arXiv:2304.01966v1 [math.NT] 4 Apr 2023

黎曼ζ函数的极限高度与特殊值

´ROBERTO GUALDI 和 MARTIN SOMBRA

Abstract. 我们研究由线性多项式 $x_0 + x_1 + x_2$ 定义的射影直线与其经挠点平移后的直线之交的高度分布。我们证明，对于一个严格的挠点序列，相应的高度收敛到一个实数，该实数是黎曼ζ函数特殊值之比的有理倍数。我们还确定这些高度的取值范围，刻画极端情形，并研究在真代数子群中严格的挠点序列所对应高度的极限。

此外，我们从阿拉克洛夫几何的视角诠释主要结果，证明对于一个严格的挠点序列，相应高度的极限等于由同一线性多项式定义的整数环上射影平面的循环的阿拉克洛夫高度。这是算术贝祖定理的一个猜想性渐近版本的特例。

利用环面簇阿拉克洛夫几何中算术与凸对象之间的相互作用，我们证明，这个阿拉克洛夫高度可以表示为射影直线触角上一个分段线性函数的平均值，而该平均值又可以计算为前述实数。

Contents

引言 2

第一部分 7

1. 预备知识 8 2. 高度的取值范围 11 3. 非阿基米德高度的可忽略性 14 4. 阿基米德高度的极限 16 5. 计算积分 18 6. 高度的分布 22 7. 间奏：代数子群中的扭点序列 24 8. 结果的可视化 28

第二部分 32

9. 复几何中的半正度量 32 10. 交的极限高度作为阿拉克洛夫高度 36 11. 环面视角 39 12. 触角上的积分 42 13. 计算混合积分 44

参考文献 46

Date：2023年4月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：11G50；次分类号：11M06、14G40。*Key words and phrases.*射影点的高度、挠点、赋度量线丛、阿基米德触角、Ronkin函数。

Introduction

求解多变量的多项式方程组是数学的重要指导性问题之一，它推动了线性代数和代数几何的发展，也应用于各个科学领域。

求解给定的多项式方程组属于算法研究的范畴，而更具理论性的研究则致力于依据可直接从方程组中读取的数据，尽可能精确地了解其解集。简言之，这种视角旨在用方程组的复杂度来理解其解集的复杂度。

从这一角度看，典型的结果是经典的 B´ézout 定理。该定理断言，对于一个由 n 个关于 $n+1$ 个变量的齐次多项式构成的一般方程组，其解集在 n 维射影空间中的基数等于这些多项式次数的乘积。

对于系数为代数数的方程组，我们不仅可以考察由基数给出的解集的几何复杂度，还可以考察其算术复杂度。后者通常定义为解集的一种表示中整数的最大位长度，并可用其高度来度量，参见例如注 1.1。

在这一背景下，自然会进一步追问：能否根据方程组的算术复杂度来预测其解集的高度，例如以相关多项式的高度来衡量。本文旨在通过研究一个具体实例来探讨这一问题。

现在我们更精确地设定讨论范围。令 $\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}})$ 为有理数域的代数闭包上的射影平面，并考虑其（典范）高度函数，即实值函数

$$\mathrm{h}\colon \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

由 Northcott 和 Weil 引入并研究 [Nor50, Wei51], 另见 第 1 节。对于ω_1, ω_2 取遍单位根集合中的元素时 $\mu_\infty \subset \mathbb{Q}$，令 $\omega = (\omega_1, \omega_2)$，并考虑在 $\overline{\mathbb{P}}^2(\mathbb{Q})$ 上由下式给出的线性方程组

$$x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + \omega_1^{-1} x_1 + \omega_2^{-1} x_2 = 0. \tag{1}$$

除去退化情形 $\omega_1 = \omega_2 = 1$ （本文始终将其排除），其解集由一个点组成，我们将其记为 $P(\omega)$。

从几何角度来看，请注意，代数环面 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q}) = (\mathbb{Q}^\times)^2$在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ 上有一个标准作用，如 (1.3) 中所述，而 (1) 中的两个方程分别对应于射影直线 $C = Z(x_0 + x_1 + x_2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}$及其经平移所得的直线 ωC，平移量为该环面上的挠点 ω。这两条直线的交与 (1) 中方程组的解集重合，因此，当 ω 非平凡时，

$$C \cap \omega C = \{P(\omega)\}.$$

我们的目标是理解交 $C \cap \omega C$ 的高度，或者等价地，点 $P(\omega)$ 的高度如何取决于 ω 的选择。首先要注意的是，无法通过系统复杂度的通常测度来确定它。事实上，任何此类测度，例如定义多项式的次数或牛顿多面体、它们的 Mahler测度，或任何仅取决于绝对

系数值的范数，在 ω 变化时都是常数。相反，对挠点 ω 的不同选择可能产生高度 $P(\omega)$ 大不相同的射影点[Gua18a，例 5.1。1], 另见本引言中的 例 2.1或图 1。

鉴于这种情况，我们转而研究 $P(\omega)$ 的高度分布，首先确定其取值范围。

命题 1 (命题 2.2)。 设 $\omega \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 是一个非平凡挠点。那么

$$0 \leq \mathrm{h}(C \cap \omega C) \leq \log(2).$$

更准确地说，我们证明这些界是锐的，并刻画每个界取等号的情形。这些结果由射影点 $P(\omega)$ 的显式表达式、高度的基本性质，以及分圆多项式在 1 处取值的公式推得。

确定这些高度值的取值范围后，下一个问题是了解它们在区间 $[0,\log(2)]$内的分布情况。我们可以通过数值实验对此有所了解，详见第 8 节 以及随附的 SageMath笔记本 [GS22]。

实际上，设 d 为正整数，并用 μ_d 表示 d次单位根的集合，因此 μ_d^2 与 d的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 挠点集合相同。将单位正方形细分为 d^2个单元后，我们可以为每个单元指定一个 d挠点 $\omega \in \mu_d^2$；若 ω 非平凡，则根据 $P(\omega)$ 的高度在区间 $[0, \log(2)]$内的相对大小，为其着上相应深浅的灰色。如图 1所示，这些灰色色调散布在正方形上，没有遵循任何明显的规律。

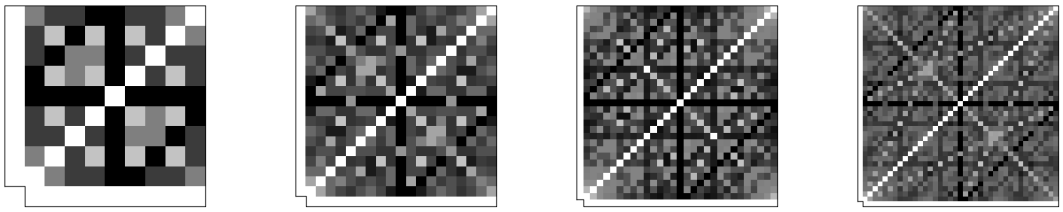

FIGURE 1. 与 $d = 10$,20、 30、40 上的非平凡 d-挠点相关的高度

然而，仔细观察这些图像会发现一个有趣的现象：随着 d增大，大多数单元都呈现出非常相近的灰色调，这表明对应的大多数高度都接近某个确定的实数。对于更大的 d，例如图 8.1 和 8.3中的取值

受这一直觉启发，我们研究一般挠点 ω 处 $P(\omega)$ 的高度，也就是说，研究 ω 在一般挠点序列中变化时的情形。由于先前的环面 Manin–Mumford 猜想，后者不过是一个严格序列，即最终避开 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 的任何固定真代数子群的序列。本文的主要结果如下。

定理 2 (定理6.1)。 设 $(\omega_\ell)_{\ell \geq 1}$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 中的一个非平凡挠点严格序列。那么

$$\lim_{\ell \to +\infty} \mathrm{h}(C \cap \omega_\ell C) = \frac{2\,\zeta(3)}{3\,\zeta(2)} = 0.487175\ldots,$$

其中 ζ 是黎曼ζ函数。

黎曼ζ函数的这一出现颇为引人入胜。然而，高度与特殊值之间已有若干已知关系 L-函数。例如，Gross–Zagier公式描述了模曲线上Heegner点的高度与 [GZ86] 之间的关系；此外，也有类似Northcott性质的满足情况 [PP20]。而且，这类联系促成了影响深远的猜想，例如Colmez提出的猜想 [Col93] ，以及Maillot和R¨ossler提出的推广 [MR02]。

与我们的研究设定更为接近的是，射影点的高度可以推广到射影子簇。特别地，对于定义在 $\mathbb{Q}$上的射影超曲面，这一概念与其原始定义多项式的对数Mahler测度相一致 [DP99，Mai00], 而且目前有一项活跃的研究方向，探讨Mahler 测度与 L函数的特殊值之间的关系，例如参见 [BZ20]。例如，由Smyth的经典结果可知 [Smy81], 射影直线的高度 C 可计算为

$$\mathrm{h}(C) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2) = 0.323065\ldots$$

对应于模 3 奇狄利克雷特征的 L函数。事实上，在我们的研究中，这个值也会作为某个一维代数子环面上的挠点严格序列中 $P(\omega)$ 的高度极限出现，其中 ω沿着该序列变化（例 7.5）；同时，它也是 $P(\omega)$ 的高度集合的猜想性最小聚点值，其中 $\omega \in \mu_\infty^2$ (问题 8.3）。

一个形式化论证可以从定理 2 推出以下结果，这也印证了我们此前根据数值实验所得的观察。

推论3 (推论 6.8)。 对于 $\varepsilon > 0$， 我们有

$$\lim_{d\to+\infty} \frac{1}{d^2-1} \#\left\{\omega \in \mu_d^2 \setminus \{(1,1)\} \,\middle|\, \left|\mathrm{h}(C \cap \omega C) - \frac{2\,\zeta(3)}{3\,\zeta(2)}\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

粗略地说，它断言，高度的典型值，对应于d-挠点，是所提及的黎曼ζ函数特殊值之商的有理数倍。实际上，对于由挠点有限子集构成的严格序列，这一性质在更一般的情形下也成立（定理6.6）。

现在我们概述定理 2的证明。首先，我们将阶为 d 的非平凡挠点 $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ 对应的高度写成如下和

$$\mathrm{h}(P(\omega)) = \sum_v \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{k\in(\mathbb{Z}/d\,\mathbb{Z})^\times} \log\max(|\iota_v(\omega_2^k)-\iota_v(\omega_1^k)|_v, |\iota_v(\omega_2^k)-1|_v, |\iota_v(\omega_1^k)-1|_v). \tag{2}$$

这里，$(\mathbb{Z}/d\,\mathbb{Z})^\times$ 表示模单位群， φ 表示欧拉函数； v 遍历 $\mathbb{Q}$ 的赋值集合，而 ι_v: $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}_v$ 是从 $\mathbb{Q}$到 v进数代数闭完备域的任意嵌入。

用稍微专业一些的说法，前述高度公式中对应于位置 v 的求和项，可以视为在 v-进环面 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C}_v) = (\mathbb{C}_v^\times)^2$ 上某个函数在 v-进伽罗瓦轨道 ω 上的平均值；该函数在点 (1,1) 处有一个对数奇点。因此，要计算当 ω 沿严格的挠点序列变化时此高度的极限，我们需要证明一族带对数奇点函数的阿代尔族的等分布结果，并同时控制所有 v-进求和项。

在我们的具体情形中，我们通过采用一种初等方法来实现这一点。一方面，我们证明，式（2）中的非阿基米德项之和可以用冯·曼戈尔特函数和欧拉函数来计算（推论 3.4）。这意味着，对于阶趋于无穷的挠点序列，高度中的非阿基米德贡献趋于 0（推论 3.6）。

另一方面，阿基米德项的收敛性可以由 Chambert-Loir 和 Thuillier 的对数等分布定理 [CT09] 或 Dimitrov 和 Habegger 的对数等分布定理 [DH19]推导出来。然而，也可以采取更直接的方法，从关于分圆多项式的基本结果以及代数环面上的挠点的伽罗瓦轨道的标准等分布（命题 4.1）推导出这一收敛性。无论采用哪种方法，我们都得到：对于一个严格序列的挠点，式（2）中的阿基米德项趋于该积分

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2}\log\max(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1}|,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2}-1|,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1}-1|)\,du_1du_2.$$

利用被积函数的对称性，我们将其计算为所述的商，其中涉及黎曼ζ函数的特殊值（命题 5.1），从而完成证明。

迄今所呈现的结果构成了本文第一部分的内容。其中采用的方法是显式的，论证也尽可能做到自成一体。这一部分对背景知识的要求很少，旨在让非专业人士也能读懂。

在第二部分中，我们将提高论述的技术层次，从阿拉克洛夫几何的角度阐释定理 2，该几何由 Gillet 和 Soul´e [GS90]提出，并由 Maillot [Mai00]加以拓展。借助托里克簇的阿拉克洛夫几何中算术对象与凸对象之间的相互作用（由 Burgos Gil、Philippon 和第二作者 [BPS14] 以及第一作者 [Gua18b]研究），我们可以以更内在的方式重新得到这一结果。

阿拉克洛夫几何极大地推广了高度的概念：从射影点推广到配备一族赋度量线丛的算术簇的循环。在这一背景下，具有有理坐标的点 $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$的高度，与其在整数环上的射影平面中所对应的一维子概形的（阿拉克洛夫）高度相同；该高度是相对于典范度量线丛 $\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}}$而言的 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 。

另一个重要的赋度量线丛定义在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 上，是 Ronkin 赋度量线丛 $\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}$，它由 $x_0+x_1+x_2$的 Ronkin 函数构造而成。在研究由线性多项式 $\mathscr{C}$ 定义的 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 超曲面的阿拉克洛夫几何时，它具有重要意义 [Gua18b]。

由于这两个赋度量线丛都是半正的，算术交理论可以据此定义高度

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C})\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

根据第一部分的结果以及度量魏尔互反律（命题 9.6），我们可以证明定理 2中的极限值与这个高度一致。

定理 4(定理10.4)。 设 $(\omega_\ell)^{\ell\geq 1}$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 中的一列非平凡挠点严格序列。那么

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{h}(C\cap\omega_\ell C) = \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C}).$$

我们可以将这个结果改写成如下更具启发性的形式。设 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 是整数的整闭包上的射影平面。对于每个 $\ell\geq 1$，写作 $\omega_\ell = (\omega_{\ell,\,1},\ \omega_{\ell,\,2})$，其中 $\omega_{\ell,\,1},\ \omega_{\ell,\,2}\in\mu_\infty$，并考虑以下一维整子概形

$$Z(x_0+x_1+x_2, x_0+\omega_{\ell,1}^{-1}x_1+\omega_{\ell,2}^{-1}x_2)\subset\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{Z}}}.$$

它与 $P(\omega_\ell)$ 在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 中的闭包重合，因此相对于 $\mathscr{O}(1)^{\mathrm{can}}$的高度与点 $P(\omega_\ell)$ 的高度一致（注 10.3）。

[Gua18b] 的主要结果表明，3中的高度与环境射影平面相对于另一个 Ronkin 度量化线丛的高度一致（命题 11.6）。结合这些结果，可得以下结论。

推论 5 (推论 11.7)。 采用 定理 *4*中的记号，

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}}}(Z(x_0+x_1+x_2, x_0+\omega_{\ell,1}^{-1}x_1+\omega_{\ell,2}^{-1}x_2)) = \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}).$$

这个极限公式可以看作一条猜想中的算术类比的特例。这条猜想所类比的经典几何事实是：对于一个 n维代数簇上的若干个线丛n，其整体截面的一个一般 n元组的零点集的基数，等于该代数簇相对于这些线丛的次数。事实上，推论 5 表明，若一对整体截面具有某种算术特征，则它们的零点集的高度会随着这些整体截面越来越“一般”，趋近于环境空间的相关高度。 $\mathscr{O}$（1）

下面简要说明如何通过将环面算术簇的阿拉克洛夫几何应用于 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$的情形，从 定理 2 推出 定理 4 。该理论的一个基本要素是用向量空间上的某些凹函数对半正托里克赋度量线丛进行分类： [BPS14]。在这一分类中，赋度量线丛 $\mathscr{O}$（1）^{can} 在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 上对应于分段线性凹函数 $\Psi\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 其定义如下

$$\Psi(u_1,u_2) = \min(0,u_1,u_2).$$

另一方面，我们将 C 的阿基米德触角 $\mathscr{A}$与 $\mathbb{R}^2$ 联系起来；它是一个帐篷状子集，由复直线的热带化 $C(\mathbb{C})$给出（图 12.1）。

应用 [BPS14、Gua18b]的结果，我们可以用凸几何来表示式（3）中的高度（命题 11.6）。结合 Passare 和 Rullg˚ard 关于 Ronkin 函数及其相关 Monge–Amp`ere 测度的结果 [PR04]，我们推导出所考虑的高度与凹函数 Ψ 在触角 $\mathscr{A}$上的平均值之间的如下关系。

定理 6 (推论 13.3)。 采用上述记号，

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C}) = -\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{A})}\int_{\mathscr{A}}\Psi(u_1,u_2)\,du_1du_2.$$

最后，我们计算此等式中的积分（命题 12.2），从而恢复 r

Th定理 2 来自 定理 4 和6。

总而言之，本文讨论了一个具体问题：它既适合进行务实的分析和数值实验，同时也是一种更为一般情形的实例。

第一部分第一部分中的结果具体明确，因此可以采用初等且自成一体的方法进行论述，无需具备太多代数几何和数论背景。此外，所研究的问题非常适合通过计算来直观展示结果并提出后续问题，正如第 8 节所做的那样。

将问题置于阿拉克洛夫几何的背景下，如第二部分所示，我们的研究便有了更深层的意蕴，指向算术贝祖定理的渐近版本。´事实上，在推论 5 之后，我们有理由认为，具有某种算术特征的多项式方程组的解集高度的极限，与环境空间的某个高度相一致；例如，参见猜想 11.8。要确立这一推广，需要付出大量技术努力，以解决由此产生的阿代尔对数等分布问题。我们计划在后续文章中探讨这一问题。

从更具推测性的角度来看，探究这些环面高度是否有些可以像定理 6那样，与阿米巴上的分段线性函数积分联系起来，并尝试用特殊函数来计算它们，也会很有意思。

致谢。 我们感谢 Fabien Pazuki 鼓励我们撰写本文。我们也感谢 Francesco A moroso、Jos´e Ignacio Burgos Gil、Pietro Corvaja、Xavier Guitart、Joaquim Ortega-Cerd`a、Riccardo Pengo、Lukas Pottmeyer、Lukas Prader 和 Alain Yger，与他们进行了多次愉快的讨论，并感谢他们热情地提出意见和问题。我们还借助开源数学软件`SageMath` [Sag22]进行了计算机探索，这对我们的研究有所帮助。

本研究的部分工作是在我们于巴塞罗那大学数学研究中心、巴塞罗那大学和雷根斯堡大学会面期间完成的。感谢这些机构的盛情接待。

Roberto Gualdi 获得了亚历山大·冯·洪堡基金会、由德国科学基金会资助的 SFB 1085“高不变量”协作研究中心以及 Fundació Ferran Sunyer i Balaguer 的支持。Martín Sombra 获得了西班牙科学与创新部研究项目 PID2019-104047GB-I00 的部分支持，以及西班牙国家研究署 Severo Ochoa 和 María de Maeztu 卓越研发中心与单位计划项目 CEX2020-001084-M 的支持。

第一部分

本部分专门用于证明我们的主要结果。我们从第 1 节开始，介绍相关记号，并回顾陈述中涉及的主要对象，例如代数环面的挠点严格序列以及射影点的高度。

在第 2 节中，我们给出由线性多项式 $x_0 + x_1 + x_2$ 定义的射影直线与其经非平凡挠点平移后的像之交的高度的精确上界。

接下来的四节最终将导出定理 6.1，该定理表明，严格序列中挠点的此类高度的极限，可以用黎曼ζ函数的特殊值来计算。在第 6 节中，我们还将这一结果推广到挠点的严格子集，说明相应高度的大多数都集中在该极限值附近。

除第 7 节外，全文的论述都尽量通俗易懂且自成一体；初次阅读时，或许可以跳过第 7 节。本节旨在将前述研究推广到二维环面真子群中的挠点。

最后，第 8 节通过数值计算和绘图展示这些结果，相关计算和图形由 SageMath 笔记本 [GS22] 随本文一并提供。

1. 预备知识

这里我们讨论代数环面以及射影空间上典范高度的若干基本构造和性质。本文的论述并不完整；有关所述事实的证明和更多细节，请感兴趣的读者参阅 [BG06，第 1 章和 3] 。

我们用 $\overline{\mathbb{Q}}$ 表示有理数域 $\mathbb{Q}$的一个代数闭包。对于整数 $d \geq 1$ ，记 μ_d 为 $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ 中所有 d次单位根构成的子群，记 μ_d° 为其中本原 d次单位根的集合。我们还用 μ_∞ 表示$\overline{\mathbb{Q}}^\times$ 中所有单位根构成的子群。

对于 $n \geq 0$ ，我们用 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\overline{\mathbb{Q}}) = (\overline{\mathbb{Q}}^\times)^n$ 表示定义在 $\mathbb{Q}$上的 n 维（分裂代数）环面。它在坐标逐项相乘的运算下构成一个群，其挠子群为 μ_∞^n。对于 $d \geq 1$ 和 $\zeta \in \mu_d^\circ$，该环面上的每个 d 挠点 $\omega \in \mu_d^n$ 都可以唯一地写成

$$\omega = (\zeta^{c_1}, \ldots, \zeta^{c_n}) \tag{1.1}$$

其中 $c_i \in \{0, \ldots, d-1\}$ 对于 $i = 1, \ldots, n$。其阶为 $\operatorname{ord}(\omega) = d/\gcd(c_1, \ldots, c_n, d)$。

给定 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ 中的一个代数子集 V，若序列 $(\gamma_\ell)_{\ell \geq 1}$ 属于 V，则称其为严格的，如果它最终避开环面中任何不包含 V 的固定代数子群 H；也就是说，存在 $\ell_0 \geq 1$，使得对于所有 $\ell \geq \ell_0$，都有 $\gamma_\ell \notin H$。我们主要关注的情形是$V = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\overline{\mathbb{Q}})$。

对于每个向量 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$，我们用 χ^a 表示相应的特征，因此对于 $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\overline{\mathbb{Q}})$，有

$$\chi^a(\gamma) = \gamma_1^{a_1} \cdots \gamma_n^{a_n}.$$

的任意真代数子群都包含于一个余维 1 的代数子群中，这些代数子群由形如 的二项式定义，其中 $(0, \ldots, 0)$。因此，() 中的一个序列是严格的，当且仅当对于每个这样的 ，都存在 使得

$$\chi^a(\gamma_\ell) \neq 1 \quad \text{for all } \ell \geq \ell_0. \tag{1.2}$$

我们用 $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$表示 $\mathbb{Q}$上的 n维射影空间。对于齐次多项式 $f \in \overline{\mathbb{Q}}[x_0, \ldots, x_n]$，我们用 $Z(f)$表示它在该射影空间中定义的代数子集；对于 $\gamma \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\overline{\mathbb{Q}})$，我们考虑 f 被 γ 扭曲后得到的齐次多项式 $\gamma^* f \in \overline{\mathbb{Q}}[x_0, \ldots, x_n]$，其定义如下。

$$\gamma^* f(x_0, \ldots, x_n) = f(x_0, \gamma_1 x_1, \ldots, \gamma_n x_n).$$

对于 $\gamma \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\overline{\mathbb{Q}})$，我们还考虑其相应的平移映射

$$\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}}), \quad \xi = [\xi_0 : \xi_1 : \cdots : \xi_n] \longmapsto \gamma\,\xi := [\xi_0 : \gamma_1\,\xi_1 : \cdots : \gamma_n\,\xi_n]. \tag{1.3}$$

γ 对 f 零点集的平移与扭曲 $(\gamma^{-1})^* f$的零点集重合，也就是说

$$\gamma Z(f) = Z((\gamma^{-1})^* f)). \tag{1.4}$$

接下来回顾射影空间中典范高度的基本记号和性质。我们用 $M_{\mathbb{Q}}$ 表示 $\mathbb{Q}$的赋值集合，即该域上关于它们所定义拓扑的非平凡绝对值的等价类集合。根据奥斯特罗斯基定理，这些赋值由 $\mathbb{Q}$ 上的通常阿基米德绝对值以及 p 遍历 $\mathbb{Z}$的素数时对应的 p-进绝对值表示，因此$M_{\mathbb{Q}}$ 可视为由符号 ∞ 和这些素数组成的集合。对于每个$v \in M_{\mathbb{Q}}$，我们用 $|\cdot|_v$ 表示其代表元，并用 $\mathbb{Q}_v$ 表示 $\mathbb{Q}$ 关于该绝对值的完备化。当 $v=\infty$ 时，这个完备域就是实数域 $\mathbb{R}$；而当 $v=p$ 是素数时，它就是 p-进数域。

更一般地，对于数域 K，我们用 M_K 表示其赋值集。对于每个 $w \in M_K$，存在唯一的 $v \in M_{\mathbb{Q}}$，使得 $|\cdot|_v$ 可延拓为 K 上与 w 等价的（唯一）绝对值，这种关系记作 $w \mid v$。我们用 $|\cdot|_w$ 表示 K 上的这个绝对值，并用 K_w 表示 K 的相应完备化。对于每个 $v \in M_{\mathbb{Q}}$，K 上延拓 v 的赋值集是有限的，而且相应局部次数之和等于扩张次数：

$$\sum_{w|v} [K_w : \mathbb{Q}_v] = [K : \mathbb{Q}]. \tag{1.5}$$

现在令 $\xi = [\xi_0 : \cdots : \xi_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$。对于每个 $v \in M_{\mathbb{Q}}$，该射影点齐次坐标向量的 **v-进高度** 定义为

$$\mathrm{h}_v(\xi_0, \ldots, \xi_n) = \sum_{w|v} \frac{[K_w : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|\xi_0|_w, \ldots, |\xi_n|_w)$$

对于包含所有这些坐标的任意数域 K，其值不依赖于数域的选取，并且除有限多个 v 外均为零。ξ 的（**典范**）**高度** 定义为这些局部高度之和：

$$\mathrm{h}(\xi) = \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \mathrm{h}_v(\xi_0, \ldots, \xi_n). \tag{1.6}$$

由于乘积公式，其值不依赖于齐次坐标的选择。

一般而言，$\mathrm{h}(\xi) \geq 0$；根据克罗内克定理，$\mathrm{h}(\xi) = 0$ 当且仅当该点可以写成 $\xi = [\xi_0 : \cdots : \xi_n]$，其中 ξ_j 等于 0 或某个单位根。

注 1.1。射影点的高度衡量了其表示的复杂度。例如，点 $\xi \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ 的有理齐次坐标可写为 $\xi = [\xi_0 : \cdots : \xi_n]$，其中整数 ξ_i 互素。在这种情况下，公式（1.6）可简化为

$$\mathrm{h}(\xi) = \log \max(|\xi_0|_\infty, \ldots, |\xi_n|_\infty),$$

这给出了这些整数的最大位长度。

接下来，我们给出射影点齐次坐标向量的局部高度的伽罗瓦论公式。令 $\Xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^{n+1}$，并令

$$O(\Xi) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cdot \Xi$$

b实数集绝对伽罗瓦群逐坐标作用于该向量所形成的轨道
g群。它是 $\overline{\mathbb{Q}}^{n+1}$ 的有限子集。

对于每个 $v \in M_{\mathbb{Q}}$，我们都选取完备域 $\mathbb{Q}_v$ 的一个代数闭包，并将其关于 $|\cdot|_v$ 在该代数闭包上的唯一延拓所作的完备化记为 $\mathbb{C}_v$。这个

域既是代数闭的，又关于诱导出的绝对值完备，我们也将这个绝对值记为 $|\cdot|_v$。

我们还选择一个嵌入

$$\iota_v\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_v, \tag{1.7}$$

它诱导出一个嵌入 $\mathbb{Q}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}_v^{n+1}$，我们用相同的符号表示。于是， Ξ 的*-adic* 伽罗瓦轨道 定义为 $O(\Xi)$在该嵌入下的像，即

$$O(\Xi)_v = \iota_v(O(\Xi)).$$

它是 $\mathbb{C}_v^{n+1}$的一个有限子集，其基数与 $O(\Xi)$相同，且不依赖于 ι_v的选择。

命题 1.2。 设 $\xi \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ ，且 $\overline{\Xi} \in \mathbb{Q}^{n+1}$ 是相应的齐次坐标向量。那么对每个 $v \in M_{\mathbb{Q}}$

$$\mathrm{h}_v(\Xi) = \frac{1}{\#O(\Xi)_v} \sum_{\Lambda \in O(\Xi)_v} \log \max(|\Lambda_0|_v, \dots, |\Lambda_n|_v)$$

因此

$$\mathrm{h}(\xi) = \frac{1}{\#O(\Xi)} \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \sum_{\Lambda \in O(\Xi)_v} \log \max(|\Lambda_0|_v, \dots, |\Lambda_n|_v).$$

*I*特别地，高度在 $\mathbb{Q}$ 的绝对伽罗瓦群作用下保持不变。

证明。 设 $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个有限伽罗瓦扩张，其中包含Ξ的所有坐标，并记 G 为其伽罗瓦群。对于 $v \in M_{\mathbb{Q}}$ ，记 $M_{K,\,v}$ 为K 在 v上方延拓的赋值集合，并记 $w_0 \in M_{K,\,v}$ 为由 K上通过嵌入 $\mathbb{C}_v$ 诱导的绝对值所代表的赋值，其中 ι_v 见（1.7）。

群 G 作用于有限集 $M_{K,\,v}$。该作用可如下定义：对每一对 $\sigma \in G$ 和 $w \in M_{K,\,v}$ ，考虑赋值 $\sigma(w) \in M_{K,\,v}$ ，它由 K 上如下绝对值所代表：

$$|\alpha|_{\sigma(w)} = |\sigma(\alpha)|_w \quad \forall \alpha \in K.$$

根据 [Neu99，第二章，命题 9，1],该作用是传递的。

该 $\mathbb{Q}$-自同构 $\sigma\colon K \to K$ 可扩张为一个 $\mathbb{Q}_v$-同构 $K_w \to K_{\sigma(w)}$，因此 $[K_{\sigma(w)} : \mathbb{Q}_v] = [K_w : \mathbb{Q}_v]$。由于该作用是传递的，$M_{K,\,v}$ 中各赋值对应的局部次数相同。由公式（1.5）可得

$$\frac{[K_w : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} = \frac{1}{\#M_{K,v}}.$$

此外，根据轨道-稳定子定理，还有 $\#M_{K,\,v} = \#G/\#G_{w_0}$，其中 G_{w_0}表示位置 w_0的稳定子。记 $\Xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$，则有

$$\mathrm{h}_v(\Xi) = \sum_{w \in M_{K,v}} \frac{1}{\#M_{K,v}} \log \max_j |\xi_j|_w = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \log \max_j |\xi_j|_{\sigma(w_0)}.$$

另一方面， G 也在 Ξ 的伽罗瓦轨道上具有传递作用，因此

$$\frac{1}{\#O(\Xi)_v} = \frac{1}{\#O(\Xi)} = \frac{\#G_\Xi}{\#G},$$

其中， G_Ξ 是该向量的稳定子。因此

$$\frac{1}{\#G}\sum_{\sigma\in G}\log\max_j|\xi_j|_{\sigma(w_0)}=\frac{1}{\#G}\sum_{\sigma\in G}\log\max_j|(\iota_v\circ\sigma)(\xi_j)|_v$$
$$=\frac{1}{\#O(\Xi)_v}\sum_{\Lambda\in O(\Xi)_v}\log\max_j|\Lambda_j|_v,$$

这就证明了第一个陈述。其他结论可直接得出。 □

注记 1.3。 在更一般的算术交理论框架下，这一结果的一个版本见 [BPRS19，命题 2。3]。

2. The range of the height

在本节中，我们开始研究直线与其

$$C=Z(x_0+x_1+x_2)\subset\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}})$$

平移后的直线 ωC （平移量为挠点 ω ，其中 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\overline{\mathbb{Q}})$ 。与（1.4）中一样，该平移后的直线恰好是线性多项式 $x_0+x_1+x_2$经 ω^{-1} 扭曲后的零点集，即

$$\omega C=Z(x_0+\omega_1^{-1}x_1+\omega_2^{-1}x_2).$$

因此，交 $C\cap\omega C$ 恰好是线性方程组的解集

$$x_0+x_1+x_2=x_0+\omega_1^{-1}x_1+\omega_2^{-1}x_2=0.$$

当 ω 非平凡时，即当 $\omega\neq(1,1)$ 时，它由点

$$P(\omega)=[\omega_2^{-1}-\omega_1^{-1}:1-\omega_2^{-1}:\omega_1^{-1}-1]\in\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}}). \tag{2.1}$$

正如下一个例子所示，它的高度非平凡地依赖于 ω。

例 2.1。 对于 $d\geq 2$ 令 $\zeta\in\mu_d^\circ$ 为一个本原的 d 阶单位根，并考虑挠点 $\omega_d=(\zeta,\zeta^2)$。相应的交点可写为 $P(\omega_d)=[1:-1-\zeta:\zeta]$，而这些齐次坐标所组成向量的伽罗瓦轨道为

$$\{(1,-1-\zeta^k,\zeta^k)\mid k\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times\}.$$

这是一个基数为 $\varphi(d)$ 的有限集，其中 φ 是欧拉函数。

对于每个素数 p 以及每个 $k\in(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^\times$ ，我们都有

$$|\iota_p(\zeta^k)|_p=1\quad\text{and}\quad|\iota_p(\zeta^k+1)|_p=|\iota_p(\zeta^k)+1|_p\leq 1$$

由于 p-进绝对值满足超度量不等式，因此 $P(\omega_d)$ 的高度公式由 命题 1.2 化为其阿基米德贡献，即

$$\mathrm{h}(P(\omega_d))=\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{k\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}\log\max(1,|\mathrm{e}^{2\pi ik/d}+1|_\infty)$$
$$=\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{k\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}\log\max(1,\sqrt{2+2\cos(2\pi k/d)}).$$

由此可得

$$\mathrm{h}(P(\omega_2))=\mathrm{h}(P(\omega_3))=0,\ \mathrm{h}(P(\omega_4))=\frac{1}{2}\log(2),\ \mathrm{h}(P(\omega_5))=\frac{1}{4}\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\ \dots$$

本截面的主要结果如下：我们确定交点 $P(\omega)$ 的高度取值范围，并找出极端情形。

命题 2.2。 设 $\omega \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 是一个非平凡挠点。那么，相应的高度满足不等式 $0 \leq \mathrm{h}(P(\omega)) \leq \log(2)$。当且仅当

$$\omega \in \{(1,\zeta),(\zeta,1),(\zeta,\zeta) \mid \zeta \in \mu_\infty \setminus \{1\}\} \cup \{(\zeta,\zeta^2) \mid \zeta \in \mu_3^\circ\},$$

而上界当且仅当

$$\omega \in \{(-1,\zeta),(\zeta,-1),(\zeta,-\zeta) \mid \zeta \in \mu_\infty \text{ with } \mathrm{ord}(\zeta) \neq 2^k \text{ for all } k \geq 0\}.$$

在证明该命题之前，我们选取 $P(\omega)$ 的齐次坐标向量为

$$\mathcal{P}(\omega) = (\omega_2^{-1} - \omega_1^{-1}, 1 - \omega_2^{-1}, \omega_1^{-1} - 1) \in \overline{\mathbb{Q}}^3. \tag{2.2}$$

下一个引理给出了其局部高度的公式。

引理 2.3。 设 $d = \mathrm{ord}(\omega)$。那么，对每个 $v \in M_{\mathbb{Q}}$，都有

$$\mathrm{h}_v(\mathcal{P}(\omega)) = \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{k \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \log \max(|\iota_v(\omega_2^k) - \iota_v(\omega_1^k)|_v, |\iota_v(\omega_2^k) - 1|_v, |\iota_v(\omega_1^k) - 1|_v),$$

其中 ι_v 是 (1.7)中的嵌入。

证明。 和 ω_1 与 ω_2 都包含在 d 次分圆扩张 $\mathbb{Q}$中，因此 $\mathcal{P}(\omega)$ 的各个坐标也属于该扩张。因此，该向量的伽罗瓦轨道与伽罗瓦群在此分圆扩张上的作用下的轨道重合。后者同构于 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$，并且根据 (1.1)，该群中的每个元素 k 将ω_i 映射为 ω_i^k，其中 $i = 1, 2$。因此， $\mathcal{P}(\omega$的伽罗瓦轨道可写为

$$\begin{aligned} O(\mathcal{P}(\omega)) &= \{(\omega_2^{-k} - \omega_1^{-k}, 1 - \omega_2^{-k}, \omega_1^{-k} - 1) \mid k \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times\} \\ &= \{(\omega_2^k - \omega_1^k, 1 - \omega_2^k, \omega_1^k - 1) \mid k \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times\}. \end{aligned}$$

当 k 在 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$中取遍所有值时，这个最后的集合中的元素两两不同。事实上，属于 k 的稳定子 $\mathcal{P}(\omega)$ 的任意元素 $\omega^k = \omega$ 都必须满足 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$，于是根据 ω 的阶为 d 这一假设，它在 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ 中必为平凡元素。该结论由命题 1.2得出。 □

我们还需要两个辅助结果。第一个是关于分圆多项式在 1 处取值的经典公式，该公式也将在第 3 节和第 4中发挥重要作用。其证明很初等，可见 [Lan94，第 74]页。

引理 2.4。 对于 $d \geq 2$，设 Φ_d 为第 d 个分圆多项式。则

$$\Phi_d(1) = \begin{cases} p & \text{if } d \text{ is a power of a prime } p, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

第二个辅助结果给出了单位根与点 1 之间的 p-进距离。

引理 2.5. 设 p 是一个素数，且 $d \geq 2$。那么对于所有 $\zeta \in \mu_d^\circ$，都有

$$|\iota_p(\zeta) - 1|_p = \begin{cases} p^{-1/\varphi(d)} & \text{if } d \text{ is a power of } p, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明. ζ 的伽罗瓦共轭是形如 ζ^k 的元素，其中 $k \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$。对于每个 k，都有 $\zeta^k - 1 = (\zeta^{k-1} + \cdots + 1)(\zeta - 1)$，因此超度量不等式推出

$$|\iota_p(\zeta^k) - 1|_p \le |\iota_p(\zeta) - 1|_p.$$

由对称性可知，反向不等式也成立。因此，对所有 k，$|\iota_p(\zeta^k) - 1|_p = |\iota_p(\zeta) - 1|_p$，于是

$$|\iota_p(\zeta) - 1|_p^{\varphi(d)} = \prod_k |\iota_p(\zeta^k) - 1|_p = |\Phi_d(1)|_p.$$

由此可得引理 2.4的结论。 □

命题 2.2的证明。下界源于高度非负这一事实。由克罗内克定理，$P(\omega)$ 的高度为零，当且仅当该点可写成 $[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2]$，其中 $\xi_j \in \mu_\infty \cup \{0\}$ 对所有 j均成立。在 C 中确定这类点，可知所考虑的高度等于 0，当且仅当

$$P(\omega) \in \{[1:-1:0], [1:0:-1], [0:1:-1]\} \quad \text{or} \quad P(\omega) \in \{[1:\zeta:\zeta^2] \mid \zeta \in \mu_3^\circ\}.$$

将 $P(\omega)$ 在（2.1）中的显式形式进行比较可知，第一种情况成立，当且仅当 ω 等于 $(1,\zeta)$、$(\zeta, 1)$ 或 (ζ, ζ)，其中 $\zeta \in \mu_\infty \setminus \{1\}$。对于第二种情况，有 $P(\omega) = [1 : \zeta : \zeta^2]$，其中 $\zeta \in \mu_3^\circ$ 当且仅当

$$\omega_2^{-1} - \omega_1^{-1} \neq 0, \quad \frac{1 - \omega_2^{-1}}{\omega_2^{-1} - \omega_1^{-1}} = \zeta, \quad \frac{\omega_1^{-1} - 1}{\omega_2^{-1} - \omega_1^{-1}} = \zeta^2. \tag{2.3}$$

这意味着 $1 + \zeta\omega_1^{-1} + \zeta^2\omega_2^{-1} = 0$ 因此 $[1 : \zeta\omega_1^{-1} : \zeta^2\omega_2^{-1}] \in C(\mathbb{Q})$。我们先前关于 C 中齐次坐标为单位根的点的知识表明，要么 $\omega_1 = \omega_2 = 1$，要么 $\omega_1 = \zeta^2$，$\omega_2 = \zeta$。由于第二种可能性是唯一满足（2.3）中条件的情形，这就证明了我们关于达到 C 下界的点的断言。

现在令 $v \in M_{\mathbb{Q}}$。利用对每个 $|\iota_v(\omega_1)|_v = |\iota_v(\omega_2)|_v = 1$ 都成立这一事实，并在 v 时使用三角不等式，否则使用超度量不等式，我们由引理 2.3推出

$$\mathrm{h}_v(\mathcal{P}(\omega)) \le \begin{cases} \log(2) & \text{if } v = \infty, \\ 0 & \text{if } v \neq \infty, \end{cases} \tag{2.4}$$

由此可直接得到上界。

当且仅当（2.4）中的所有不等式实际上都取等号时，才能达到这个上界。当 $v = \infty$时，这一要求尤其意味着，在$k = 1$ 时，公式引理 2.3 中的求和项等于 log(2)，而这当且仅当 ω 具有如下形式

$$(-1,\zeta), \quad (\zeta,-1) \quad \text{or} \quad (\zeta,-\zeta) \quad \text{with } \zeta \in \mu_\infty. \tag{2.5}$$

这些挠点的阶均为偶数，因此该公式中的指标必为奇数，这意味着所有求和项都等于 log(2)。由此得出，对于阿基米德赋值，只有当 2.4 ）中的不等式取等号时，ω 才具有（2.5）所述的形式。

设 $d = \mathrm{ord}(\zeta)$。为了达到上界，对于上述 ω的每一种可能性，我们还必须确保对每个素数 p，都有

$$\max(|2|_p, |\iota_p(\zeta^k) - 1|_p, |\iota_p(\zeta^k) + 1|_p) = 1 \quad \text{for all } k \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times.$$

只有在 $p = 2$ 时这才不是平凡的；此时它等价于以下条件：对于所有 k，都有 $|\iota_2(\zeta^k) - 1|_2 = 1$，这是由超度量性质得出的。当 $d = 1$ 时，该条件不成立；而当 $d \geq 2$ 时，根据引理 2.5，该条件成立当且仅当 d 不是 2 的幂。证明至此完成。□

注 2.6. 在更一般的阿拉克洛夫几何背景下，[MS19]和 [Gua18a，第 5] 章为完全交的高度给出了上界。然而，在我们所研究的特定情形下，这两项结果都不是尖锐的。

3. The negligibility of the non-Archimedean heights

现在我们转向主要研究对象，即严格序列中直线 C 与其挠点平移像的交的高度的极限值。这里我们重点考察这些高度中的非阿基米德贡献，并为其给出显式表达式。

我们首先注意到，这些非阿基米德局部高度可能非零。事实上，对于 $\mathbb{Q}$ 的任一非阿基米德赋值，都很容易构造出使相应局部高度非平凡的 ω 取值，正如下一个例子所示。

例 3.1. 设 p 为素数，且 $\zeta \in \mu_p^\circ$。那么根据 引理 2.3 和 2.4，

$$\mathrm{h}_p(\mathcal{P}(\zeta, 1)) = \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{k \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \log |\iota_p(\zeta^k) - 1|_p = \frac{\log |\Phi_p(1)|_p}{p-1} = -\frac{\log(p)}{p-1}.$$

然而，这个例子所呈现的情形已经包含了这些非阿基米德局部高度可能出现的最坏行为；下一命题中的显式计算清楚地表明了这一点。

P命题 3.2. 设 $\omega \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 是一不非平凡挠点，且 p 是一个素数。那么

$$\mathrm{h}_p(\mathcal{P}(\omega)) = \begin{cases} -\dfrac{\log(p)}{p^{r-1}(p-1)} & \text{if } \operatorname{ord}(\omega) = p^r \text{ for some } r \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在证明这个命题之前，我们先给出一个初等引理。

引理 3.3. 设 $(F, |\cdot|)$ 是一个赋有非阿基米德绝对值的域。那么对于所有满足最大公约数$(c_1, c_2, d) = 1$ 的 $c \in \mathbb{Z}^2$ 和 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，以及 F 中所有本原的 d-单位根 ζ，我们有

$$\max(|\zeta^{c_1} - 1|, |\zeta^{c_2} - 1|) = |\zeta - 1|.$$

证明。由于 ζ 是单位根，其绝对值等于 1。由超度量不等式可得，对于每个 $e \geq 1$，都有 $|\zeta^e - 1| = |\zeta^{e-1} + \cdots + 1|\,|\zeta - 1| \leq |\zeta - 1|$。由于根据关系 $|\zeta^e - 1| = |\zeta^{-e} - 1|$，同一不等式也适用于 $e \leq -1$，并且它对 $e = 0$也显然成立，因此我们有

$$|\zeta^e - 1| \leq |\zeta - 1| \quad \text{for all } e \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

因此，$\max(|\zeta^{c_1} - 1|, |\zeta^{c_2} - 1|) \leq |\zeta - 1|$。

否则，由于 $\gcd(c_1, c_2, d) = 1$ 存在 $b \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $b_1c_1 + b_2c_2 = 1$ (模 d)。这意味着 $\zeta - 1 = \zeta^{b_2c_2}(\zeta^{b_1c_1} - 1) + (\zeta^{b_2c_2} - 1)$，由超度量不等式和 (3.1) 可知

$$|\zeta - 1| \leq \max(|\zeta^{b_1c_1} - 1|, |\zeta^{b_2c_2} - 1|) \leq \max(|\zeta^{c_1} - 1|, |\zeta^{c_2} - 1|),$$

完成证明。□

命题 *3.2* 的证明。 令 $d = \mathrm{ord}(\omega)$; 由于 ω 是非平凡的，我们有 $d \geq 2$。取 $\zeta \in \mu_{d^\circ}^{\circ}$ 由于 $\omega \in \mu_d^2$，根据（1.1）存在 $c \in \mathbb{Z}^2$，使得最大公约数$(c_1,\ c_2,\ d) = 1$ 满足

$$\omega = (\zeta^{c_1}, \zeta^{c_2}).$$

超度量不等式结合引理 2.3 和3.3便可推出

$$\begin{aligned} \mathrm{h}_p(\mathcal{P}(\omega)) &= \frac{1}{\varphi(d)} \sum_k \log \max(|\iota_p(\zeta^{k\,c_2}) - \iota_p(\zeta^{k\,c_1})|_p, |\iota_p(\zeta^{k\,c_2}) - 1|_p, |\iota_p(\zeta^{k\,c_1}) - 1|_p) \\ &= \frac{1}{\varphi(d)} \sum_k \log |\iota_p(\zeta^k) - 1|_p. \end{aligned}$$

因此，该结论由引理 2.5得出。 □

对所有有限处求和后，命题 3.2 表明，高度中非阿基米德贡献 $P(\omega)$ 始终非正; 此外，当 ω 至少有两个不同的素因子时，该贡献恰好为零。

推论 3.4. 对于 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 的每个非平凡挠点 ω，都有

$$\sum_{v \in M_{\mathbb{Q}} \setminus \{\infty\}} \mathrm{h}_v(\mathcal{P}(\omega)) = -\frac{\Lambda(\mathrm{ord}(\omega))}{\varphi(\mathrm{ord}(\omega))},$$

其中， Λ 表示冯·曼戈尔特函数。

注记 3.5。 更明确地说，推论 3.4 指出， $P(\omega)$ 的这部分高度等于

$$-\frac{\log(p)}{p^{r-1}(p-1)}$$

当 $\mathrm{ord}(\omega) = p^r$ 对某个素数 p 和 $r \geq 1$ 成立时; 否则为 0。

进而，这一结果意味着，当 $\mathrm{ord}(\omega)$ 很大时， $P(\omega)$ 的高度中的非阿基米德贡献趋于零。

推论 3.6。 设 $(\omega_\ell)_{\ell \geq 1}$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 中的一列非平凡挠点，且满足极限$\ell \to +\infty \mathrm{ord}(\omega_\ell) = +\infty$。那么

$$\lim_{\ell \to +\infty} \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}} \setminus \{\infty\}} \mathrm{h}_v(\mathcal{P}(\omega_\ell)) = 0.$$

证明。 由推论 3.4和注记 3.5可知，不失一般性，我们可以将问题化简为以下情形：对于所有 $\omega_\ell) = p_\ell^{r_\ell}$满足 p_ℓ 为素数，且 $r_\ell \geq 1$ 对所有 ℓ均成立。此时，向量 $\mathcal{P}(\omega_\ell)$ 的非阿基米德局部高度之和在相差一个符号的意义下等于

$$\frac{\log(p_\ell)}{p_\ell^{r_\ell - 1}(p_\ell - 1)} = \frac{p_\ell}{r_\ell\,(p_\ell - 1)} \frac{\log(p_\ell^{r_\ell})}{p_\ell^{r_\ell}} = \frac{p_\ell}{r_\ell\,(p_\ell - 1)} \frac{\log(\mathrm{ord}(\omega_\ell))}{\mathrm{ord}(\omega_\ell)}.$$

由于右侧的第一个因子有界，只要 $\ell \to +\infty$，这个量就趋于 0。□

4. 阿基米德高度的极限

计算了直线 C 与其经非平凡挠点平移后的交点的高度中的非阿基米德贡献后，我们转而考察这类点的严格序列对应的阿基米德对应项的极限行为。

简记为 $|\cdot| = |\cdot|_\infty$。我们用

$$\mathbb{S} = (S^1)^2 = \{z \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid |z_1| = |z_2| = 1\}$$

$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^\times)^2$ 这个复环面上的紧致环面表示，并用 ν 表示其概率 Haar 测度。考虑函数

$$F\colon (\mathbb{C}^\times)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad z \longmapsto \log\max(|z_2 - z_1|, |z_2 - 1|, |z_1 - 1|). \tag{4.1}$$

还考虑余热带化映射

$$\mathrm{cotrop}\colon (\mathbb{C}^\times)^2 \longrightarrow (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2, \quad z \longmapsto (\arg(z_1), \arg(z_2))$$

以及函数

$$f\colon (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad u \longmapsto \log\max(|e^{iu_2} - e^{iu_1}|, |e^{iu_2} - 1|, |e^{iu_1} - 1|). \tag{4.2}$$

推前测度 $\mathrm{cotrop}_*\,\nu$ 与 $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$, 上的归一化勒贝格测度重合，而原像 $\mathrm{cotrop}^* f$ 在 $\mathbb{S}$ 上与 F 的限制重合。

下一个结果是一个渐近的阿基米德对应项，对应于推论 3.6。

命题 4.1。设 $(\omega_\ell)_{\ell \geq 1}$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 中的非平凡扭点严格序列。那么

$$\lim_{\ell \to +\infty} \mathrm{h}_\infty(\mathcal{P}(\omega_\ell)) = \int_{\mathbb{S}} F \, d\nu = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2} f(u)\, du_1 du_2.$$

为证明这一点，我们需要下面的引理。给定 $d, e \geq 1$ 且满足 $e \mid d$，考虑相应的模单位群之间的约化同态

$$\pi_{d,e}\colon (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times.$$

设 $d = \prod_p p^{r_p}$ 和 $e = \prod_p p^{s_p}$ 分别为它们的不可约分解。在中国剩余定理给出的分解下，我们可以写成

$$\pi_{d,e} = \bigoplus_p \pi_{p^{r_p}, p^{s_p}}, \tag{4.3}$$

其中 $\pi_{p^{r_p}, p^{s_p}}\colon (\mathbb{Z}/p^{r_p}\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p^{s_p}\mathbb{Z})^\times$ 表示相应的约化映射。 .

引理 4.2. 同态 $\pi_{d,\,e}$ 是满射。

证明. 式（4.3）中的分解使我们可以将问题归结为 $d = p^r$ 且 $e = p^s$ 满足 $r \geq s \geq 0$ 的情形。由以下事实可得结论：元素 $k \in \mathbb{Z}$ 模 p^r 为单位根，当且仅当它模 p^s 为单位根，因为这两个条件都等价于 $p \nmid k$。□

在命题 4.1 的设定下，对于每个 $\ell \geq 1$ 引理 2.3 表明，与挠点 ω_ℓ 对应的阿基米德局部高度可写为

$$\mathrm{h}_\infty(\mathcal{P}(\omega_\ell)) = \frac{1}{\varphi(d_\ell)} \sum_k F(\iota_\infty(\omega_\ell^k)) \tag{4.4}$$

其中 k 取遍 $(\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})^\times$ 的元素，且 $d_\ell = \mathrm{ord}(\omega_\ell)$。

考虑 ω_ℓ 的 ∞-进伽罗瓦轨道上的均匀概率测度，即定义在紧致环面上的离散测度：

$$\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} = \frac{1}{\varphi(d_\ell)} \sum_k \delta_{\iota_\infty(\omega_\ell^k)}, \tag{4.5}$$

其中每个 $\delta_{\iota_\infty(\omega_\ell^k)}$ 表示对应点上的狄拉克δ测度。因此，式（4.4）可写为

$$\mathrm{h}_\infty(\mathcal{P}(\omega_\ell)) = \int_{\mathbb{S}} F \, d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty}. \tag{4.6}$$

众所周知，式（4.5）中的概率测度序列弱收敛于概率 Haar 测度 ν，当 $\ell \to +\infty$。具体而言，对于任意有界且 ν-几乎处处连续的实值函数 ϕ 在 $\mathbb{S}$上，

$$\lim_{\ell \to +\infty} \int_{\mathbb{S}} \phi \, d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} = \int_{\mathbb{S}} \phi \, d\nu. \tag{4.7}$$

当 ϕ 连续时，这是 Bilu 等分布定理在小高度点的伽罗瓦轨道上的一个特例 [Bil 97]，；而其推广到 ϕ 仅有界且 ν-几乎处处连续的情形，则可由测度论的一般结果推出，例如 [CT09，引理 6。3]不过，由于式（4.7）中的极限涉及的是挠点，而非任意小高度点，因此也可以利用高斯指数和的经典事实以初等方法证明，正如文献 [DH19，命题 33]所述。

由（4.6），命题 4.1 可视为关于测试函数的一项等分布结果 ϕ 该函数除点 $z =$（1，1）外处处连续，并在该点有一个对数奇点。因此，它是 Chambert-Loir与 Thuillier关于小高度点的伽罗瓦轨道的对数等分布定理 [CT09]，以及 Dimitrov与 Habegger关于代数环面挠点的伽罗瓦轨道的对数等分布定理 [DH19]的一个特例。尽管如此，我们仍在此给出一个简单证明，它仅依赖于（4.7）中的较经典等分布定理，以及分圆多项式在 1 处的取值公式。

命题*4.1*的证明。对每个 $\ell \geq 1$，令 $d_\ell = \mathrm{ord}(\omega_\ell)$ 和 $e_\ell = \mathrm{ord}(\omega_{\ell,\,1})$，后者是前者的一个除子。由于序列（$\omega_\ell$）$_{\ell \geq 1}$ 是严格递增的，条件（1.2）意味着

$$\lim_{\ell \to +\infty} e_\ell = +\infty. \tag{4.8}$$

考虑函数 $G\colon (\mathbb{C}^\times)^2 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 定义为 $G(z) = \log |z_1 - 1|$。它关于测度 ν 的积分是多项式 $z_1 - 1$的对数Mahler测度，而将詹森公式应用于该函数可知，此量为零。另一方面，它关于（4.5）中的离散测度的积分可计算为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}} G \, d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} &= \frac{1}{\varphi(d_\ell)} \sum_{k \in (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})^\times} \log |\iota_\infty(\omega_{\ell,1})^k - 1| \\ &= \frac{1}{\varphi(e_\ell)} \sum_{k \in (\mathbb{Z}/e_\ell\mathbb{Z})^\times} \log |\iota_\infty(\omega_{\ell,1})^k - 1| = \frac{1}{\varphi(e_\ell)} \log |\Phi_{e_\ell}(1)|.\end{aligned}$$

第二个等式源于以下事实：以元素$k \in (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})^\times$ 为指标的求和项，其取值仅取决于它在约化同态 π_{d_ℓ,e_ℓ}下的像；根据 引理 4.2 ，该同态是满射，且纤维的基数为 $\varphi(d_\ell)/\varphi(e_\ell)$。因此，结合 引理 2.4 、（4.8）以及 推论 3.6证明中的相同论证，可得

$$\lim_{\ell\to+\infty}\int_{\mathbb{S}} G\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} = 0 = \int_{\mathbb{S}} G\,d\nu. \tag{4.9}$$

现在令 $(U_m)_{m\geq 1}$ 为由下式定义的紧致环面中闭子集$\{z\in\mathbb{S} \mid z_1 = 1\}$ 的邻域嵌套序列

$$U_m = \Big\{ z\in\mathbb{S} \mid \arg(z_1) \in \Big(-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\Big) \pmod{2\pi}\Big\}.$$

由于 F 和 G 在该闭子集之外均为连续函数，因此对每个 $m \geq 1$ ，(4.7) 中的等分布定理表明

$$\lim_{\ell\to+\infty}\int_{\mathbb{S}\setminus U_m} F\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} = \int_{\mathbb{S}\setminus U_m} F\,d\nu, \quad \lim_{\ell\to+\infty}\int_{\mathbb{S}\setminus U_m} G\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} = \int_{\mathbb{S}\setminus U_m} G\,d\nu. \tag{4.10}$$

(4.10) 中的第二个极限与 (4.9) 中的极限共同推出

$$\lim_{\ell\to+\infty}\int_{U_m} G\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} = -\lim_{\ell\to+\infty}\int_{\mathbb{S}\setminus U_m} G\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} = -\int_{\mathbb{S}\setminus U_m} G\,d\nu = \int_{U_m} G\,d\nu. \tag{4.11}$$

对于所有 $z\in\mathbb{S}$ ，均有 $G(z) \leq F(z) \leq \log(2)$，因此对每个 $\ell \geq 1$,

$$\int_{U_m} G\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} \leq \int_{U_m} F\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} \leq \int_{U_m} \log(2)\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty}. \tag{4.12}$$

由 (4.10)、(4.11) 和 (4.12)，我们可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}\setminus U_m} F\,d\nu + \int_{U_m} G\,d\nu &\leq \liminf_\ell \int_{\mathbb{S}} F\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} \\ &\leq \limsup_\ell \int_{\mathbb{S}} F\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty} \leq \int_{\mathbb{S}\setminus U_m} F\,d\nu + \log(2)\,\nu(U_m).\end{aligned}$$

陈述中的第一个等式通过对 $m\to+\infty$ 取极限得到，利用了 $\lim_{m\to+\infty}\nu(U_m) = 0$ 以及勒贝格积分的绝对连续性；第二个等式则直接由第一个等式结合变量替换公式得出。□

5. Computing the integral

接下来，我们计算给出向量阿基米德高度极限的积分 $\mathcal{P}(\omega_\ell)$，对于一列严格序列的非平凡挠点 (命题 4.1)，即

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2} \log\max(|e^{iu_2}-e^{iu_1}|, |e^{iu_2}-1|, |e^{iu_1}-1|)\,du_1du_2.$$

更准确地说，我们将证明以下结论。

命题 5.1. $I = \frac{2\zeta(3)}{3\zeta(2)} = 0.487175\ldots$.

我们将利用现有的对称性来简化此积分的计算。为此，考虑如下给出的 $\mathbb{R}^2$ 线性自同构：

$$\alpha(u_1,u_2)=(u_2,u_1),\quad \beta(u_1,u_2)=(-u_2,u_1-u_2),\quad \gamma(u_1,u_2)=(-u_1,-u_2). \tag{5.1}$$

由于它们限制为格 $2\pi\mathbb{Z}^2$，的自同构，因此每个自同构也会在商空间 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}^2$，上诱导一个自同构，我们用相应的上划线字母表示该自同构。令 H 表示由它们生成的 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}^2$ 自同构群。

回想一下，对于 H 在 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}^2$ 上的作用，基本域是 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}^2$ 的一个闭子集；它在 H 中各元素作用下的平移像覆盖整个空间，并且任意两个不同平移像的交的内部为空。

在下文中，记 D 为 $\mathbb{R}^2$ 的三角形，其顶点为 $(0,0)$、$(\pi,0)$ 和 $(4\pi/3,2\pi/3)$，并记 D 为它在 $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ 中的像[2]。此外，令 f 表示 I的被积函数，它与式 (4.2) 中的函数一致。

命题 5.2. 自同构群 H 满足以下性质：

(1) $H=\{\bar\alpha^{e_1}\,\bar\beta^{e_2}\,\bar\gamma^{e_3}\mid e_1,e_3=0,1,\ e_2=0,1,2\}$，*(2)* $\#H=12$，*(3)* 集合 D 是 H 作用的基本域，*(4)* $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ 上的勒贝格测度在 H 下不变，*(5)* 函数 f 在 H 下不变，*(6)* 对每个 $u\in D$，都有 $f(u)=\log|e^{iu_1}-1|$。

证明。 H 的生成元满足以下关系

$$\bar\alpha^2=\bar\beta^3=\bar\gamma^2=1,\quad \bar\gamma\,\bar\alpha=\bar\alpha\,\bar\gamma,\quad \bar\gamma\,\bar\beta=\bar\beta\,\bar\gamma,\quad \bar\beta\,\bar\alpha=\bar\alpha\,\bar\beta^2.$$

最后三个关系表明， H 中的所有元素都具有以下形式： $\bar\alpha^{e_1}\,\bar\beta^{e_2}\,\bar\gamma^{e_3}$ 其中e_1，e_2，$e_3\geq 0$，而其余关系给出了这些指数的相应上界，从而证明了（1）。

为证明（3），注意到 β 在 D 的非零顶点上的作用由下式给出

$$(\pi,0)\xrightarrow{\beta}(0,\pi)\xrightarrow{\beta}(-\pi,-\pi),\qquad \left(\tfrac{4\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3}\right)\xrightarrow{\beta}\left(\tfrac{-2\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3}\right)\xrightarrow{\beta}\left(\tfrac{-2\pi}{3},\tfrac{-4\pi}{3}\right).$$

容易直观地看出 $\mathbb{R}^2$ 上的 α 和 γ 的作用，因为这两个线性映射分别是关于对角直线和原点的对称变换。图 5.1 中的第一幅图描绘了这三个线性映射及其复合在 D 上的作用，而第二幅图则展示了商空间 $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$,上的这些区域，该商空间由正方形 $[0,2\pi]^2$ 表示，其相对边彼此粘合。

第二幅图表明，只有当 $\bar\alpha^{e_1}\,\bar\beta^{e_2}\,\bar\gamma^{e_3}$ 与 e_1、$e_3=0$、1 和 $e_2=0$、1、2 的乘积固定 D 时，才有 $e_1=e_2=e_3=0$。这就证明了（2）。也可以从图中验证（3）中的陈述： D 在 H的各元素作用下得到的平移像嵌入 $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ 中，如同拼图的各块。因此，这些平移像覆盖整个空间，且任意两个不同平移像的交的内部为空。

为证明（4）中的命题，注意到（5.1）中的线性自同构保持 $\mathbb{R}^2$ 的勒贝格测度，因为它们的行列式等于 1； $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ 的诱导自同构也如此[2]。

对于（5），考虑定义在 $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ 上的函数如下

$$\phi_1(u)=|e^{iu_2}-e^{iu_1}|,\quad \phi_2(u)=|e^{iu_1}-1|,\quad \phi_3(u)=|e^{iu_2}-1|.$$

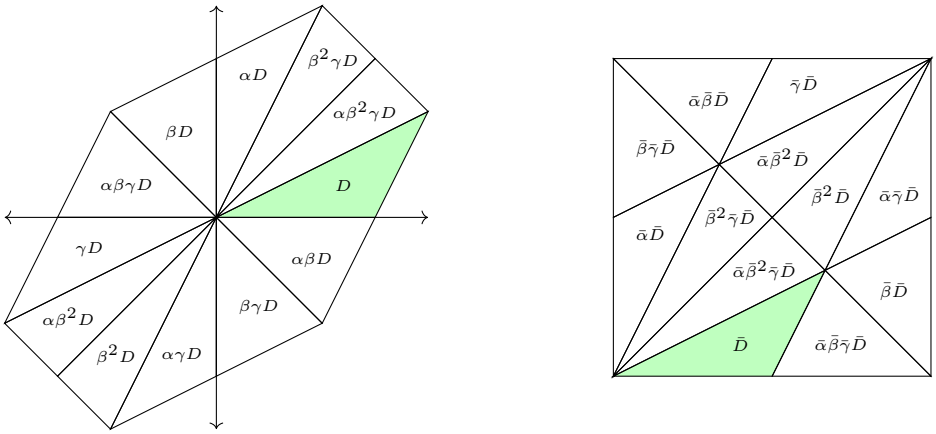

FIGURE 5.1. 在基本域 D 上的 H

它们在 $\bar\gamma$ 下保持不变，而 $\bar\alpha$ 使 ϕ_1 保持不变，并将 ϕ_2 与 ϕ_3互换； β则进行循环置换。我们有 $f = \log\max(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$，因此该函数在 H 下保持不变。

最后，注意到 $|e^{is} - 1| = \sqrt{2 - 2\cos(s)}$，因此对于 s， $s' \in [0, 2\pi]$，

$$|e^{is} - 1| \le |e^{is'} - 1| \text{ if and only if } s \le s' \le 2\pi - s. \tag{5.2}$$

另一方面，点 $u \in \mathbb{R}^2$ 属于 D 当且仅当它满足不等式

$$u_2 \ge 0, \quad u_1 - 2u_2 \ge 0, \quad u_2 - 2u_1 + 2\pi \ge 0.$$

特别地， $u_1 - u_2 \in [0, 2\pi]$ 对于每个 $u \in D$。这些不等式蕴含了（5.2）中的不等式，其中 $s' = u_1$ 且 $s = u_1 - u_2$。u_2因此， $\phi_2 \ge \phi_1$， ϕ_3 在 D上，这就证明了（6）。□

我们还需要下面的积分公式。

引理 5.3。 下列等式成立：

(1) $$\int_0^{\pi} s \log|e^{is} - 1|\, ds = \frac{7}{4}\zeta(3),$$

(2) $$\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} (4\pi - 3s) \log|e^{is} - 1|\, ds = \frac{11}{12}\zeta(3).$$

证明。 设 $0 < \varepsilon \le \pi$。关于级数收敛性的狄利克雷–哈代判别法 [JJ56，第 42] 页表明，部分和数列 $\sum_{k=1}^{\ell} e^{iks}/k$， $\ell \ge 1$在区间 $[\varepsilon, \pi]$ 上一致收敛于 $-\log(1 - e^{is})$ 的主值分支。因此数列

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\ell} \frac{e^{iks}}{k}\right), \quad \ell \ge 1, \tag{5.3}$$

c在此区间上一致收敛于函数 –log $|e^{is} - 1|$。这意味着

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} s \log|e^{is} - 1|\, ds = -\sum_{k\ge1} \frac{1}{k} \operatorname{Re}\left(\int_{\varepsilon}^{\pi} s\, e^{iks}\, ds\right). \tag{5.4}$$

对于每个 $k \ge 1$， 分部积分可得

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} s\, e^{iks}\, ds = \frac{1}{ik}\left(\left[s\, e^{iks}\right]_{\varepsilon}^{\pi} - \int_{\varepsilon}^{\pi} e^{iks}\, ds\right) = \frac{1}{ik}\left(\pi(-1)^k - \varepsilon\, e^{ik\varepsilon} - \frac{1}{ik}((-1)^k - e^{ik\varepsilon})\right).$$

由（5.4）可推得

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} s\log|\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}-1|\,ds=\sum_{k}\Big(\frac{\varepsilon}{k^2}\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon})+\frac{1}{k^3}(\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon})-(-1)^k)\Big).$$

取极限 $\varepsilon\to 0$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} s\log|\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}-1|\,ds&=\sum_{k}\frac{1-(-1)^k}{k^3}=2\sum_{2\nmid k}\frac{1}{k^3}\\&=2\Big(\sum_{k}\frac{1}{k^3}-\sum_{2|k}\frac{1}{k^3}\Big)=2\Big(1-\frac{1}{8}\Big)\sum_{k}\frac{1}{k^3}=\frac{7}{4}\zeta(3),\end{aligned}$$

证明（1）。对于（2）中的公式，由（5.3）中的序列一致收敛可推得

$$\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}(4\pi-3s)\log|\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}-1|\,ds=-\sum_{k}\frac{1}{k}\operatorname{Re}\Big(\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}(4\pi-3s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}\,ds\Big).\tag{5.5}$$

对于每个 $k\geq 1$，现在分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}(4\pi-3s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}\,ds&=\frac{1}{\mathrm{i}k}\Big(\Big[(4\pi-3s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}\Big]_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}+3\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}\,ds\Big)\\&=\frac{1}{\mathrm{i}k}\Big(-\pi\,(-1)^k+\frac{3}{\mathrm{i}k}\,(\rho^k-(-1)^k)\Big)\end{aligned}$$

其中 $\rho=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$。根据（5.5），我们得出

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}(4\pi-3s)\log|\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}-1|\,ds&=3\sum_{k}\frac{1}{k^3}(\operatorname{Re}(\rho^k)-(-1)^k)\\&=3\Big(\sum_{3|k}\frac{1}{k^3}-\frac{1}{2}\sum_{3\nmid k}\frac{1}{k^3}-\sum_{2|k}\frac{1}{k^3}+\sum_{2\nmid k}\frac{1}{k^3}\Big)\\&=3\Big(\frac{3}{2}\sum_{3|k}\frac{1}{k^3}-\frac{1}{2}\sum_{k}\frac{1}{k^3}-2\sum_{2|k}\frac{1}{k^3}+\sum_{k}\frac{1}{k^3}\Big)\\&=3\Big(\frac{3}{2}\frac{1}{27}-\frac{1}{2}-2\frac{1}{8}+1\Big)\sum_{k}\frac{1}{k^3}\\&=\frac{11}{12}\zeta(3),\end{aligned}$$

如上所述。 □

证明 命题 5.1。 命题 5.2 与富比尼定理结合可得

$$I=\frac{12}{(2\pi)^2}\int_{D}^{\text{对数}}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1}-1|\,du_1du_2=\frac{12}{(2\pi)^2}\int_{0}^{\frac{4\pi}{3}}\underline{\text{最小值}}\Big(\frac{u_1}{2},2\pi-\frac{3u_1}{2}\Big)\,\text{对数}\,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1}-1|\,du_1.$$

根据引理 5.3，该量等于

$$\frac{12}{(2\pi)^2}\Big(\frac{1}{2}\frac{7}{4}\zeta(3)+\frac{1}{2}\frac{11}{12}\zeta(3)\Big)=\frac{4\,\zeta(3)}{\pi^2}=\frac{2\,\zeta(3)}{3\,\zeta(2)}$$

得益于欧拉公式 $\zeta(2)=\pi^2/6$。 □

6. The distribution of the height

最后，我们可以将前面各截面的不同部分结合起来，得到我们的第一个主要结果。简记为

$$\eta = \frac{2\,\zeta(3)}{3\,\zeta(2)} = 0.487175\ldots .$$

定理 6.1。 设 $(\omega_\ell)_{\ell\geq 1}$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 中的一个非平凡挠点严格序列。那么

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{h}(C\cap\omega_\ell C) = \eta.$$

证明。 这可由（1.6）中高度的定义以及推论 3.6 和 命题 4.1和5.1。 □

在此背景下，以下问题很自然。

问题 6.2。 能否得到定理 *6.1*的定量版本？其含义是：对于给定的非平凡挠点 ω，估计 $C\cap\omega C$ 的高度与极限值 η 之间的偏差，并以 ω的严格度表示；也就是说，取包含该点的1维代数子群的最小次数。

问题 6.3。 定理 *6.1* 能否推广到小高度点？若能证明（或证伪）其结论对$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$（$\mathbb{Q}$）中高度趋于零但不一定是挠点的严格序列成立，将会很有意思。

点的严格序列这一概念可以扩展到有限子集，以涵盖在对高度值进行统计时自然出现的有限子集，具体如下。

定义 6.4。 设 V 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\mathbb{Q})$ 的一个代数子集。若对于每个不包含 V 的代数子群 $H\subset\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\mathbb{Q})$，都有如下性质，则非空有限子集 V 的序列 $(E_\ell)_{\ell\geq 1}$ 称为严格的：

$$\lim_{\ell\to+\infty}\frac{\#(E_\ell\cap H)}{\#E_\ell} = 0.$$

本节关注的情形是 $V=\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\mathbb{Q})$。(1.2) 中的判据可推广到这一情形：序列 $(E_\ell)_{\ell\geq 1}$ 在 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\mathbb{Q})$ 中是严格的，当且仅当满足

$$\lim_{\ell\to+\infty}\frac{\#(E_\ell\cap\operatorname{Ker}(\chi^a))}{\#E_\ell} = 0 \quad \text{for all } a\in\mathbb{Z}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}. \tag{6.1}$$

例 6.5. 由 d构成的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\mathbb{Q})$的 μ_d^n 挠点集合序列是严格的。事实上，对于每个 $a\in\mathbb{Z}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}$ 和 $d\geq 1$，我们有

$$\frac{\#(\mu_d^n\cap\operatorname{Ker}(\chi^a))}{\#\mu_d^n} = \frac{\#\operatorname{Ker}(\chi^a|_{\mu_d^n})}{\#\mu_d^n} = \frac{1}{\#\operatorname{Im}(\chi^a|_{\mu_d^n})} = \frac{\gcd(a_1,\ldots,a_n,d)}{d}, \tag{6.2}$$

其中，最后一个等式源于以下事实：在 χ^a 作用下，μ_d^n 的像由 $\zeta^{\gcd(a_1,\ldots,a_n)}$ 生成，其中 d是任意本原 ζ单位根。于是，当 $d\to+\infty$时，(6.2) 中的商趋于 0。由于这对每个 a都成立，(6.1) 中的判据表明，序列 $(\mu_d^n)_{d\geq 1}$ 是严格的。

接下来，我们将推广 定理 6.1 ，以计算直线 C 与其在严格序列中的非空有限子集的挠点下的平移像之交的高度的典型值。

定理 6.6。 设 $(W_\ell)_{\ell\geq 1}$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$中非平凡挠点的非空有限子集的严格序列。那么，对每个 $\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{\ell\to+\infty}\frac{\#\{\omega\in W_\ell\mid |\mathrm{h}(C\cap\omega C)-\eta|<\varepsilon\}}{\#W_\ell}=1.$$

此外 极限$_{\ell\to+\infty}\ \frac{1}{\#W_\ell}\sum_{\omega\in W_\ell}\mathrm{h}(C\cap\omega C)$

$=\eta$.

这是前述结果以及以下一般转移原理的推论。

引理 6.7。 设 V 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\mathbb{Q})$的代数子集。设$(E_\ell)_{\ell\geq 1}$是 V的非空有限子集构成的严格序列， ϕ 是 $\bigcup_{\ell\geq 1}E_\ell$ 上的实值函数， κ 是一个实数，并且对于 V 中包含于该并集的每个严格序列$(\gamma_\ell)_{\ell\geq 1}$ ，都有极限$_{\ell\to+\infty}\,\phi(\gamma_\ell)\ =\kappa$。那么

(1) 对每个 $\varepsilon>0$ ，都有极限$_{\ell\to+\infty}\,\#\{\gamma\in E_\ell\mid|\phi(\gamma)\ -\kappa|<\varepsilon\}\,\#$ $E_\ell\ =1$；*(2)* 若 ϕ 在 $\bigcup_{\ell\geq 1}E_\ell$上有界，则极限$_{\ell\to+\infty}\ \frac{1}{\#}$ $E_\ell\sum_{\gamma\in E_\ell}\phi(\gamma)\ =\kappa$.

证明。 我们用反证法，假设存在 $\varepsilon>0$ 使得（1）中的陈述不成立。于是，取一个子序列后，我们可以假设存在 $c>0$ 使得

$$\frac{\#\{\gamma\in E_\ell\mid|\phi(\gamma)-\kappa|\geq\varepsilon\}}{\#E_\ell}\geq c\quad\text{for all }\ell\geq 1.$$

令 $(H_j)_{j\geq 1}$ 为 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\mathbb{Q})$ 中所有不包含 V 的代数子群的完整列表。除非 $\overline{V}=\{(1,\ldots\ldots,1)\}$，此时该陈述显然成立；否则，这个列表是可数无穷的。由于 $(E_\ell)_{\ell\geq 1}$ 在 V 中是严格的，我们可以取一个子序列 $(E_{\ell_k})_{k\geq 1}$ 使得

$$\frac{\#\big(E_{\ell_k}\cap\bigcup_{j=1}^k H_j\big)}{\#E_{\ell_k}}<c\quad\text{for all }k\geq 1.$$

于是，对每个 $k\geq 1$，我们都可以选取 $\gamma_k\in E_{\ell_k}\setminus\bigcup_{j=1}^k H_j$ 使得

$$|\phi(\gamma_k)-\kappa|\geq\varepsilon. \tag{6.3}$$

序列（γ_k）$_{k\geq 1}$ 根据构造在 V 中是严格的，因此不等式（6.3）与假设矛盾，并证明了（1）。由（2）、（1）以及 ϕ 有界这一假设，很容易得到（2）中的陈述。 □

证明定理 *6.6*。 这是直接由引理 6.7 应用于严格序列（W_ℓ）$_{\ell\geq 1}$ 的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$（$\mathbb{Q}$）和实值函数

$$\bigcup_{\ell\geq 1}W_\ell\longrightarrow\mathbb{R},\quad\omega\longmapsto\mathrm{h}(C\cap\omega C)$$

以及 定理 6.1和 命题 2.2。 □

下一个结果是由例 6.5和定理 6.6直接得出的。

推论 6.8. 对于每个 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\lim_{d\to+\infty} \frac{1}{d^2-1} \#\{\omega \in \mu_d^2 \setminus \{(1,1)\} \mid |\mathrm{h}(C \cap \omega C) - \eta| < \varepsilon\} = 1.$$

Moreover $\lim_{d\to+\infty} \frac{1}{d^2-1} \sum_{\omega\in\mu_d^2\setminus\{(1,1)\}} \mathrm{h}(C \cap \omega C) = \eta.$

7. Intermezzo: sequences of torsion points in algebraic subgroups

这里，我们将先前的研究扩展到这样的挠点序列：这些序列在环面上一维代数子群的一个定义在有理数域上的固定不可约分支中是严格的，从而找到了高度的其他有趣极限值。

我们首先回顾一下，$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 的一维代数子群是由形如 $\chi^c - 1$ with $c \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 的二项式定义的代数子集。将 $c = la$ for a primitive vector $a \in \mathbb{Z}^2$ and a positive integer l 记作，其在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约分解为

$$Z(\chi^c - 1) = \bigcup_{e|l} Z(\Phi_e(\chi^a))$$

其中 Φ_e 是 e 次分圆多项式。

因此，在本节余下部分，我们固定一个本原向量 $a \in \mathbb{Z}^2$ 和一个正整数 e，并考虑代数子集$V_{a,e} = Z(\Phi_e(\chi^a))$。它在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约分解由以下不交并给出：

$$V_{a,e} = \bigcup_{\zeta\in\mu_e^\circ} Z(\chi^a - \zeta).$$

每个不可约分支 $Z(\chi^a - \zeta)$ 都是一条扭曲线，因为它是将一维（代数）子环面 $Z(\chi^a - 1) \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{Q})$ 平移任意一个属于该子环面的挠点所得。

设 $(\omega_\ell)_{\ell\geq 1}$ 是 $V_{a,e}$ 中挠点构成的严格序列。由于环面中任何不包含 $V_{a,e}$ 的代数子群与该代数子集的交点只有有限个，因此 $(\omega_\ell)_{\ell\geq 1}$ 在 $V_{a,e}$ 中严格，当且仅当每个挠点在该序列中出现的次数至多有限。这又等价于

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{ord}(\omega_\ell) = +\infty. \tag{7.1}$$

回忆一下，对于每个 ℓ，我们用 $\delta_{O(\omega_\ell)_\infty}$ 表示∞在 ω_ℓ 的 -进伽罗瓦轨道上的均匀概率测度，如（4.5）所示。我们的首要目标是确定这列离散测度关于弱 -$*$ 拓扑的极限。为此，考虑紧致环面 $\mathbb{S}$ 定义的子集

$$\mathbb{S}_{a,e} = \{z \in \mathbb{S} \mid \Phi_e(\chi^a(z)) = 0\} = \bigcup_{\zeta\in\mu_e^\circ} \{z \in \mathbb{S} \mid \chi^a(z) = \iota_\infty(\zeta)\}.$$

它是圆周 $\{z \in \mathbb{S} \mid \chi^a(z) = 1\} \simeq S^1$ 的平移像的不交并，其中包含 $V_{a,e}$ 中任意挠点的∞-进伽罗瓦轨道。对于每个本原 e-次单位根 ζ，我们用 $\lambda_{a,e,\zeta}$ 表示 $\mathbb{S}_{a,e}$ 上的概率测度，其支撑为 S^1 的相应平移像；在该平移像上，它与由此圆周的概率 Haar 测度诱导的测度一致。接着考虑定义在 $\mathbb{S}_{a,e}$ 上的概率测度，定义如下

$$\nu_{a,e} = \frac{1}{\varphi(e)} \sum_{\zeta\in\mu_e^\circ} \lambda_{a,e,\zeta}.$$

下一个结果是当前情形下与（4.7）相对应的类比。其证明通过归约到 Dimitrov 和 Habegger 在 [DH19] 中的一个结果，该结果讨论了单位根在其伽罗瓦群的大子群作用下的轨道等分布。

命题 7.1. 设$(\omega_\ell)_{\ell\geq 1}$ 是由挠点构成的严格序列，位于$V_{a,e}$ 中，且 ϕ 是$\mathbb{S}_{a,e}$上的有界、$\nu_{a,e}$-几乎处处连续的实值函数。那么

$$\lim_{\ell\to+\infty}\int_{\mathbb{S}_{a,e}}\phi\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty}=\int_{\mathbb{S}_{a,e}}\phi\,d\nu_{a,e}. \tag{7.2}$$

证明。 由于 a 是本原的，经过变量替换后，不失一般性地可设 $a=(0,1)$，因此

$$V_{a,e}=Z(\Phi_e(t_2))=\bigcup_{\zeta\in\mu_e^\circ}\overline{\mathbb{Q}}^\times\times\{\zeta\}\quad\text{and}\quad\mathbb{S}_{a,e}=\bigcup_{\zeta\in\mu_e^\circ}S^1\times\{\iota_\infty(\zeta)\}.$$

对每个 $\ell\geq 1$，令 d_ℓ =为 $\mathrm{ord}(\omega_\ell)$，并令 $e_\ell=$ 为 $\mathrm{ord}(\omega_{\ell,1})$。由于 e_ℓ 和 e 均整除 d_ℓ，我们可以考虑约化同态

$$\pi_{d_\ell,e_\ell}\colon(\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})^\times\longrightarrow(\mathbb{Z}/e_\ell\mathbb{Z})^\times\quad\text{and}\quad\pi_{d_\ell,e}\colon(\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})^\times\longrightarrow(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times.$$

令 $J_\ell\subset(\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})^\times$ 表示 $\pi_{d_\ell,e}$ 的核，令 $K_\ell\subset(\mathbb{Z}/e_\ell\mathbb{Z})^\times$ 表示其在 π_{d_ℓ,e_ℓ}下的像。由于 $\mathrm{ord}(\omega_{\ell,2})=e$，我们有 $d_\ell=\mathrm{lcm}(e_\ell,e)$，因此 $J_\ell\simeq K_\ell$。

由于 [CT09，引理 6，3]我们不妨假设 ϕ是连续的。接着，我们将其左侧每个积分（7.2）写成在$\mathbb{S}_a$的不同连通分支上e 的积分之和，方法是适当划分相应的伽罗瓦轨道 $O(\omega_\ell)=\{\omega_\ell^k\mid k\in(\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})^\times\}$。为此，对每个$\zeta\in\mu_e^\circ$，我们选取 $r_{\ell,\zeta}\in(\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})^\times$，使得 $\omega^{r_{\ell,\zeta}}_{\ell,2}=\zeta$；这是可行的，因为根据引理 4.2，$\pi_{d_\ell,e}$是满射。事实上，当且仅当 $k\in J_\ell\cdot r_{\ell,\zeta}$ 时，$\omega^k_{\ell,2}=\zeta$，因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}_{a,e}}\phi\,d\delta_{O(\omega_\ell)_\infty}&=\frac{1}{\varphi(d_\ell)}\sum_{k\in(\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})^\times}\phi(\iota_\infty(\omega_\ell^k))\\&=\frac{1}{\varphi(e)}\sum_{\zeta\in\mu_e^\circ}\frac{1}{\#J_\ell}\sum_{j\in J_\ell}\phi\big(\iota_\infty(\omega_{\ell,1}^{j\cdot r_{\ell,\zeta}}),\iota_\infty(\zeta)\big)=\frac{1}{\varphi(e)}\sum_{\zeta\in\mu_e^\circ}\int_{S^1}\phi_\zeta\,d\delta_{\iota_\infty(K_\ell\cdot\omega_{\ell,1}^{r_{\ell,\zeta}})},\end{aligned} \tag{7.3}$$

其中，ϕ_ζ表示定义在 S^1 上的连续函数，由 $\phi_\zeta(z)=\phi(z,\iota_\infty(\zeta))$定义；该函数是在 K_ℓ 的作用下，对 $\omega^{r_{\ell,\zeta}}_{\ell,1}$ 的 ∞-进轨道上的均匀概率测度进行积分得到的。

由于 $d_\ell=\mathrm{lcm}(e_\ell,\ e)$，（7.1）中的条件意味着

$$\lim_{\ell\to+\infty}\mathrm{ord}(\omega_{\ell,1}^{r_{\ell,\zeta}})=\lim_{\ell\to+\infty}e_\ell=+\infty,$$

因此，$(\omega^{r_\ell,\zeta}_{\ell,1},)_{\ell\geq 1}$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{Q})$中的严格序列。按照 [DH19，第 3],节的术语，子群 K_ℓ 在$(\mathbb{Z}/e_\ell\mathbb{Z})^\times$ 中的导子等于$\gcd(e_\ell,e)$，因为该子群恰好是到$(\mathbb{Z}/\gcd(e_\ell,e)\mathbb{Z})^\times$的约化同态之核。特别地，它是有界的。随后，loc. cit.中的命题 3.3(ii)表明，$\iota_\infty(K_\ell\cdot\omega^{r_\ell,\zeta}_{\ell,1},)$ 的 ∞-进轨道的偏差随着 $\ell\to+\infty$趋于0。利用测度论中的标准结果，例如 [Har98，第5.4]定理，我们可推出

$$\lim_{\ell\to+\infty}\int_{S^1}\phi_\zeta\,d\delta_{\iota_\infty(K_\ell\cdot\omega_{\ell,1}^{r_{\ell,\zeta}})}=\int_{S^1}\phi_\zeta\,d\mathrm{Haar}=\int_{\mathbb{S}_{a,e}}\phi\,d\lambda_{a,e,\zeta}.$$

该陈述随即由（7.3）得出。 □

下一个结果是我们情形下命题 4.1的对应结果，并给出了与 V_a 中严格序列里的挠点相对应的阿基米德局部高度的极限，e。为陈述该结果，考虑由 $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ 定义的子集：

$$\mathbb{D}_{a,e} = \bigcup_{j\in(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times} \Big\{ u \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \;\Big|\; a_1u_1 + a_2u_2 = \frac{2\pi j}{e} \Big\}.$$

它是由 $\varphi(e)$ 条平行线段组成的并集，我们将这些线段上由欧几里得度量诱导的概率测度记为 $\tau_{a,e}$。回想一下，

$$F\colon (\mathbb{C}^\times)^2 \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\} \quad \text{and} \quad f\colon (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$$

分别表示在（4.1）和（4.2）中定义的函数。

命题 7.2. 设$(\omega_\ell)^{\ell\geq 1}$ 是$V_{a,e}$ 中的一个非平凡挠点严格序列。那么

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{h}_\infty(\mathcal{P}(\omega_\ell)) = \int_{\mathbb{S}_{a,e}} F\, d\nu_{a,e} = \int_{\mathbb{D}_{a,e}} f\, d\tau_{a,e},$$

其中，$\mathcal{P}(\omega_\ell)$ 是射影点 $C\cap\omega_\ell C$在 (2.2).中所示的齐次坐标向量。

证明。对于第一个等式，注意当 $e\neq 1$ 时，子集$\mathbb{S}_{a,e}$ 不包含点 (1,1)。在这种情况下，函数 F 在$\mathbb{S}_{a,e}$ 上的限制是连续的，因此由（4.6）中的公式和命题 7.1可得所述结论。

当 $e=1$ 时，映射 $\psi\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{Q}) \to V_{a,\,1}$ 定义为 $\psi(s) = (s^{-a_2},\ s^{a_1})$，是代数群的同构，因为 a 是本原的。另记 $\psi\colon S^1 \to \mathbb{S}_{a,\,1}$ 为该映射的复数版本在单位圆上的限制。于是函数

$$\psi^*F(s) - \log|s-1| = \log\max\Big(\frac{|s^{a_1}-s^{-a_2}|}{|s-1|}, \frac{|s^{a_1}-1|}{|s-1|}, \frac{|s^{-a_2}-1|}{|s-1|}\Big)$$

可以连续延拓到点 $s=1$。因此，公式（4.6）可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{h}_\infty(\mathcal{P}(\omega_\ell)) &= \int_{S^1} \psi^*F(s)\, d\delta_{O(\psi^{-1}(\omega_\ell))_\infty} \\ &= \int_{S^1} (\psi^*F(s) - \log|s-1|)\, d\delta_{O(\psi^{-1}(\omega_\ell))_\infty} + \int_{S^1} \log|s-1|\, d\delta_{O(\psi^{-1}(\omega_\ell))_\infty}.\end{aligned}$$

陈述中的第一个等式，是将单位根的经典等分布定理应用于上式中的第一个积分，并以类似于推导（引理 2.4的方式将4.9）中第一个等式的方式，将引理 2.4应用于第二个积分后得到的。

另一方面，注意到 $\mathbb{S}_{a,\,e}$ 在余热带化映射下的像与平行线段的并集 $\mathbb{D}_{a,\,e}$ 重合，并且推前测度 $\mathrm{cotrop}_*\,\nu_{a,\,e}$ 与 $\tau_{a,\,e}$ 重合。因此，第二个等式直接由第一个等式和变量替换公式得出。□

简记为

$$\eta_{a,e} = \int_{\mathbb{D}_{a,e}} f\, d\tau_{a,e}. \tag{7.4}$$

我们有如下结果，其精神与定理 6.1相同。

定理 7.3。设$(\omega_\ell)^{\ell\geq 1}$ 是 $V_{a,e}$ 中的非平凡挠点严格序列。那么

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{h}(C\cap\omega_\ell C) = \eta_{a,e}.$$

证明。 这可由高度的定义以及命题 7.2 和推论 3.6直接得出。□

利用定理 7.3，我们可以找到高度的其他有趣极限值，接下来的两个例子将对此加以说明。

例 7.4。 对于 $a=(0,1)$ 以及 $e=1$ 线段 $\mathbb{D}_{a,\,e}$ 可通过映射 $w\mapsto(2\pi w,\ 0)$ 用单位区间参数化。因此

$$\eta_{a,e} = \int_0^1 \log\max(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi w}-1|,|0|,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi w}-1|)\,dw = \int_0^1 \log|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi w}-1|\,dw = 0.$$

根据定理 7.3，对于 $C\cap\omega_\ell C$ 构成严格序列（ω_ℓ）$^{\ell\geq 1}$ 中Z（t_2-1）的非平凡挠点，其高度的极限等于 0，这与命题 2.2一致。对于 $a\in\{$（1，0），（1，-1）$\}$也有类似的观察结果。

例 7.5。 对于 $a=(2,\ -1)$，$e=1$ 线段 $\mathbb{D}_{a,\,e}$ 可通过映射 $w\mapsto(2\pi w,\ 4\pi w)$ 用单位区间参数化。因此

$$\begin{aligned}\eta_{a,e} &= \int_0^1 \log\max(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi w}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi w}|,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi w}-1|,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi w}-1|)\,dw\\ &= \int_0^1 \log|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi w}-1|\,dw + \int_0^1 \log\max(1,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi w}+1|)\,dw = \mathrm{m}(x_0+x_1+x_2),\end{aligned}$$

其中最后一个等式由詹森公式得出。这个对数 Mahler 测度由 Smyth 计算为

$$\mathrm{m}(x_0+x_1+x_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}L(\chi_{-3},2) = 0.323065\ldots$$

与 L模 3 [Smy81] 的奇狄利克雷特征相关的函数。根据 定理 7.3，该量给出了严格序列 ($C\cap\omega_\ell C$ $\omega_\ell)^{\ell\geq 1}$ 中 $Z(t_1^2t_2^{-1}-1)$ 的高度极限；该序列由非平凡挠点构成，如 例 2.1所示。当 $a\in\{(1,\ 1),\ (1,\ -2)\}$ 时，也会出现类似情形。

与第 6 节类似，我们可以按照定义 6.4的含义，将研究扩展到 $V_{a,\,e}$ 的非空有限子集的严格序列。 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 的每个不含 $V_{a,\,e}$ 的代数子群与此代数子集相交所得的点都只有有限多个，因此，$V_{a,\,e}$ 的任意非空有限子集序列，只要满足 $\lim_{\ell\to+\infty}\#E_\ell=+\infty$，就自动是 $V_{a,\,e}$ 中的严格序列（不过，该条件并非必要）。

例 7.6. d 的非空挠点子集序列是严格的。事实上，令 $d\geq 1$，并考虑单项式映射 χ^a: $\mu_d^2\to\mu_d$，于是

$$\mu_d^2\cap V_{a,e} = (\chi^a)^{-1}(\mu_d\cap\mu_e^\circ). \tag{7.5}$$

若 $e\nmid d$，则 $\mu_d\cap\mu_e^\circ=\emptyset$，因此 $\mu_d^2\cap V_{a,\,e}=\emptyset$。否则 $e\mid d$ 且 $\mu_e^\circ\subset\mu_d$，因此由（7.5）以及 χ^a 的满射性可得

$$\#(\mu_d^2\cap V_{a,e}) = \#\operatorname{Ker}(\chi^a)\cdot\#\mu_e^\circ = d\,\varphi(e).$$

因此，$\mu_d^2\cap V_{a,\,ed\geq 1,\ e\mid d}$ 是$V_{a,\,e}$中的严格序列。

接下来的两个结果是我们当前情形下定理 6.6 和推论 6.8的对应结果。第一个是引理 6.7 和定理 7.3的直接推论，第二个则利用例 7.6得出。

定理 7.7。 设$(W_\ell)_{\ell\geq 1}$ 是由$V_{a,e}$ 中的非平凡挠点所构成的非空有限子集组成的严格序列。那么对每个 $\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{\ell\to+\infty} \frac{\#\{\omega \in W_\ell \mid |\mathrm{h}(C\cap\omega C) - \eta_{a,e}| < \varepsilon\}}{\#W_\ell} = 1.$$

Moreover $\lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{\#W_\ell} \sum_{\omega\in W_\ell} \mathrm{h}(C\cap\omega C) = \eta_{a,e}.$

推论 7.8。 对每个 $\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{\substack{d\to+\infty\\ e\mid d}} \frac{\#\{\omega \in \mu_d^2\cap V_{a,e}\setminus\{(1,1)\} \mid |\mathrm{h}(C\cap\omega C) - \eta_{a,e}| < \varepsilon\}}{\#(\mu_d^2\cap V_{a,e}\setminus\{(1,1)\})} = 1.$$

Moreover $\lim_{\substack{d\to+\infty\\ e\mid d}} \frac{1}{\#(\mu_d^2\cap V_{a,e}\setminus\{(1,1)\})} \sum_{\omega\in\mu_d^2\cap V_{a,e}\setminus\{(1,1)\}} \mathrm{h}(C\cap\omega C) = \eta_{a,e}.$

8. Visualizing the results

本节将介绍使用 SageMath 笔记本 [GS22] 完成的一系列计算，这些计算既能直观展示我们的结果，也同时引出更多耐人寻味的问题和猜想。

我们关注形如 $P(\omega) = C\cap\omega C$ 的点的高度值，其中 ω 在 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\overline{\mathbb{Q}})$ 的非平凡 d-挠点集合中取值。接下来的陈述将说明如何枚举这些挠点并计算相应的高度。

命题 8.1。设 $d \geq 1$ 和 $\zeta \in \mu_d^\circ$。则
(1) 映射$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2 \to \mu_d^2$ 定义为 $c \mapsto (\zeta^{c_1}, \zeta^{c_2})$ 是一个双射；*(2)* 对每个 $c \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$，令 $e = d/\gcd(c_1, c_2, d)$，则有

$$\mathrm{h}(C\cap(\zeta^{c_1},\zeta^{c_2})C) = -\frac{\Lambda(e)}{\varphi(e)} + \frac{1}{\varphi(e)} \sum_{k\in(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times} \log\max(|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}c_2k/d} - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}c_1k/d}|, |\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}c_2k/d} - 1|, |\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}c_1k/d} - 1|)$$

其中 Λ 和 φ 分别表示冯·曼戈尔特函数和欧拉函数，
(3) 函数$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2 \setminus \{(0,\ 0)\} \to \mathbb{R}$ 定义为 $(c_1, c_2) \mapsto \mathrm{h}(C\cap(\zeta^{c_1},\zeta^{c_2})C)$，它不依赖于 $\zeta \in \mu_d^\circ$ 的选取，并且在以下变换下保持不变

$$(c_1, c_2) \mapsto (c_2, c_1), \quad (c_1, c_2) \mapsto (-c_2, c_1 - c_2), \quad (c_1, c_2) \mapsto (-c_1, -c_2)$$

on $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2 \setminus \{(0,0)\}$.

证明。 （1）中的结论是（1.1）的一个特例，而（2）中的结论直接由引理 2.3、推论 3.4 以及高度的定义得出。最后，（3）中的结论很容易由（2）中的结论推出。□

展示计算结果。对于每个 $d \geq 1$，我们都可以利用 $C \cap \omega C$ 对每个 $\omega \in \mu_d^2 \setminus \{(1,1)\}$ 中的公式，数值计算点 $C \cap \omega C$ 的高度 $\omega \in \mu_d^2 \setminus \{$，并展示在两幅图中。第一幅图将得到的高度值绘制为单位区间上的无序散点图，第二幅图则以有意义且有序的方式将其呈现在单位正方形中。

后一个像是通过下面的说明生成的。选取 $\zeta \in \mu_d^\circ$，命题 8.1(1) 将 μ_d^2 与网格点集合 $\{0, 1/d, \ldots, (d-1)/d\}^2$ 单位正方形的 $[0,1)^2$对应起来。为了直观地观察函数的行为

$$\omega \mapsto \mathrm{h}(C \cap \omega C) \quad \text{for } \omega \in \mu_d^2 \setminus \{(1,1)\}$$

我们将这个正方形细分为 d^2个以这些网格点为中心的单元。除中心为（0，0）的单元外，这些单元中的每一个都对应于一个非平凡的 d-挠点 ω，并将其着以一种深浅程度与 $C \cap \omega C$ 的高度在范围 [0,log(2)]内的大小相对应的灰色。根据命题 8.1（3），所得的像不依赖于原始 d-单位根 ζ的选择。

图 8.1 展示了 $d = 120$的结果像。为便于后续讨论，我们在第一幅图中添加了这些特殊值

$$\eta = \frac{2\,\zeta(3)}{3\,\zeta(2)} = 0.487175\ldots \quad \text{and} \quad \theta = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2) = 0.323065\ldots \tag{8.1}$$

分别以红线和橙线标出。

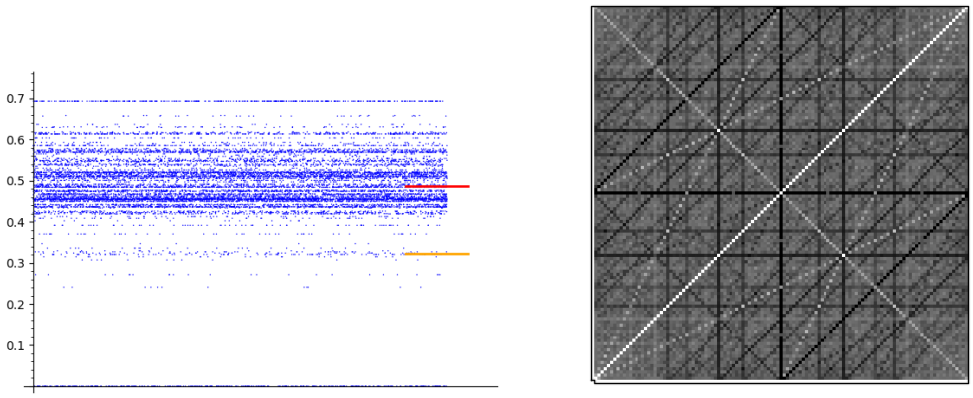

FIGURE 8.1. 与 d-挠点相关的高度分布， $d = 120$

界与对称性。这些图展示了我们所研究的高度值的若干特征。

正如命题 2.2所预言的，极值为 0 和 log(2)，如图 8.1左图所示。在右图中，最小高度（白色）出现在与穿过正方形原点的水平线、对角线和垂直线上的单元相对应的挠点处，此外，当$1/3, 2/3$) 和 $(2/3, 1/3)$ 是网格点时也会达到最小高度。最大高度（黑色）仅在 d为偶数但不是 2 的幂时才会达到。此时，它出现在穿过正方形中心的水平线和垂直线上，以及穿过正方形一条边中点的对角线上，但不包括以如下形式的网格点为中心的单元 $(2^{-k}b_1, 2^{-k}b_2)$，其中 $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ 且 $k \geq 0$。

右图还清楚地显示了高度值在命题 8.1(3) 中的变换及其复合下的不变性。除去缩放因子，这些正是$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ 中命题 5.2所述的相同自同构，这解释了此图与图 5.1 右图的相似之处。特别地，顶点为 $(0,0), (1/2, 0)$ 和 $(2/3, 1/3)$ 的三角形是高度值的基本域。

极限值。 高度的极限行为也清晰可见。正如推论 6.8所预测的，图 8.1 左侧图像中的大多数点都聚集在红线所示的值附近，而右侧图像中的大多数单元都呈现出一种灰度，其强度趋近于

$$\frac{\eta}{\log(2)} = 0.702845\ldots$$

如 $d \to +\infty$。

我们可以通过绘制几幅图，让这一现象更加直观：取 $\varepsilon > 0$ 并计算以下量

$$\frac{1}{d^2-1}\#\{\omega \in \mu_d^2 \setminus \{(1,1)\} \mid |\mathrm{h}(C \cap \omega C) - \eta| < \varepsilon\} \quad \text{and} \quad \frac{1}{d^2-1}\sum_{\omega \in \mu_d^2 \setminus \{(1,1)\}} \mathrm{h}(C \cap \omega C)$$

对于一族取值 d。图 8.2 汇总了所有 $1 \le d \le 250$ 和 $\varepsilon = 0.1$对应的结果。

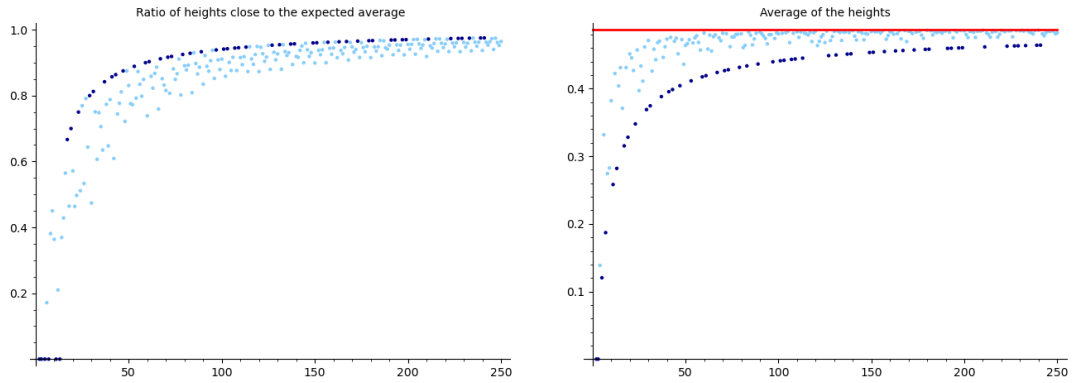

FIGURE 8.2. d-挠点的高度比及其平均值 $1 \le d \le 250$ 在极限值附近的情况，并标出了素数值

根据推论 6.8，这些图证实，所考察的大多数高度聚集在 η 附近，当 $d \to +\infty$ 时，其平均值趋于这个极限值；该极限值在右侧的图像中以红色标出。

理解这些计算所揭示的其他模式将很有意思。例如，图 8.2 右侧的图暗示，以下问题的答案可能是肯定的。

问题 8.2。 是否对所有 $d \ge 1$ 都有 $\frac{1}{d^2-1}\sum_{\omega \in \mu_d^2 \setminus \{(1,1)\}} \mathrm{h}(C \cap \omega C) < \eta$？

扭曲线。 我们还可以将 第 7 节中得到的渐近行为可视化。回忆一下，对于本原向量 $a \in \mathbb{Z}^2$ 和正整数 e，我们考虑不相交的

扭曲线的并集

$$V_{a,e} = \bigcup_{\zeta \in \mu_e^\circ} Z(\chi^a - \zeta) \subset \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\overline{\mathbb{Q}}),$$

且值 $\eta_{a,\ e}$ 在 (7.4) 中是该代数子集中对应于挠点严格序列的高度的极限。

推论 7.8 在图 8.1右侧图中一目了然。图中显示，线段并集中单元的大多数高度值

$$\bigcup_{j \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times} \left\{ \left(\frac{c_1}{d}, \frac{c_2}{d} \right) \middle| \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{d} = \frac{j}{e} \right\}$$

聚集在 $\eta_{a,\ e}$ 处，其中 $d \to +\infty$ 随 $e \mid d$ 而变化。事实上，仔细观察本图左侧图像并发挥一点想象力，便能看出这些极限值是如何逼近的；对于给定的代数子集 $V_{a,\ e}$，制作类似于图 8.2 的图也并不困难。

小高度。 根据张量定理（证明了环面博戈莫洛夫猜想），射影直线 C 上非挠点的高度有一个正的下界，参见 [Zag93]，其中给出了一个有效版本。图图 8.1左侧图像中，0 与其余数值之间的空隙展示了这一点。

进一步考察表明，所考虑高度的第一个聚点是常数 θ，见（8.1）。如例 7.5所示，这一数值可由对应于经过原点且垂直于向量（2，−1）、（1，1）和（1，−2）的三条线段上的网格点的高度逼近。我们可以将这一观察表述为如下正式问题。

问题 8.3。 设 $\varepsilon > 0$。集合 $\{\omega \in \mu_\infty^2 \setminus \{(1,\ 1)\} \mid 0 < \mathrm{h}(C \cap \omega C) \leq \theta - \varepsilon\}$是有限集吗？

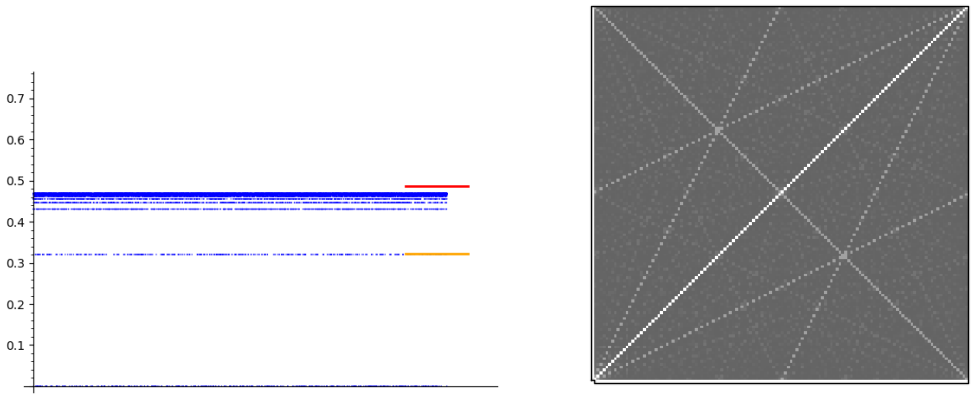

FIGURE 8.3. 与 d-挠点相关的高度分布，$d = 131$

素数阶。 在 图 8.2中，与素数值对应的量 d 以深蓝色标出，对于所考察的两个特征，它们似乎呈现出规律性的行为。事实上，接近 η 的高度值之比及其平均值，似乎都遵循类似双曲线的模式，至少当 d 足够大时如此。此外，这些模式似乎分别从上方和下方界定一般 d对应的量。解释这些行为将会很有意思。

事实上，当 d 为素数时，即使是与 d-挠点对应的单个高度值，似乎也比与合数 d 对应的高度值更简单、更规整，如图 8.3 中 $d = 131$ 所示。

这幅图及类似图示表明，对于每个素数 d，与非平凡的 d-挠点对应的所有高度值都小于 η；而当这些高度值非零时，它们至少与 θ 一样大。更准确地说：

问题 8.4. 设 p 是一个素数，且 $\omega \in \mu_p^2 \setminus \{(1,1)\}$ 满足 $\mathrm{h}(C \cap \omega C) \neq 0$。是否有 $\theta \leq \mathrm{h}(C \cap \omega C) < \eta$?

第二部分

在本部分中，我们从阿拉克洛夫几何的视角阐释定理 6.1，以便借助环面簇的阿拉克洛夫几何中算术与凸对象的相互作用，以更内在的方式重新得到该定理。

本部分的第一个主要结果是定理 10.4，它将定理 6.1 中的极限高度与 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 中由线性多项式 $x_0 + x_1 + x_2$ 定义的子概形的阿拉克洛夫高度联系起来，其中采用了适当的赋度量线丛。第二个主要结果是推论 13.3，它表明该高度等于此子概形的阿基米德触角上某个分段线性函数的平均值，而这个平均值又可计算为黎曼ζ函数特殊值之商的一个有理数倍。

本文第二部分的论述较为深入，且显然并非自成一体；它建立在 Gillet 和 Soul´e [GS90]的理论及 Maillot [Mai00], 对该理论的完善之上，同时也借鉴了 Burgos Gil、Philippon 和第二作者 [BPS14]对托里克情形的研究，以及第一作者的工作 [Gua18b]。我们将回顾本文所用的主要对象和结果，并假定读者对这些主题已有一定了解，包括复解析几何和概形整模型的基础知识。

9. Semipositive metrics in complex geometry

设 X 是一个射影复流形，其全纯函数层为 O_X。设 L 是 X上的全纯线丛，也就是说，它是一个秩为 1 的 O_X-模局部自由层。 X上的一个（连续）度量 $\|\cdot\|$ 是这样一条规则：对于 X的每个开子集 U 以及其上的每个截面 s，

$$\|s(\cdot)\| : U \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{9.1}$$

与限制到更小开子集相容，并且满足
(1) 对每个 $p \in U$，我们都有 $\|s(p)\| = 0$ 当且仅当 $s(p) = 0$；(2) 对每个 $p \in U$ 和 $\lambda \in O_X(U)$，我们都有 $\|(\lambda s)(p)\| = |\lambda(p)|\,\|s(p)\|$。称这对 $L = (L, \|\cdot\|)$ 为 X 上的一个赋度量线丛。

注 9.1。要在 L 上定义度量，只需为一族 L 的非零截面，在覆盖整个 X 的开子集上，给出与（9.1）中所述相容的函数选择。

对于 X 上的赋度量线丛 $\overline{L}$，可以将其与第一陈流$\mathrm{c}_1(L)$联系起来；该流是在 X 的任意开子集 U 上定义的双次数为(1，1)的流，定义如下：

$$\mathrm{c}_1(\overline{L})\big|_U = dd^{\mathrm{c}}\big[-\log\|s\|\big|_U\big]$$

对于 U上的任意非消失截面 s，其中，对于实值函数 f，我们用 $[f]$ 表示其对应的分布，算子 d 和 d^c 按流的意义理解。根据勒隆–庞加莱公式，该流不依赖于截面的选取。

赋度量线丛 L 是半正（分别为光滑）的，当且仅当对每个不恒为零的局部截面 s，函数 $p \mapsto -\log \|s(p)\|$ 是多重次调和的（分别为光滑的）。

例 9.2. 平凡线丛 O_X具有平凡度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}}$，其定义如下：对开子集 U 上的每个全纯函数 λ X，令

$$\|\lambda(p)\|_{\mathrm{tr}} = |\lambda(p)| \quad \text{for all } p \in U.$$

相应的赋度量线丛记作 $O_X{}^{\mathrm{tr}}$。利用全纯函数 $\lambda = 1$ 计算其第一陈流可验证，$c_1(O_X{}^{\mathrm{tr}}) = 0$，因此这个赋度量线丛是半正的。

例 9.3. 设 $O(1)$是复射影空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$上的超平面线丛。其整体截面与 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$的齐次坐标中的线性多项式一一对应。对于每个整体截面 s，记 l_s 为相应的线性多项式，并令

$$\|s(p)\|_{\mathrm{can}} = \frac{|l_s(p_0, \ldots, p_n)|}{\max(|p_0|, \ldots, |p_n|)} \quad \text{for all } p = [p_0 : \cdots : p_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}).$$

由于 $O(1)$ 由其整体截面生成，这一赋值通过 备注 9.1 确定了该线丛上的一种度量，称为 典范度量，属于 $O(1)$。相应的赋度量线丛记作 $O(1)^{\mathrm{can}}$。它是半正的 [BPS14，例 1.4。4] 但并非光滑。

例 9.4。 考虑函数 $R\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \to \mathbb{R}_{>0}$，其定义如下

$$R(w) = \exp\Big(\int_{(S^1)^n} \log |w_0 + z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n| \, d\nu_n(z) \Big),$$

其中 $(S^1)^n$ 表示 $(\mathbb{C}^\times)^n$ 的紧致环面，而 ν_n 表示其概率 Haar 测度。该函数在给定点处的值是一个仿射多项式的 Mahler测度，因此是一个定义良好的实数。

函数 R 连续且为 1 次正齐次函数。与前一例中的典范度量类似，$O(1)$ 上的 *Ronkin* 度量 通过对每个整体截面 s作如下设定而得到，

$$\|s(p)\|_{\mathrm{Ron}} = \frac{|l_s(p_0, \ldots, p_n)|}{R(|p_0|, \ldots, |p_n|)} \quad \text{for all } p = [p_0 : \cdots : p_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}).$$

相应的赋度量线丛记为 $O(1)^{\mathrm{Ron}}$。

注 9.5. 环面簇上线丛的 Ronkin 度量由 [Gua18b]，引入，可根据任意一个与该环面簇的扇相容的非零 Laurent 多项式来定义。 例 9.4 中的度量与 同上 中针对 Laurent 多项式 $1 + t_1 + \cdots + t_n$ 的定义 5.5 所给出的度量一致。如其中所述，该度量是半正的。

给定一个纯 d 维解析循环 Z，其所在空间为 X，记 δ_Z 为其对应的积分流，$|Z|$ 为其支撑。再设 L_1、……、L_d 是 X 上的一族半正赋度量线丛。于是，Bedford–Taylor 理论允许我们在 X 上构造一个测度，记为

$$\mathrm{c}_1(\overline{L_1}) \wedge \ldots \wedge \mathrm{c}_1(\overline{L_d}) \wedge \delta_Z$$

并称为复 *Monge–Amp`ere* 测度的 L_1、……、L_d 和 Z，其定义和基本性质见 [Dem12，第三章第 III.3 和 III.4] 节。该测度支撑在 $|Z|$ 上，并且对沿着 $|Z|$ 中低维解析子集具有至多对数奇异性的函数，其积分有限。特别地，这些解析子集的测度为零。最后，当 Z 有效时，该测度为正。

下一个命题是解析几何中众所周知结果的一个特例，例如参见 [BE21，引理 8.17(ii)]。它也可直接由阿拉克洛夫几何中 $*$乘积的交换性推出，该交换性见 [GS90，推论 2.2。9] 并由 [Mai00，命题 5.36] 推广至不一定光滑的赋度量线丛。为方便起见并使论述更加清楚，我们给出其证明。

命题 9.6 (度量魏尔互反律)。设 X 是一条光滑射影复曲线。对于 $i = 1, 2$，另设 $L_i = (L_i, \|\cdot\|_i)$ 是 X 上的半正度量线丛，且 s_i 是 L_i 的一个非零有理截面。假设这些0-循环

$$Z_i = \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(s_i)\,[p] \qquad for\ i = 1, 2$$

具有不相交的支集。于是

$$\int_X \log \|s_1\|_1 \left(\mathrm{c}_1(\overline{L_2}) \wedge \delta_X - \delta_{Z_2}\right) = \int_X \log \|s_2\|_2 \left(\mathrm{c}_1(\overline{L_1}) \wedge \delta_X - \delta_{Z_1}\right). \tag{9.2}$$

证明。公式（9.2）的两边关于赋度量线丛和有理截面的选择都是线性的。因此，我们可以假设 L_1 和 L_2 都是丰沛的。在这种情况下，它们的度量可以用同一线丛上的光滑半正度量一致逼近。由于该公式两边关于度量的一致收敛都是连续的，因此我们可以将问题归结为 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 都光滑的情形。在证明余下部分中，我们均作此假设。

对于每个 $p \in |Z_1| \cup |Z_2|$，选取一个具有光滑边界的闭邻域 $B_p \subset X$。假设这些邻域彼此不相交，并考虑具有光滑边界的开子集

$$U = X \setminus \bigcup_{p \in |Z_1| \cup |Z_2|} B_p.$$

设 $f_i = -\log \|s_i\|_i$ 对每个 i。由于有理截面 s_i 在 U 上处处正则且不消失，且度量 $\|\cdot\|_i$ 是光滑的，因此复 Monge–Amp`ere 测度 $\mathrm{c}_1(L_i) \wedge \delta_X$ 在 上的限制由 (1, 1)-形式 $dd^{\mathrm{c}} f_i|_U$ 给出。根据 [Dem12，第三章，公式 3。1]，

$$\begin{aligned}\int_U \log \|s_1\|_1\, \mathrm{c}_1(\overline{L_2}) \wedge \delta_X - \log \|s_2\|_2\, \mathrm{c}_1(\overline{L_1}) \wedge \delta_X \\ = \int_U f_2\, dd^{\mathrm{c}} f_1 - f_1\, dd^{\mathrm{c}} f_2 = \int_{\partial U} f_2\, d^{\mathrm{c}} f_1 - f_1\, d^{\mathrm{c}} f_2.\end{aligned} \tag{9.3}$$

注意，当所有考虑的邻域都任意小时，等式（9.3）左侧的积分趋近于在整个 X 上的同一个积分。

通过明确写出 ∂U 的不同连通分支，我们得到

$$\int_{\partial U} f_1\, d^{\mathrm{c}} f_2 = -\sum_{p\in|Z_1|}\int_{\partial B_p} f_1\, d^{\mathrm{c}} f_2 - \sum_{p\in|Z_2|}\int_{\partial B_p} f_1\, d^{\mathrm{c}} f_2. \tag{9.4}$$

右侧（9.4）中的第一项求和趋于 0，因为这些邻域变小时，$d^{\mathrm{c}} f_2$ 是定义在 B_p 上的光滑 (0,1)-形式，对每个 $p\in|Z_1|$，而 f_1 在每个这样的点处都有对数奇点。

现在令 $p\in|Z_2|$。适当选取邻域 B_p，可设存在一个以原点为中心的闭圆盘 $V\subset\mathbb{C}$，以及一个双全纯映射 $\varphi\colon V\to B_p$，使得 $\varphi(0)=p$。那么，对于 $m=\operatorname{ord}_p(s_2)$，有 $\|(s_2\circ\varphi)(z)\|_2=|z|^m h(z)$，其中 h 是处处不为零的光滑函数。因此

$$\begin{aligned}-\int_{\partial B_p} f_1\, d^{\mathrm{c}} f_2 &= \int_{\partial V} f_1\circ\varphi\; d^{\mathrm{c}}\log\|s_2\circ\varphi\|_2 \\ &= \frac{m}{2}\int_{\partial V} f_1\circ\varphi\; d^{\mathrm{c}}\log(z\overline{z}) + \int_{\partial V} f_1\circ\varphi\; d^{\mathrm{c}}\log(h).\end{aligned} \tag{9.5}$$

由于 $d^{\mathrm{c}}\log(h)$ 是定义在 V 上的光滑 (0,1)-形式，右侧（9.5）中的第二项求和在 B_p 收缩至点 p 时趋于 0。对于第一项求和，回顾一下 $d^{\mathrm{c}}=(\partial-\overline{\partial})/2\pi\mathrm{i}$，其中 ∂ 以及 $\overline{\partial}$ 这些 Dolbeault 算子。因此

$$d^{\mathrm{c}}\log(z\overline{z}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(\partial\log(z)-\overline{\partial}\log(\overline{z})) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Big(\frac{dz}{z}-\frac{d\overline{z}}{\overline{z}}\Big),$$

并注意到函数 f_1 是实值函数，我们推得

$$\int_{\partial V} f_1\circ\varphi\; d^{\mathrm{c}}\log(z\overline{z}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial V} f_1\circ\varphi\,\Big(\frac{dz}{z}-\frac{d\overline{z}}{\overline{z}}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\partial V} f_1\circ\varphi\,\frac{dz}{z}\Big). \tag{9.6}$$

由于 B_p 不含 $|Z_1|$ 中的任何点，函数 $f_1\circ\varphi$ 在 V 上光滑。因此，柯西公式 [Dem12，第一章，公式 3，2] 给出

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial V} f_1\circ\varphi\,\frac{dz}{z} = (f_1\circ\varphi)(0) + \int_V \frac{1}{\pi z}\frac{\partial f_1\circ\varphi}{\partial\overline{z}}\,d\lambda(z), \tag{9.7}$$

其中 λ 表示 $\mathbb{C}$ 的勒贝格测度。随着 B_p 缩小至 p，(9.7) 右侧的积分趋于 0，因为函数 $z\mapsto 1/z$ 在 V 上可积，因此左侧的积分趋于 $(f_1\circ\varphi)(0)=f_1(p)$。由 (9.5) 和 (9.6) 可推得 $-\int_{\partial B_p} f_1\, d^{\mathrm{c}} f_2$ 收敛至 $\operatorname{ord}_p(s_2)f_1(p)$。

因此，当所有所考虑的邻域都变小时，由 (9.4) 可知，积分 $\int_{\partial U} f_1\, d^{\mathrm{c}} f_2$ 收敛至量

$$\sum_{p\in|Z_2|}\operatorname{ord}_p(s_2)f_1(p) = -\int_X \log\|s_1\|\,\delta_{Z_2}.$$

类似的推理表明，$\int_{\partial U} f_2\, d^{\mathrm{c}} f_1$ 收敛到 $-\int_X \log\|s_2\|\,\delta_{Z_1}$。当这些邻域的并收敛到 $|Z_1|\cup|Z_2|$ 时，取极限，我们由（9.3）得出

$$\int_X \log\|s_1\|_1\,\mathrm{c}_1\big(\overline{L_2}\big)\wedge\delta_X - \log\|s_2\|_2\,\mathrm{c}_1\big(\overline{L_1}\big)\wedge\delta_X = \int_X \log\|s_1\|\,\delta_{Z_2} - \int_X \log\|s_2\|\,\delta_{Z_1},$$

如前所述。 □

注 9.7。 经典 Weil 互反律即为以下等式

$$\prod_{p\in X} f_1(p)^{\mathrm{ord}_p(f_2)} = \prod_{p\in X} f_2(p)^{\mathrm{ord}_p(f_1)} \tag{9.8}$$

fo对于光滑射影曲线上的任意一对非零有理函数 f_1 和 f_2 X wh其对应的零循环具有互不相交的支撑 [Sil09，练习 2。11]。

命题 9.6可视为这一互反律的度量版本，实质上包含了该互反律。事实上，若将 L_1 和 L_2 均取为来自 X 的平凡赋度量线丛 例 9.2，那么该命题给出了式（9.8）右侧与左侧的绝对值相等。

10. The limit height of the intersection as an Arakelov height

本节将 定理 6.1 与阿拉克洛夫几何中的高度理论联系起来。为此，我们首先回顾这一理论的基本要素：针对配备了半正赋度量线丛（不一定光滑）的算术簇。

设 $\mathscr{X}$ 是一个算术簇，即 Spec(ℤ) 上一个正则、整、射影且平坦的概形，其正则函数层为 $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$。由正则性假设，其复点集 $\mathscr{X}(\mathbb{C})$是一个射影复流形。给定 $\mathscr{X}$ 上的一个线丛 $\mathscr{L}$，其解析化 $\mathscr{L}^{\mathrm{an}}$ 是 $\mathscr{X}(\mathbb{C})$上的一个全纯线丛。

一个半正度量线丛在 $\mathscr{X}$ 上是一个有序对

$$\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, \|\cdot\|)$$

其中 $\mathscr{L}$是 $\mathscr{X}$上的一个线丛，而 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{L}^{\mathrm{an}}$ 上的半正度量，并且在由复共轭诱导的 $\mathscr{X}(\mathbb{C})$ 上的对合下保持不变。我们将 $\mathscr{X}(\mathbb{C})$上的关联半正度量线丛记为 $\mathscr{L}$一个= ($\mathscr{L}$一个$\|\cdot\|$)。

对于 $\mathscr{X}$的一个纯 d维循环 $\mathscr{Z}$，以及 $\mathscr{X}$上的一族半正度量线丛 $\mathscr{L}_i = (\mathscr{L}_i, \|\cdot\|_i)$（其中 $i = 1, \ldots, d$），我们定义其（阿拉克洛夫）高度

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{L}_1},\ldots,\overline{\mathscr{L}_d}}(\mathscr{Z})$$

通过以下关于维数的递归定义：

(1) 当 $d = 0$ 时，若 $\mathscr{Z}$ 是一个素循环，则它是 $\mathscr{X}$ 的一个整闭点，且其函数域 K($\mathscr{Z}$) 是有限的。在此情况下，其高度定义为

$$\mathrm{h}(\mathscr{Z}) = \log(\#\,\mathrm{K}(\mathscr{Z})).$$

一般情况下， $\mathscr{Z}$ 的高度由线性性定义。

(2) 当 $d \geq 1$ 时，取 $\mathscr{L}_d$ 的一个有理截面 s，使其在 $\mathscr{Z}$ 的支撑的某个稠密开子集上正则且处处不为零，并令

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{L}_1},\ldots,\overline{\mathscr{L}_d}}(\mathscr{Z}) = \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{L}_1},\ldots,\overline{\mathscr{L}_{d-1}}}(\mathrm{div}(s)\cdot\mathscr{Z}) - \int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})} \log\|s^{\mathrm{an}}\|_d \; \mathrm{c}_1\big(\overline{\mathscr{L}_1^{\mathrm{an}}}\big) \wedge \ldots \wedge \mathrm{c}_1\big(\overline{\mathscr{L}_{d-1}^{\mathrm{an}}}\big) \wedge \delta_{\mathscr{Z}(\mathbb{C})},$$

其中 div(s) $\cdot$ $\mathscr{Z}$表示卡蒂埃除子 div(s) 与循环 $\mathscr{Z}$的交乘积，而 s^{an} 表示 s 视为 $\mathscr{L}_d^{\mathrm{an}}$的亚纯截面。该高度是一个实数，不依赖于有理截面 s在 (2) 中的选择，也不依赖于赋度量线丛的选取顺序。

注10.1. 对于光滑度量，阿拉克洛夫高度由 Bost、Gillet 和 Soul´e 通过算术交叉理论引入 [BGS94]，随后 Maillot 将其推广到不一定光滑的半正度量 [Mai00]。

例10.2. 令 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 为 Spec($\mathbb{Z}$) 上的射影空间。该对

$$\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}} = (\mathscr{O}(1), \|\cdot\|_{\mathrm{can}})$$

其中 $\mathscr{O}(1)$ 表示 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 的超平面线丛，且 $\|\cdot\|_{\mathrm{can}}$ 来自 O 的全纯线丛 例 9.3的典范度量，是这个算术簇上的一个半正度量线丛，称为 典范度量线丛 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$。

设 $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ 是第 1 节引入的射影空间。点 $\xi \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ 的齐次坐标为有理数时，可将其识别为 $\mathbb{Q}$ 上的一个有理点，$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 或者等价地，将其视为一般纤维上的一个概形论点。记 ξ 在 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 中的闭包为，它是一个维数为 1 的整子概形。于是

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}}}(\overline{\xi}) = \mathrm{h}(\xi), \tag{10.1}$$

右侧的量是按照（1.6）定义的 ξ 的高度。证明这一等式是一道很好的练习题，可以通过展开相应的定义并运用注 1.1来解答。

注 10.3。 更一般地，可以为 $\mathscr{X}_{\mathbb{Z}}$ 相对于整数环整闭包的基变换 $\mathscr{X}$ 定义阿拉克洛夫高度。在这种情形下，点 $\xi \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ 可以视为 $\mathbb{Q}$ 上的一个有理数域 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 点，或者等价地，视为 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 一般纤维中的一个概形论点。（10.1）中的等式于是推广到 $\overline{\xi}$ 及其在 ξ 中的闭包 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$。

现在考虑 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 上的半正度量线丛

$$\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}} = (\mathscr{O}(1), \|\cdot\|_{\mathrm{can}}) \quad \text{and} \quad \overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}} = (\mathscr{O}(1), \|\cdot\|_{\mathrm{Ron}}) \tag{10.2}$$

它们是通过在 O 上的全纯线丛 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上赋予例 9.3 和9.4中的典范度量和 Ronkin 度量分别得到的。另考虑由齐次线性多项式 $\mathscr{C}$ 定义的 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 子概形 $x_0 + x_1 + x_2$。在 $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ 上研究的直线第一部分与 $\mathbb{Q}$ 上的 $\mathscr{C}$ 点集相同。

以下是本节的主要结果。

T 定理 10.4. 设 $(\omega_\ell)_{\ell\geq 1}$ 是 $(\mathbb{Q})$ 中的一个严格序列，由非平凡挠点组成。那么

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{h}(C \cap \omega_\ell C) = \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}}, \overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C}).$$

其证明依赖于下面的复解析等式。与 第 4 节 一样，我们用 $\mathbb{S} = (S^1)^2$ 表示 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 的紧致环面，并用 ν 表示其概率 Haar 测度。

引理 10.5. 设 s_0 是与 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 的齐次坐标 x_0 对应的 $\mathscr{O}(1)$ 整体截面。那么

$$\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} \log \|s_0^{\mathrm{an}}\|_{\mathrm{Ron}}\, \mathrm{c}_1\big(\overline{O(1)}^{\mathrm{can}}\big) \wedge \delta_{\mathscr{C}(\mathbb{C})} = -\int_{\mathbb{S}} \log \max(|z_2 - z_1|,\ |z_2 - 1|,\ |z_1 - 1|)\, d\nu(z)。$$

证明。 简记为 $\mu = \mathrm{c}_1(\overline{O(1)}^{\mathrm{can}}) \wedge \delta_{\mathscr{C}(\mathbb{C})}$。根据构造，它是定义在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上、支撑于直线 $\mathscr{C}(\mathbb{C})$ 上的测度。对于每个 $z \in \mathbb{S} \setminus \{(1,1)\}$，我们考虑积分

$$F(z) = \int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} \log \left| \frac{p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2}{p_0} \right| d\mu(p), \tag{10.3}$$

该积分是有限的，因为被积函数在这条直线上的限制是一个除两点外处处连续的函数，并且在这两点至多具有对数奇异性。

我们将运用度量魏尔互反律，求得这个积分的一个更简单的表达式。为此，考虑包含映射 $\jmath\colon \mathscr{C}(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$，以及 $\mathscr{C}(\mathbb{C})$ 上由 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上的平凡线丛和典范度量线丛经此映射取原像所得的半正度量线丛，即

$$\overline{L_1} = \jmath^*\overline{O_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}}^{\mathrm{tr}} = \overline{O_{\mathscr{C}(\mathbb{C})}}^{\mathrm{tr}} \quad \text{and} \quad \overline{L_2} = \jmath^*\overline{O(1)}^{\mathrm{can}}.$$

一方面，有理函数 $s_1 = (x_0 + z_1x_1 + z_2x_2)/x_0$ 属于 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$，其限制是 $\mathscr{C}(\mathbb{C})$ 上的一个非零有理函数，从而给出 $L_1 = O_{\mathscr{C}(\mathbb{C})}$ 的一个非零有理截面 $\jmath^*s_1$。另一方面，给定复数 α_1 和 α_2，且它们不同时等于 1，线性多项式 $x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2$ 对应于 $O(1)$ 的一个整体截面 s_2，其限制是 $L_2 = \jmath^*O(1)$ 的一个非零整体截面 $\jmath^*s_2$。由这些拉回的有理截面分别在 $\mathscr{C}(\mathbb{C})$ 上定义的零循环为

$$Z_1 = [z_1 - z_2 : z_2 - 1 : 1 - z_1] - [0 : 1 : -1] \quad \text{and} \quad Z_2 = [\alpha_1 - \alpha_2 : \alpha_2 - 1 : 1 - \alpha_1]. \tag{10.4}$$

适当选取 α_1 和 α_2 后，这些零循环的支撑彼此不相交。

测度 μ 在直线上的限制与 $\mathrm{c}_1(L_2)$ 一致，这是 Monge–Amp`ere 算子的函子性所致。此外，$\mathrm{c}_1(L_1) = 0$，如例 9.2 所示。因此命题 9.6 结合（10.3）和（10.4）可得

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\mathscr{C}(\mathbb{C})} \log \|\jmath^*s_1\|_1 \, \mathrm{c}_1(\overline{L_2}) = \int_{\mathscr{C}(\mathbb{C})} \log \|\jmath^*s_1\|_1 \, \delta_{Z_2} - \log \|\jmath^*s_2\|_2 \, \delta_{Z_1} \\ &= \log \left(\frac{\|s_1([\alpha_1 - \alpha_2 : \alpha_2 - 1 : 1 - \alpha_1])\|_{\mathrm{tr}} \cdot \|s_2([0 : 1 : -1])\|_{\mathrm{can}}}{\|s_2([z_1 - z_2 : z_2 - 1 : 1 - z_1])\|_{\mathrm{can}}} \right). \end{aligned} \tag{10.5}$$

我们有

$$\begin{aligned} \|s_1([\alpha_1 - \alpha_2 : \alpha_2 - 1 : 1 - \alpha_1])\|_{\mathrm{tr}} &= \frac{|(\alpha_1 - \alpha_2) + z_1(\alpha_2 - 1) + z_2(1 - \alpha_1)|}{|\alpha_1 - \alpha_2|}, \\ \|s_2([0 : 1 : -1])\|_{\mathrm{can}} &= |\alpha_1 - \alpha_2|, \\ \|s_2([z_1 - z_2 : z_2 - 1 : 1 - z_1])\|_{\mathrm{can}} &= \frac{|(z_1 - z_2) + \alpha_1(z_2 - 1) + \alpha_2(1 - z_1)|}{\max(|z_2 - z_1|, |z_2 - 1|, |z_1 - 1|)}. \end{aligned}$$

因此（10.5）可化简为

$$F(z) = \log \max(|z_2 - z_1|, |z_2 - 1|, |z_1 - 1|), \tag{10.6}$$

按照（4.1）中的记号。

现在考虑函数 g，$h\colon \mathbb{S} \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 定义为

$$g(z,p) = \log \left| \frac{p_0 + z_1p_1 + z_2p_2}{p_0} \right| \quad \text{and} \quad h(z,p) = \log \left(\frac{|p_0| + |p_1| + |p_2|}{|p_0|} \right)$$

当 $(z,\ p) \notin Z(p_0)$ 时；否则定义为任意常数。子集 $Z(p_0)$ 关于乘积测度 $\nu \times \mu$ 的测度为零，因此这些函数在 $\mathbb{S} \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上的积分不取决于该常数的选择。

函数 h 关于第一个变量是常数；而作为第二个变量的函数，它在直线 $\mathscr{C}(\mathbb{C})$ 上的限制仅在一点处有对数奇点，因此关于 $\nu \times \mu$ 可积。此外，$h - g$ 是非负的，由 (10.3) 和 (10.6) 可推出迭代积分

$$\int_{\mathbb{S}} \int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} (h(z,p) - g(z,p)) \, d\mu(p) \, d\nu(z)$$

是有限的。因此，Tonelli 定理蕴含函数 $h-g$，进而也蕴含更进一步地，g，关于乘积测度 $\nu\times\mu$ 可积，并且

$$\int_{\mathbb{S}}\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} g(z,p)\,d\mu(p)\,d\nu(z)=\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}\int_{\mathbb{S}} g(z,p)\,d\nu(z)\,d\mu(p). \tag{10.7}$$

最后注意，对于 $p=[p_0:p_1:p_2]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$，其中 $p_0\neq 0$，我们有

$$\log\|s_0^{\mathrm{an}}(p)\|_{\mathrm{Ron}}=-\int_{\mathbb{S}} g(z,p)\,d\nu(z).$$

由（10.7）可得

$$\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}\log\|s_0^{\mathrm{an}}(p)\|_{\mathrm{Ron}}\,d\mu(p)=-\int_{\mathbb{S}}\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} g(z,p)\,d\mu(p)\,d\nu(z)=-\int_{\mathbb{S}} F(z)\,d\nu(z).$$

结合（10.6），即可得到所述结论。 □

定理 *定理 10.4* 的证明。由推论 3.6和命题 4.1，

$$\lim_{\ell\to+\infty}\mathrm{h}(C\cap\omega_\ell C)=\int_{\mathbb{S}}\log\max(|z_2-z_1|,|z_2-1|,|z_1-1|)\,d\nu(z).$$

另一方面，阿拉克洛夫高度的递归定义表明

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C})=\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}}}(\mathrm{div}(s_0)\cdot\mathscr{C})-\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}\log\|s_0^{\mathrm{an}}\|_{\mathrm{Ron}}\,\mathrm{c}_1\big(\overline{O(1)}^{\mathrm{can}}\big)\wedge\delta_{\mathscr{C}(\mathbb{C})}.$$

除子 $\mathrm{div}(s_0)\cdot\mathscr{C}$ 与 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$中一维不可约子概形重合，该子概形是此方案一般纤维中对应于点 $[0:1:-1]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ 的点的扎里斯基闭包。因此，式（10.1）给出

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}}}(\mathrm{div}(s_0)\cdot\mathscr{C})=\mathrm{h}([0:1:-1])=0.$$

该结论由引理 10.5得出。 □

11. A TORIC PERSPECTIVE

本文余下部分将借助凸几何，通过分别研究环面簇及其超曲面的高度理论，来表述并计算定理 10.4 中的阿拉克洛夫高度；相关理论分别见 [BPS14] 和 [Gua18b]。由于此处唯一需要考虑的环面簇是射影空间，我们将介绍范围限定于这一特例。尽管如此，这仍足以让读者初步领略一般理论。

设 $B\subset\mathbb{R}^n$ 为一个凸子集，$g\colon B\to\mathbb{R}$ 为其上的一个凹函数，即满足以下条件的函数

$$g(\lambda u+(1-\lambda)v)\geq\lambda g(u)+(1-\lambda)g(v)\quad\text{for all } u,v\in B \text{ and } \lambda\in[0,1].$$

其稳定集是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，定义为

$$\mathrm{stab}(g)=\big\{x\in\mathbb{R}^n\;\big|\;\inf_{u\in B}(\langle x,u\rangle-g(u))>-\infty\big\},$$

其中 $\langle x,u\rangle=x_1u_1+\cdots+x_nu_n$ 表示通常的标量积。那么，g 的勒让德–芬切尔对偶是函数 $g^\vee\colon\mathrm{stab}(g)\to\mathbb{R}$，定义为

$$g^\vee(x)=\inf_{u\in B}(\langle x,u\rangle-g(u)).$$

它是凹且上半连续的。如果 g 是上半连续的，那么 $g^{\vee\vee}=g$。

例 11.1. 设 Δ_n 是 $\mathbb{R}^n$的标准单纯形，也就是一个 n维单纯形，其顶点为原点以及该向量空间标准基中的向量。它的支撑函数是函数 $\Psi_{\Delta_n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，定义为

$$\Psi_{\Delta_n}(u) = \inf_{x\in\Delta_n} \langle x, u\rangle = \min(0, u_1, \dots, u_n).$$

它是分段线性且凹的，其稳定集与 Δ_n 重合，而其勒让德–芬切尔对偶是 0_{Δ_n}，即定义在该单纯形上的零函数。

例 11.2. 令 $(S^1)^n$ 为 $(\mathbb{C}^\times)^n$ 的紧致环面，ν_n 为其概率 Haar 测度。*Ronkin* 函数是函数 $\rho_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$\rho_n(u) = -\int_{(S^1)^n} \log|1 + z_1 \mathrm{e}^{-u_1} + \cdots + z_n \mathrm{e}^{-u_n}|\, d\nu_n(z).$$

它与以下函数相关联：R 见 例 9.4，二者满足关系

$$\rho_n(u) = -\log R(1, \mathrm{e}^{-u_1}, \dots, \mathrm{e}^{-u_n}). \tag{11.1}$$

函数 ρ_n 是凹函数，且它与支撑函数 Ψ_{Δ_n} 之差一致有界 [Gua18b，命题 2。10]这意味着它的稳定集是标准单纯形 Δ_n，而其勒让德–芬切尔对偶 $\rho_n^\vee$ 是其上的连续凹函数。

注 11.3. 任何 Laurent 多项式，或更一般地，任何定义在开且 $(S^1)^n$-不变子集上的全纯函数（该子集属于 $\mathbb{C}^\times$）^{n}，都可以关联一个 Ronkin 函数。这类函数由 Ronkin 首次引入，见 [Ron01]，随后 Passare 和 Rullg˚ard 在 [PR04]中作了进一步研究。

函数 ρ_n 在 例 11.2 中（忽略符号）是对应于 Laurent 多项式 $1 + t_1 + \cdots + t_n$ 的特殊情形。对于 $n = 2$，Cassaigne 和 Maillot 已用 Bloch–Wigner 二重对数给出了它的显式表达式 [Mai00，命题 7.3。1]。尽管这正是我们关注的情形，本文并不需要这样的描述。

凹函数在本文语境中的重要性，源于它们与复射影空间的超平面线丛上的半正托里克度量之间的相互作用。度量 $\|\cdot\|$ 在 $O(1)$上若满足以下条件，便称为托里克

$$\|s_0(zp)\| = \|s_0(p)\| \quad \text{for all } p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ and } z \in (S^1)^n, \tag{11.2}$$

其中 zp 表示 p 按照（z）所作的平移，如（1.3）中所示，并且 s_0 是 O的整体截面（1），它对应于 x_0 中 $\mathbb{P}^n$（$\mathbb{C}$）。

对于定义在 $O(1)$上的托里克度量 $\|\cdot\|$，可以关联一个度量函数，即函数 $\psi_{\|\cdot\|}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，其定义如下：

$$\psi_{\|\cdot\|}(u) = \log \|s_0([1 : \mathrm{e}^{-u_1} : \cdots : \mathrm{e}^{-u_n}])\|.$$

上的托里克度量 $O(1)$是半正的，当且仅当其度量函数是凹的 [BPS14，定理 4.8.1(1)]。在这种情况下，该凹函数的稳定集是标准单纯形 Δ_n，并且还可以将其屋顶函数与该托里克度量相关联；它是连续凹函数

$$\vartheta_{\|\cdot\|}\colon \Delta_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

定义为 $\psi_{\|\cdot\|}$ 的勒让德–芬切尔对偶。

例 11.4。 来自 $O(1)$ 的典范度量例 9.3 是托里克的，这一点可由条件 (11.2) 直接验证，其度量函数与支撑函数 Ψ_{Δ_n} 来自 例 11.1一致。这恢复了 $\|\cdot\|_{\mathrm{can}}$的半正性，并表明其屋顶函数是零函数 0_{Δ_n}。

例 11.5。 由 $O(1)$ 得到的 例 9.4 中的 Ronkin 度量按定义也属于托里克度量，其相应的度量函数与 ρ_n 来自例 11.2的 Ronkin 函数一致，这是通过关系式（11.1）得到的。特别地，它是 $O(1)$ 上的半正度量，其屋顶函数为它的勒让德–芬切尔对偶 $\rho_n^\vee$。

[BPS14] 与 [Gua18b] 的主要结果可以 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 根据其相应的一族屋顶函数，来表示其高度以及其超曲面的高度；这里采用的是定义在 $\mathscr{O}(1)$ 上的一族半正环面度量。这是借助混合积分 MI 实现的。MI 是一个作用于由定义在实数集的紧凸子集上的（$n+1$）个连续凹函数组成的函数族的算子，它通过对通常的积分算子进行极化而得 $\mathbb{R}^n$ 到，见 [BPS14，定义 2.7。16]。

由于我们关注的情形是 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$，我们将 同上阿黛尔语境中的表述调整为本文的概形观点，从而得到以下结果。

命题 11.6. 设 $\mathscr{O}(1)^{\mathrm{can}}$ 和 $\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}$ 分别是$\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 的典范线丛和 *Ronkin* 度量化线丛，定义如 (10.2)所示；设 $\mathscr{C}$ 是由线性多项式 $x_0+x_1+x_2$定义的子概形。则

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C})=\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}})=\mathrm{MI}(0_{\Delta_2},\rho_2^\vee,\rho_2^\vee).$$

证明。 本证明假设读者熟悉阿拉克洛夫高度理论的阿黛尔方法，该方法见 [BPS14第 1]章。

令 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ 为 Spec($\mathbb{Q}$) 上的射影平面， D 为无穷远直线对应的卡蒂埃除子。对 ($\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$, $\mathscr{O}(1)$) 而言，($\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$, $O(D)$) 是一个整模型，因此， $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 上的典范线丛和 Ronkin 度量化线丛诱导出准代数半正阿黛尔带度量除子

$$\overline{D}^{\mathrm{can}} \qquad \text{and} \qquad \overline{D}^{\mathrm{Ron}}$$

在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ .....的意义下 [BPS14，第 1 节。5]也就是说，它们的阿基米德度量分别与以下度量一致： $\mathscr{O}(1)^{\mathrm{can}}$ 和 $\mathscr{O}(\overline{1)}^{\mathrm{Ron}}$，其阿基米德屋顶函数也相同。相反，它们的非阿基米德度量由整模型（$\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$, $\mathscr{O}(1)$）诱导，正如 [BPS14，例 1.3。11], 因此，它们的屋顶函数与 Δ_n上的零函数一致。

这种对应与相关的高度相容，因此 [BPS14，定理 5.2。5] 连同例 11.4和11.5可特化为

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}})=\mathrm{h}_{\overline{D}^{\mathrm{can}},\overline{D}^{\mathrm{Ron}},\overline{D}^{\mathrm{Ron}}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}})=\mathrm{MI}(0_{\Delta_2},\rho_2^\vee,\rho_2^\vee),$$

这给出了陈述中的第二个等式。我们还有

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C})=\mathrm{h}_{\overline{D}^{\mathrm{can}},\overline{D}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C}_{\mathbb{Q}})$$

因为 $\mathscr{C}$ 不含垂直分量，并且 [Gua18b，定理 5。12] 给出

$$\mathrm{h}_{\overline{D}^{\mathrm{can}},\overline{D}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C}_{\mathbb{Q}})=\mathrm{h}_{\overline{D}^{\mathrm{can}},\overline{D}^{\mathrm{Ron}},\overline{D}^{\mathrm{Ron}}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}})$$

作为 D^{Ron} 与 Laurent 多项式 $1+t_1+t_2$在 [Gua18b]的意义下的 Ronkin 度量化除子相重合。这给出了第一个等式，并完成了证明。 □

将这一结果与 定理 10.4 以及等式（10.1）结合起来，可得如下结论。

推论 11.7。 设 $(\omega_\ell)^{\ell\geq 1}$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 中的一个非平凡挠点严格序列。那么

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}}}(Z(x_0+x_1+x_2,\, x_0+\omega_{\ell,1}^{-1}x_1+\omega_{\ell,2}^{-1}x_2)) = \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\,\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}},\,\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}),$$

其中 $Z(x_0+x_1+x_2, x_0+\omega_\ell^{-1}{}_1x_1+\omega_\ell^{-1}{}_2x_2)$ 表示由这些线性形式定义的 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 的1 _ 维子概形。

这个极限公式是一个猜想中的算术类比的特例。该猜想源于这样一个几何事实：对于一个 n 维代数簇上的 n 个线丛，其整体截面的一个一般 n 元组的零点集基数，等于该代数簇关于这些线丛的次数。表述这一猜想需要使用整体域上代数簇的赋阿代尔度量的线丛这一语言，这会使我们偏离当前主题太远。因此，我们只解释一个可以用现有对象表述的特例，同时借此略窥一般情形。

对于 $d\geq 1$，考虑 d-张量幂线丛 $O(d) = O(1)^{\otimes d}$ 在 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}$上的情形。其整体截面与该射影空间齐次坐标中次数为 d 的齐次多项式一一对应。推广例 9.4，我们定义*Ronkin* 度量在 $O(d$上的度量如下：对于每个整体截面 s,

$$\|s(p)\|_{\mathrm{Ron}} = \frac{|l_s(p_0,\dots,p_n)|}{R(|p_0|^d,\dots,|p_n|^d)} \quad \text{for all } p=[p_0:\cdots:p_n]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{C}),$$

其中， l_s 是与 s对应的次数为 d 的齐次多项式，而 R 与前述例子中的函数相同。此度量是托里克且半正的， $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 上的相应赋度量线丛记作 $\overline{\mathscr{O}(d)}^{\mathrm{Ron}}$。

猜想 11.8。设$(\omega_\ell)^{\ell\geq 1}$ 是在 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\mathbb{Q})$ 中的非平凡挠点严格序列。那么对于 d_1， $d_2\geq 1$ ，有

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}}}(Z(x_0^{d_1}+x_1^{d_1}+x_2^{d_1},\, x_0^{d_2}+\omega_{\ell,1}^{-d_2}x_1^{d_2}+\omega_{\ell,2}^{-d_2}x_2^{d_2})) = \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\,\overline{\mathscr{O}(d_1)}^{\mathrm{Ron}},\,\overline{\mathscr{O}(d_2)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}).$$

与推论 11.7不同，这一陈述将允许我们在无法显式求解所考虑方程组的情形下，预测这类极限高度。

12. Integrals over an amoeba

在第 4 节中，我们考察了定义在 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 上的余热带化映射，它将每个点映射为其坐标的辐角。若改为考察坐标的绝对值，则得到更经典的热带化映射：

$$\mathrm{trop}\colon (\mathbb{C}^\times)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad z\longmapsto(-\log|z_1|,-\log|z_2|).$$

曲线在 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 经此映射得到的像称为它的触角。这一术语由 [GKZ08第 6 节中创造。1], 该文中首次引入了这些形似触手的子集。

这里我们将关注由 Laurent 多项式 $1+t_1+t_2$ 定义的 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 曲线的触角，即

$$\mathscr{A} = \{(-\log|z_1|,-\log|z_2|) \mid \gamma\in(\mathbb{C}^\times)^2 \text{ such that } 1+z_1+z_2=0\}. \tag{12.1}$$

我们将把这个子集 $\mathbb{R}^2$ 称为阿基米德触角，它属于 C，即 $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ 这条直线；我们在第一部分中对其进行了研究。它见图 12.1，其计算方法详见 [Gua20]。

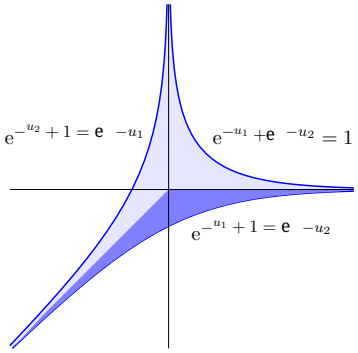

FIGURE 12.1. 阿基米德触角 C 及其等高线和南部区域

注 12.1. 这一术语的合理性如下。直线 $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ 定义在有理数域上，因此可以将其视为 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ 的一个整子概形，其阿基米德解析化是复直线 $Z(x_0+x_1+x_2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$。那么，子集 $\mathscr{A}$ 与该复直线限制在稠密开子集 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus Z(x_0x_1x_2) \simeq (\mathbb{C}^\times)^2$ 上所得的触角重合。

接下来，考虑这个阿基米德触角的如下子集

$$\mathscr{A}_{\text{south}} = \{u \in \mathscr{A} \mid \min(0, u_1) \geq u_2\},$$

也就是图 12.1中以深蓝色标出的区域。下一个结果表明，坐标函数的幂在此区域上的积分由黎曼ζ函数的特殊值给出。

命题 12.2。 对于所有 $m \in \mathbb{N}$，我们有

$$\int_{\mathscr{A}_{\text{south}}} u_2^m \, du_1 du_2 = (-1)^m \, m! \, \zeta(m+2).$$

证明。区域 $\mathscr{A}_{\text{south}}$ 的非平凡边界由 $u_1 = -\log(e^{-u_2}-1)$ 给出，如图 12.1所示。于是，利用 Tonelli 定理并直接计算可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{A}_{\text{south}}} u_2^m \, du_1 du_2 &= \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{u_2}^{-\log(e^{-u_2}-1)} du_1 \right) u_2^m \, du_2 \\ &= \int_{-\infty}^{0} u_2^m (-\log(e^{-u_2}-1) - u_2) \, du_2 = \int_{-\infty}^{0} -u_2^m \log(1-e^{u_2}) \, du_2. \end{aligned} \tag{12.2}$$

对数在开单位圆盘上的级数绝对收敛，而对于 $u_2 = 0$，结论显然；由此可得逐点收敛

$$-u_2^m \log(1-e^{u_2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_2^m}{k} e^{ku_2} \quad \text{for } u_2 \in (-\infty, 0],$$

作为取值于 $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 的函数。由于该级数的每个求和项符号相同，Levi 单调收敛定理表明

$$\int_{-\infty}^{0} -u_2^m \log(1-\mathrm{e}^{u_2})\,du_2 = \int_{-\infty}^{0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_2^m}{k}\mathrm{e}^{ku_2}\,du_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{0} u_2^m \mathrm{e}^{ku_2}\,du_2$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\mathrm{e}^{ku_2}\sum_{\ell=0}^{m}\frac{(-1)^\ell m!}{k^{\ell+1}(m-\ell)!}u_2^{m-\ell}\right]_{-\infty}^{0}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m!}{k^{m+2}} = (-1)^m\, m!\,\zeta(m+2). \tag{12.3}$$

该结论由（12.2）和（12.3）得出。 □

这一结果可用于重新得到 Passare 和 Rullgard 在 $\mathscr{A}$ 中对面积的计算[◦]，见 [PR04, 第 502]页。类似的计算见 [KP16，第 919]页。

例 12.3。对于 $m=0$，命题 12.2 给出 $\mathrm{vol}(\mathscr{A}_{\mathrm{south}}) = \zeta(2) = \pi^2/6$。注意，$\mathscr{A}$除去测度为零的子集后，可由南部区域在映射 $(u_1,\ u_2) \mapsto (-u_2,\ u_1-u_2)$ 下的像与关于对角线的对称下的像不相交地覆盖。由于这些映射保持勒贝格测度，我们推得

$$\mathrm{vol}(\mathscr{A}) = 3\ \mathrm{vol}(\mathscr{A}_{\mathrm{south}}) = 3\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2}.$$

前一个命题还允许计算 C 的阿基米德触角上二维标准单纯形的支撑函数的积分。

例 12.4。对于 $m=1$，命题 12.2 给出 $\int_{\mathscr{A}_{\mathrm{south}}} u_2\,du_1du_2 = -\zeta(3)$。考虑 $\mathscr{A}$ 定义的子集如下

$$\mathscr{A}_{\mathrm{east}} = \{u\in\mathscr{A} \mid \min(u_1,u_2)\geq 0\} \quad \text{and} \quad \mathscr{A}_{\mathrm{west}} = \{u\in\mathscr{A} \mid \min(0,u_2)\geq u_1\}.$$

Then

$$\int_{\mathscr{A}} \min(0,u_1,u_2)\,du_1du_2 = \int_{\mathscr{A}_{\mathrm{east}}} 0\,du_1du_2 + \int_{\mathscr{A}_{\mathrm{west}}} u_1\,du_1du_2 + \int_{\mathscr{A}_{\mathrm{south}}} u_2\,du_1du_2$$
$$= 2\int_{\mathscr{A}_{\mathrm{south}}} u_2\,du_1du_2 = -2\,\zeta(3),$$

其中第二个等号由该积分的对称性得出。

注 12.5. 探讨曲线的触角上分段多项式函数的其他积分是否也能用 L-函数的特殊值表示，将会很有意思。

13. Computing a mixed integral

最后，我们说明 命题 11.6中的混合积分与 第 12 节所讨论的触角上分段线性函数的积分之间的关系。所得等式为所研究的极限高度提供了另一种表达式，并可用于恢复我们的主要结果。

令 $\Delta = \Delta_2$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的标准单纯形，并记 0_Δ 为其上的零函数。再令 $\Psi = \Psi_{\Delta_2}$ 为该单纯形的支撑函数，如 例 11.1所示，并令 $\rho = \rho_2$ 为 $1+t_1+t_2$ 的 Ronkin 函数，依据 例 11.2。回忆一下，$\mathscr{A}$ 表示直线 C 在（12.1）中的阿基米德触角。

定理 13.1。 采用上述记号，我们有

$$\mathrm{MI}(0_\Delta, \rho^\vee, \rho^\vee) = -\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{A})} \int_{\mathscr{A}} \Psi(u)\, du_1 du_2,$$

其中vol 表示 $\mathbb{R}^2$的勒贝格测度。

为了证明这一结果，我们首先需要了解该 Ronkin 函数的勒让德–芬切尔对偶在其定义域边界上的行为。

引理 13.2. 函数 $\rho^\vee$ 在 Δ的边界上消失。

证明。 由詹森公式可知

$$\rho(u) = \Psi(u) \quad \text{for all } u \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathscr{A}, \tag{13.1}$$

例如参见 [Mai00，命题 7.3.1(2)]。由于 ρ 是凹函数，这意味着不等式 $\rho \le \Psi$ 在整个实平面上成立。取勒让德–芬切尔对偶可得 $\rho^\vee(x) \ge 0_\Delta(x) = 0$ 对所有 $x \in \Delta$。

因此，为完成证明，只需证明 $\rho^\vee$ 在 Δ的边界上非正。为此，首先考虑点 $x = (\lambda, 0) \in \partial\Delta$，其中 $\lambda \in [0,1]$。对于$\varepsilon > 0$点 $u_\varepsilon = (\varepsilon, -\log(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}))$ 属于 $\mathscr{A}$的东侧边界，如图 12.1所示。由（13.1）以及 Ronkin 函数的连续性，我们必然有 $\rho(u_\varepsilon) = 0$。因此

$$\rho^\vee(x) = \inf_{u\in\mathbb{R}^2} (\langle x, u\rangle - \rho(u)) \le \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\langle x, u_\varepsilon\rangle - \rho(u_\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lambda\varepsilon = 0,$$

这意味着 $\rho^\vee(x) = 0$。当 $x = (0, \lambda)$ 且$\lambda \in [0,1]$ 时，这一点同样成立，证明方法类似。

最后，令 $x = (\lambda, 1-\lambda)$，其中 $\lambda \in [0,1]$。对于 $\kappa > 0$，考虑点 $u_\kappa = (-\log(\mathrm{e}^\kappa - 1) - \kappa)$，它位于 $\mathscr{A}$的南侧边界。再次由（13.1）以及 Ronkin 函数的连续性，我们有 $\rho(u_\kappa) = -\kappa$。因此

$$\begin{aligned}\rho^\vee(x) \le \lim_{\kappa\to+\infty} (\langle (x, u_\kappa\rangle - \rho(u_\kappa)) &= \lim_{\kappa\to+\infty} (\lambda\cdot(-\log(\mathrm{e}^\kappa - 1)) + (1-\lambda)\cdot(-\kappa) - (-\kappa)) \\ &= \lim_{\kappa\to+\infty} -\lambda\log(1-\mathrm{e}^{-\kappa}) = 0,\end{aligned}$$

这意味着在此情形下， $\rho^\vee(x) = 0$ 也成立，正如所述。 □

现在我们可以开始证明定理 13.1了。该证明依赖于混合积分与对偶空间上关于凹函数的实 Monge– Amp`ere 测度的积分之间的关系。后者是一种正测度，在函数凹性更强的区域具有更高的密度 [BPS14，定义 2.7。1]。

证明定理 *13.1*。 由于 0_Δ 和 $\rho^\vee$ 都是单纯形 Δ 上的连续凹函数，其中 $\mathbb{R}^2$，由 [Gua18b 定理 16] 以及 $\rho^\vee$ 在 Δ 边界上的消失（见 引理 13.2 ），可得

$$\mathrm{MI}(0_\Delta, \rho^\vee, \rho^\vee) = -2\int_{\mathbb{R}^2} \Psi\, d\mathcal{M}(\rho), \tag{13.2}$$

其中， $\mathcal{M}(\rho)$ 表示 Ronkin 函数的实 Monge–Amp`ere 测度。

根据 [PR04，定理 7 及第 502]页上的例子，`的实 Monge–Amp ρ eremeasure 与 $\mathbb{R}^2$ 在触角 $\mathscr{A}$上的勒贝格测度相一致，并乘以常数 π^{-2}，因此

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Psi\, d\mathcal{M}(\rho) = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathscr{A}} \Psi(u)\, du_1 du_2. \tag{13.3}$$

该陈述由式（13.2）和式（13.3）以及 例 12.3得出。 □

下面的推论可由 定理 10.4、命题 11.6 和定理 13.1给出的等式链.

推论 13.3. 设 $(\omega_\ell)_{\ell\geq 1}$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2(\overline{\mathbb{Q}})$ 中的一个严格序列，其元素均为非平凡挠点。那么

$$\lim_{\ell\to+\infty} \mathrm{h}(C\cap\omega_\ell C) = \mathrm{h}_{\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{can}},\overline{\mathscr{O}(1)}^{\mathrm{Ron}}}(\mathscr{C}) = -\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{A})}\int_{\mathscr{A}}\Psi(u)\,du_1du_2,$$

其中，$\mathscr{C}$是由 $x_0+x_1+x_2$定义的 $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{Z}}}$ 子概形，而 $\mathscr{O}(1)^{\mathrm{can}}$ 和 $\mathscr{O}(1)^{\mathrm{Ron}}$分别是 $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{Z}}}$上的典范赋度量线丛和 *Ronkin* 半正定度量线丛。

这一结果凸显了我们对高度函数和曲线所作特定选择的作用。事实上，所考虑的极限高度可通过对 Ψ取平均来计算；它是环面对应中与典范高度相关的度量函数，见 [BPS14], , 定义在直线的阿基米德触角上 $\mathscr{A}$ C。

最后，等式右侧的内容可直接利用推论 13.3 计算，方法是使用例 12.3和12.4，即

$$-\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{A})}\int_{\mathscr{A}}\Psi(u)\,du_1du_2 = \frac{2\,\zeta(3)}{3\,\zeta(2)},$$

从而通过这一更具概念性的视角重新得到定理 6.1。

References

[BE21] S. Boucksom 和 D. Eriksson, *Spaces of norms determinant of cohomology and Fekete points in non-Archimedean geometry*, , 《Adv. Math.》（）, **378** 2021 107501, 124 论文编号，第 [BG06] E. Bombieri 和 W. Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, 《New Math. Monogr.》, 第 4 卷，剑桥大学出版社，2006年。[BGS94] J.-B. Bost、H. Gillet 和 C. Soul´e, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, 《J. Amer. Math. Soc.》7（1994）, 903–1027。[Bil97] Y. Bilu, *Limit distribution of small points on algebraic tori*, 《Duke Math. J.》89（1997）, 465–476。[BPRS19] J. I. Burgos Gil、P. Philippon、J. Rivera-Letelier 和 M. Sombra, *The distribution of Galois orbits of points of small height in toric varieties*, , **141** 2019 309 381 , 《Amer. J. Math.》（）, –。

[BPS14] J. I. Burgos Gil 、 P. Philippon 和 M. Sombra, *Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics measures and heights*, , 《Asterisque》, 法国数学会卷, 。[BZ20] F. Brunault 和 W. Zudilin, *Many variations of Mahler measures — a lasting symphony*, 《Austral. Math. Soc. Lect. Ser.》, 第 28 卷，剑桥大学出版社，2020年。[Col93] P. Colmez, *Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe*, 《数学年刊》（2）138（1993）, 625–683。[CT09] A. Chambert-Loir 和 A. Thuillier, *Mesures de Mahler et équidistribution logarithmique*, 《Ann. Inst. Fourier》（格勒诺布尔）59（2009）, 977–1014。[Dem12] J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, 可在 https:// www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf 获取的书籍，2012年。[DH19] V. Dimitrov 和 P. Habegger, *Galois orbits of torsion points near atoral sets*, 电子预印本 arXiv:1909.06051，2019年。[DP99] S. David 和 P. Philippon, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores*, , **4 28** 1999 489 543 , 《Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.》（）（）, –。[GKZ08] I. M. Gelfand、M. M. Kapranov 和 A. V. Zelevinsky, *Discriminants resultants and multidimensional determinants*, , 《Math. Theory Appl.》, Birkhäuser, 。[GS90] H. Gillet 和 C. Soul´e, *Arithmetic intersection theory*, 《Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.》72（1990）, 93–174。

[GS22] R. Gualdi 和 M. Sombra, *Computing the height of the intersection of the line* $(x_0 + x_1 + x_2 = 0) \subset \mathbb{P}^2$ *and its translate by a torsion point*, SageMath 笔记本可在 https://bit.ly/3GFNAcB 获取，2022年。[Gua18a] R. Gualdi, *Height of cycles in toric varieties*, 博士论文，波尔多大学和巴塞罗那大学，2018年。[Gua18b] ,
Heights of hypersurfaces in toric varieties, 《代数与数论》12（2018），2403–2443。[Gua20] ,
The amoeba of a planar line, 可在 https://homepages. uni-regensburg.de/~gur23971/documents/Amoeba_of_hyperplane.pdf 获取的说明，2020年。[GZ86] B. H. Gross 和 D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, 《数学发明》84（1986），225–320。[Har98] G. Harman, *Metric number theory*, 《伦敦数学会专著》（新系列），第 18 卷，牛津大学出版社，1998年。[JJ56] H. Jeffreys 和 B. S. Jeffreys, *Methods of mathematical physics*, 第三版，剑桥大学出版社，1956年。[KP16] J. Kramer 和 A. M. von Pippich, *Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach: special values of zeta functions and areas of triangles* **63** 2016 , 《美国数学会通报》（ ），917–922。[Lan94] S. Lang, *Algebraic number theory*, 第二版，《数学研究生教材》，第 110 卷，施普林格出版社，1994年。[Mai00] V. Maillot,
Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, 《法国数学会回忆录》（新系列）80（2000），vi+129 页。[MR02] V. Maillot 和 D. Roessler, *Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions L d'Artin aux entiers négatifs* **9** 2002 715 724 , 《数学研究快报》（ ），–。[MS19] C. Martínez 和 M. Sombra,
An arithmetic Bernštein-Kušnirenko inequality, 《数学杂志》291（2019），1211–1244。[Neu99] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, 《数学科学基础丛书》，第 322 卷，施普林格出版社，1999年。[Nor50] D. G. Northcott, *Periodic points on an algebraic variety*, 《数学年刊》（2）51（1950），167–177。[PP20] F. Pazuki 和 R. Pengo,
On the Northcott property for special values of L-functions, 电子预印本 arXiv:2012.00542，2020年。[PR04] M. Passare 和 H. Rullg ̊ard, , , *Amoebas Monge-Ampère measures and triangulations of the Newton polytope* **121** 2004 481 507 , 《Duke Math. J.》（ ），–。[Ron01] L. I. Ronkin,
On zeros of almost periodic functions generated by functions holomorphic in a multicircular domain (Russian), 《现代数学中的复分析》，FAZIS，2001年，第 239–251 页。[Sag22] Sage开发者, *Sagemath, the Sage mathematics software system (version 9.7)*, https://www.sagemath.org，2022年。[Sil09] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, 第二版，《数学研究生教材》，第 106 卷，施普林格，2009年。[Smy81] C. Smyth,
On measures of polynomials in several variables, 《澳大利亚数学会通报》23（1981），49–63。[Wei51] A. Weil, *Arithmetic on algebraic varieties*, 《数学年刊》（2）53（1951），412–444。[Zag93] D. Zagier, *Algebraic numbers close to both* 0 *and* 1, 《数学计算》61（1993），485–491。

Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg, Germany
Email address: roberto.gualdi@mathematik.uni-regensburg.de

ICREA, 08010 Barcelona, SpainDepartament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, 08007 Barcelo-na, SpainCentre de Recerca Matemàtica, 08193 Bellaterra, Spain*Email address:* sombra@ub.edu