arXiv:2304.01967v1 [math.CV] 4 Apr 2023

УДК 517.538.2, 517.547.22, 514.17, 517.574

指数系统的完备性与凸包的周长

Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Е. Г. КУДАШЕВА, Р. Р. МУРЯСОВ

摘要。本文在复平面的子集上，针对两类函数空间建立了一套新的指数系统完备性条件体系。第一类是巴拿赫空间，其元素是在紧集上连续、并且在该紧集内部（若内部非空）全纯的函数，范数为一致范数。第二类是有界开集上的全纯函数空间，赋予在紧集上一致收敛的拓扑。这些条件以函数空间中函数定义域的凸包周长的控制为表述方式，并借助指数系统指数分布的新特征来刻画。

关键词： 函数系的完备性、指数系统、指数型整函数、根的分布、周长、凸包、支撑函数。

数学学科分类： 30B60, 30D15,52A38, 31A05

目录

1. 引言.1
1.1. 若干记号、定义与约定.1 1.2. 先前结果.2 1.3. 指数系统完备性的主要结果.3 2. 一种次调和函数的构造.5 2.1. 开正半轴上的凸递减函数 . . . . . 5 2.2. 利用凸函数构造次调和函数 7 3. 次调和函数的黎斯质量分布估计.8 参考文献.12

1. 引言

1.1. 一些记号、定义和约定。 单点集 $\{a\}$常省略花括号，直接写作 a。例如，对于集合 $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$全体自然数 $\mathbb{N}_0 := 0 \bigcup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$。具有相同序关系 6 的全体实数集合$\mathbb{R}$ 也视为复平面 $\mathbb{C}$ 中的实轴，其欧几里得范数（模）为 $|\cdot|$。将集合 $\mathbb{R}$ 按上确界 $+\infty := \sup \mathbb{R} \notin \mathbb{R}$ 和下确界 $-\infty := \inf \mathbb{R} \notin \mathbb{R}$ 进行序完备化，得到带有序拓扑的扩展实数集 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ 。端点为 $a \in \overline{\mathbb{R}}$和 $b \in \overline{\mathbb{R}}$ 的区间是集合 $[a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — $\overline{\mathbb{R}}$中的线段，$(a, b] := [a, b] \setminus a$, $[a, b) := [a, b] \setminus b$，而 $(a, b) := [a, b) \setminus a$—$\overline{\mathbb{R}}$中的开区间。我们还使用记号$\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$表示正半轴，$\overline{\mathbb{R}}^+ := [0, +\infty]$ 表示其扩展。当 $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$时，用$D(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ 和 $\overline{D}(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$，以及 $\partial\overline{D}(r) := \overline{D}(r) \setminus D(r)$分别表示

本研究是在俄罗斯联邦科学和高等教育部国家任务框架下完成的（科研课题编号 FMRS-2022-0124），并在俄罗斯联邦教育部国家任务框架下获得支持（协议编号 073-03-2023-010，签订于2023年1月26日）。

开圆盘和闭圆盘，以及以原点为中心、半径为r的圆周。对于子集 $S \subset \mathbb{C}$，用 clos S、int S, ∂S 和 conv S 分别表示集合 S 在 $\mathbb{C}$中的闭包、内部、边界和凸包。如果子集$S \subset \mathbb{C}$ 的边界 ∂S 是可求长闭曲线，则用 prm(∂S) 表示该边界 ∂S 的欧几里得长度，即边界的周长 ∂S。

以下均用 Z 表示复平面 $\mathbb{C}$上的点分布，其中点可以重复出现。点分布 Z 由一个从 $\mathbb{C}$ 到 $\overline{\mathbb{N}}_0$ 的函数唯一确定，该函数在每个点 $z \in \mathbb{C}$ 处取值为该点 z 在点分布 Z中的重复次数。对于这种常称为重数函数或除子的函数，在点分布 Z [11, 的第 0.1.2–0.1.3], 节中，我们仍使用相同的记号 Z。换言之， $Z(z)$表示点 $z \in \mathbb{C}$ 在 Z 中的出现次数；若 $Z(z) > 0$，则记作 $z \in Z$。点分布 Z 也可以视为取值于 $\overline{\mathbb{N}}_0$ 的测度，并使用相同的记号

$$Z(S) := \sum_{z \in S} Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0 \quad \textit{для любого } S \subset \mathbb{C}. \tag{1}$$

点 Z 在 $\mathbb{C}$ 上局部有限，如果其径向计数函数$Z^{\mathrm{rad}}(r) := Z\big(\overline{D}(r)\big)$ 有限，即 $Z^{\mathrm{rad}}(r) < +\infty$ 对任意 $r \in \mathbb{R}^+$均成立。

对于 $\mathbb{C}$ 中的紧集 K，记 $C(K)$ 为连续函数$f\colon K \to \mathbb{C}$构成的巴拿赫空间，其上确界范数为 $\|f\|_{C(K)} := \sup\Big\{ |f(z)| \;\Big|\; z \in K \Big\}$。对于开子集 $O \subset \mathbb{C}$，记 $\mathit{Hol}(O)$ 为全纯函数 $f\colon O \to \mathbb{C}$ 构成的空间，该空间赋有由上确界半范数 $\|f\|_{C(K)}$定义的、在所有紧集 $K \subset O$上一致收敛的拓扑。对于内部为 $\mathit{int}\ K$ 的紧集 $K \subset \mathbb{C}$，记 $C(K) \bigcap \mathit{Hol}(\mathit{int}\ K)$ 为在 K 上连续且在内部 $\mathit{int}\, K$ 上全纯的函数 $f\colon K \to \mathbb{C}$ 构成的巴拿赫空间，其上确界范数为$\|f\|_{C(K)}$。显然，若 $\mathit{int}\ K = \emptyset$ 为空集，则 $C(K) \bigcap \mathit{Hol}(\mathit{int}\ K) = C(K)$。

如果一个拓扑向量空间中的向量系统的线性包的闭包与该空间重合，则称该系统在其中完备。对于 Z 上点的分布，下文仅讨论指数系统的完备性

$$\mathsf{Exp}^Z := \left\{ w \underset{w \in \mathbb{C}}{\longmapsto} w^p \exp(zw) \;\middle|\; z \in Z,\ Z(z) - 1 \geqslant p \in \mathbb{N}_0 \right\} \tag{2}$$

具有指标分布 Z。下文始终只讨论具有（2）中指标局部有限分布 Z的系统，因为否则系统 Exp^Z 在本文所研究的任何函数空间中都显然是完备的。

1.2. 先前结果。 截至 2012年的指数系统完备性详细综述，载于 [11] 第一作者的综述专著中。下述早已知晓的结果 [5, 第 IV 章，第 § 1], [11, 定理 3.3 后的注释。5] 给出了指数系统（2）以周长表示的、似乎是最早的完备性条件。

定理 A. 若 $S \neq \emptyset$ 是 $\mathbb{C}$ 中的有界凸区域，且

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \int_1^r \frac{Z^{\mathrm{rad}}(t)}{t}\, \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2\pi}\, \mathsf{prm}(\partial S), \tag{3}$$

则指数系统Exp^Z 由 (2) 在空间 $\mathsf{Hol}(S)$中完备。

如 [11, 第 3.4 节1], 所述，若 $S \neq \emptyset$ 是 $\mathbb{C}$ 中的凸紧集，且将 (3) 中的非严格不等式 $\geqslant$ 改为严格不等式 $>$，则系统 Exp^Z 在空间 $C(S) \bigcap \mathsf{Hol}(\mathrm{int}\ S)$ 中完备。 [8, § 7，第 4 节，唯一性定理], [9, 定理 41], [10, 定理 A], [11, 定理 3.3.5 和第 3.4 节1] 是其特例。

定理 B. 若 $S \neq \emptyset$ 是 $\mathbb{C}$ 中的有界凸区域，且以下三个命题至少有一个成立：

1) 对于某个 $p \in [0, 1)$ 满足不等式

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{1}{2r} \int_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^p + \left(\frac{t}{r}\right)^p \right) \frac{Z^{\mathrm{rad}}(t)}{t}\, \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-p^2}\, \mathsf{prm}(\partial S), \tag{4}$$

2) 满足不等式

$$\limsup_{1<a\to+\infty}\frac{1}{\ln a}\limsup_{r\to+\infty}\int_r^{ar}\frac{Z^{\mathrm{rad}}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2\pi}\,\mathsf{prm}(\partial S),\tag{5}$$

3) 对于某个数 $p>1$，不等式成立

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{1}{2r}\left(\int_1^r\left(2-\left(\frac{t}{r}\right)^p\right)Z^{\mathrm{rad}}(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^pZ^{\mathrm{rad}}(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\geqslant\frac{1}{2\pi}\frac{p^2}{p^2-1}\,\mathsf{prm}(\partial S),\tag{6}$$

则指数系统 Exp^Z 由 (2) 在空间 $\mathsf{Hol}(S)$中完备。

若 $S\neq\emptyset$ 是 $\mathbb{C}$ 中的凸紧集，并且在 *1)*、*2)* 或 *3)* 三个命题中至少有一个命题所对应的不等式（*4*）、（*5*）或（*6*）满足严格不等式 $>$，而非非严格不等式 $\geqslant$，则系统 Exp^Z 在空间 $C(S)\bigcap Hol(int\ S)$ 中完备。

注 1. 选择 $p=0$ 作为完备性条件（4）的一部分 1），以及选择 $p\to+\infty$ 作为条件（6）的一部分 3），可得到定理 B 的完备性条件（3），这与定理 A 中的条件完全一致。

注 2. 外部上极限 limsup 可以替换为精确下$a\to+\infty$确界 $\inf_{a>1}$，也可以替换为极限 $\lim_{a\to+\infty}$；该极限存在，且这三个量相等 [4,定理 1], [7, 命题 6],当.....有限时 点分布的上密度 Z

$$\overline{\mathsf{dens}}(Z):=\limsup_{r\to+\infty}\frac{Z^{\mathrm{rad}}(r)}{r}\in\overline{\mathbb{R}}^+.\tag{7}$$

1.3. 指数系统完备性的主要结果。 我们发展了系统的完备性条件 Exp^Z，该条件由不等式（5）表示，见定理 B 的第 2）项。

函数 $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ 为正，并记作 $f\geqslant 0$ 在 X上，当 $f(X)\subset\overline{\mathbb{R}}^+$时；为负，并记作 $f\leqslant 0$ 在 X上，当与其相反的函数 $-f$ 为正时。若 $f(X)\subset\overline{\mathbb{R}}^+\setminus 0$，则同一函数$f$ 严格为正；若相反函数 $-f$ 严格为正，则严格为负。函数 f 在区间 $X\subset\overline{\mathbb{R}}$上递增（相应地，严格递增），如果对于任意 x_1, $x_2\in X\in x_1<x_2$，有非严格不等式$f(x_1)\leqslant f(x_2)$（相应地，有严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$）。函数 $f\colon I\to\overline{\mathbb{R}}$在 I上递减（相应地，严格递减），如果相反函数 $-f$ 在 I上递增（相应地，严格递增）。

定理 1. 设 $r_0\in\mathbb{R}^+$, $f\colon[r_0,+\infty)\to\mathbb{R}$—为凸的正单调递减函数， Z—为 $\mathbb{C}$ 上的点分布，$P>0$—为严格正数。则完备性满足以下条件：

I. 若关系式成立

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\left(\int_{r<t\leqslant R}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)-\frac{P}{2\pi}\int_r^R\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t\right)=+\infty,\tag{8}$$

则对于任意紧集 $S\subset\mathbb{C}$，若其补集连通 $\mathbb{C}\setminus K$，且凸包的边界周长满足不等式

$$\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S)\leqslant P,\tag{9}$$

指数系统 Exp^Z在空间 $C(S)\bigcap\mathsf{Hol}(\mathsf{int}\ S)$中完备。

II. 若以下两个条件之一成立

1) 积分发散

$$\int_{r_0}^{+\infty}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t=+\infty\tag{10}$$

且满足关系式

$$\limsup_{r_0\leqslant r\to+\infty}\limsup_{1<a\to+\infty}\frac{1}{\displaystyle\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}\int_{r<t\leqslant ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)\geqslant\frac{P}{2\pi},\tag{11}$$

2) 双重下极限为无穷大

$$\liminf_{1<a\to+\infty}\liminf_{r_0\leqslant r\to+\infty}\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t=+\infty\tag{12}$$

且满足关系式

$$\limsup_{1<a\to+\infty}\limsup_{r_0\leqslant r\to+\infty}\frac{1}{\displaystyle\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}\int_{r<t\leqslant ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)\geqslant\frac{P}{2\pi},\tag{13}$$

那么，对于任意单连通有界区域 $S\subset\mathbb{C}$，若其凸包的边界周长满足不等式 (9)，则系统 Exp^Z 在空间 $\mathsf{Hol}(S)$ 中完备。

定理 1 的证明将在文章末尾的第 3 节中给出，位于定理 2 的陈述及其证明之后。定理 2的证明使用了辅助第 2 节中构造的特殊径向次调和函数，它们定义在 $\mathbb{C}\setminus 0$上，并基于定义在 f 上的凸递减正函数 $\mathbb{R}^+\setminus 0$。

注 3. 若 $\mathsf{dens}(Z)\overset{(7)}{=}\overline{+\infty}$，则系统 Exp^Z 在 $\mathsf{Hol}(S)$ 中完备，对于任意开集 $S\subset\mathbb{C}$，且在 $C(S)\bigcap\mathsf{Hol}(\operatorname{int}S)$ 中也完备，其中 $S\subset\mathbb{C}$ 为任意紧集。因此，只有有限上密度 $\mathsf{dens}(Z)<+\infty$ 的情形值得关注。此时，考虑到凸函数 f 在 $\mathbb{R}^+\setminus 0$ 上存在右导数 f'_+，当 $r>0$ 时，我们有等式

$$\int_{r<t\leqslant R}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)=\frac{f\left(R^2\right)}{R}Z^{\mathrm{rad}}(R)-\frac{f\left(r^2\right)}{r}Z^{\mathrm{rad}}(r)-\int_{r<t\leqslant R}\left(\frac{f\left(t^2\right)}{t}\right)'_+Z^{\mathrm{rad}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

由此可知，当函数 $f\geqslant 0$ 还单调递减且 $\mathsf{dens}(Z)<+\infty$ 时，得到 ем

$$\int_{r<t\leqslant R}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)=\int_r^R\frac{Z^{\mathrm{rad}}(t)}{t^2}\left(f(t^2)-2tf'_+(t^2)\right)\mathrm{d}t+O(1)\quad\text{при } r_0\leqslant r<R<+\infty.\tag{14}$$

因此，属于(8) 的左侧(14)中的每个积分、(11)和(13)，都可以替换为(14)右侧的积分，因为给这些积分加上常数不会影响条件(8)、(11)和(13)。

例 1. 对于凸的递减函数 $f(x)\equiv 1$ 在 $x>0$ 时，式 (12) 中的积分对任意 $r>0$ 均等于 $\ln a$，且满足 (12)；考虑注释 3 与关系式 (14) 后，关系式 (13) 恰好就是 $P=\mathsf{prm}(\partial\operatorname{conv}S)$ 的 (5)。因此，定理 1 中的完备性条件 II2) 确实推广了定理 B 中的完备性条件 2)。

例 2. 函数 $f\colon\ x\mapsto{}^1\ln x$ 在 $[e,+\infty)$上凸、递减且为正，并且还满足条件 (10)，但不满足条件 (12)。因此，这样的函数给出了形式为 I 和 II1) 的新完备性条件。对于任意 $n\in\mathbb{N}$，函数也同样如此

$$f\colon x\underset{x\in[r_0,+\infty)}{\longmapsto}\frac{1}{\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n\text{-кратно}}x},\quad r_0:=\underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}}_{n\text{-кратно}}.$$

2. 次调和函数的一种构造

函数序列 $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, 称为递增，如果对每个 $n \in \mathbb{N}$，差 $f_{n+1} - f_n \geqslant 0$ 是 X 上的正函数；若序列 $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的相反函数 $-f_n$ 递增，则称其递减。

2.1. 正半轴上的凸递减函数。

命题1. 若函数 $f \geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ 上是凸且递减的，则1) 它连续，且在 $\mathbb{R}^+\setminus 0$上具有递增的有限左导数 f'_- 和右导数 f'_+；2) 极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f'_{\pm}(x) = 0$存在，并且在 $\mathbb{R}^+\setminus 0$上满足不等式 $f'_- \leqslant f'_+ \leqslant 0$，此外

$$0 \geqslant f'_{\pm}(x_2) \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant f'_{\pm}(x_1) \quad npu\ всех\ x_2 > x_1 > 0; \tag{15}$$

3) 存在一个递减序列$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其元素为二次连续可微的凸递减函数 f_n，该序列一致收敛于 f，此外

$$0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant f'_n(x - 1/n) \quad npu\ всех\ x > 1/n. \tag{16}$$

证明。 性质 1) 属于凸函数的基本性质 [3,第 1 章，第 4], [14, 第 I 章]。性质 2) 可由凸函数递减这一点轻易推出 $f \geqslant 0$，其中对于 (15)，例如可利用凸递减函数图像的左／右导数分别作为左／右半切线和割线的几何意义。

性质 3) 似乎需要作一些讨论。它可以通过书中介绍的凸函数平滑化方法得到 [2, 第 2 部分，第 3]章。但在这里，更简单的做法是示意性地描述所需递减序列的一种可能构造 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$。

函数 $f \geqslant 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减且连续，因此当 $n = 1$ 时，可以选取一个双向序列 $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，其点 $x_k \in$ 属于 $(0, +\infty)$，并且严格递增，即对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $x_k < x_{k+1}$；该序列满足：当 $k \to +\infty$ 时， $x_k \to +\infty$；当 $k \to -\infty$时， $x_k \to 0$；同时还有 $0 < x_{k+1} - x_k \leqslant 1/2$和 $0 \leqslant f(x_k) - f(x_{k+1}) \leqslant 1/2$，对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 均成立。考虑分段仿射函数 l_1，其图像由连接坐标为 $\big(x_k, f(x_k)\big)$ 和 $\big(x_{k+1}, f(x_{k+1})\big)$的两点的线段组成。根据构造，由 f的凸性和递减性可知，函数 l_1是凸函数且递减，满足不等式 $0 \leqslant l_1(x) - f(x) \leqslant 1/2$，对所有 $x \in (0, +\infty)$ 均成立；并且根据 (15)，不等式 $0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant (l_1)'_{\pm}(x - 1/2)$ 对所有 $x > 1/2$ 均成立。在函数 l_1 图像拐点的充分小邻域内，可用凸样条对其进行平滑，使之成为二阶连续可微的凸递减函数 $f_1 \geqslant l_1$，使得

$$0 \leqslant f_1(x) - f(x) \leqslant 1 \quad \text{при всех } x \in (0, +\infty), \quad 0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant f'_1(x - 1) \quad \text{при всех } x > 1.$$

为构造函数 f_2，首先在每个区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 中添加有限个两两不同的点，从 x_k 开始，到 x_{k+1}结束，使得相邻点之间的距离以及函数 f 在这些点处的函数值之间的距离都为 $\leqslant 1/4$。对于由此得到的新双向严格递增序列，我们仍采用原记号 $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$。再次考虑分段仿射函数 l_1，其图像由连接坐标分别为 $\big(x_k、 f(x_k)\big)$ 和 $\big(x_{k+1}、 f(x_{k+1})\big)$的两点的线段组成。根据构造，由 f 的凸性和单调递减性可知，函数 l_2 是凸的、递减的，并且在 $\mathbb{R}^+\setminus 0$上满足不等式 $f \leqslant l_2 \leqslant f_1$以及 $0 \leqslant l_2(x) - f(x) \leqslant 1/4$，对所有 $x \in (0, +\infty)$ 均成立；此外，根据(15)，对所有 $x > 1/4$，还满足不等式 $0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant (l_2)'_{\pm}(x - 1/4)$。在函数 l_1 图像的折点的极小邻域内，我们可以用凸样条对其进行光滑化，得到二阶连续可微的凸递减函数 $f_2 \geqslant l_2$，使得 $f_2 \leqslant f_1$ 并且

$$0 \leqslant f_2(x) - f(x) \leqslant 1/2 \quad \text{при всех } x \in (0, +\infty), \quad 0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant f'_2(x - 1/2) \quad \text{при всех } x > 1/2.$$

继续这一过程，在每个第 n 步，我们得到所需的凸递减二次连续可微函数 $f_n \leqslant f_{n-1}$，定义在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ 上，且满足 $n > 1$，对于该函数

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant 1/n \quad \text{при всех } x \in (0, +\infty), \quad 0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant f'_n(x - 1/n) \quad \text{при всех } x > 1/n.$$

这就完成了性质3）及不等式（16）的证明。 □

注4. 命题 f 在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ 中的函数递减条件 1 可以替换为形式上较弱的条件 $\limsup f(x)/x = 0$, 因为当函数$x\to+\infty$凸时，该条件

$f \geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ 蕴含函数 f 在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$上递减。

对于 $a \in \overline{\mathbb{R}}$ 或取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的函数 a，令 $a^+ := \sup\{a, 0\}$。

命题2. 设函数 $f \geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ 上凸且递减。那么，对于任意数 $R > 0$，由等式定义的正函数 F_R

$$F_R(x) := \left(\frac{1}{x}f(x^2) - \frac{1}{R}f(R^2)\right)^+ \quad \textit{при каждом } x \in \mathbb{R}^+ \setminus 0, \tag{17}$$

连续、递减，并且在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$上的每一点都存在有限的左侧$(F_R)'_-$ 和右侧$(F_R)'_+$ 导数，同时满足关系式

$$F_R(x) \geqslant 0 = F_R(R) \ \textit{при } x \in (0, R], \tag{18+}$$
$$F_R(x) \equiv F'_R(x) \equiv 0 \ \textit{при } x \in (R, +\infty), \tag{18_0}$$
$$F_R(x) = \frac{1}{x}f(x^2) - \frac{1}{R}f(R^2) \geqslant 0 \quad \textit{при } x \in (0, R), \tag{18_R}$$
$$(F_R)'_\pm(x) = -\frac{1}{x^2}f(x^2) + 2f'_\pm(x^2) \quad \textit{при } x \in (0, R), \tag{18′}$$
$$(F_R)'_-(R) = -\frac{1}{R^2}f(R^2) + 2f'_-(R^2), \quad (F_R)'_+(R) = 0, \tag{18R}$$
$$\left|(F_R)'_\pm(x)\right| \leqslant \frac{f(x^2)}{x^2} + \frac{2f(x)}{x(x-1)} \leqslant \frac{3f(x)}{x(x-1)} \quad \textit{при } x > 1. \tag{18⩽}$$

证明。 函数 F_R 直到关系组（18）的所有性质都自动由函数 f在命题 1）第 1）点中列出的性质推出, 只需注意乘子函数$x \mapsto 1/x$ 在 f 中（17）是递减的，并且在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$上无穷次可微。

关系式（18+）显然由函数 17）的构造得到 F_R。

由于函数 $x \mapsto f(x)/x$ 递减，首先有 [2]

$$\frac{1}{x}f(x^2) \leqslant \frac{1}{R}f(R^2) \text{ при } x \in [R, +\infty),$$

由函数 F_R 在（17）中的构造可得恒等式（18_0），其次,

$$\frac{1}{x}f(x^2) \geqslant \frac{1}{R}f(R^2) \text{ при } x \in (0, R],$$

而函数 F_R 在（17）中的构造则推出（18_R）。

计算（18_R的左、右导数得到（18′）；结合（18+）–（18_0）及（18R）。最后，由（18′）、（18R）和（18_0）可得

$$\left|(F_R)'_\pm(x)\right| \leqslant \frac{f(x^2)}{x^2} + 2\left|f'_\pm(x^2)\right|,$$

以及不等式的应用（15）当 $x_2 := x^2 > x =: x_1 > 1$ 会导致不等式

$$\left|f'_\pm(x^2)\right| \leqslant \frac{f(x) - f(x^2)}{x^2 - x} \leqslant \frac{f(x)}{x(x-1)}.$$

由此，得到了（18⩽）中的第一个不等式。对于递减函数 $x > 1$，（18⩽）中的第二个不等式显然成立。 □

2.2. 借助凸函数构造次调和函数。

命题 3. 对于任意具有 F_R 形式 (17) 的命题 2 中的凸递减函数 $f \geqslant 0$，在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ 上的径向函数

$$V(re^{i\theta}) := F_R(r) \overset{(17)}{=} \left(\frac{1}{r}f(r^2) - \frac{1}{R}f(R^2)\right)^+, \quad 0 < r < +\infty, 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \tag{19}$$

— 定义在 $\mathbb{C} \setminus 0$ 上的正连续次调和函数，并且存在一个函数序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，具有命题 3）中的所有性质；对于该函数序列 1，在 $\mathbb{C} \setminus 0$ 上的次调和径向函数序列 V_n 形式为

$$V_n(re^{i\theta}) := \left(\frac{1}{r}f_n(r^2) - \frac{1}{R}f_n(R^2)\right)^+, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \tag{20}$$

在 $\mathbb{C} \setminus 0$ 的紧集上一致收敛于函数 V，并且每个函数 V_n —都是在穿孔圆盘 $\overline{D}(R) \setminus 0$ 上二次连续可微的函数 $\mathbb{C} \setminus 0$ 的限制

$$v_n \colon re^{i\theta} \longmapsto \frac{1}{r}f_n(r^2) - \frac{1}{R}f_n(R^2), \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus 0. \tag{21}$$

此外，对于每个函数 V_n 和 V，在圆周 $\partial\overline{D}(r) \subset \partial\big(D(R) \setminus \overline{D}(r)\big)$ 上各点处，$\vec{n}_{\text{out}}$ 到环域 $D(R) \setminus \overline{D}$ (r) 边界的外法线方向导数模估计为

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} \max\left\{\left|\frac{\partial V}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta})\right|, \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{\partial V_n}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta})\right|\right\} \leqslant \frac{3f_1(r)}{r(r-1)}, \quad 1 < r < R. \tag{22}$$

证明。根据构造式 (20) 及函数 f_n 的性质，函数 V_n 中的每一个都是定义在 $\mathbb{C} \setminus 0$ 上的二次连续可微函数 (21) 的限制。由函数序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于函数 f，以及 (19)–(20) 中径向函数 V和 V_n 的形式可知，对于任意 $r \in (0, R)$，函数序列 V_n 在环域 $\overline{D}(R) \setminus D(r)$ 上一致收敛于V，因此在 $\mathbb{C} \setminus 0$ 中的紧集上一致收敛。

首先证明 ($\mathbb{C} \setminus 0$ 函数 v_n 由 (21) 给出，其次谐性；对于这些函数 x

$$\frac{\partial v_n}{\partial r}(re^{i\theta}) \overset{(18')}{=} -\frac{1}{r^2}f_n(r^2) + 2f_n'(r^2), \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2}(re^{i\theta}) = \frac{2}{r^3}f_n(r^2) - \frac{2}{r}f_n'(r^2) + 4rf_n''(r^2), \quad r > 0. \tag{23}$$

在极坐标下直接计算拉普拉斯算子

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

函数 v_n 由 (21) 给出，在 $\mathbb{C} \setminus 0$ 上，根据 (23) 得到等式

$$\triangle v_n(re^{i\theta}) \overset{(23)}{=} \left(\frac{2}{r^3}f_n(r^2) - \frac{2}{r}f_n'(r^2) + 4rf_n''(r^2)\right) + \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r^2}f_n(r^2) + 2f_n'(r^2)\right)$$

由此，展开括号并合并同类项后，得到

$$\triangle v_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{r^3}f_n(r^2) + 4rf_n''(r^2) \geqslant 0 \text{ при } re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus 0 \tag{24}$$

由于正性 $f_n \geqslant 0$ 和凸性 f_n，从而保证了 $f_n'' \geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$上的正性。因此，每个函数 v_n 在（23）中都是次调和的。因此，每个函数$V_n = v_n^+ \colon =$上确界$\{v_n, 0\}$ 根据构造（20）在 $\mathbb{C} \setminus 0$上是次调和的。来自 $\mathbb{C} \setminus 0$ 的一列次调和连续函数 V_n 在紧集上一致收敛到函数V，也保证了它在 $\mathbb{C} \setminus 0$上的次调和性。

根据不等式 (18⩽) 命题 2 定义式 (19) 中各乘积首项对半径的左导数模，对于 V和 (20) 中对于 V_n，分别不超过以下分数

$$\frac{3f(r)}{r(r-1)}, \quad \frac{3f_n(r)}{r(r-1)}, \quad 1 < r < R,$$

每个分数均不大于

$$\frac{3f_1(r)}{r(r-1)}, \quad 1<r<R.$$

由此，对于导数的模$\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\text{out}}}$在圆环 $D(R)\setminus\overline{D}(r)$ 在 $\partial\overline{D}(r)$上的函数 V和 V_n，其值等于点处关于半径的左导数的模，得到（22）。□

3. 次调和函数的里斯质量分布估计

对于 $z\in\mathbb{C}$，通常， $\bar{z}$ 是与 z共轭的复数。集合 $S\subset\mathbb{C}$ 的支撑函数称为函数 [1]

$$\mathsf{Spf}_S\colon z\underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto}\sup_{s\in S}\operatorname{Re}s\bar{z}\in\overline{\mathbb{R}}. \tag{25}$$

支撑函数Spf$S$ 仅取 $\mathbb{R}$中的有限值，当且仅当 $S\neq\emptyset$ 在 $\mathbb{C}$中有界。对于这样的 $S\subset\mathbb{C}$，其支撑函数按构造（25）是正齐次的且是凸的，因此连续且在 $\mathbb{C}$ [13]上 [15]是次调和的。

每个在 $\mathbb{C}$ 上的次调和函数 $u\not\equiv-\infty$ 都对应一个正拉东测度$\Delta_u:=\frac{1}{2\pi}\triangle u$，其中 $\triangle$ —拉普拉斯算子，按广义函数理论的意义作用[13], [14], [15]。我们将测度 Δ_u 称为次调和函数 u的黎斯质量分布。

对于拉 东测度 μ，其径向计数函数在 $\mathbb{C}$ 上的定义和记号为 к

$$\mu^{\text{rad}}\colon r\underset{r\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto}\mu\big(\overline{D}(r)\big).$$

定理 2。设 $S\subset\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个有界紧集，其支撑函数为Spf$S$，周长为$\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\ S)>0$ 边界 $\partial\,\mathsf{conv}\ S$ 凸包$\mathsf{conv}\,S$ 集合 S。若 $u\not\equiv-\infty$是一个次调和函数，其黎斯质量分布为 Δ_u，并满足不等式

$$u(z)\leqslant\mathsf{Spf}_S(z)+c \quad \textit{для некоторого } c\in\mathbb{R} \textit{ при всех } z\in\mathbb{C}, \tag{26}$$

那么，对任意在 $\mathbb{R}^+\setminus 0$ 上为正且递减的凸函数 f，都存在一个数$C\in\mathbb{R}$，使得不等式成立

$$\int_r^R\frac{f\big(t^2\big)}{t}\,\mathrm{d}\Delta_u^{\text{rad}}(t)\leqslant\frac{1}{2\pi}\,\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S)\int_r^R\frac{f\big(t^2\big)}{t}\,\mathrm{d}t+C \quad \textit{при всех } 1<r<R<+\infty. \tag{27}$$

证明。 不失一般性，在 (26) 中可令 $c=0$，因为次调和函数 $u-c$ 的黎斯质量分布与 u相同。

以下命题将在证明中起主要作用

引理 *1* （[9, 引理 *2.2–2.3*]） 。设 $0<r<R<+\infty$ 且函数 V 在闭环域 $\overline{D}(R)\setminus D(r)$ 上为正，在其内部 $D(R)\setminus\overline{D}(r)$内为次调和函数，在圆周 $\partial\overline{D}(R)$ 上恒等于零，并且与某个在环域 $\overline{D}(R)\setminus D(r)$邻域内二次连续可微的函数在 $\overline{D}(R)\setminus D(r)$ 上的限制相同。利用函数 V 关于圆周 $\partial\overline{D}(r)$ 的反演，构造一个在 $\mathbb{C}$ 上为正的函数

$$V^*(z):=\begin{cases}V(z) & \textit{при } r<|z|\leqslant R,\\ V(r^2/\bar{z}) & \textit{при } r^2/R<|z|\leqslant r,\\ 0 & \textit{при } |z|\leqslant r^2/R \textit{ и } |z|>R,\end{cases}\qquad z\in\mathbb{C}. \tag{28}$$

那么，对于在圆 $\overline{D}(R)$ 的邻域内任意一对次调和函数 $u\not\equiv-\infty$ 和$M\not\equiv-\infty$，其黎斯质量分布分别为 Δ_u 和 Δ_M，由该邻域上的不等式 $u\leqslant M$ 可得不等式

$$\int_{\mathbb{C}}V^*\,\mathrm{d}\Delta_u\leqslant\int_{\mathbb{C}}V^*\,\mathrm{d}\Delta_M+\frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi}\big(u(re^{i\theta})-M(re^{i\theta})\big)\frac{\partial V}{\partial\vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta, \tag{29}$$

其中，与命题3结尾的表述一样，$\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\text{out}}}$ — 对环 $D(R)\setminus\overline{D}(r)$ 在圆周 $\overline{D}(r)$各点处沿外法线求导的算子。

选取函数 M 为支撑函数Spf_S。其黎斯质量分布在极坐标中定义为测度[11,第3.3节。1]

$$\mathrm{d}\Delta_M = \mathrm{d}\Delta_{\mathsf{Spf}_S} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}l_{\mathsf{conv}\,S}(\theta), \tag{30}$$

其中， $l_{\mathsf{conv}\,S}(\theta)$ 是边界 $\partial\,\mathsf{conv}\ S$ 的弧长：沿边界逆时针方向，从相对于与正半轴 $\mathbb{R}^+$ 正交的直线 S 且支撑于 clos conv 的最后一个支撑点，量至相对于与点 $e^{i\theta}$ [1] 的径向量方向正交的直线 S 且支撑于 clos conv 的最后一个支撑点；见第 3.3 节 [11, 1]。特别地，

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}l_{\mathsf{conv}\,S}(\theta) = l_{\mathsf{conv}\,S}(2\pi) - l_{\mathsf{conv}\,S}(0) = \mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S). \tag{31}$$

作为函数 V 我们选取函数 V_n，其定义与命题 3 中对 (19) 式函数 由条件 2 中的函数 f 所给出的定义相同，见 (20)–($n \in \mathbb{N}$21)。对于函数$V :=V_n$ 根据命题 3 ，引理 1的所有条件均成立，而按构造为正的函数 V_n^*，按 (28) 构造，将具有显式的径向形式

$$0 \leqslant V_n^*(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{|z|} f_n\bigl(|z|^2\bigr) - \dfrac{1}{R} f_n(R^2) & \text{при } r < |z| \leqslant R, \\ \dfrac{|z|}{r^2} f_n\bigl(r^4/|z|^2\bigr) - \dfrac{1}{R} f_n(R^2) & \text{при } r^2/R < |z| \leqslant r, \\ 0 & \text{при } |z| \leqslant r^2/R \text{ и } |z| > R, \end{cases} \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{32}$$

根据引理 1 ，由 结论 (29)，结合 (26)，对于 $c = 0$，(30) 和 (22)，当 $1 < r < R < +\infty$ 时，得 ет

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} V_n^*\,\mathrm{d}\Delta_u &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{r^2/R}^{R}\int_0^{2\pi} V_n^*(te^{i\theta})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}l_{\mathsf{conv}\,S}(\theta) + \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi}\Bigl(\bigl|u(re^{i\theta})\bigr| + \bigl|\mathsf{Spf}(re^{i\theta})\bigr|\Bigr)\left|\frac{\partial V_n}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta \\ &\overset{(32),(22)}{\leqslant} \left(\int_{r^2/R}^{r} \frac{t}{r^2} f_n\bigl(r^4/t^2\bigr)\,\mathrm{d}t + \int_r^R \frac{f_n(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}l_{\mathsf{conv}\,S}(\theta) \\ &\quad + \frac{r}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\bigl|u(re^{i\theta})\bigr|\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\bigl|\mathsf{Spf}(re^{i\theta})\bigr|\,\mathrm{d}\theta\right)\frac{3f_1(r)}{r(r-1)}. \end{aligned}$$

由此，根据 (31) 和 (32)，当 $2 \leqslant r < R < +\infty$ 时，得到

$$\begin{aligned} \int_{\overline{D}(R)\setminus\overline{D}(r)} \frac{f_n\bigl(|z|^2\bigr)}{|z|}\,\mathrm{d}\Delta_u(z) &\leqslant \int_{\overline{D}(R)\setminus\overline{D}(r)} \frac{1}{R} f_1(R^2)\,\mathrm{d}\Delta_u \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}f_1(r^2) + \int_r^R \frac{f_n(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t\right)\frac{1}{2\pi}\,\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S) \\ &\quad + \frac{3f_1(r)}{r}\int_0^{2\pi}\bigl|u(re^{i\theta})\bigr|\,\mathrm{d}\theta + 2f_1(r)\max_{\theta\in[0,2\pi)}\bigl|\mathsf{Spf}(e^{i\theta})\bigr|. \end{aligned} \tag{33}$$

支撑函数 Spf_S 满足约束 $\mathsf{Spf}(z) = O\bigl(|z|\bigr)$ 当 $z \to \infty$ 时，由于其正齐次性。由此函数 u 根据 (26) 满足条件

$$\limsup_{z\to+\infty} \frac{u(z)}{|z|} < +\infty,$$

即，函数 u 在阶 1下为有限型。因此，对于该函数的黎斯质量分布 Δ_u，有 $\Delta_u^{\mathrm{rad}}(t) = O(t)$，并且 [12, 引理 6。2]

$$\int_0^{2\pi}\bigl|u(re^{i\theta})\bigr|\,\mathrm{d}\theta = O(r) \quad \text{при } r \to +\infty.$$

由此，鉴于 函数递减 f_1 （33）可知，存在一个数 $C \in \mathbb{R}^+$，对于该数 го

$$\int_r^R \frac{f_n(t^2)}{t}\,\mathrm{d}\Delta_u^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S)\int_r^R \frac{f_n(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t + C \quad \text{при всех } 2 \leqslant r < R < +\infty.$$

因此，对于递减且一致收敛到 f 的函数序列 f_n，由命题1 可得不等式

$$\int_r^R \frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}\Delta_u^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S)\int_r^R \frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t + C \quad \text{при всех } 2 \leqslant r < R < +\infty,$$

其中，由于区间上的积分有限，下界 $2 \leqslant r$ $[1,2]$ 可以替换为 $1 \leqslant r$；如有必要，可增加 $C \in \mathbb{R}^+$ 的数量。

2

定理的证明 1。首先指出，函数 f 可以延拓到整个射线 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ 上，使其保持凸、正且单调递减；必要时可将 r_0 稍微增大。

假设指数系统 Exp^Z 在空间 $C(S)\bigcap \mathsf{Hol}(\mathsf{int}\ S)$ 对于某个补集连通的紧集 $S \subset \mathbb{C}$，且该紧集满足（9）。根据哈恩–巴拿赫定理 [11, 第 1.1 节。1] 以及里斯关于线性泛函表示的定理，这意味着存在一个复值拉东测度 $\mu \neq 0$，其支集为 $\operatorname{supp}\mu \subset S$，并且对应的整函数非零

$$g(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} \int_S e^{zs}\,\mathrm{d}\mu(s) \not\equiv 0, \tag{34}$$

在 Z 上按重数为零，这意味着对于每个点 $z \in \mathbb{C}$整函数 f 在点 z 的根的重数 $Z(z)$不小于。此外，函数 $u := \ln|g| \not\equiv -\infty$是次调和函数，其黎斯质量分布为 $\Delta_u \geqslant Z$，其中 Z 被视为定义在(1)上的测度。由表示式(34)和支撑函数的定义(25)可得

$$u(z) = \ln\bigl|g(z)\bigr| \leqslant \ln\Bigl(\exp\bigl(\sup \operatorname{Re} zs\bigr)|\mu|(S)\Bigr) \leqslant \mathsf{Spf}_{\bar S}(z) + \ln|\mu|(S) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}, \tag{35}$$

其中 $|\mu|$ 是测度 μ的全变差，而 $\bar S := \overset{s\in S}{\{}\bar z \mid z \in S\}$ 是关于实轴镜面对称于紧集 S 的紧集。不等式 (35) 意味着定理 2 的条件 (26) 对 $\bar S$ 以 S替代时成立。根据定理 2，对于任意在 $\mathbb{R}^+ \setminus 0$上正且递减的凸函数 f，存在一个数 $C \in \mathbb{R}$，使得不等式 (27) 对 $\mathsf{prm}\bigl(\partial\mathsf{conv}\ \bar S\bigr)$成立；显然，该值等于 $\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S)$。因此，由关于测度 $Z \leqslant \Delta_u$ 的不等式可得

$$\int_r^R \frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant \int_r^R \frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}\Delta_u^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S)\int_r^R \frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t + C \tag{36}$$

对于某个数 $C \in \mathbb{R}$ 对所有 $1 < r < R < +\infty$。下界 $1 < r$ 这里可以改为 $r_0 \leqslant r$，因为此时可能新增的、端点为 r_0 和 1的区间上的积分也是有限的。两端之间的不等式（36）意味着

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\left(\int_{r<t\leqslant R}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t) - \frac{\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S)}{2\pi}\int_r^R \frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t\right) < +\infty,$$

由此，根据不等式 $\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S)$ (9)$\leqslant P$等式（8）左侧的本质上确界是有限的，这与条件（8）矛盾。这个矛盾证明，实际上系统 Exp^Z 在 $C(S)\bigcap \mathsf{Hol}(\mathsf{int}\ S)$中是完备的。因此，定理 I 的第 1 部分得证。

现在证明定理 1 的第 II 部分，首先假设满足 II1) 中的条件。现在设 $S \neq \emptyset$ 是 $\mathbb{C}$ 中满足 (9) 的单连通有界区域，且 $K \subset S$ 是补集连通的非空紧集 $\mathbb{C} \setminus K$。那么，$\mathsf{conv}\,K$ 是凸开区域 $\mathsf{conv}\ S$ 中的凸紧集，显然其补集连通 $\mathbb{C}\setminus\mathsf{conv}\,K$，并且 $\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,K) < \mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\ S)$ [6]。选取中间数 P_1、P_2、$P_3 \in \mathbb{R}^+$，使得

$$\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,K) \leqslant P_3 < P_2 < P_1 < \mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S) \overset{(9)}{\leqslant} P. \tag{37}$$

关系式（11）意味着存在足够大的 $r \geqslant r_0$，使得

$$\limsup_{1<a\to+\infty}\frac{1}{\displaystyle\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}\int_{r<t\leqslant ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t) \geqslant \frac{P_1}{2\pi}.$$

根据（37），最后一点意味着存在一个递增序列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 个数$1<a_k\to\infty$，使得

$$\frac{1}{\displaystyle\int_{r_n}^{a_k r}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}\int_{r<t\leqslant a_k r}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)\geqslant\frac{P_2}{2\pi}\overset{(37)}{=}\frac{P_3}{2\pi}+\frac{P_2-P_3}{2\pi}\quad\text{при всех } k\in\mathbb{N},$$

其中最后一项严格为正。因此可得

$$\int_{r<t\leqslant a_k r}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)-\frac{P_3}{2\pi}\int_r^{a_k r}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{P_2-P_3}{2\pi}\int_{r_n}^{a_k r}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t\quad\text{при всех } k\in\mathbb{N},$$

由于积分（10）发散且 $P_2-P_3>0$ 严格为正，右端在此处无限增大，因此得到

$$\sup_k\left(\int_{r<t\leqslant a_k r}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)-\frac{P_3}{2\pi}\int_r^{a_k r}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t\right)=+\infty.$$

更进一步，关系式 (8) 也成立，只需用数 P_3 (37)$\geqslant\mathsf{prm}(\partial\,\mathrm{conv}\ K)$ 替代 P。由此，根据定理 1 第一部分已证明的内容，指数系统 Exp^Z 在空间$C(K)\bigcap\mathrm{Hol}(\mathrm{int}\ K)$ 中完备。由于在单连通有界区域 $S\subset\mathbb{C}$ 中，带有连通补集 $\mathbb{C}\setminus K$ 的紧集 K 的选取具有任意性，这些紧集穷尽单连通有界区域 $S\subset\mathbb{C}$。这证明了指数系统 Exp^Z 在空间 $\mathrm{Hol}(S)$ 中的完备性。至此，定理 1 第二部分在条件 II1) 下得证。

下面证明定理 1 在条件 II2) 下的第 II 部分。仍设 $S\neq\emptyset$ 是 $\mathbb{C}$ 中满足 (9) 的开有界集合，并且条件 (12)– (13) 成立。假设指数系统 Exp^Z 在空间 $\mathrm{Hol}(S)$ 中不完备。这意味着存在一个补集 $\mathbb{C}\setminus K$ 连通的紧集 $K\subset S$，使得该系统 Exp^Z在 $C(K)\bigcap\mathrm{Hol}(\mathrm{int}\ K)$ 中不完备。于是，根据定理 1 第 I 部分已证明的结论，有

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\left(\int_{r<t\leqslant R}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)-\frac{\mathsf{prm}(\partial\,\mathrm{conv}\,K)}{2\pi}\int_r^R\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t\right)<+\infty,$$

由此可知，存在一个数 $C\in\mathbb{R}$，取 $R:=ar$ 后，得到

$$\int_{r<t\leqslant ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)\leqslant\frac{\mathsf{prm}(\partial\,\mathrm{conv}\,K)}{2\pi}\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t+C\ \text{при любых } r\geqslant r_0\ \text{и}\ a>1.$$

将此不等式两边除以最后一个积分，并令不等式两边的 $r\to+\infty$趋于极限，得到关系式

$$\begin{aligned}\limsup_{r_0\leqslant r\to+\infty}\frac{1}{\displaystyle\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}\int_{r<t\leqslant ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)&\leqslant\limsup_{r_0\leqslant r\to+\infty}\left(\frac{\mathsf{prm}(\partial\,\mathrm{conv}\,K)}{2\pi}+\frac{C}{\displaystyle\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}\right)\\&=\frac{\mathsf{prm}(\partial\,\mathrm{conv}\,K)}{2\pi}+\frac{C}{\displaystyle\liminf_{r_0\leqslant r\to+\infty}\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

应用第二 对该关系两端关于 $1<a\to+\infty$ 取上极限，得 м

$$\limsup_{1<a\to+\infty}\limsup_{r_0\leqslant r\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_{r<t\leqslant ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)}{\displaystyle\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}\leqslant\frac{\mathsf{prm}(\partial\,\mathrm{conv}\,K)}{2\pi}+\frac{C}{\displaystyle\liminf_{1<a\to+\infty}\liminf_{r_0\leqslant r\to+\infty}\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t},$$

其中，根据条件 (12) 最后一个分数的分母给出 $+\infty$，因此

$$\limsup_{1<a\to+\infty}\ \limsup_{r_0\leqslant r\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_{r<t\leqslant ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}Z^{\mathrm{rad}}(t)}{\displaystyle\int_r^{ar}\frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}\leqslant\frac{\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,K)}{2\pi}<\frac{\mathsf{prm}(\partial\,\mathsf{conv}\,S)}{2\pi}\overset{(9)}{\leqslant}\frac{P}{2\pi}.$$

这里严格的中间不等式 $<$ 与条件（13）矛盾。因此，系统 Exp^Z 在空间 $\mathsf{Hol}(S)$中完备。定理得证。 □

参考文献清单

1. 邦内森 T.、芬赫尔 V.《凸体理论》。—莫斯科：法齐斯，2002。2. 布赖切夫 G. G.《凸函数与整函数增长理论导论》。—莫斯科：普罗米修斯，2005。3. 布尔巴基 N.《实变量函数：初等理论》。—莫斯科：科学出版社，1965。4. 卡里莫夫 M. R.、哈比布林 B. N.《若干集合的分布密度重合与整函数系统的完备性》//《复分析、微分方程及相关问题国际会议论文集》。III. 分析与微分方程。—2000。—III. —乌法：俄罗斯科学院乌法科学中心数学研究所与计算中心。—第29–34页。—https://www.researchgate.net/publication/291829910 5. 列文 B. Ya.《整函数零点的分布》。—莫斯科：物理数学出版社，1956。6. 莱希特魏斯 K.《凸集》。—莫斯科：科学出版社，1985。7. 萨利莫娃 A. E.、哈比布林 B. N.《次调和函数沿直线的增长及其黎斯测度的分布》//《乌法数学杂志》。—2020。—第12卷，第2期。—第35–48页。8. 哈比布林 B. N.《单变量整函数空间中的唯一性集》//《苏联科学院学报：数学系列》。—1991。—第55卷，第5期。—第1101–1123页。9. 哈比布林 B. N.《有限阶次调和函数的唯一性定理》//《数学文集》。—1991。—第182卷，第6期。—第811–827页。10. 哈比布лин B. N.《全纯函数空间中整函数系统的完备性》//《数学札记》。—1999。—第66卷，第4期。—第603–616页。11. 哈比布林 B. N.《指数系统的完备性与唯一性集》（第四版，增补版）。—乌法：巴什基尔国立大学出版中心，2012。—https://www.researchgate.net/publication/271841461 12. 哈比布林 B. N.、什梅廖娃 A. V.《测度与次调和函数向射线系统的扫除。I. 经典情形》//《代数与分析》。—2019。—第31卷，第1期。—第156–210页。13. 海曼 U.、肯尼迪 P.《次调和函数》。—莫斯科：和平出版社，1980。14. H ¨ormander L.《凸性概念》。《数学进展》第127卷。—美国马萨诸塞州波士顿：Birkh¨auser，1994。15. Ransford Th.《复平面上的位势理论》。—英国剑桥：剑桥大学出版社，1995。

Хабибуллин Булат Нурмиевич
俄罗斯科学院乌法联邦研究中心数学研究所（含计算中心）

电子邮箱：khabib-bulat@mail.ru

Кудашева Елена Геннадьевна 巴什基尔国立师范大学（以 M. Акмуллы 命名）电子邮箱：lena_kudasheva@mail.ru Мурясов Роман Русланович 乌法科学与技术大学 电子邮箱：romrumur@yandex.ru