \rho^4 x_2 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{32} \quad \rho^2 x_1^3 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{32}$$
$$\rho^2 x_1 x_2^3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{32} \quad \rho^2 x_1 x_2 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{32} \quad x_1^4 x_2^2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{32}$$
$$x_1^4 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{32} \quad x_1^2 x_2^3 x_3^2 \bar{v}_3 \in H_{32} \quad x_2^6 x_3 \bar{v}_3 \in H_{32}$$
$$\rho^3 x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{33} \quad \rho x_1^4 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{33} \quad \rho x_1^2 x_2^3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{33}$$
$$\rho x_1^2 x_2 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{33} \quad \rho^2 x_1^2 x_2 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{34} \quad \rho^2 x_2^2 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{34}$$
$$x_1^5 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{34} \quad x_1^3 x_2^3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{34} \quad x_1^3 x_2 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{34}$$
$$\rho^2 x_2^4 x_4 \bar{v}_3 \in H_{34} \quad \rho x_1^3 x_2 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{35} \quad \rho x_1 x_2^4 x_4 \bar{v}_3 \in H_{35}$$
$$\rho x_1 x_2^2 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{35} \quad \rho^3 x_2^2 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{35} \quad \rho^4 x_3^2 x_4 \bar{v}_3 \in H_{36}$$
$$x_1^4 x_2 x_3 x_4 \bar{v}_3 \in H_{36} \quad x_1^2 x_2^4 x_4 \bar{v}_3 \in H_{36} \quad x_1^2 x_2^2 x_3^3 \bar{v}_3 \in H_{36}$$

$$\begin{array}{ccc}
\rho^2x_1x_2^2x_3x_4\overline{v}_3\in H_{36} & \rho^3x_1x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{37} & \rho x_1^2x_2^2x_3x_4\bar{v}_3\in H_{37}\\
\rho x_2^5x_4\bar{v}_3\in H_{37} & \rho x_2^3x_3^3\bar{v}_3\in H_{37} & \rho^2x_1^2x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{38}\\
x_1^3x_2^2x_3x_4\bar{v}_3\in H_{38} & x_1x_2^5x_4\bar{v}_3\in H_{38} & x_1x_2^3x_3^3\bar{v}_3\in H_{38}\\
\rho^2x_2^3x_3x_4\overline{v}_3\in H_{38} & \rho^3x_2x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{39} & \rho x_1^3x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{39}\\
\rho x_1x_2^3x_3x_4\bar{v}_3\in H_{39} & \rho^2x_1x_2x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{40} & x_1^4x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{40}\\
x_1^2x_2^3x_3x_4\bar{v}_3\in H_{40} & x_2^6x_4\bar{v}_3\in H_{40} & \rho^6x_1^3x_2^3x_3^2\bar{v}_3^2\in H_{40}\\
\rho x_1^2x_2x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{41} & \rho x_2^4x_3x_4\bar{v}_3\in H_{41} & x_1^3x_2x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{42}\\
x_1x_2^4x_3x_4\bar{v}_3\in H_{42} & \rho^2x_2^2x_3^2x_4\overline{v}_3\in H_{42} & \rho^3x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{43}\\
\rho x_1x_2^2x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{43} & \rho^2x_1x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{44} & x_1^2x_2^2x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{44}\\
x_2^5x_3x_4\bar{v}_3\in H_{44} & \rho^6x_1^3x_2^2x_3^3\bar{v}_3^2\in H_{44} & \rho x_1^2x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{45}\\
\rho x_2^3x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{45} & \rho^2x_2x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{46} & x_1^3x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{46}\\
x_1x_2^3x_3^2x_4\bar{v}_3\in H_{46} & \rho^6x_1^2x_2^3x_3^3\bar{v}_3^2\in H_{46} & \rho x_1x_2x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{47}\\
\rho^5x_1^3x_2^3x_3^3\bar{v}_3^2\in H_{47} & x_1^2x_2x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{48} & \rho^6x_1^3x_2^3x_3x_4\overline{v}_3^2\in H_{48}\\
\rho x_2^2x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{49} & x_1x_2^2x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{50} & x_2^3x_3^3x_4\bar{v}_3\in H_{52}
\end{array}$$

注意， M_3 中的乘法并非平方为零，因为有五个生成元可被 $\bar{v}_3^2$ 整除。例如，存在非平凡乘积 $H_8\otimes H_{32}\to H_{40}$

$$\rho^6x_1\bar{v}_3\cdot x_1^2x_2^3x_3^2\bar{v}_3=\rho^6x_1^3x_2^3x_3^2\bar{v}_3^2$$

然而， M_3 中的所有乘积均由命题 5.17 前文讨论中的关系确定。余作用由推论 4.9 以及 ρ 和 $\bar{v}_3$ 是本原元这一事实推出。

下文将参见图 11。这里，对于秩为 ≥ 3 的双次数，我们用矩形表示。

定理 5.22. *$BPGL\langle 3\rangle$ 上的 HSSS 在 E_{16}处坍缩，并存在一个 $\mathcal{A}_*$-余模代数同构（权重零）*

$$E_\infty\cong(\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(3)_*}M_3)\oplus(\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(2)_*}\overline{M}_2)$$

其中，后者是一个平方零扩张，带有 $M_3\cdot M_2=0$; 这里 $\overline{M}_i$ 表示 M_i 中的增广理想。

证明. 我们使用 $\bar{v}_2$-Bockstein谱序列计算 E_{16}，并利用权重零处存在同构这一事实

$$E_{16}\cong H_*(E_{15}/(\bar{v}_1,\bar{v}_2^2))$$

d_{15} 的描述表明，在 E_{15} 上

$$\mathrm{image}(d_{15})\cap(\bar{v}_2)=0$$

因此该谱序列退化。根据定理 5.16 中给出的微分， $H_*(E_{15}/(\bar{v}_2))$ 中的所有关系在 E_{16} 中也成立，所述描述由此适用于 E_{16}。

剩下需要证明 HSSS 在 E_{16} 上塌缩，并且 E_{16} 中不属于定理 5.16 所述永久循环子代数的唯一类位于子空间

$$V\cdot E(\zeta_1^8,\zeta_2^4,\zeta_3^2,\zeta_4)$$

其中， V 是由 $\bar{v}_2$ 的倍数类生成的 E_{16} 的子空间，这些类位于图 11 中红点所在的直线（直线 $y = 6 - x$）上。因此，只需证明子空间

$$\bar{v}_2 \cdot E(\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4)$$

的 E_2 由永久循环组成。由于这是一个 $\mathcal{A}_*$-余模的谱序列，余积公式表明，只需证明类

$$\bar{v}_2\zeta_1^8\zeta_2^4\zeta_3^2\zeta_4$$

是一个永久循环。根据次数，显然该类上唯一可能的微分是一个 d_{23} ，其靶为如下形式的单项式之和

$$p(\zeta_i)\rho^a x_1^b \bar{v}_3^2$$

写作 E_2中的一个元素。按照上文的计算方法，很容易计算出这一权下$\bar{v}_3^2$ 的 E_{16} 部分；机器计算表明，在 E_{16}上所需次数不存在类。□

注 5.23. 除余模代数扩张问题外，这描述了

$$H_*\Gamma(BPGL\langle 3\rangle)$$

与 $m = 2$ 计算不同，这里存在非平凡余模代数扩张的空间。我们可以通过针对具体情形采用临时的限制和转移论证来解决这些问题，但由于 M_3 的规模，这样做会过于冗长，因此不予展开。

出于同样的原因，我们不提供余模 M_3的示意图，不过其所有结构都可以根据 x_m' 上的余作用确定，这些余作用已在推论 4.9中描述。

6. The HSSS in equivariant homotopy

在有限群 G的等变稳定同伦范畴 $\mathcal{S}p^G$ 中，Hill– Hopkins–Ravenel [19]构造了一种滤过，与 Voevodsky 的切片滤过类似。后来，Ullman [40] 构造了一种具有更好乘法性质的滤过，称为正则 切片滤过。为明确概念，我们采用 Ullman 的滤过；不过，对于我们考虑的谱，这些滤过彼此一致。

关于 $BPGL\langle m\rangle$ 的算术方块和 HSSS 的大多数结果，在 $BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle$ 等变情形下通过应用 Betti 实现并使用推论 2.20，均可直接沿用。如第 2 节所述，我们可以将 E 的切片塔与任意 G- 谱 K 作 smash 积，从而得到一个谱序列。第 2 节中的证明在这种情形下基本可以逐字沿用，因此省略细节。切片谱序列为计算 G-谱 E^G 的不动点的同伦群提供了强有力的工具，而我们的谱序列则计算 E^G的同调。

$\mathbb{R}$-动机同伦与 C_2-等变同伦中的计算常因等变同调中的点的负锥而有所不同。我们完整计算了 $k_{\mathbb{R}}$ 的 $RO(C_2)$-分次 HSSS，并发现一个形式如下的奇异微分（推论 6.9）：

$$d_5(2u_{2\sigma}^{-1} \cdot \zeta_1^2\zeta_2) = \bar{v}_1^2$$

特别是，这个微分从负锥出发，落入正锥。我们根据以下事实推导出这个微分。

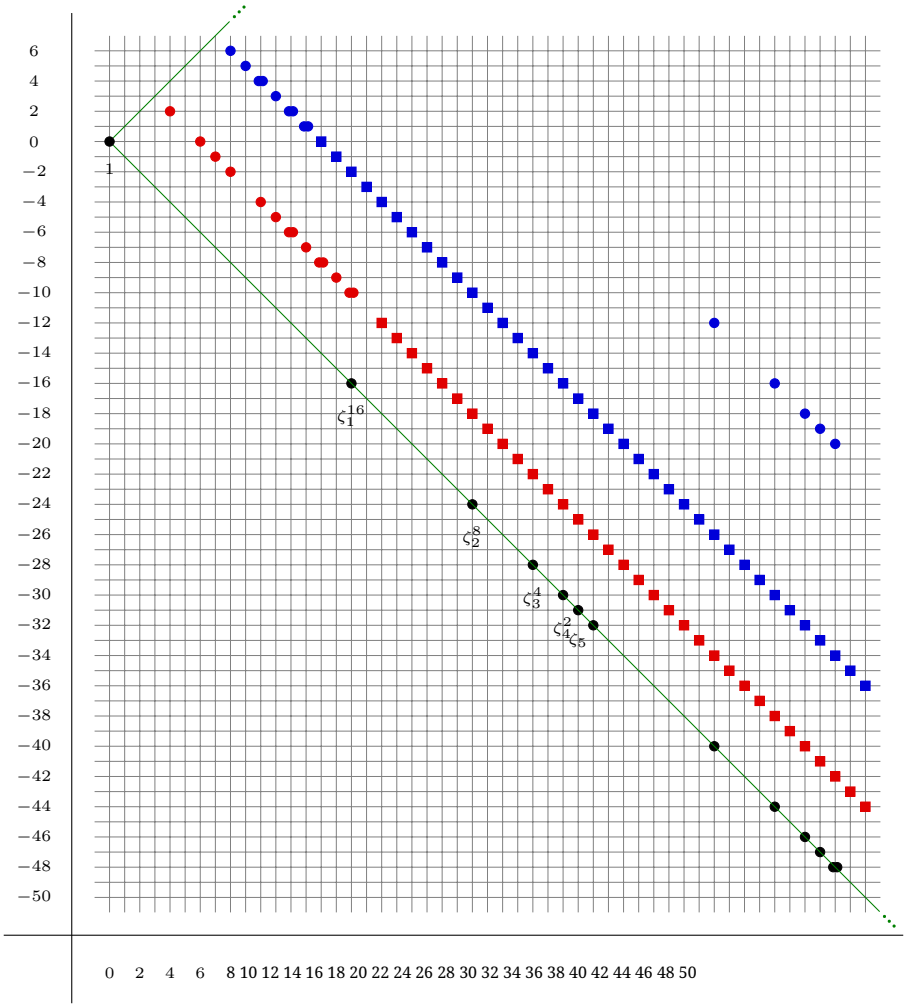


FIGURE 11. HSSS 的第 E_∞ 页对应 $BPGL\langle 3\rangle$。

命题 6.1。映射

$$\pi_\star BP_{\mathbb{R}} \to \pi_\star(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes BP_{\mathbb{R}})$$

映射到 $v_m^{2^m} \mapsto 0$。

证明。 根据定理 4.16，我们有一个微分

$$d_{2^{m+1}-1}(\zeta_1^{2^m}) = a_\sigma^{2^m-1}\overline{v}_m$$

作用于 $E_{2^{m+1}-1}(BP_{\mathbb{R}}; i_* H\mathbb{F}_2)$。在这一茎中，更高过滤上没有任何元素，因此我们得到关系

$$a_\sigma^{2^m-1}\overline{v}_m = 0 \in \pi_\star(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes BP_{\mathbb{R}})$$

由归纳法，我们可以假设 $a_\sigma^{2^m-i}v_m^i = 0$ 对于 $1 \le i < 2^m$，这意味着类 $a^{2^m-(i+1)}_\sigma v_m^i$ 属于转移映射的像。由于 v_m 的限制为零，Frobenius 关系意味着 $a^{2^m-(i+1)}_\sigma v_m^{i+1} = 0$。 □

注 6.2。 注意，该映射

$$\pi_\star BP_{\mathbb{R}} \to \pi_\star(H\underline{\mathbb{F}_2} \otimes BP_{\mathbb{R}})$$

映射到$v_m \mapsto 0$，因为后者在次数 $*\rho$ 中是一个常值麦基函子，并且在 $H_*(BP; \mathbb{F}_2)$ 中为 $v_m = 0$。然而，从 HSSS 可以很容易看出

$$\overline{v}_m \neq 0 \in \pi_\star(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes BP_{\mathbb{R}})$$

似乎 2^m 很可能是所有 m 的最小幂零度。

在等变情形下，同调切片谱序列的 E_2 页的计算以相同方式进行，只是现在我们将负锥也包括在内。我们回顾 Stong 对 $\pi_\star H\mathbb{Z}$ 的计算。

命题 6.3。 $RO(C_2)$-分次同伦 $\pi_\star H\underline{\mathbb{Z}}$ 是环 $\mathbb{Z}[a_\sigma, u_{2\sigma}]/(2a_\sigma)$ 关于模的平方为零扩张

$$NC := \mathbb{Z}\{e_{2n\sigma} | n > 0\} \oplus \mathbb{F}_2\{e_{(2n+1)\sigma}/a_\sigma^j | n > 0, j \geq 0\}$$

其中 $e_{k\sigma} = \mathrm{tr}(u_\sigma^{-k})$。 NC 上的模结构由以下关系确定

$$a_\sigma e_{k\sigma} = u_{2\sigma} e_{2\sigma} = u_{2\sigma} e_{3\sigma} = 0$$

and

$$u_{2\sigma} e_{k\sigma} = e_{(k-2)\sigma}$$

对于 $k \geq 4$。

命题 6.4. 存在一个 $RO(C_2)$-分次环同构

$$\pi_\star(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes H\underline{\mathbb{Z}}) \cong (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)[a_\sigma, x_1] \oplus NC$$

其中后一个环是环 $(\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)[a_\sigma, x_1]$ 按模

$$NC := (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)\{e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^j, x_1 \cdot e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^j \ : \ i \geq 1, j \geq 0\}$$

由关系定义

$$x_1 \cdot (x_1 \cdot e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^j) = \zeta_1^2 \cdot e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^{j-2} + e_{(2i-1)\sigma}/a_\sigma^j$$

以及 $\pi_\star H\mathbb{Z}$ 中通常的关系。

证明。 这由命题 6.3 和同构得出

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_*\{e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^j\} &\cong (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)\{e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^j\} \oplus \zeta_1 \cdot (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)\{e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^j\} \\ &\cong (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)\{e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^j\} \oplus x_1 \cdot (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)\{e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^{j+1}\}\end{aligned}$$

and

$$(\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)\{e_{2i\sigma}\} \cong (\mathcal{A}_* \square_{\mathcal{A}(0)_*} \mathbb{F}_2)\{x_1 \cdot e_{(2i+1)\sigma}\}$$

对于后者，我们利用了

$$x_1 \cdot e_{(2i+1)\sigma} = e_{2i\sigma}$$

这由 Frobenius 关系以及 x_1 限制到 u_σ 得出。随后，这些关系（以及 NC 平方为零这一事实）可由以下事实推出：

$$\pi_\star H\underline{\mathbb{Z}} \to \pi_\star(i_* H\mathbb{F}_2 \otimes H\underline{\mathbb{Z}})$$

是一个环映射，以及推论 4.4。 □

推论 6.5。 我们有一个同构

$$E_2^{*,\star}(BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle; i_*H\mathbb{F}_2) \cong \left((\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2)[a_\sigma, x_1] \oplus NC\right)[\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_m]$$

元素 $p \in (\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2)_i$ 的双次数为 $(i, -i)$，我们有以下双次数

$$\begin{aligned} |\overline{v}_i| &= ((2^i-1)\rho, 0) \\ |a_\sigma| &= (-\sigma, 1) \\ |x_1| &= (1-\sigma, 0) \\ |e_{(2i+1)\sigma}/a_\sigma^j| &= (-(2i+1) + (2i+j+1)\sigma, -j) \end{aligned}$$

命题 6.6. 在谱序列中

$$E_r^{*,\star}(k_{\mathbb{R}}; i_*H\mathbb{F}_2)$$

子代数

$$\left((\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(1)_*}\mathbb{F}_2)[a_\sigma, x_1] \oplus NC\right)[\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_m]$$

E_2页由永久循环组成。

证明. 这由推论3.19、定理4.18，以及 $\pi_\star H\mathbb{Z}$ 中的负锥在$BP_{\mathbb{R}}$的切片谱序列中由永久循环组成这一事实得出。□

由定理 4.16，我们看到的第一个微分是

$$\begin{aligned} d_3(\zeta_1^2) &= a_\sigma \overline{v}_1 \\ d_3(\zeta_2) &= x_1 \overline{v}_1 \end{aligned}$$

并且根据命题 6.6， d_3 在其余代数生成元上消失。这就得到如下结果。

命题 6.7. $E^{*,\star}_4(k_{\mathbb{R}}; i_*H\mathbb{F}_2)$ 是.....的子代数

$$\frac{\left((\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2)[a_\sigma, x_1] \oplus NC\right)[\overline{v}_1]}{(a_\sigma\overline{v}_1, x_1\overline{v}_1)}$$

由.....生成

$$\frac{\left((\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(1)_*}\mathbb{F}_2)[a_\sigma, x_1] \oplus NC\right)[\overline{v}_1]}{(a_\sigma\overline{v}_1, x_1\overline{v}_1)}$$

$$\begin{aligned} x_2 &:= x_1\zeta_1^2 + a_\sigma\zeta_2 \in \langle a_\sigma, \overline{v}_1, x_1\rangle \\ y_n &:= e_{n\sigma}\zeta_1^2 = \mathrm{tr}(u_\sigma^{-n}\zeta_1^2) \\ z_m &:= x_1 \cdot \frac{e_{-3\sigma}}{a_\sigma^m}\zeta_2 \\ w &:= e_{2\sigma}\zeta_1^2\zeta_2 = \mathrm{tr}(u_\sigma^{-2}\zeta_1^2\zeta_2) \end{aligned}$$

对于 $n \geq 2$ 和 $m \geq 0$

子代数

$$\frac{\Big((\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2)[a_\sigma, x_1] \oplus NC\Big)[\overline{v}_1]}{(a_\sigma\overline{v}_1, x_1\overline{v}_1)}$$

由永久循环组成， x_2 根据推论 3.19 是永久循环， y_n 是永久循环，因为它们是永久循环的转移；我们还将说明，出于次数上的原因， z_m 是永久循环。

命题 6.8. 对于所有 $m \geq 0$， z_m 都是永久循环。

证明. 为此，注意到

$$|z_m| = (1 + (m+2)\sigma, -3 - m)$$

因此

$$|d_r(z_m)| = ((m+2)\sigma, -3 - m + r)$$

利用我们对 E_4 的描述以及这些关系

$$\overline{v}_1 x_2 = \overline{v}_1 y_n = \overline{v}_1 z_m = \overline{v}_1 w = 0$$

目标 $d_r(z_m)$ 可以写成如下形式的单项式之和

$$m(\zeta_i) \cdot x_1^\epsilon \cdot \frac{e_{(2i+1)\sigma}}{a_\sigma^j}$$

写成 E_2 的子商中的元素，其中 $\epsilon = 0$， 1，且 $m(\zeta_i)$ 是 $\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2$ 中的一个单项式。若 $m \in (\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2)_k$，则该单项式的双次数为

$$(k, -k) + (-(2i+1-\epsilon) + (2i+1-\epsilon+j)\sigma, -j)$$

由此可得 $k = 2i+1-\epsilon$，因此滤过为 $-(2i+1-\epsilon+j)$。另一方面，考察 σ 次数，可得

$$2i + 1 - \epsilon + j = m + 2$$

这就产生了矛盾，因为 $r \geq 4$ 表明滤过至少为 $1 - m$。 □

推论 6.9。 微分 d_5 由下式确定

$$d_5(w) = \overline{v}_1^2$$

证明. 根据命题 6.8， E_4 中唯一不是永久循环的代数生成元是 w。根据命题 6.1，必定存在一个微分将 v_1^2消去；由于次数的限制，所述微分是唯一可能的选择。□

推论 6.10. 谱序列 $E^{*,\ *}_r(k_\mathbb{R};\ i_*H\mathbb{F}_2)$ 在 E_6上塌缩，而 E_6是由以下元素生成的子代数

$$\frac{\Big((\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(0)_*}\mathbb{F}_2)[a_\sigma, x_1] \oplus NC\Big)[\overline{v}_1]}{(a_\sigma\overline{v}_1, x_1\overline{v}_1, \overline{v}_1^2)}$$

由.....生成

$$\frac{\Big((\mathcal{A}_*\square_{\mathcal{A}(1)_*}\mathbb{F}_2)[a_\sigma, x_1] \oplus NC\Big)[\overline{v}_1]}{(a_\sigma\overline{v}_1, x_1\overline{v}_1, \overline{v}_1^2)}$$

以及 $n \geq 2$ 和 $m \geq 0$ 的类 x_2、 y_n、 z_m 。

证明。 不会出现新的圈，因为

$$w^2 = a_\sigma w = u_\sigma w = wz_m = wy_n = wx_2 = 0 \in E_6$$

因为这些关系在 E_2 上成立。生成元都是永久循环，因此 $E_6 = E_\infty$。 □

注 6.11。 在本节中，我们大量依赖临时的次数论证来控制 $BP_{\mathbb{R}}\langle 1\rangle$ 的 $RO(C_2)$-分次 HSSS 的代数生成元。对于更大的 m 值，要确定 HSSS 中来自 $BP_{\mathbb{R}}\langle m\rangle$ 的负锥的类何时是永久循环会更加困难，因此在这些情况下似乎需要额外的输入。然而，根据命题 6.1，必然存在某种离开负锥的微分模式，它们会消灭 $\bar{v}_m$ 的幂。

References

[1] M. F. Atiyah。“K理论与实性”。《牛津数学季刊》 *(2)* 17 (1966)，第 367–386 页。 ISSN: 0033-5606。 DOI: 10.1093/qmath/17.1.367。[2] T. Bachmann。“动机的与实 ´etale 稳定同伦论”。《组合数学》 154.5 (2018)，第 883–917 页。 ISSN: 0010-437X。 DOI: 10.1112/S0010437X17007710。

[3] T. Bachmann. “Hermitian K理论的广义切片”。《拓扑学杂志》10.4（2017），第 1124–1144 页。 ISSN: 1753-8416。 DOI: 10.1112/topo.12032。[4] A. Beaudry、M. A. Hill、T. Lawson、X. D. Shi 和 M. Zeng。“实定向配边范数的商的切片谱序列”（2022）。 DOI: 10. 48550/ARXIV.2204.04366。[5] A. Beaudry、M. A. Hill、X. D. Shi 和 M. Zeng。“通过实定向配边理论构造 Lubin-Tate 谱的模型”。《数学进展》392（2021），论文编号 108020，共 58 页。 ISSN: 0001-8708。 DOI: 10.1016/j.aim.2021.108020。[6] M. Behrens 和 J. Shah。“由实动机稳定同伦得到C_2等变稳定同伦”。《K 理论年刊》5.3（2020），第 411–464 页。 ISSN: 2379-1683。 DOI: 10.2140/akt.2020.5.411。[7] E. Belmont、B. J. Guillou 和 D. C. Isaksen。“C_2等变与 $\mathbb{R}$动机稳定茎 II”。《美国数学会会刊》149.1（2021），第 53–61 页。 ISSN: 0002- 9939。 DOI: 10.1090/proc/15167。[8] P. Bhattacharya 和 P. Egger。“具有 v_2^1 自映射的一类 2-局部有限谱”。《数学进展》360（2020），第 106895 号论文，共 40 页。 ISSN: 0001-8708。 DOI: 10.1016/j.aim.2019.106895。[9] C. Carrick 和 M. A. Hill。“实定向配边范数的商的有限表示”（）。准备中。[10] D. M. Davis 和 M. Mahowald。“ $TMF(3)$ 的连通版本”。《国际现代数学杂志》5.3（2010），第 223–252 页。 ISSN: 1559-3894。[11] E. S. Devinatz 和 M. J. Hopkins。“Morava 稳定子群对 Lubin-Tate 模空间提升的作用”。《美国数学杂志》117.3（1995），第 669–710 页。 ISSN: 0002-9327。 DOI: 10.2307/2375086。[12] D. Dugger 和 D. C. Isaksen。“$\mathbb{Z}/2$等变与 $\mathbb{R}$动机稳定茎”。《美国数学会会刊》145.8（2017），第 3617–3627 页。 ISSN: 0002-9939。 DOI: 10.1090/proc/13505。[13] P. Goerss、H.-W. Henn、M. Mahowald 和 C. Rezk。“素数 3 处$K(2)$-局部球谱的一个分解”。《数学年刊》（第二辑）162.2（2005），第 777–822 页。 ISSN: 0003-486X。 DOI: 10.4007/annals.2005.162.777。

[14] J. P. C. Greenlees 和 L. Meier。“实谱的 Gorenstein 对偶”。《代数与几何拓扑》17.6（2017），第 3547–3619 页。 DOI: 10.2140/agt. 2017.17.3547。[15] B. J. Guillou、M. A. Hill、D. C. Isaksen 和 D. C. Ravenel。“ C_2等变 $\mathcal{A}$(1) 的上同调与 ko$_{C_2}$的同伦”。《突尼斯数学杂志》2.3（2020），第 567–632 页。 ISSN: 2576-7658。 DOI: 10.2140/tunis.2020.2.567。[16] J. Hahn 和 X. D. Shi。“ Lubin-Tate 谱的实定向”。《数学发明》221.3（2020），第 731–776 页。 ISSN: 0020-9910。 DOI: 10.1007/s00222- 020-00960-z。[17] D. Heard。“关于等变切片与动机切片”。《代数与几何拓扑》19.7（2019），第 3641–3681 页。 ISSN: 1472-2747。 DOI: 10.2140/agt.2019.19.3641。[18] J. Heller 和 K. Ormsby。“伽罗瓦等变性与稳定动机同伦论”。美国数学会会刊 368.11（2016），第 8047–8077 页。 ISSN: 0002- 9947。 DOI: 10.1090/tran6647。[19] M. A. Hill、M. J. Hopkins 和 D. C. Ravenel。“Kervaire 不变量为一的元素不存在”。《数学年刊》184.1（2016），第 1–262 页。[20] M. Hill 和 T. Lawson。“具有层结构的拓扑模形式”。《数学发明》203.2（2016），第 359–416 页。 ISSN: 0020-9910。 DOI: 10. 1007/ s00222-015-0589-5。[21] M. A. Hill 和 L. Meier。“ C_2谱 Tmf$_1$(3) 及其可逆模”。《代数与几何拓扑》17.4（2017），第 1953–2011 页。 ISSN: 1472-2747。 DOI: 10.2140/agt.2017.17.1953。[22] P. Hu 和 I. Kriz。“实定向同伦论及 Adams-Novikov 谱序列的一个类比”。Topology 40.2（2001），第 317–399 页。[23] P. Hu 和 I. Kriz。“ BPO的同调”。《同伦论近期进展》293（2002），第 111–123 页。[24] N. Kitchloo 和 W. S. Wilson。“第二实 Johnson-Wilson 理论与 RP^n的非浸入性”。《同调、同伦及其应用》10.3（2008），第 223–268 页。 ISSN: 1532-0073。[25] N. Kitchloo 和 W. S. Wilson。“第二实 Johnson-Wilson 理论与 RP^n的非浸入性 II”。《同调、同伦及其应用》10.3（2008），第 269–290 页。 ISSN: 1532-0073。[26] M. Levine 和 G. S. Tripathi。“MGL 的商、它们的切片及其几何部分”。《文献数学》特刊：Alexander S. Merkurjev 六十寿辰（2015），第 407–442 页。 ISSN: 1431-0635。[27] G. Li、X. D. Shi、G. Wang 和 Z. Xu。“实定向配边理论与实 Johnson-Wilson 理论的 Hurewicz 像”。数学进展 342（2019），第 67–115 页。[28] M. Mahowald。“ $_2\pi_*^s$中的一个新无穷族”。Topology 16.3（1977），第 249–256 页。 ISSN: 0040-9383。 DOI: 10.1016/0040-9383(77)90005-2。[29] M. Mahowald 和 C. Rezk。“ Brown-Comenetz 对偶与 Adams 谱序列”。《美国数学杂志》184（1999），第 1153–1177 页。[30] F. Morel。“球谱的动机 π_0 ”。《公理化、富化与动机同伦论》。第 131 卷。《北约科学丛书第二辑：数学、物理与化学》。Kluwer 学术出版社，Dordrecht，2004，第 219–260 页。 DOI: 10.1007/978-94- 007-0948-5_7。

[31] T. Nikolaus 和 P. Scholze。“论拓扑循环同调”。*Acta Mathe-matica* 221.2（2018），第 203–409 页。[32] K. M. Ormsby。“ p-进域的动机不变量”。*J. K-Theory* 7.3（2011），第 597–618 页。 ISSN：1865-2433。 DOI：10.1017/is011004017jkt153。[33] D. C. Ravenel。复配边与球面的稳定同伦群。第 121 卷。纯粹与应用数学。Academic Press Inc.，奥兰多，佛罗里达州，1986。[34] D. C. Ravenel。稳定同伦论中的幂零性与周期性。第 128 卷。数学年刊研究丛书。附录 C 由 Jeff Smith 撰写。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1992，第 xiv+209 页。 ISBN：0-691-02572-X。[35] D. C. Ravenel。“稳定同伦中奇主 Arf 不变量元的不存在性”。剑桥哲学学会数学会刊 83.3（1978），第 429–443 页。 ISSN：0305-0041。 DOI：10.1017/S0305004100054712。[36] C. Rezk。“Hopkins-Miller 定理札记”。经由代数几何与群表示的同伦论（埃文斯顿，伊利诺伊州，*1997*）。第 220 卷。当代数学。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998，第 313–366 页。 DOI：10.1090/conm/220/03107。[37] K. Shimomura 和 X. Wang。“素数 3 处的同伦群 $\pi_*(L_2S^0)$”。*Topology*41.6（2002），第 1183–1198 页。 ISSN：0040-9383。 DOI：10 .1016 / S0040-9383(01)00033-7。[38] M. Spitz weck 和 P. A. Østvær。“动机扭曲 K-理论”。代数与几何拓扑 12.1（2012），第 565–599 页。 ISSN：1472-2747。 DOI：10.2140/agt.2012. 12.565。[39] H. Toda。“实现 Steenrod 代数外部部分的谱”。*Topol-ogy* 10（1971），第 53–65 页。 ISSN：0040-9383。 DOI：10.1016/0040- 9383(71) 90017-6。[40] J. R. Ullman。关于正则切片谱序列。博士论文（Ph.D.）–Massachuse

tts

理工学院。ProQuest有限责任公司，安娜堡，密歇根州，2013年，（无页码）。[41] V. Voevodsky. “关于以 $\mathbf{Z}/l$ 为系数的动机上同调”。《数学年刊》（第*2*辑）174.1（2011），第401–438页。 ISSN：0003-486X。 DOI：10.4007/annals.2011. 174.1.11。[42] V. Voevodsky. “动机稳定同伦论中的开放问题 I”。动机、多对数与霍奇理论，第一部分（加利福尼亚州尔湾，*1998*年）。第3卷。Int. Press Lect. Ser. Int. Press，马萨诸塞州萨默维尔，2002年，第3–34页。

Mathematical Institute, Utrecht University, Utrecht, 3584 CD, the Netherlands
Email address: c.d.carrick@uu.nl

University of California Los Angeles, Los Angeles, CA 90095
Email address: mikehill@math.ucla.edu

Department of Mathematics University of Rochester, Rochester, NY 14627*Email address*: dcravenel@gmail.com