arXiv:2304.01980v1 [cond-mat.quant-gas] 4 Apr 2023

利用超冷原子对拓扑边缘模进行实空间探测与操控

ChristophBraun[1,2,3,*] *Rapha¨el Saint-Jalm*[1,2,3,*] *Alexander Hesse*[1,2,3] *Johannes Arceri*[1,2,3], *Immanuel Bloch*[1,2,3], *Monika Aidelsburger*[1,2,†]
[1] *Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität München, Schellingstraße 4, 80799 München, Germany*
[2] *Munich Center for Quantum Science and Technology (MCQST), Schellingstraße 4, 80799 München, Germany*
[3] *Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Hans-Kopfermann-Straße 1, 85748 Garching, Germany*

传统拓扑绝缘体具有奇异的无能隙边缘态或表面态，这是非平庸体拓扑性质的结果。在周期驱动系统中，体边对应被根本性地改变，而仅了解传统的体拓扑不变量并不足够。超冷原子为清晰实现弗洛凯方案提供了理想平台，但迄今仍难以观测实空间边缘模。在此，我们展示了一种在光学晶格中实现手性边缘模的实验方案：利用可编程光学势产生势阶，从而构造拓扑界面。我们展示了如何在周期驱动的蜂窝晶格中实现的三种不同弗洛凯拓扑相内，高效地将粒子制备到这些边缘模中。通过调节势阶的高度和陡峭程度，我们研究了边缘模如何在界面处形成，以及随着势阶陡峭程度的变化，粒子的群速度如何改变。

波函数的拓扑与几何性质，是材料诸多引人入胜的电子特性的核心 [1]。最突出的例子包括拓扑绝缘体、超导体和超流体 [2–4]。关于其性质，一个重要概念是体边对应，它将体区的拓扑性质与系统边缘或表面存在的奇异无能隙态联系起来。

从整数霍尔效应 [5, 6]，最容易理解体边对应的体现，其特征输运性质有两个主要特点：横向霍尔电导率由陈数精确量子化 [7, 8] ——陈数是表征体能带的拓扑不变量——以及边界处存在稳健的手性边缘模。根据体边对应 [9–14], ，只需知道体区陈数，就足以预测边缘模的数量及其手性。

合成量子系统已成为探索拓扑系统丰富特性的有前景的实验途径。 [15–17]。尽管上述许多概念在理论和实验上都已得到充分理解，但人造量子系统为生成奇异的拓扑态提供了新的可能性，而这些拓扑态先验地在固态系统中并无对应物。近期，研究人员已在光子波导 [18, 19], 谐振腔阵列 [20–22] 以及冷原子 [23]构成的周期驱动系统中展示了这一点。由于哈密顿量具有时间周期性，广义的体边对应预言，即使在体能带陈数为零的情况下，也存在手性边缘模 [24, 25]。

广义体边对应有力地推动了实验技术的发展，使人们能够研究合成量子系统中的体态与边缘拓扑性质，从而揭示二者之间的联系。在冷原子领域，人们已发展出多种技术，利用干涉测量或态层析技术研究体区的几何性质 [26–29]，输运测量 [30–32]，，以及基于光谱学或淬火动力学的方法 [33, 34]。

光子器件中边缘模的观测得益于其天然形成的锐利边界 [17, 35, 36]。对于冷原子，合成维度的概念使观测边缘模成为可能 [37, 38]。在这种方案中，一个实空间维度被内部自由度取代，而有限数量的耦合内部能级自然形成了清晰界定的边界 [39–41]。然而，在实空间二维系统中，系统边缘通常较为平滑，这使边缘模难以观测。为克服这一局限，人们提出了多种策略 [42–44], ，但迄今仍未能在冷原子系统中观测到边缘模。

在本工作中，我们通过创建势能阶跃，在二维实空间弗洛凯系统中生成了一个拓扑界面 [23] 。我们通过制备一个局域化的玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC），展示了拓扑边缘模的存在：将其释放到边缘附近的晶格中后，它呈现出拓扑边缘模特有的手性运动。我们还研究了在三种不同拓扑相中，初态参数对这些边缘模制备的影响，并展示了随着界面参数的改变，边缘模如何涌现。

实验装置由含有 ^{39}K 原子的玻色-爱因斯坦凝聚体组成。光学蜂窝晶格由三束传播方向为 s、偏振为 $k_{\mathrm{L}} = 2\pi/\lambda_L$、波矢为 $\lambda_{\mathrm{L}} = 745$（波长为 nm）的蓝失谐激光束形成，这些光束在

* 这两位作者贡献相同
† monika.aidelsburger@physik.uni-muenchen.de

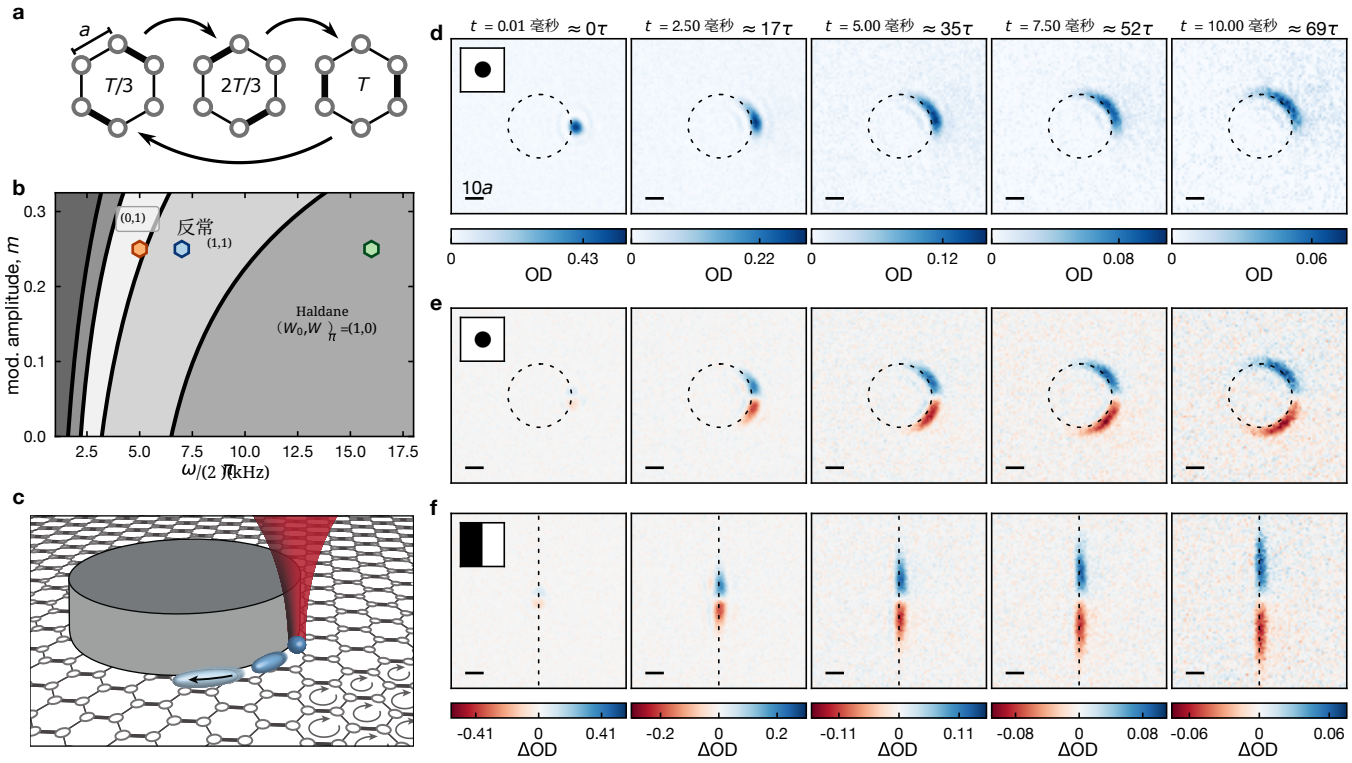

图 1. 反常 Floquet 拓扑边缘态的制备与观测。a，调制方案示意图：相邻格点之间的跃迁速率以手性方式（箭头所示）按周期 $T = 2\pi/\omega$ 变化。三幅快照中的粗线（细线）表示较大（较小）的隧穿耦合。晶格间距为 $a = 287\text{nm}$。b，振幅调制蜂窝晶格的相图。不同拓扑相由两个准能隙的绕数组合 (W_0, W_π) 表征。六边形标出了本研究使用的调制参数 $[m = 0.25$, 绿色： $\omega/(2\pi) = 16\text{kHz}$，蓝色： $\omega/(2\pi) = 7\,\text{kHz}$，橙色： $\omega/(2\pi) = 5\text{kHz}]$。c，光学势及初态生成示意图。在系统选定区域施加势阶（灰色圆柱），以阻挡粒子在调制晶格中的运动（箭头），从而形成锐边。将原子云（玻色-爱因斯坦凝聚体，以深蓝色表示）囚禁在边缘附近的光镊（红色）中，以制备初态。释放原子云后，原子沿边缘呈现手性运动，不同深浅的蓝色表示不同位置。d，将原子从光镊释放到调制晶格后（$\kappa = +1$）的时间演化；附近为半径 5.8 μm 的圆盘形势（$\approx 20a$），虚线表示其边界；OD 表示光学密度。插图示意排斥势的形状，以黑色表示。e，差分图像 $\Delta\text{OD} = \text{OD}_{\kappa=+1} - \text{OD}_{\kappa=-1}$：d 中所示时间演化与晶格调制手性相反时（$\kappa = -1$）的演化之间的差异，其中 $\kappa = +1$。f，直边（虚线）情况下与 e 相同。相应的势见插图。d–f 中的演化时间标于各列顶部；静态晶格的隧穿耦合为 $J_0 = h \times 1.1(1)\,\text{kHz}$（隧穿时间 $\tau = \hbar/J_0 = 145\,\mu\text{s}$），调制参数为 $\omega = 2\pi \times 7\text{kHz}$ 和 $m = 0.25$（b 中的蓝色标记）。所有吸收图像均为 $100 - 300$ 次独立实验实现的平均值。比例尺表示长度 $10a$。虚线的位置根据数字微镜器件上编程的图案计算得出。

中相互干涉 xy平面内，夹角为 120° [23]。此外，由两束在 1064 nm 处交叉成 90° 的激光束产生的光学偶极阱提供额外的谐振束缚 xy 平面内，径向阱频为 $\omega_r = 2\pi \times 17(1)\,\text{Hz}$，垂直阱频为 $\omega_z = 2\pi \times 330(30)$ Hz。

周期性调制通过按照 $I_i(t) = I_0(1 - m + m\cos(\omega t + \phi_i))$ 调节各晶格激光束的强度 I_i $(i = \{1, 2, 3\})$ 来实现，其中 ω 表示调制频率， m 表示调制幅度，$\phi_i = \kappa \times \frac{2\pi}{3} i$ 表示第 i 束光的相位， $\kappa = \pm 1$ 表示手性。由此产生手性调制了蜂窝晶格中的隧穿耦合，如图1a 所示。周期性调制破坏了时间反演对称性，并形成了丰富的相图，其中包含若干拓扑相 [23]，如图1b 所示。调制晶格实现了一个与参考文献 [24]类似的有效双能带模型。相应的体拓扑性质已在参考文献 [23]中通过对大尺寸玻色-爱因斯坦凝聚体进行局域霍尔偏转测量进行了实验研究。

驱动系统中拓扑性质的完整表征由每个能隙中的绕数给出，它决定了

相应能隙中的边缘模数量及其手性 [24, 25]。计算绕数时需考虑系统的完整时间演化。这里，我们将两个绕数记为 W_0 和 W_π，并将相应的能隙记为 0 能隙和 π能隙；后者位于 Floquet 布里渊区边缘，准能量为 $\epsilon = \pm\hbar\omega/2$; $\hbar = h/(2\pi)$为普朗克常数。常规陈数与绕数之间的关系为 $\mathcal{C}^{\pm} = \pm(W_\pi - W_0)$，其中 $\mathcal{C}^{-(+)}$ 表示下（上）能带的陈数 $[\mathcal{C}^- + \mathcal{C}^+ = 0]$。本研究考察的三种区间如图1b 所示。三者均呈现拓扑边缘模，即使在体能带陈数为零的反常区间也是如此。

用于探测拓扑边缘态的实验方案示意如图所示1c。通过用数字微镜器件（DMD）塑造来自非相干光源的可编程二值排斥性光势（中心波长约为 638 nm），照射晶格的选定区域来实现势边缘，具体方法见方法部分。势边缘的宽度下限为 $\approx 0.7\mu\mathrm{m}$ [45], ，该下限由成像系统的数值孔径决定（见方法部分）。由于残余像差，原子平面上的实际宽度很可能略大。为制备初始局域波包，我们将约 200 个原子从交叉偶极阱中形成的玻色-爱因斯坦凝聚体绝热转移至紧聚焦的光镊 [$\lambda_{\mathrm{T}} = 1064\mathrm{nm}$；径向囚禁频率 $\omega_\perp = 2\pi \times 2.0(1)\,\mathrm{kHz}$]。光镊光束垂直于晶格平面传播，其位置由声光偏转器（AOD）控制。光镊外的残余原子被驱逐出阱。利用 403 G 处的 Feshbach 共振将原子的散射长度调节为 $a_{\mathrm{s}} = 6a_0$ ，其中 a_0 表示玻尔半径。

在光镊中制备出紧密束缚的玻色-爱因斯坦凝聚体后，用 30 毫秒将可编程排斥势逐渐升至最终高度；随后在 30 毫秒内将光学晶格逐渐升至深度 $6E_{\mathrm{r}}$ ，其中 $E_{\mathrm{r}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\mathrm{K}}} = h \times 9.23\,\mathrm{kHz}$ 是晶格的反冲能， m_{K} 表示 ^{39}K 原子的质量。最后，在最初五个调制周期内逐渐增大调制振幅。调制达到最终振幅后，立即关闭光镊，并观察原子的演化。我们还分别确认，将波包释放到没有边缘势的静态晶格中后，其演化具有相干性；波包的初始局域程度足以使其占据布里渊区中的高准动量态（见方法）。

我们首先研究反常区间内局域波包的演化（图1b 中的蓝色标记），在该区间中预期存在边缘模，尽管能带具有陈数 $\mathcal{C}^{\pm} = 0$。我们产生了一个高度为 $V_0 = h \times 16.7(3)\mathrm{kHz} > \hbar\omega$的圆盘形排斥势。通过优化光镊相对于势边缘的位置以最大化处于边缘模中的原子比例。将原子从光镊中释放后，我们观察到波包沿着势边界传播，并随其弯曲而改变方向，这是手性边缘态的典型特征（图1d）。此外，尽管该势具有排斥性，原子仍停留在边缘附近，传播距离超过 $10a$ ，且没有散射到系统体区中，这表明初始波包与边缘模具有良好的重叠。此外，由于边缘模的色散关系是非线性的，波包在传播过程中会发生色散，这是边缘宽度有限所致 [43, 46, 47]。为突出边缘态的手性，我们反转调制方向，从而改变绕数的符号，进而改变边缘态的手性。图1e 展示了两种手性下拍摄图像的差异。除传播方向发生改变外，我们未观察到其他差异。

可编程排斥势几乎可以任意控制边缘的形状和方向。在图1f 中，我们展示了排斥势沿蜂窝晶格锯齿型边缘形成直线时的实验结果。与图1e 类似，我们展示了两种手性的差分图像，表明原子沿边缘单向传播，且很少散射到体区。对于最长的演化时间（$t = 10$毫秒），云团的质心位置移动了约 $17a$，速度最快的 20% 原子移动距离超过 $30a$。这凸显了我们的实验方案在探测 Floquet 拓扑系统拓扑性质方面的潜力；在这类系统中，陈数信息可能不足，或者在存在无序时等情形下，常规探测体区几何性质的方法并不适用。

虽然我们观察到初始波包在反常区间与边缘模有显著且稳健的重叠，但在 Haldane 区域并非如此 [48]。若要使初始波包与边缘模良好重叠，其沿边缘的相位分布以及横向延展都必须与边缘态相匹配 [44]。为进一步了解系统本征模的结构，我们对逐步调制的紧束缚模型进行了数值模拟 [24]，其中最近邻隧穿耦合以手性方式在较大值和较小值之间进行振幅调制，分别记为 J_1 和 J_1'。数值系统为半无限条带，沿 x (锯齿形终止)具有无限陡峭的边界，并沿 y采用周期性边界条件；晶胞的大小为 $L_y = \sqrt{3}a$ (详情见方法)。在图 2中，我们展示了反常区间(图2a)和 Haldane 区域(图2b)参数下第一 Floquet布里渊区内的准能谱。为进一步了解边缘模的性质，我们展示了两个区域中的代表性波函数。我们发现，在反常区间， π能隙中的边缘态沿边缘没有相位梯度，而在 Haldane 区域，边缘态沿 π/L_y

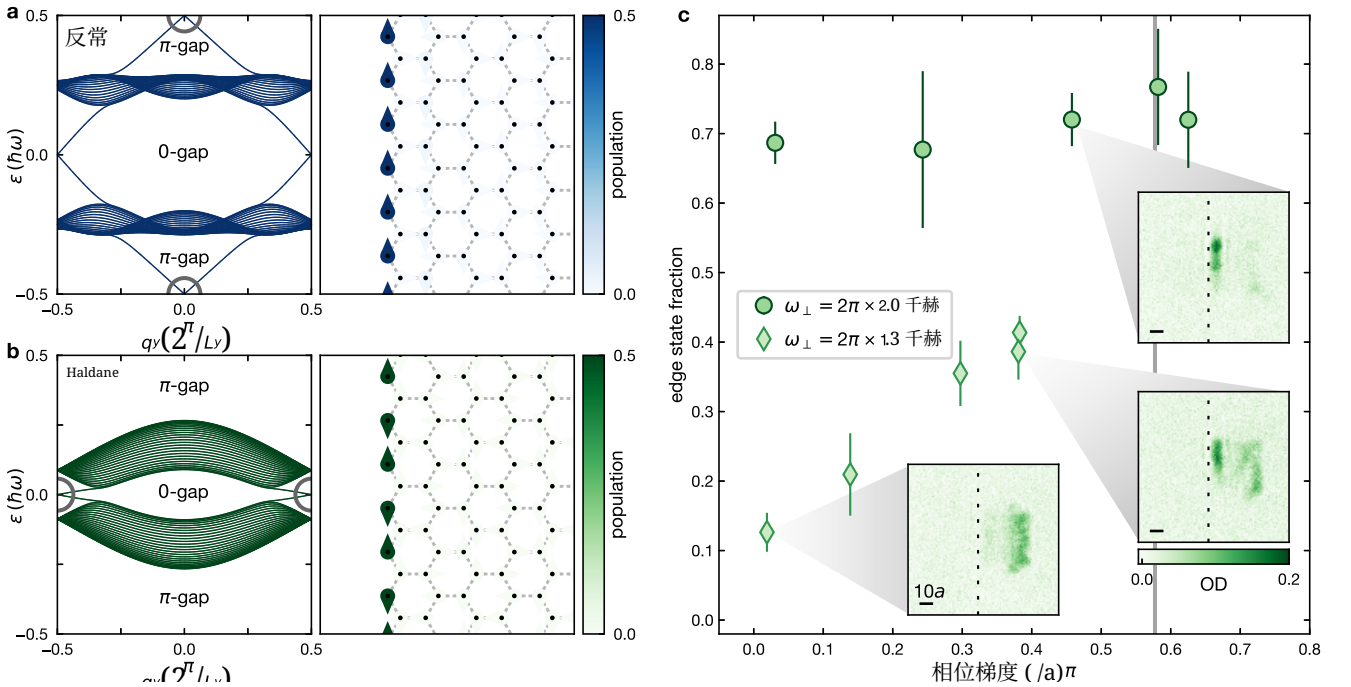

图2. **Haldane 区域中边缘态的制备与观测**。**a**，反常区间内紧束缚模型的能带结构，其中 $(W_0,\ W_\pi) = (1,\ 1)$，以及在 π能隙中、$q_y = 0$处边缘态对应的波函数（灰色圆圈标示）； ε 表示准能量。谱图绘制在第一 Floquet布里渊区 $-\hbar\omega/2 < \varepsilon \leq \hbar\omega/2$内。**b**，与**a** 相同，但对应 Haldane 区域，其中 $(W_0,\ W_\pi) = (1,\ 0)$。右图显示了在 0能隙中、 $q_y = \pi/L_y = \pi/(\sqrt{3}a) \approx 0.58\pi/a$处边缘态的波函数（灰色圆圈标示）。对于**a** 和**b**右侧的图，箭头的颜色深浅表示波函数的模方，箭头方向表示复相位。**c**，初始波包施加不同相位梯度后，经过 1.5 毫秒时间演化，边缘模中的原子比例（见方法）。数据点取自 4–5 次实验实现的平均值；误差棒表示吸收图像背景噪声传播至粒子数占比所产生的误差。灰色竖线表示布里渊区的边缘，此处 $q_y = \pi/L_y$。插图显示了 Haldane 区域中，原子云经过 3 毫秒时间演化后的平均吸收图像（88–90 次实验实现）。下方的色条适用于所有插图。

边缘具有相位梯度。由于初始波包的相位分布是平坦的，因此它与前者重叠良好，但与后者重叠不佳。

为优化初始波包在空间范围和相位分布方面与 Haldane 区域内边缘模的重叠，我们通过用光镊施加踢击来印加相位梯度（见方法），并通过改变径向囚禁频率来调整其大小 $\omega_\perp$。为了评估边缘模中的原子比例，我们让波包演化足够长的时间，使边缘附近的原子与散射到体模中的原子分离（图2c 的插图）。随后，我们评估边缘态中的原子比例（见方法）随所印加相位梯度的变化情况。对于较小的 $\omega_\perp$ （浅绿色数据点），我们观察到与边缘模的整体重叠较差；不过，随着相位梯度增大并接近理论最优值 $0.58\pi/a$，重叠会有所提高。用更紧的光镊减小初始云团的空间范围，可进一步减少散射到体区的原子（深绿色数据点）。在此区域内，相位梯度可能并不起显著作用，因为主要只有一个格点被显著占据，从而确保与边缘模有较大的重叠。

而在反常区间，我们发现了一种极其稳健的行为：边缘模中的原子比例基本不受初始波包性质的影响。在此区间，初始波包会投影到两个边缘模上：一个位于 0 能隙，另一个位于 π-能隙；对于每个准动量，情况均如此（图2a）。改变初态参数只会影响两个模之间的相对权重，而我们无法在实验中分别分辨这两个模。

在我们的实验装置中，拓扑界面由一个势阶产生。为了理解界面处出现边缘模所需势的特征能量尺度，我们研究了边缘态的最大速度 $v_{\max}$ 随势高 V_0 的变化（方法）。如图1b 中彩色六边形所示，我们研究了三个不同的拓扑相：具有 $(W_0, W_\pi) = (1,0)$ [48], 的 Haldane 区域，该区域在零能量附近呈现常规的拓扑边缘模，其陈数为 $\mathcal{C}^\pm = \mp 1$；具有 $(W_0, W_\pi) = (1,1)$ [23, 24], 的反常区间，该区域还呈现出一个额外的

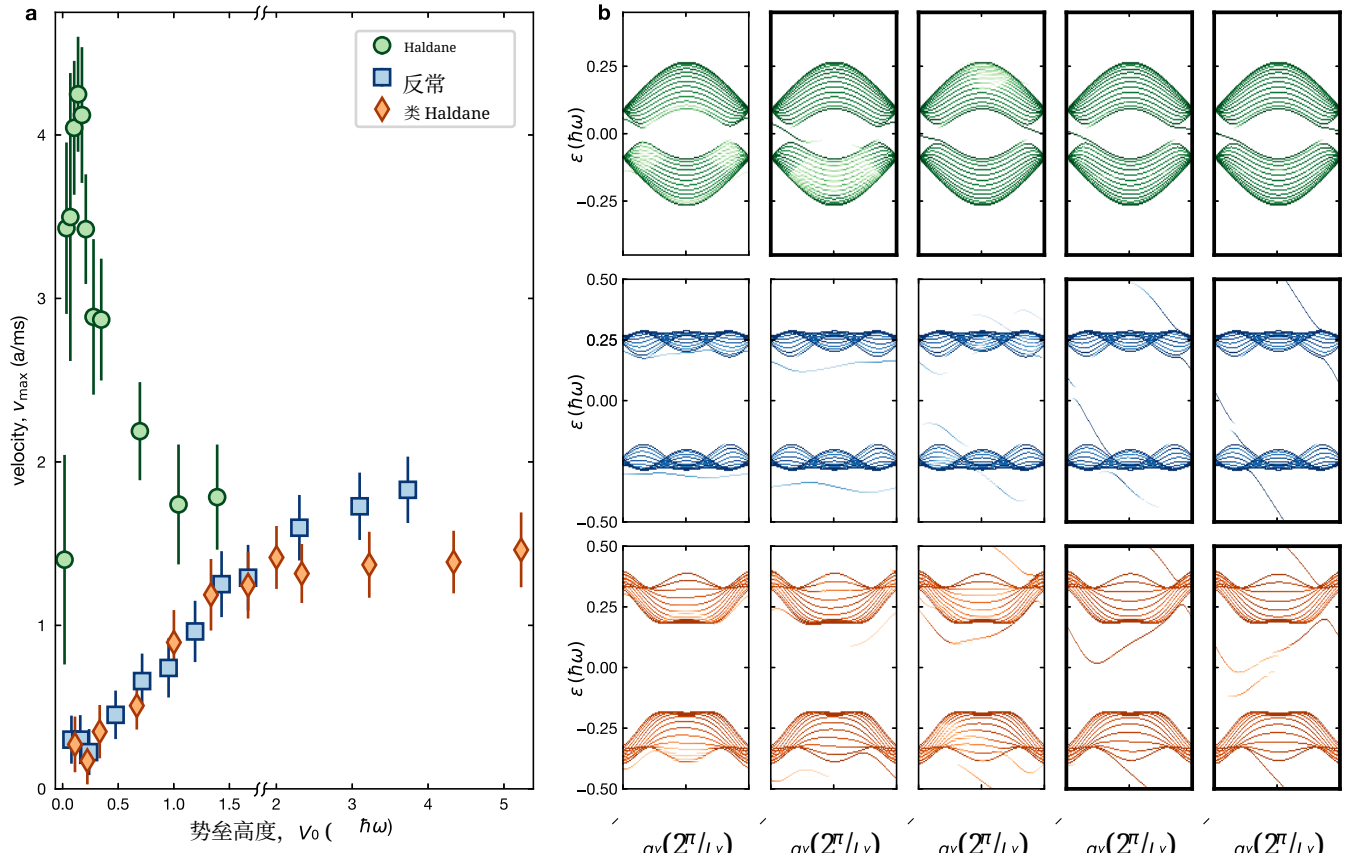

图 3. **随着势垒高度增加，边缘态的出现** V_0**. a**，测得的最大边缘态速度 $v_{\max}$。三种不同拓扑相的调制参数见图1b。每个数据点是不同日期采集的三个数据集的平均值，误差棒根据其标准差以及评估边缘态速度时的不确定度计算得出。 **b**，按照方法部分所述，使用半无限系统上的阶梯式调制紧束缚模型，对三种拓扑相的准能谱进行数值模拟：Haldane（上排）、反常（中排）和类 Haldane（下排）。在有限方向上，系统中部施加了高度为 V_0 的无限陡峭势阶。谱中显示的是其本征态与该低势区域具有显著重叠的本征能量（方法）。从左到右逐渐增加势垒高度，采用 $V_0/(\hbar\omega) = \{0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0\}$。边缘模清晰可见的谱以粗黑框标出。

反常边缘模，位于 π能隙中，并具有 $\mathcal{C}^{\pm} = 0$ ；以及第三种类 Haldane 区域，其 $(W_0, W_\pi) = (0,1)$ [23], 陈数为 $\mathcal{C}^{\pm} = \pm 1$，但其中的拓扑边缘模位于非平庸 π能隙中。

在所有三种拓扑相中，我们发现，随着势的高度增加，原子的群速度开始上升（图3a）。在 Haldane 区域，当势的大小达到 $\approx 0.1\hbar\omega$量级时，速度达到最大值，这与两条能带之间能隙的特征能量尺度相符。当势阱深度进一步增大时，速度开始逐渐降低。直观而言，人们可能会预期，一旦边缘模在界面处形成，速度便会趋于饱和。我们认为，实验中观察到的逐渐减速，是由势能起伏以及势底附近势边缘斜率较小所致；随着我们增加其高度，这些因素的影响会变得更加显著

。在反常区和类 Haldane 区观察到的总体趋势相似，但在绝对值方面与 Haldane 区明显不同。在这里，我们发现，达到最大群速度所需势的特征能量尺度约为 $\approx 2\hbar\omega$。当势的大小进一步增大时，我们观察到速度趋于饱和。

为支持实验结果，我们对半无限条带几何结构进行了数值研究，其中条带沿有限方向一半区域的势能增加了 V_0。为直观展示拓扑界面的出现，我们在图3b 中展示低势区域的本征能量（见方法）。与实验结果类似，我们发现，在 Haldane 区域，0能隙中的边缘态会在由0能隙大小决定的特征能量尺度处出现，该尺度约比 $\hbar\omega$ 小一个数量级。对于

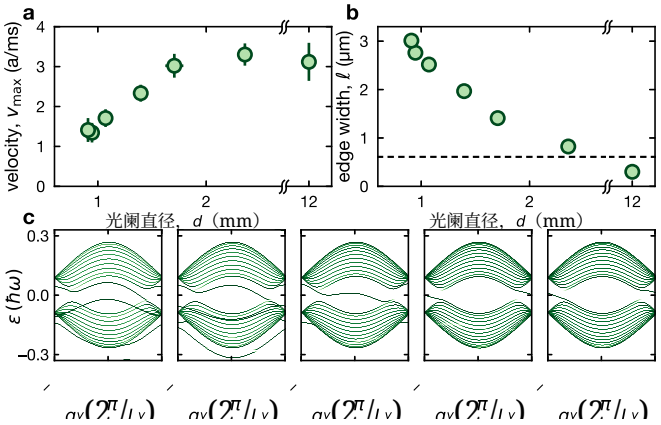

图4。 **不同边缘宽度下的边缘态速度**。**a**，当逐渐关闭傅里叶平面光阑时，在 Haldane 区域中高度为 $V_0/h = 1.1$kHz 的排斥势下测得的边缘态速度（调制参数标示于图 1b）中，取 $J_0 = 1.1(1)$ kHz、 $\omega_\perp = 2\pi\times 2.0$kHz，且相位梯度为 0。$43(1)\pi/a$。数据点为三个独立数据集的平均值，误差棒根据这些数据集的标准差以及各数据集速度评估的不确定度计算得出。**b**，图案的估算边缘宽度与傅里叶平面中光阑直径 d 的关系。虚线表示显微物镜的理论分辨率极限。因此，光阑完全打开时测得的边缘宽度（最右侧数据点）受到物镜有限分辨率的限制。**c**，使用 Haldane 区域中的阶梯式调制紧束缚模型（见方法中的表格）模拟得到的弗洛凯谱。颜色表示与覆盖低势区域的区域的重叠。边缘高度固定为 $V_0/(\hbar\omega) = 1.44$，其宽度从左至右变化： $\ell/a = \{6, 4, 2, 1, 0.1\}$

相同的势垒高度下，在反常区域和类 Haldane 区域的两个能隙中，都没有明显的边缘模特征。相反，我们发现，要使边缘模出现，其特征能量尺度需达到 $\hbar\omega$ 量级。在图3b 中，我们标出了所有我们认为能够清晰识别出边缘模的谱线。这种行为与我们的观测在定性上相符。

势边缘的有限宽度会显著影响边缘模中粒子的群速度，因为边缘模的色散与体模发生杂化，导致速度大幅降低 [43, 46, 47]。我们通过调节 Haldane 区域内势边缘的宽度来研究这一行为（图4a）。边缘宽度通过改变 d 光阑的直径来控制。该光阑置于成像系统的傅里叶平面，用于将 DMD 势投影到原子平面（方法）。由于照明光为非相干光，关闭光阑会导致势垒高度降低。为此，我们提高光束的总功率，以确保所有测量中的势垒高度 V_0 保持一致。通过对中间平面上的图案成像，并用误差函数拟合边缘轮廓，测量边缘宽度

再从拟合中提取特征长度 [45]。随后将该长度乘以中间平面与原子之间的放大率；该放大率经过独立校准。图4b 显示了所得宽度随光阑直径 d的变化。需要注意的是，由于对准不完善和残余像差，原子位置处的实际实验边缘宽度很可能进一步增大。图4b 中的虚线表示理论分辨率极限。正如预期，边缘平滑化会显著降低边缘态速度 [43, 46, 47, 49]。使用简单的阶梯式调制紧束缚模型进行数值模拟，也进一步证实了这一点（图 4c）。

总之，我们展示了一种利用超冷原子在实空间中制备和操控拓扑边缘模的实验方案。我们详细研究了如何在边缘模中制备原子，以及该方案的有效性如何取决于初态参数。借助对势形状的独特控制，我们进一步考察了随着势的高度增加、边缘变得更加陡峭，拓扑界面处如何涌现出边缘模。我们的研究为利用超冷原子探测不同物质相的拓扑特征提供了一种重要的新工具，尤其适用于慢驱动系统和存在无序的情形，在这些情形下，其他技术并不适用。我们预期，这将有助于实验研究非相互作用无序系统中可能出现的丰富物质相 [50–52] 以及相互作用系统中的物质相 [53, 54]。此外，该方法还衔接了固态物理和光子学系统中常用的技术 [55–58]以研究这些边缘态的相干性和输运性质 [59]。

注： 在完成本文期间，我们注意到近期有理论研究考察了Floquet驱动的拓扑晶格中的波包动力学 [60]。

¨致谢我们感谢 N. Unal、M. Mart´ınez、N. Goldman 和 M. Di Liberto 的宝贵讨论。我们还感谢 A. Alberti 提供晶格激光器。本研究由德国科学基金会（DFG，德国研究基金会）通过研究组 FOR 2414 资助，项目编号为 277974659。本研究还获得德国卓越战略 EXC-2111（项目编号 3908148）资助。J.A. 获阿尔弗里德·克虏伯·冯·波伦和哈尔巴赫基金会资助。R.S.-J. 获得欧盟地平线2020研究与创新计划玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号 101028339）的资助。

数据可用性 支持本文图表及本研究其他发现的数据，可在合理请求后向通讯作者获取。

代码可用性 本文图表所用的代码可根据合理请求向通讯作者索取。

方法

方法部分还包含以下补充信息：静态晶格中初始波包的膨胀（第 A节）、用于印制相位梯度的校准测量（第 B节）、边缘模中原子布居的评估方法（第 C节）、使用半无限条带进行数值模拟的详情（第 D节）、边缘态速度的示例性评估（第 E节）、势边缘高度的校准（第 F节），以及用于实现可编程光学势的光学装置说明（第 G节）。有关光镊装置、校准和寿命测量的补充信息见补充材料。

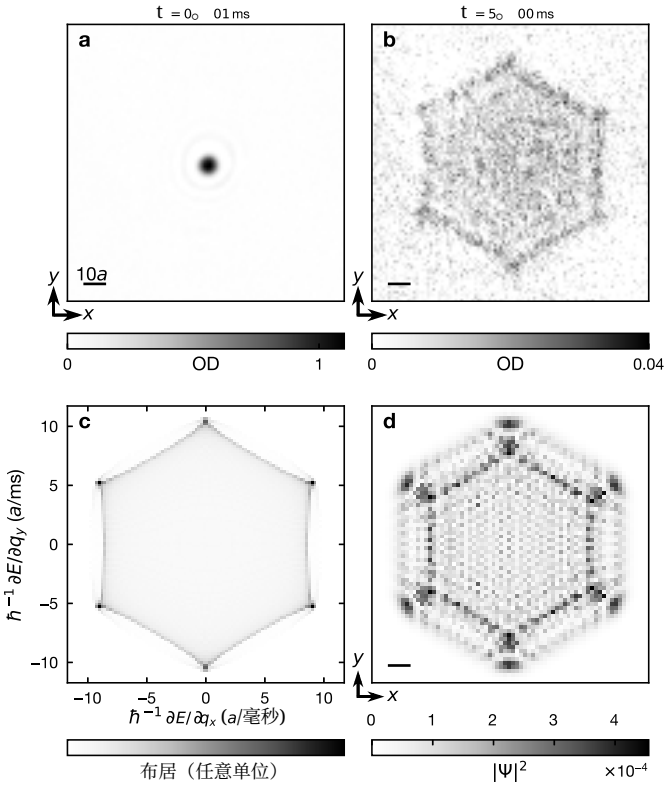

图5. **静态晶格体区中初始波包的演化**。**a**，初始波包释放到晶格后 $10\,\mu$ 秒的空间分布。波包制备于 $\omega_\perp/(2\pi) = 1.3(1)$ 千赫。**b**，在静态晶格中膨胀 5 毫秒后原子的实空间分布。**a** 和 **b** 中的数据是对 302 次独立实验实现取平均所得。**c**，蜂窝晶格最低能带均匀填充时的群速度分布。**d**，紧束缚模型中从占据单个格点的态出发，对膨胀动力学进行的数值模拟。所得概率分布 $|\psi(\mathbf{r}\ t)|^2$ 经过分箱处理，以匹配**b**中的像素数，比例尺对应于 $10a$。

A. 静态晶格中初始波包的膨胀动力学

图 5a 显示了将原子从光镊释放到静态蜂窝晶格后 10μs 时的初始密度分布。测得的信号是陷阱中实际密度分布与成像系统的点扩散函数（数值孔径=0.5）的卷积。为证明初始波包在晶格中相干演化，并占据布里渊区内足够高准动量态，我们观测了其在不存在任何排斥性边缘势的静态晶格体区中的膨胀（图5b）。

为此，我们突然关闭光镊阱，并监测初始波包在静态晶格中的演化。经过短暂的演化时间后，我们观察到一种特征性的六边形形状；正如预期，在均匀填充能带的相干膨胀动力学过程中会出现这种形状 [61, 62]。这是由准动量相关的群速度 $\partial_{\mathbf{q}}E(\mathbf{q})/\hbar$所解释的；这些群速度由蜂窝晶格中能带的色散关系决定（图5c）。相比之下，非相干随机游走会呈现高斯函数分布 [63], ；如果只填充布里渊区中心，则只能探测到最低能带的二次色散关系，从而掩盖六边形形状的边缘。

此外，由于所有相互独立的准动量之间发生干涉，相干演化会在六边形形状内部呈现干涉图案。图5d展示了初态的数值模拟：该初态局域在单个晶格位点上，并经过5毫秒的膨胀。模拟采用双能带模型，其参数接近实验实现中的参数。这些测量证实初始波包具有足够的局域性，并支持晶格中的相干演化。我们还证实，在三种情形下让原子在调制晶格的体区演化时，也能观察到质量相近的膨胀动力学。

B. 初始速度踢击校准

通过给予初始云团一次踢击，为其施加相位梯度。为此，对实验序列做了些许修改。在关闭光镊前不久，将其沿平行于边缘的方向位移，从而赋予波包一个初始速度，并由此印刻相位梯度。速度踢通过对发送至 AOD 的射频施加线性斜坡来实现，使光镊在时间 δ_t 内沿 y 方向线性位移 $y^{\mathrm{tw}}(t) = y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{tw}} + (y_{\mathrm{f}}^{\mathrm{tw}} - y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{tw}})t/\delta_t$。线性斜坡结束时，光镊被突然关闭。从经典角度看，原子云的质心$\langle y\rangle(t)$遵循以下方程：

$$m_{\mathrm{K}}\frac{\mathrm{d}^2\langle y\rangle}{\mathrm{d}t^2} = -\nabla U(y,t), \qquad (1)$$

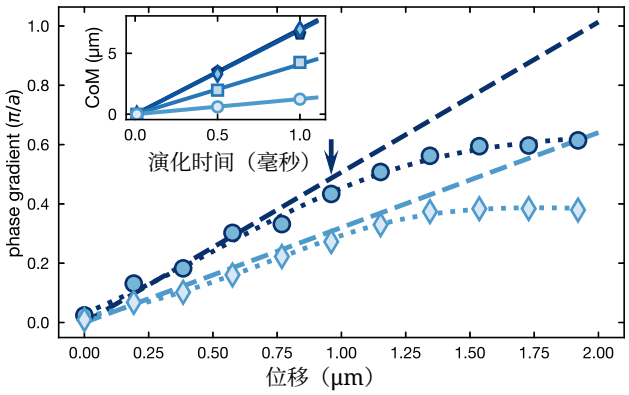

图6. **踢击引起的相位梯度**。测量了波包速度随光镊总位移的变化，条件为两种不同的面内囚禁频率： $\omega_\perp/(2\pi) = 1.3(1)$ kHz（浅蓝色）和 2.0(1) kHz（深蓝色）。虚线表示根据云团在谐振势中的运动得出的解析预测，点线表示用五次多项式对测量结果进行插值。插图显示了在最低的 $\omega_\perp$ 值下，原子经过踢击并在光学偶极阱中经历可变演化时间后的质心（CoM）测量平均值；对应位移分别为 0.19 μm（圆形）、0.78 μm（方形）、1.36 μm（菱形）和 1.94 μm（五边形）。图中数据点为 6 次独立实验实现的平均值。插图还显示了用于提取速度的线性加权拟合。斜率的不确定度用作主图中的误差棒，且小于标记的尺寸。位移为 $\approx$ 1μm 处的箭头表示所有测量中用于在 Haldane 区域填充边缘模的相位梯度。

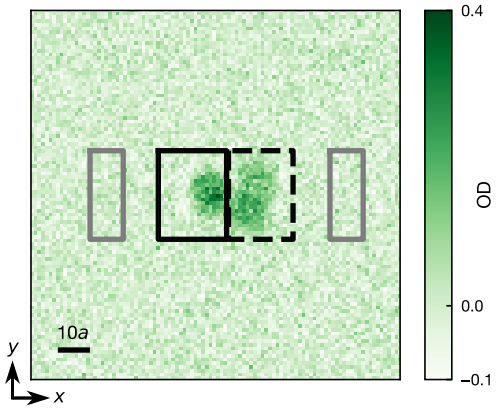

图7。 **边缘模中原子比例的评估**。 时间演化 1.5 毫秒后的平均吸收图像，以及用于评估的相应感兴趣区域：靠近边缘的区域（黑色实线）和体区（黑色虚线）。两个面积为其一半的背景区域以灰线标出。此示例对应于 $\omega_\perp/(2\pi) = 1.3(1)$ 千赫数据点，见图2 右下角插图。

其中， $U(y,\ t)$ 是光镊的光学势，近似为抛物线：

$$U(y,t) = \frac{m_{\mathrm{K}}\omega_\perp^2}{2}\left(y - y^{\mathrm{tw}}(t)\right)^2 . \qquad (2)$$

运动方程可根据初始条件$\mathrm{d}\langle y\rangle\ \mathrm{d}t\ (0) = 0$ 和 $\langle y\rangle(0) = y_{\mathrm{i}}$ 进行积分：——

$$\langle y\rangle(t) = y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{tw}} + \frac{y_{\mathrm{f}}^{\mathrm{tw}} - y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{tw}}}{\omega_\perp \delta_t}\left[\omega_\perp t - \sin(\omega_\perp t)\right], \qquad (3)$$

这表明，在斜坡结束时 $t = \delta_t$，原子质心的最终速度 v_y 为：

$$v_y(t = \delta_t) = \frac{y_{\mathrm{f}}^{\mathrm{tw}} - y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{tw}}}{\delta_t}\left[1 - \cos(\omega_\perp \delta_t)\right]. \qquad (4)$$

对于给定的光镊频率 $\omega_\perp$，可以使最终速度达到最大值：函数 $x \mapsto [1 - \cos(x)]/x$ 在 $x \approx 2.33$时达到最大值，因此可以选择 $\delta_t = 2.33/\omega_\perp$。随后可以独立选择位移幅度$y_{\mathrm{f}}^{\mathrm{tw}} - y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{tw}}$，前提是其不超过抛物线近似有效范围内的标尺。

我们通过在施加线性斜坡后让原子在偶极阱中演化，随后关闭光镊和光学晶格，来实验测量踢击所施加的最终速度。我们测量云团质心的位置随演化时间的变化，演化时间在 0 到 1 毫秒之间。踢击方向上的位置随时间线性变化，我们通过线性拟合提取相应的速度（图6的插图）。测得的速度范围为 0 到 10μm/ms，并通过以下公式将其转换为相位梯度：

$$\nabla\phi = \frac{m_{\mathrm{K}}}{\hbar} v_y, \qquad (5)$$

如图6 所示，它是 $\omega_\perp$的函数，表示光镊位移对测量结果的影响。虚线对应上文推导的理论预测，与小位移下的测量结果非常吻合。位移较大时，测量结果偏离这一预测，这是由于光镊存在非谐性，其束腰约为 1μm。由图中的纵轴标尺可知，这种方法能够制备足够大的相位梯度，从而在相邻格点间产生显著的相移。正文图2 所报告的相位梯度值，是通过对这里测得的数据进行五阶多项式插值得到的，插值结果以点线表示。最后，用于制备具有非零相位梯度的云团以观测边缘态（尤其是 Haldane相）的参数，由图6中的蓝色箭头标出。

C. 边缘模中粒子数占比的评估

图2c 中所示的边缘粒子数占比，是通过对相应感兴趣区域（图7）内的光学密度（OD）积分确定的。我们制备初态时采用不同的囚禁频率 $\omega_\perp/(2\pi)$ =1.3(1) kHz 和 2.0(1) kHz 的光镊，并设置不同的初始相位梯度。为确保初态与边缘模达到最佳空间重叠，我们还改变了初态相对于边缘势的位置。在调制晶格中演化 1.5 毫秒后，体区和边缘处的原子在空间上已分离，此时评估装载到边缘模中的原子比例，以确保两个信号能够区分。我们在相同实验参数下拍摄多张吸收图像并取平均。为确定感兴趣区域的大小，我们验证了感兴趣区域大小发生微小变化时，积分光学密度保持不变。此外，在中央区域外定义两个面积为先前区域一半的区域，用于评估图像的背景值（图7）。我们分别对边缘和体区感兴趣区域内的光学密度求和，并减去背景区域内的光学密度总和，从而得到体区 S_{bulk} 和边缘 S_{edge}的信号。随后使用这些数值计算边缘区域内原子比例 p_{edge} ：

$$p_{\mathrm{edge}} = \frac{S_{\mathrm{edge}}}{S_{\mathrm{edge}} + S_{\mathrm{bulk}}}. \tag{6}$$

误差棒通过以下方式评估：对晶格调制的两种相反手性所得到的两个占比值取标准差，并结合成像系统噪声；该噪声由背景区域光密度的标准差得到。

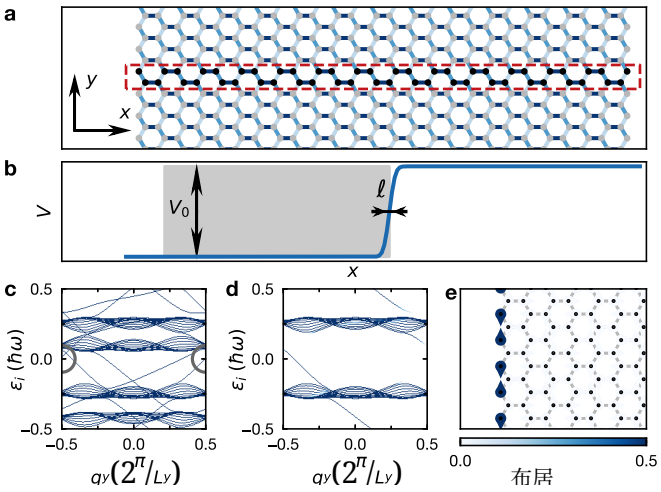

图 8. **数值模拟**。**a**，晶格的几何结构。系统由虚线红色矩形内的格点组成。在 y 方向上，系统具有周期性，如浅色重复图案所示。格点之间的三种连接键以三种深浅不同的蓝色表示。带有复相位权重的连接键是那些穿过虚线的连接键。**b**，沿 x 方向施加的势能。边缘的位置选在系统中心，其宽度 ℓ 和高度 V_0 是自由参数。在此示例中，$\ell = a$。阴影区域示例性地展示了可用于选择性筛选谱的区域。**c**，系统在 $J_1'/J_1 = 0.1$、$\hbar\omega = 2\pi \times 1.5 J_1$、$\ell = a$ 和 $V_0 = J_1/2$ 条件下的完整准能谱。系统处于反常区间，即可见两对边缘态，它们在模型的两个能隙中连接两条体能带。灰色圆圈标出其波函数如 **e** 所示的本征态。**d**，准能谱示例。此示例绘制了与 **c** 中相同的谱，并采用颜色标尺表示其与图 **b** 阴影区域的重叠。**e**，能量为 $\varepsilon = 0$、位于 $q_y = \pm\pi/L_y$ 的本征态波函数，对应于一个数值边缘态。格点位置以黑点表示，隧穿键以灰色表示。黑点周围的颜色表示波函数的模方，箭头方向表示其相位。

D. 半无限条带上紧束缚模型的数值模拟

对于数值模拟，我们实现了一个随时间变化的紧束缚模型 [24]，定义在有限维度为 x 、无限维度为 y的六角晶格上。系统由图中虚线红色矩形表示。8a：沿 x方向实现长度为L_x 的系统，并沿 y方向生成创建一个晶胞所需的最小长度 L_y 。六角晶格的取向使得系统在 $x = \pm L_x/2$ 处的边缘为之字形边缘，与实验类似。这导致$L_y = \sqrt{3}a$，并将尺寸 L_x 选为等于 $20a$，从而使边缘效应

覆盖小于 x L_x 的区域，同时保持晶胞中的格点总数 $N_s = 52$ 相对较少，以确保数值计算快速进行。在该晶格中仅考虑最近邻跃迁，并且

根据方向区分三种连接键（见图8中的三种颜色）。

变量	Haldane	反常	类 Haldane
J_1'/J_1	0.1	0.1	0.1
$\hbar\omega/J_1$	9π	3π	2π

表 I. 数值模拟中使用的变量

周期为 $T = 2\pi/\omega$ 的周期性哈密顿量通过将每个驱动周期划分为三个等时长的步骤来实现，每个步骤由哈密顿量 $H_i (i = \{1, 2, 3\})$ 描述。在每个步骤中，三条连接键之一具有较大的跃迁振幅 J_1，另外两条则具有较小的跃迁振幅 J_1'。跃迁

振幅从格点 i 到格点 j，如果对应的跃迁连接了两个相邻晶胞，则会附加相位因子 $e^{\pm iq_y L_y}$；其符号取决于连接键沿 y 的方向；q_y 表示沿 y 方向的准动量。由此得到的三个哈密顿量可表示为元素依赖于准动量的 $N_s \times N_s$ 矩阵。一个周期内连接键从低跃迁振幅切换到高跃迁振幅的顺序定义了调制的两种手性。最后，可以在每个格点上施加势能偏移，这由哈密顿量 V 描述。

随后计算一个周期内的演化算符 $\hat{U}(T)$，将其表示为 q_y 的函数：

$$\hat{U}(T) = e^{-i\left(\hat{H}_3+\hat{V}\right)\frac{T}{3\hbar}} e^{-i\left(\hat{H}_2+\hat{V}\right)\frac{T}{3\hbar}} e^{-i\left(\hat{H}_1+\hat{V}\right)\frac{T}{3\hbar}}. \quad (7)$$

对该算符进行对角化，以求得其本征值 λ_μ和本征态 $|\psi_\mu\rangle$，其中 $\mu = \{1, \ldots, N_s\}$。随后计算相应的准能量 ε_μ，计算公式为 [25]:

$$\varepsilon_\mu = \frac{\hbar\omega}{2\pi i} \ln(\lambda_\mu). \quad (8)$$

势能建模为

$$V(x) = \frac{V_0}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{2(x_0 - x)}{\ell}\right) + 1\right], \quad (9)$$

其中，erf(x) 是误差函数，x_0 是边缘的位置，此处将其设在系统的中间，而ℓ表示边缘的宽度 [45]，，如图8b 所示。谱 $\{\varepsilon_\mu(q_y)\}$ 随准动量 q_y 的变化关系绘于图8c。模拟采用的 ω 和 V_0 使系统处于反常区间，且势 V_0 足够大，能够在系统中心形成一个边缘态。我们发现，该模型的两条能带都出现了重复：第一条对应系统的左半部分，第二条对应右半部分，其能量相对于第一条偏移了 V_0 。

此外，若在晶格上定义了一个区域 $\mathcal{S}$，则每个本征态在该区域上的投影 $\mathcal{P}(\mu, \mathcal{S})$ 可按如下方式计算：

$$\mathcal{P}(\mu, \mathcal{S}) = \sum_{\text{site } j} \mathbb{1}_{\mathcal{S}}(j)\, \langle j|\psi_\mu\rangle\,, \quad (10)$$

其中 $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}(j) = 1$ 若格点 j 属于区域 $\mathcal{S}$，否则为 0。例如，选择图8b 中的阴影区域来筛选图8c 中的谱。图8d 显示了相同的谱，其中每个点的颜色表示投影 $\mathcal{P}(\mu, \mathcal{S})$。为清晰起见，未显示重叠小于最大重叠的 1/20 的点。从图中可以看出，与势能较高部分对应的能带被去除，数值上的左侧边缘态也被去除。最终仅保留系统中央势边缘处的边缘态。

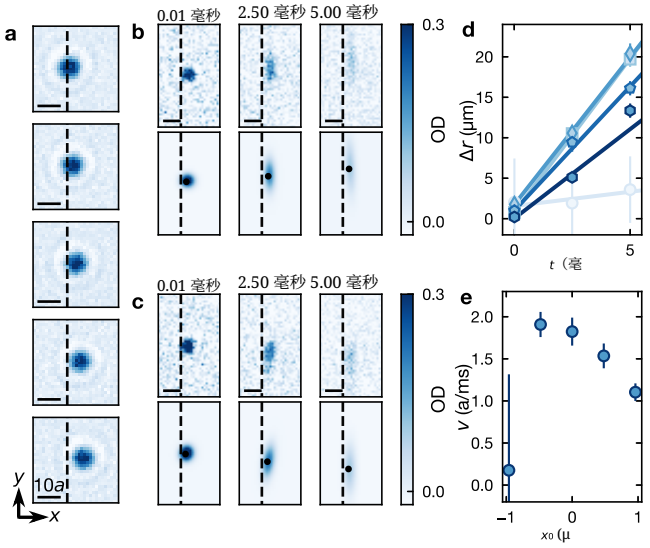

图9. **边缘态速度的测定。a**，光镊中原子的原位图像。光镊的位置沿 x 方向（垂直于边缘的方向）从上至下移动，每次移动 0.48 μm，如竖直虚线所示。图像是五次独立实验实现的平均结果；为更清楚地观察光镊的位移，这些实验未施加边缘势。比例尺对应 $10a$。**b-c**，两种手性下云团的演化。第一行显示随着演化时间增加而获取的吸收图像平均结果，所有图像使用相同的颜色标尺。第二行显示对平均图像进行高斯拟合的结果。拟合图中，高斯函数的中心以黑点标出。自助法分析得到的误差棒小于标记尺寸。**d**，将两种不同手性下经时间演化的云团质心位置之间的绝对距离 Δr 绘制为时间的函数。三种不同标记对应三个初始位置，相应的实线为线性拟合。**e**，将拟合斜率除以二，得到边缘态的平均速度。图中绘出了测得的速度随初始位置的变化，最终选取这些点中的最大值。对于最左侧的光镊位置，误差棒很大：原子在势阶上方释放，因此无法可靠地提取速度。

最后，可以提取并显示任一本征态的波函数。在图8e中，我们展示了 $q_y = -\pi/L_y$处、能量为 $\varepsilon = 0$的（数值计算得到的）边缘态波函数，其中以颜色深浅表示波函数的振幅，以箭头方向表示波函数的相位。这是反常相中0能隙的边缘模，其沿边缘的相位梯度与Haldane相的边缘模相同。

E. 速度测量

我们通过最大化初始云团与边缘模之间的空间重叠来测量边缘态的速度。为此，我们相对于边缘移动光镊的初始位置，每次移动约0。5 µm（图9a）。随后释放云团，并观察其在不同持续时间后的演化，同时考察调制方案的两种相反手性。图9b和c的上排展示了反常区间内、边缘高度为 $V_0 = h \times 19$kHz时两种手性下的演化，每幅图均为 N_{im} 张实验图像的平均结果。通过使用高斯函数拟合平均图像，求得这些云团的质心位置；拟合时将高斯函数的中心、振幅、两个尺寸、偏置以及本征轴方向均作为自由参数。我们使用自助法估算这些拟合参数的误差棒：从 N_{im} 张实验图像中有放回地随机抽取 N_{im} 张图像。将抽取的图像（可能包含重复图像）取平均，再用相同的高斯函数拟合所得图像。上述随机抽样、平均和拟合过程重复20次，从而得到相应数量的高斯函数参数估计值。拟合参数的误差棒取这些估计值的标准差。

图 9d 显示了 Δr 两种手性的波包质心之间的距离随演化时间的变化。两个云团之间的间距随时间呈线性变化：当调制具有一种手性时，云团以平均速度 $+v$ 沿 y 方向移动；而当调制具有另一种手性时，云团以速度 $-v$ 移动。通过线性拟合提取 Δr 随演化时间变化的斜率，再除以 2，即可得到边缘态的平均速度。误差由线性拟合的误差估算。对于光镊相对于边缘的所有初始位置，均测量了该速度，如图9e 所示；当初始波包与边缘模的重叠最大时，速度达到最大值。因此，正文中报告的观测量是测得的最大速度及其误差棒。

F. 边缘高度的校准

为了校准排斥势 V_0 的高度，我们突然开启棋盘格图案在数字微镜器件上，以研究大型玻色-爱因斯坦凝聚体的衍射随保持时间的变化 t_{hold} （在给定光束强度下，数字微镜器件光束开启的时间）。棋盘格图案的周期记为 $2d_{\mathrm{sq}}$。经过 10 毫秒的演化时间后，我们在光学偶极阱中探测衍射原子（见图10a 的插图），并测量零级和一级衍射级中的布居。一级衍射级出现在与波矢 $k_1 \propto 1/d_{\mathrm{sq}}$ 对应的位置，

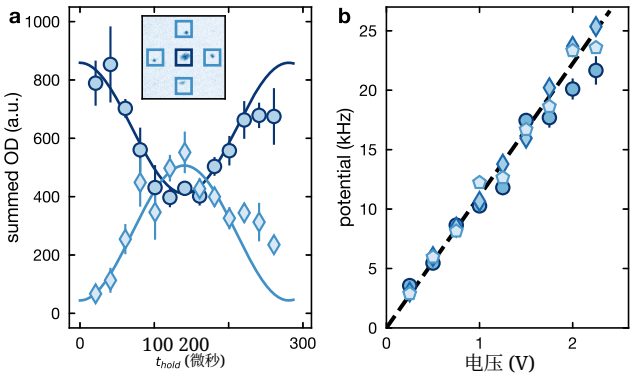

图 10. **排斥势高度的校准**。**a**，测量对应于零级（圆形）和一级（菱形）衍射级次区域的光学密度总和。误差棒表示采用相同参数拍摄的图像中相应级次布居的标准差。实线表示用于提取频率的正弦拟合。插图展示了一张示例图像，其中标出了用于评估光学密度的不同感兴趣区域（浅蓝色方框：一级衍射级次；深蓝色方框：零级）。**b**，利用**a** 所示的正弦拟合评估的排斥势高度，随用于控制激光强度的电压变化，图中给出了 d_{sq} 的三种取值：1.0 µm（圆形）、1.3 µm（菱形）和 1.7 µm（五边形）。误差棒表示拟合的不确定度，黑色虚线为对所有测量点进行的加权线性拟合，其斜率为 11.12(3) kHz/V。

与动能相关 $E_{\mathrm{R}} = \hbar^2 k_1^2/(2m_K)$. 在我们的实验中，该动能不超过$h \times 1$kHz。对于保持时长 $t_{\mathrm{hold}} \approx V_0/\hbar$，以及对于$V_0 > E_{\mathrm{R}}$，衍射实验处于所谓的拉曼-纳特区 [64]。在该区域中，观测到的各级衍射中的布居数p_0 和 $p_{\pm 1}$ 为：

$$p_0(t_{\mathrm{hold}}) \propto \cos^2\left(\frac{V_0 t_{\mathrm{hold}}}{2\hbar}\right), \tag{11}$$

$$p_{\pm 1}(t_{\mathrm{hold}}) \propto \sin^2\left(\frac{V_0 t_{\mathrm{hold}}}{2\hbar}\right), \tag{12}$$

其中 V_0 是原子所处势的高度。我们将这些布居数拟合为 t_{hold} 的函数，以提取 V_0 （图10a）。对于不同的势垒高度 V_0 ，通过改变激光强度来实现，并对 d_{sq} 的三种取值执行此过程，以检验该方法的一致性。 V_0 的值如图10b 所示，表示为激光强度控制电压的函数，对应 d_{sq}的三种取值。虚线是对这些数据点进行的加权线性拟合，用于校准势垒高度。

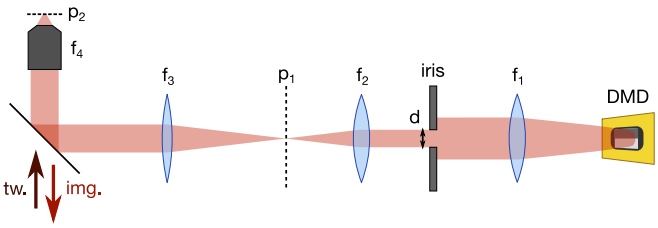

图 11. **用于调节边缘宽度的光学装置**。DMD 成像于原子平面（p_2）。在傅里叶平面加入可变直径的光阑 d，以调节势阶的宽度。通过二向色镜片将 638 nm 的 DMD 光与 1064 nm 的光镊光束（tw.）重叠，并用显微物镜聚焦。767 nm 的成像光束（img.）沿相反方向传播，并穿过二向色镜片到达相机（图中未示出）。

G. DMD 光源和光学装置

数字微镜器件（ViALUX V-7000）由中心波长为 638 nm、3 dB 带宽为 1 nm 的非相干光源照明。该光源由四个激光二极管（Ushio HL63623HD）产生，激光二极管通过 Lasertack 的合束器模块合束。合成光束使用声光调制器（Crystal Technology 3200-125）进行强度稳定，以校正方芯光纤（Thorlabs FP150QMT）后方的强度波动。方芯光纤将时间非相干性映射为快速变化的空间非相干性，从而将散斑对比度降低至 $\approx 3\%$。

对于图中所示的测量结果1-3，受照明的 DMD 通过单个望远镜系统成像到原子平面，该系统由一片焦距为 1000 mm 的透镜和一支焦距为$f_4 = 25$mm 的显微物镜组成。该装置将 DMD 的单个像素（边长 13.7μm）成像到原子平面内一个边长为 0.33μm 的假想区域。成像系统（NA $= 0.5$）的理论分辨率极限为 $\lambda/(2\mathrm{NA}) = 638$nm。因此，我们对物镜每个点扩散函数对应的多个 DMD 像素取平均。采用此装置时，DMD 图案的傅里叶平面靠近显微物镜。由于该物镜还用于聚焦光镊光束并将原子成像到相机上，因此无法通过此装置降低边缘清晰度。

对于图中所示的测量结果4 ，我们因此采用改进的双望远镜系统，如图中所示11。现在，DMD 图案通过另一个望远镜成像到原子平面（p_2）上。第一个望远镜使用焦距分别为 $f_1 = 150$ 毫米和 $f_2 = 100$毫米的透镜。为调节投射图案的清晰度，在 DMD 后方、焦距为 f_1的透镜之后的傅里叶平面上加入一个直径为 d 的光阑。由此得到的图像可以通过相机在像平面（p_1 ，图11中）监测。随后，使用焦距为 $f_3 = 750$毫米的透镜和焦距为显微物镜的物镜，将这一中间图像投射到原子上

$f_4 = 25$毫米。对于较大的光阑直径 d ，物镜的有限孔径会截去最高频的傅里叶分量，从而限制所显示图案的锐度。

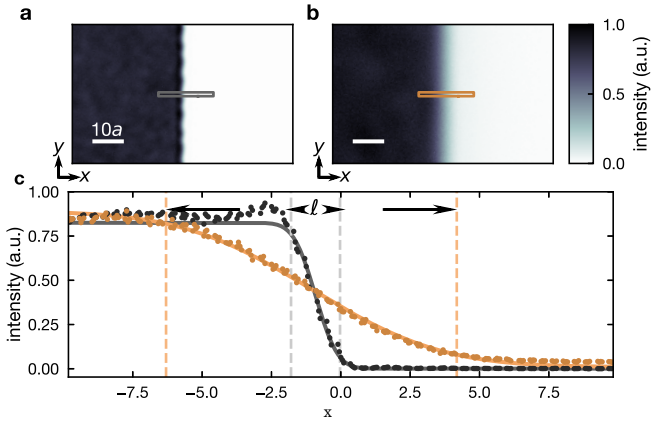

图 12. **由数字微镜器件生成的光学势及边缘宽度评估**。**a**，中间平面（p_1 见图 11）中的光学势由数字微镜器件生成，并由相机记录。光阑直径，因此也是傅里叶平面的直径，略大于物镜的对应尺寸。灰色矩形表示曲线 **c** 中积分的区域。 **b**，与 **a** 相同，但光阑直径尽可能缩小。棕色矩形表示曲线 **c** 中积分的区域。 **a** 和 **b** 中的比例尺为 $10a$ 原子平面 p_2。 **c**，得到的边缘宽度。在靠近原子云的位置提取边缘宽度。我们展示了由 **a** 和 **b** 中的矩形标出的积分信号数据及相应的拟合。光阑直径对应于略大于衍射极限的直径（**a**）以及图 4b（**b**）。

图 12a 和 b 展示了两个由此产生的势作为示例。我们使用 CMOS 相机对中间平面上的势成像（曝光时长为 44.8μs），并根据该平面的缩小倍率对图像进行缩放。提取出的边缘宽度 ℓ 如图 12c 所示，其中显示了沿边缘积分的图像；图中的矩形标出了该边缘的位置。12a 和 b [45]。光阑直径的设置略大于图 12a 中与物镜孔径对应的尺寸，而在图 12b 中则尽可能缩小。我们通过对数据拟合式 9 来提取宽度，得到 $\ell = 1.8a = 0.51$μm（图 12a）和$\ell = 10.5a = 3.0$μm（图 12b）；数值经过中间平面到原子云平面的缩小倍率换算。图 12a 中观测到的分辨率略小于物镜之后的衍射极限，因为光阑直径略大于物镜对应的尺寸。

[1] D. Xiao、M.-C. Chang 和 Q. Niu，贝里相位对电子性质的影响，Rev. Mod. Phys. 82, 1959 (2010年)。[2] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane，专题综述：拓扑绝缘体，Rev. Mod. Phys. 82, 3045 (2010年)。[3] B. A. Bernevig，*Topological Insulators and Topological Superconductors* 2013（普林斯顿大学出版社，）。[4] X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang，拓扑绝缘体与超导体，Rev. Mod. Phys. 83, 1057 (2011)。[5] K. v. Klitzing、G. Dorda 和 M. Pepper，基于量子化霍尔电阻高精度测定精细结构常数的新方法，Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980年)。[6] K. von Klitzing，量子霍尔效应，Rev. Mod. Phys. 58, 519 (1986年)。[7] D. J. Thouless、M. Kohmoto、M. P. Nightingale 和 M. den Nijs，二维周期势中的量子化霍尔电导，Phys. Rev. Lett. 49, 405 (1982年)。[8] Q. Niu 和 D. J. Thouless，存在基底无序和多体相互作用时的量子化绝热电荷输运，J. Phys. A: Math. Gen. 17, 2453 (1984年)。[9] B. I. Halperin，二维无序势中的量子化霍尔电导、载流边缘态与延展态的存在，Phys. Rev. B 25, 2185 (1982年)。[10] R. Rammal、G. Toulouse、M. T. Jaekel 和 B. I. Halperin，量子化霍尔电导与边缘态：具有周期势的二维条带，Phys. Rev. B 27, 5142 (1983年)。[11] A. H. MacDonald，周期势中的边缘态与量子化霍尔电导率，Phys. Rev. B 29, 6563 (1984年)。[12] Y. Hatsugai，整数型量子霍尔效应中的陈数与边缘态，Phys. Rev. Lett. 71, 3697 (1993年)。[13] Y. Hatsugai，整数型量子霍尔效应中的边缘态与布洛赫函数的黎曼曲面，Phys. Rev. B 48, 11851 (1993年)。[14] X.-L. Qi、Y.-S. Wu 和 S.-C. Zhang，联系二维绝缘体体拓扑数与边缘态的一般定理，Phys. Rev. B 74, 045125 (2006年)。[15] M. Aidelsburger、S. Nascimb`ene 和 N. Goldman，材料与人工设计系统中的人工规范场，C. R. Physique 19, 394 (2018年)。[16] N. R. Cooper、J. Dalibard 和 I. B. Spielman，超冷原子的拓扑能带，Rev. Mod. Phys. 91, 015005 2019( )。[17] T. Ozawa、H. M. Price、A. Amo、N. Goldman、M. Hafezi、L. Lu、M. C. Rechtsman、D. Schuster、J. Simon、O. Zilberberg 和 I. Carusotto，拓扑光子学，Rev. Mod. Phys. 91, 015006 (2019年)。[18] S. Mukherjee、A. Spracklen、M. Valiente、E. Andersson、P. ¨Ohberg、N. Goldman 和 R. R. Thomson，在缓慢驱动的光子晶格中实验观测到反常拓扑边缘模，Nat. Commun. 8, 13918 (2017年)。[19] L. J. Maczewsky、J. M. Zeuner、S. Nolte 和 A. Szameit，光子反常 Floquet 拓扑绝缘体的观测，Nat. Commun. 8, 13756 (2017年)。[20] Y.-G. Peng、C.-Z. Qin、D.-G. Zhao、Y.-X. Shen、X.-Y. Xu、M. Bao、H. Jia 和 X.-F. Zhu，反常 Floquet 拓扑绝缘体的实验演示，适用于声学，Nat. Commun. 7, 13368 (2016). [21] F. Gao, Z. Gao, X. Shi, Z. Yang, X. Lin, H. Xu, J. D. Joannopoulos, M. Solja˘ci´c, H. Chen, L. Lu, Y. Chong, 和 B. Zhang，利用精心设计的表面等离激元结构探测拓扑保护，Nat. Commun. 7, 11619 (2016). [22] S. Afzal, T. J. Zimmerling, Y. Ren, D. Perron, 和 V. Van，在强耦合纳米光子晶格中实现反常弗洛凯绝缘体，Phys. Rev. Lett. 124, 253601 (2020). [23] K. Wintersperger, C. Braun, F. N. ¨Unal, A. Eckardt, M. D. Liberto, N. Goldman, I. Bloch, 和 M. Aidels- burger，利用超冷原子实现反常弗洛凯拓扑系统，Nat. Phys. 16, 1058 (2020). [24] T. Kitagawa, E. Berg, M. Rudner, 和 E. Demler, 周期驱动量子系统的拓扑表征，Phys. Rev. B 82, 235114 (2010). [25] M. S. Rudner, N. H. Lindner, E. Berg, 和 M. Levin，二维周期驱动系统中的反常边缘态与体边对应关系，Phys. Rev. X 3, 031005 (2013). [26] M. Atala, M. Aidelsburger, J. T. Barreiro, D. Abanin, T. Kitagawa, E. Demler, 和 I. Bloch，直接测量拓扑布洛赫能带中的Zak相，Nature Phys 9, 795 (2013). [27] L. Duca, T. Li, M. Reitter, I. Bloch, M. Schleier-Smith, 和 U. Schneider，用于确定布洛赫能带拓扑的阿哈罗诺夫–玻姆干涉仪，《科学》347, 288 (2015). [28] N. Fl¨aschner, B. S. Rem, M. Tarnowski, D. Vogel, D.-S. L¨uhmann, K. Sengstock, 和 C. Weitenberg，弗洛凯布洛赫能带中贝里曲率的实验重建，《科学》352, 1091 (2016). [29] T. Li, L. Duca, M. Reitter, F. Grusdt, E. De mler, M. En- dres, M. Schleier-Smith, I. Bloch, 和 U. Schneider，利用威尔逊线进行布洛赫态层析，《科学》352, 1094 2016( ). [30] G. Jotzu, M. Messer, R. Desbuquois, M. Lebrat, T. Uehlinger, D. Greif, 和 T. Esslinger，利用超冷费米子实验实现拓扑哈耳丹模型，《自然》515, 237 (2014). [31] M. Aidelsburger, M. Lohse, C. Schweizer, M. Atala, J. T. Barreiro, S. Nascimb`ene, N. R. Cooper, I. Bloch, 和 N. Goldman，利用超冷玻色原子测量霍夫施塔特能带的陈数，Nat. Phys. 11, 162 (2015). [32] T.-W. Zhou, G. Cappellini, D. Tusi, L. Franchi, J. Par- ravicini, C. Repellin, S. Greschner, M. Inguscio, T. Gia- marchi, M. Filippone, J. Catani, 和 L. Fallani，强相互作用费米子中普适霍尔响应的观测，arXiv:2205.13567 (2022). [33] M. Tarnowski, F. N. ¨Unal, N. Fl¨aschner, B. S. Rem, A. Eckardt, K. Sengstock, 和 C. Weitenberg，通过链接数获取陈数以从动力学测量拓扑，Nat. Commun. 10, 1 (2019). [34] L. Asteria, D. Thanh Tran, T. Ozawa, M. Tarnowski, B. S. Rem, N. Fl¨aschner, K. Sengstock, N. Goldman, 和 C. Weitenberg，测量超冷拓扑物质中的量子化圆二色性，Nat. Phys. 15, 449 (2019). [35] M. Hafezi, S. Mittal, J. Fan, A. Migdall, 和 J. M. Taylor,

硅光子学中的拓扑边缘态成像，《自然·光子学》7, 1001 (2013). [36] M. C. Rechtsman, J. M. Zeuner, Y. Plotnik, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev, 和 A. Sza- meit，光子弗洛凯拓扑绝缘体，《自然》496, 196 (2013). [37] A. Celi, P. Massignan, J. Ruseckas, N. Goldman, I. Spiel- man, G. Juzeli¯unas, 和 M. Lewenstein, 合成维度中的合成规范场，Phys. Rev. Lett. 112, 043001 2014( ). [38] T. Ozawa 和 H. M. Price，合成维度中的拓扑量子物质，Nat. Rev. Phys. 1, 349 (2019). [39] M. Mancini, G. Pagano, G. Cappellini, L. Livi, M. Rider, J. Catani, C. Sias, P. Zoller, M. Inguscio, M. Dalmonte, 和 L. Fallani，在合成霍尔条带中利用中性费米子观测手性边缘态，《科学》349, 1510 2015( ). [40] B. K. Stuhl, H.-I. Lu, L. M. Aycock, D. Genkina, 和 I. B. Spielman，在量子霍尔区利用原子玻色气体可视化边缘态，《科学》349, 1514 (2015). [41] T. Chalopin, T. Satoor, A. Evrard, V. Makhalov, J. Dal- ibard, R. Lopes, 和 S. Nascimbene，探测合成霍尔系统的手性边缘动力学与体拓扑，Nat. Phys. 16, 1017 (2020). [42] N. Goldman, J. Beugnon, 和 F. Gerbier，在霍夫施塔特光学晶格中探测手性边缘态，Phys. Rev. Lett. 108, 255303 (2012). [43] N. Goldman, J. Dalibard, A. Dauphin, F. Gerbier, M. Lewenstein, P. Zoller, 和 I. B. Spielman，在冷原子系统中直接成像拓扑边缘态，《美国国家科学院院刊》110, 6736 (2013). [44] N. Goldman, G. Jotzu, M. Messer, F. G¨org, R. Des- buquois, 和 T. Esslinger，在二维光学晶格中创建拓扑界面并探测手性边缘模，Phys. Rev. A 94, 043611 (2016).[45] 定义为边缘高度从8%到92%之间的距离。假设成像物镜性能良好，且其数值孔径为 NA= 0.5，据此估算该宽度；然而，由于存在有限像差，原子平面中的实际宽度很可能更大。 [46] T. D. Stanescu, V. Galitski, 和 S. Das Sarma，二维光学晶格中的拓扑态，Phys. Rev. A 82, 013608 (2010). [47] M. Buchhold, D. Cocks, 和 W. Hofstetter，平滑边界对光学晶格中拓扑边缘模的影响，Phys. Rev. A 85, 063614 (2012). [48] F. D. M. Haldane，一种无需朗道能级的量子霍尔效应模型：宇称反常的凝聚态实现，Phys. Rev. Lett. 61, 2015 (1988). [49] U. Gebert, B. Irsigler, 和 W. Hofstetter，平滑约束霍夫施塔特费米子的局域陈标记，Phys. Rev. A 101, 063606 (2020). [50] J. Li, R.-L. Chu, J. K. Jain, 和 S.-Q. Shen，拓扑安德森绝缘体，Phys. Rev. Lett. 102, 136806 (2009). [51] P. Titum, N. H. Lindner, M. C. Rechtsman, 和 G. Re- fael，无序诱导的弗洛凯拓扑绝缘体，Phys. Rev. Lett. 114, 056801 (2015). [52] S. St¨utzer, Y. Plotnik, Y. Lumer, P. Titum, N. H. Lind- ner, M. Segev, M. C. Rechtsman, 和 A. Szameit，光子拓扑安德森绝缘体，《自然》560, 461 (2018). [53] P. Titum, E. Berg, M. S. Rudner, G. Refael, 和 N. H. Lindner，反常弗洛凯-安德森绝缘体作为一种非绝热量子化电荷泵，Phys. Rev. X 6, 021013 2016( )。[54] F. Nathan、D. Abanin、E. Berg、N. H. Lindner 和 M. S. Rudner，《反常弗洛凯绝缘体》，Phys. Rev. B 99, 195133 2019( )。[55] H. van Houten 和 C. Beenakker，《量子点接触》，Physics Today 49, 22 (1996)。[56] Y. Ji、Y. Chung、D. Sprinzak、M. Heiblum、D. Mahalu 和 H. Shtrikman，《电子马赫–曾德尔干涉仪》，Nature 422, 415 (2003)。[57] J.-L. Tambasco、G. Corrielli、R. J. Chapman、A. Crespi、O. Zilberberg、R. Osellame 和 A. Peruzzo，《光的拓扑态的量子干涉》，Sci. Adv. 4, eaat3187 (2018)。[58] M. Carrega、L. Chirolli、S. Heun 和 L. Sorba，《量子霍尔干涉测量中的任意子》，Nat. Rev. Phys. 3, 698 (2021)。[59] M. B¨uttiker，《无磁场下的边缘态物理》，Science 325, 278 (2009)。[60]M. F. Mart´ınez 和 F. N. ¨Unal，《反常弗洛凯拓扑相中的波包动力学与边缘输运》，arXiv:2302.08485 (2023)。[61] U. Schneider、L. Hacker m¨uller、J. P. Ronzheimer、S. Will、S. Braun、T. Best、I. Bloch、E. Demler、S. Mandt、D. Rasch 和 A. Rosch，《超冷原子均匀哈伯德模型中的费米子输运与非平衡动力学》，Nat. Phys. 8, 213 (2012)。[62] J. P. Ronzheimer、M. Schreiber、S. Braun、S. S. Hodgman、S. Langer、I. P. McCulloch、F. Heidrich-Meisner、I. Bloch 和 U. Schneider，《一维和二维均匀晶格中相互作用玻色子的膨胀动力学》，Phys. Rev. Lett. 110, 205301 (2013)。[63] W. D¨ur、R. Raussendorf、V. M. Kendon 和 H.-J. Briegel，《光学晶格中的量子行走》，Phys. Rev. A 66, 052319 (2002)。[64] O. Morsch 和 M. Oberthaler，《光学晶格中玻色–爱因斯坦凝聚体的动力学》，Rev. Mod. Phys. 78, 179 (2006)。

补充信息

光镊光学装置

光镊通过用声光偏转器（AA Optoelectronic DTSXY-400-1064）偏转波长为 $\lambda_{\mathrm{T}} = 1064$nm的激光束产生。随后，使用焦距分别为150 mm和400 mm的透镜构成的望远镜系统对该光束进行扩束，使其束腰约为7.5 mm，并通过显微物镜聚焦在原子平面上。在该处，其束腰约为1.1μm；改变光束的偏转角即可改变光镊投射到原子上的位置。

阱频率测量

通过将原子从玻色-爱因斯坦凝聚体装载到光镊中，施加与方法部分所述相同的速度踢，并让原子在光镊势中振荡可变时长 t_{osc}，从而测量光镊在 xy 平面内的频率。随后迅速关闭光镊，并让云团在光学偶极阱中膨胀：对于较大的光镊阱深，膨胀时间为 $t_{\mathrm{exp}} = 0.5$ 毫秒；对于较小的阱深，膨胀时间为 $t_{\mathrm{exp}} = 1$ 毫秒。通过拍摄吸收图像测量原子云的质心位置。为提高信噪比，我们对若干次实验实现取平均，并通过对平均图像拟合高斯函数来计算质心位置。由于光镊的典型振荡频率约为1–2 kHz，与 $1/t_{\mathrm{exp}}$ 相当，因此从动量到位置的映射是合理的；云团的平均位置 $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ 与振荡结束时的质心速度 $\langle \boldsymbol{v}_0 \rangle$ 之间的关系为

$$\langle \boldsymbol{r} \rangle \approx \langle \boldsymbol{v}_0 \rangle t_{\mathrm{exp}} \sin\left(\omega_{\perp} t_{\mathrm{osc}}\right). \tag{S.1}$$

我们用正弦函数拟合观测到的振荡，其频率决定了平面内囚禁频率 $\omega_{\perp}$，即光镊的囚禁频率。对于正文中报告的大多数实验，频率设为$\omega_{\perp}/(2\pi) = 2.0(1)$ kHz，其中不确定度表示数月内进行的多次测量结果的标准差。唯一的不同是图2c 中的菱形数据点，其测量时的平面内频率为 $\omega_{\perp}/(2\pi) = 1.3(1)$ kHz。

原则上，可以像上文对光镊阱所述的那样，通过观测质心振荡来确定偶极阱的水平阱频率。然而，在此情况下，晶格光束的存在会改变囚禁频率，因为晶格光束会增加反囚禁势，从而降低整体囚禁频率。因此，我们采用一种略有不同的方法。

我们将大量玻色-爱因斯坦凝聚体装载到静态蜂窝晶格最低能带的 Γ 点，并让其在其中演化一段可变时长，随后进行能带映射测量，以观测云团的动量分布。我们发现，该分布始终集中在 Γ点附近，并观测到谐振阱中的残余振荡。该振荡的频率为 $\omega_{\mathrm{ODT}}/(2\pi) = 17(1)$赫兹。

通过观察云团从相对于偶极阱和光学晶格沿 z 方向偏移的光镊阱中释放后的垂直振荡，测量偶极阱与光学晶格组合系统的垂直频率。在 7 毫秒飞行时间后测量阱中的振荡，从而将速度映射为位置。将质心位置随时间的变化拟合为正弦曲线，得到垂直频率为 $2\pi \times 330(30)$ Hz。

改变踢击方向

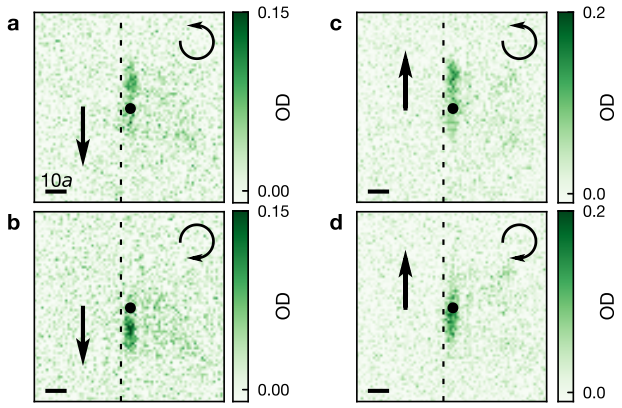

图 S1. **在 Haldane 区域改变踢击方向。** 每幅图像**a-d** 展示了原子在不同参数下的演化：踢击方向由左侧指向上方或下方的箭头表示；调制的手性由右上方环形箭头的方向表示，分别对应**a,c**中的 $\kappa = -1$ 以及**b,d**中的$\kappa = 1$ 。黑点表示云团的初始位置。虚线表示边缘所在位置，左下方的标尺表示长度为 $10a$。

在将原子制备于 Haldane 相的边缘态时，会对原子云团施加速度踢。我们在此验证，速度踢的方向不会改变云团后续的动力学，尤其不会改变其沿边缘的传播方向；传播方向完全由拓扑边缘模的手性决定。图S1 展示了 Haldane 区域内原子云团在两种相反的晶格调制手性（分别对应上排和下排）以及两种相反方向的初始速度踢（分别对应左列和右列）下的演化平均图像。这些图像

表明，原子沿边缘的传播方向仅由调制的手性决定，也就是说，由拓扑边缘模的手性决定。初始踢击的方向不起作用，因为施加踢击的目的是使原子云团从准动量为 0 的状态，向准动量最大值靠近：朝一个方向踢击时为 $+\pi/L_y$，朝相反方向踢击时为 $-\pi/L_y$。这里，L_y 表示晶胞的长度，因此 $|\pi/L_y|$ 是波包能够具有的最大准动量，因为这两个准动量代表相同的量子态。光镊的囚禁频率为 $\omega_\perp = 2\pi \times 2.0(1)$ 千赫兹。

原子数校准

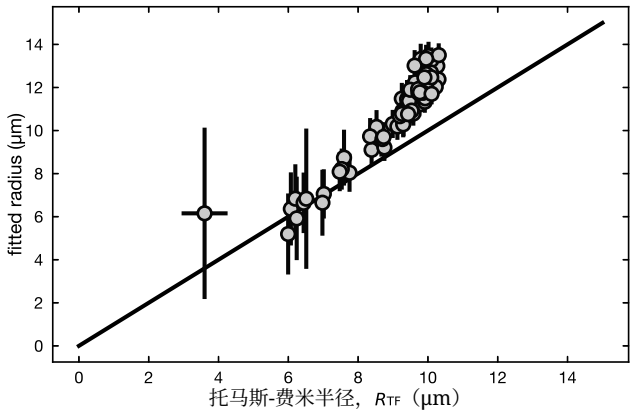

图 S2. **原子数校准**。每个数据点对应于偶极阱中玻色-爱因斯坦凝聚体的一次实验实现。云团的两个估算径向尺寸分别绘制在横轴和纵轴上。横轴经过重新缩放，以匹配对稀薄区云团尺寸的估算值。实线的斜率为 1，纵向误差棒表示半径拟合的误差，横向误差则根据吸收图像的背景噪声估算。

我们通过两种方法估算光学偶极阱中小型玻色-爱因斯坦凝聚体的托马斯-费米半径，从而校准观测到的边缘模原子数。第一种方法是用倒抛物线拟合云团的密度分布，第二种方法是通过托马斯-费米公式计算：

$$R_{\mathrm{TF}} = \left(\frac{15 N_{\mathrm{at}} a_{\mathrm{s}} \hbar^2 \omega_z}{m_{\mathrm{K}}^2 \omega_r^3} \right)^{1/5}, \qquad \text{(S.2)}$$

其中，a_{s} 是原子的 s波散射长度，m_{K} 是钾原子的质量，而 ω_z（分别为 ω_r）是光学偶极阱的垂直（分别为径向）频率。在此公式中，原子数 N_{at}由 σ_{sc}OD替代，其中 σ_{sc} 是成像过程的散射截面，OD是累积的云团光学密度。由于成像时 σ_{sc} 态彼此接近，其确切值未知。比较托马斯-费米半径的两个测量值，可以校准该量，进而得出光学密度与原子数之间的比例因子。

我们对光学偶极阱中的小型玻色-爱因斯坦凝聚体连续拍摄一系列图像，并对每张图像采用上述两种方法计算托马斯-费米半径。图S2 展示了结果，其中横轴通过调整

σ_{sc} 使得用两种方法得到的密度最低云团的托马斯–费米半径相匹配：实线的斜率为 1。我们得到的散射截面为 $\sigma_{\mathrm{sc}} = 0.085 \times 3\lambda_0^2/(2\pi)$，其中$\lambda_0 = 767\mathrm{nm}$ 是成像光的波长。随后使用该数值估算加载到边缘模中的原子数。

边缘态中原子的寿命

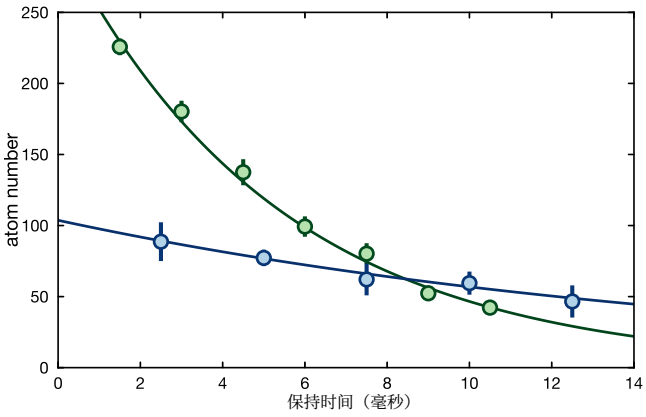

图 S3。**边缘态中原子的寿命**。在两种状态下测量边缘模中的原子数：Haldane（绿色）和反常（蓝色）。误差棒表示通过自助法得到的原子数的标准差（见正文）。使用指数衰减对数据点进行拟合（实线），并将寿命作为唯一的自由参数提取。所示数据分别是蓝色数据点的 10–38 次测量和绿色数据点的 27–72 次测量的平均值；保持时间越长，平均次数越多。

我们通过对不同演化时间下的平均图像的光学密度求和，测量处于边缘态的原子的寿命。我们通过对不同图像子集求平均，并计算这些平均图像的光学密度总和，以评估该总和的误差；这一方法与自助法中描述的步骤类似（见方法部分E。随后，将光学密度总和及其相应的误差棒

乘以上文确定的因子，得到原子数。图S3 展示了两次实验中原子数随保持时间的变化：一次处于 Haldane 区域（绿色），另一次处于反常区间（蓝色）。随后，我们分别用指数衰减函数拟合每个数据集，以评估特征寿命。Haldane 区域中的特征寿命为 5 毫秒，反常相中的特征寿命为 17 毫秒。作为参考，在没有边缘势的调制晶格中，体区玻色-爱因斯坦凝聚体的寿命测得约为 100 毫秒。边缘模寿命缩短可能是由竖直方向上的寄生动力学造成的：与势边缘分辨率相关的瑞利长度约为 3μm，小于制备好的原子的竖直延展尺寸

光镊。因此，可能只有部分原子云能够被制备到边缘模中，此时观测到的损失率将是调制晶格中的加热与沿垂直方向损失的综合结果。相比之下，通过在偶极阱和蜂窝晶格共同形成的势中制备一个较大的玻色-爱因斯坦凝聚体，测量原子云在调制晶格中的寿命；这种方法不会受到垂直方向势不匹配的影响。反常区间的调制频率为 $\omega = 2\pi \times 7$kHz，Haldane 区域为 $\omega = 2\pi \times 16$kHz；两个区域的调制振幅均为 $m = 0.25$，光镊阱频率为 $\omega_\perp = 2\pi \times 2.0(1)$ kHz。