arXiv:2304.01989v1 [cs.IT] 4 Apr 2023

通过多跳更新过程及时跟踪远程动态源

Priyanka Kaswan SennurUlukus电气与计算机工程系 马里兰大学帕克分校，MD
20742pkaswan@umd.edu ulukus@umd.edu

摘要——**我们研究多跳多播缓存网络中的信息版本年龄。在该网络中，源节点的更新带有递增的版本号，且链路上的更新间隔不一定服从指数分布。我们关注非格点分布，包括连续概率分布这一子集，并要求更新间隔具有有限的一阶和二阶矩。首先，我们刻画任意网络中各节点的瞬时信息版本年龄。随后，我们详细推导多跳网络中瞬时信息版本年龄的递归方程，并利用更新过程的半鞅表示，得出终端用户处期望信息版本年龄的闭式表达式。我们证明，多跳网络中的期望年龄具有可加结构。此外，我们还证明，每个用户处的期望年龄与该用户至源节点之间所有链路上更新间隔的方差成正比。因此，终端用户节点应以固定间隔请求数据包更新。**

I. 引言

我们考虑一个缓存网络，由源节点、服务器节点和用户节点组成，采用树形拓扑，其中源节点为根节点，用户节点为叶节点，如图 1 所示。这种拓扑常见于多播网络，其中每台服务器为多个基站提供服务。源节点按照普通更新过程进行更新，并使用逻辑时钟为更新标记递增的数值，我们称之为更新数据包的版本号。用户节点试图通过一系列缓存辅助服务器节点，从源节点获取尽可能新的版本更新；所有链路上的更新均按照普通更新过程转发，但这些过程不一定是泊松过程。在这种情形下，版本信息年龄是衡量用户节点处信息新鲜度的自然指标。在时刻 t，如果节点 i 处可用的文件最新版本为 $W_i(t)$，而源节点当前的版本为 $W_0(t)$，那么该节点的瞬时版本年龄

i 在时刻 t定义为 $X_i(t) = W_0(t) - W_i(t)$。

由于指数分布（或几何分布）是唯一具有无记忆性的连续（或离散）概率分布，因此大多数研究网络中及时信息传播的既有工作都高度依赖这些分布 [1]–[20]。本文聚焦于多跳网络中基于非泊松更新过程的及时更新；在这方面，相关工作包括 [21] 和[22]。对于采用普通更新过程的多跳网络， [21]推导出了传统信息年龄的解析表达式

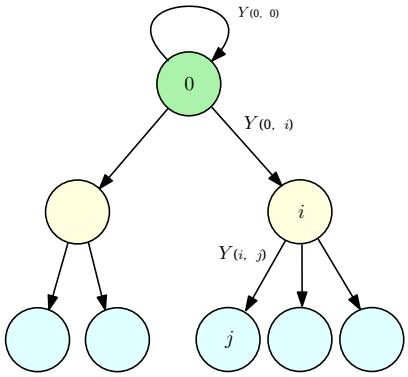


图 1. 源节点处进行版本更新的多跳多播树形网络。

，而 [22]则推导了严格平稳年龄过程情况下传统信息年龄的分布；参见 [22,第 V 节]。

由于源节点处额外叠加了一个更新点过程，因此（本文中的）版本信息年龄与传统信息年龄在分析上存在显著差异。这是因为传统信息年龄以单位速率增长，不考虑源节点处的更新过程，因此在某个节点处可完全根据自其直接服务器节点上次更新以来经过的时间，以及服务器节点处的信息年龄来描述。另一方面，版本信息年龄是一种离散度量：每当源节点更新到较新版本时，其值便递增 1；并且需要统计来自直接服务器节点的更新到达之间，源节点处发生的更新次数。

考虑图 2 所示的单跳网络，其中用户按照普通更新点过程从源节点下载数据包，更新间隔为正的独立同分布随机变量，记典型随机变量为Y ，其分布为非格点分布 F。在此意义下，如果分布 F 是分段常数的，且其增点包含于集合$\{0, d, 2d, \ldots\}$ 中，则称其为格点分布（或周期分布）；所有满足此条件的集合中最大的 $d > 0$ 称为该分布的跨度。当 F 不是格点分布时，则称其为非格点分布，例如具有连续部分 [23]的分布。

在图 2 中，首先考虑一个较简单的情形：源节点（节点0）以速率λ_s按照泊松过程更新。在这种情况下，节点 1 在时间t 的瞬时版本年龄 $X(t)$，由节点 1 上次从源节点下载数据包以来

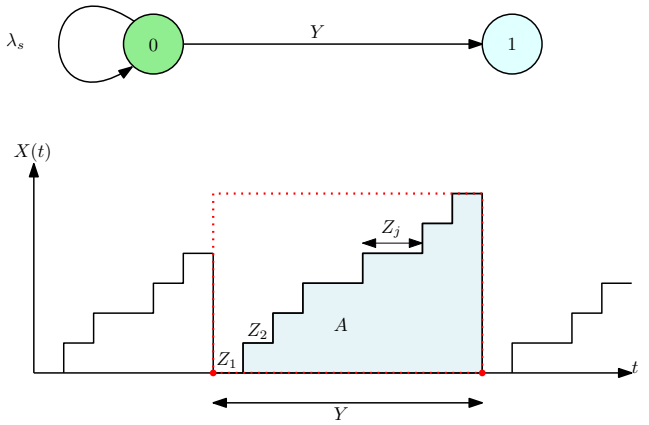


图 2. 单跳模型，其中源节点按照速率为 λ_s 的泊松过程获取更新，而更新按照典型更新间隔为 Y 的更新过程到达节点 1。

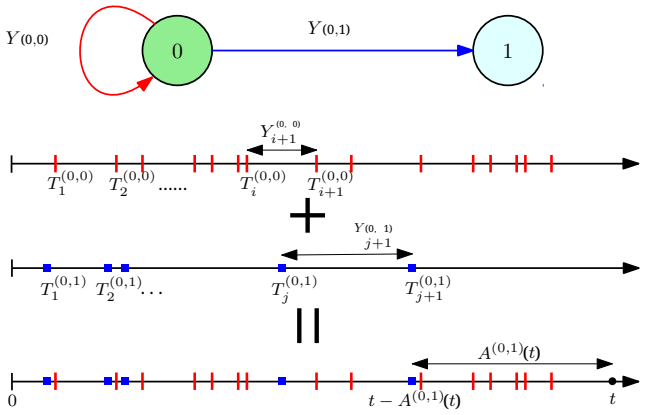


图 3. 单跳模型中更新过程 $N^{(0,0)}(t)$ 与 $N^{(0,1)}(t)$ 的叠加。

源节点发生的更新次数决定。在图 2 中，Y 表示节点1连续两次下载之间的一个典型更新间隔，Z_j 对应于源节点在间隔 Y 内两次更新之间的更新间隔 j，其中 Z_1 表示节点 1 下载之后到源节点首次更新之间的时间。由于泊松过程具有无记忆性，Z_1 服从指数分布，其他 Z_j 也如此。因此，特定更新间隔 Y 内任意时刻 t 的 $X(t)$，只取决于 Y 中 t 的位置，以及局限于 Y 的随机变量 Z_js；因此，$X(t)$ 符合更新报酬过程的定义。我们将 A 定义为更新间隔 Y 内的累积报酬，它对应于图 2 中阴影区域的面积。本文假设，所有更新过程的更新间隔分布都具有有限的一阶和二阶矩。因此，$\mathbb{E}[Y] < \infty$ 和 $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$，且以概率 1，根据 [24]

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{\mathbb{E}[A]}{\mathbb{E}[Y]} = \frac{\lambda_s \mathbb{E}[Y^2]}{2\mathbb{E}[Y]} \tag{1}$$

其中，图 2 中的阴影区域 A 可按照 [7] 进行计算。然而，当源节点按照一般更新过程获取更新时，如图 3 所示，由于更新间隔不具备无记忆性，Z_1 的分布取决于上一个更新间隔内源节点最后一次更新的时刻，这使得我们无法在不依赖过去的情况下刻画时间段 Y 内的版本年龄。

此外，若在该模型中增加第二个节点，就得到图 4 所示的两跳模型，其中节点 k 在时刻 $T_i^{(k-1,k)}$ 根据更新过程 k从节点 $k-1$ 接收更新。考虑一个典型的更新间隔 $[T_{(0,1)i}, T_{i+1}^{(0,1)}]$，如果更新间隔不具备无记忆性，那么在该间隔内，数据包到达节点 2 的时刻分布取决于前一个更新间隔中最后一个数据包到达节点 2 的时刻，因此无法将该间隔内的年龄过程独立于过去来刻画。同样，若考虑更新间隔 $[T_{(1,2)j}, T_{j+1}^{(1,2)}]$，那么该间隔开始时的用户年龄取决于之前各间隔中最后一个数据包到达节点 1 的时刻。因此，整个时间轴上不同时间间隔内的信息年龄演化彼此相关。由此，一个值得探讨的问题是：在k 较大时，能否以某种方式刻画终端用户年龄的系综平均。

这一间隔开始时的用户年龄取决于之前各间隔中最后一个数据包到达节点 1 的时刻。因此，整个时间轴上不同时间间隔内的信息年龄演化彼此相关。由此，一个值得探讨的问题是：在 t较大时，能否以某种方式刻画终端用户年龄的系综平均。

本文首先尝试刻画普通更新过程下缓存更新系统中的版本信息年龄。尽管对于一般网络而言，获取长期期望版本年龄的表达式十分困难，但我们为具有树形拓扑的多播网络提供了期望版本年龄的闭式表达式，如图 1 所示。为此，我们使用更新过程 $N(t)$ 的半鞅表示，对 Blackwell 定理 [25] 进行极限前细化，因为经典的 Blackwell 定理结果 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[N(t+a) - N(t)] = \frac{a}{\mathbb{E}[Y]}$ 仅能给出过程 $N(t)$ 在固定时间间隔 a 内的期望更新次数，这不足以进行本文中的版本信息年龄分析。

我们证明，多跳网络中的期望版本年龄呈现可加结构。此外，我们证明，每个用户处的期望版本年龄与该用户和源节点之间所有链路上的更新间隔的方差均值比成正比，并与源节点处更新过程的更新间隔均值成反比。这意味着，对于给定的平均更新速率，无论网络动态如何，终端用户都应以恒定间隔向其直接服务器请求数据包更新，以最小化其长期期望信息版本年龄。

II. 模型与符号

源节点按照更新过程 $N^{(0,0)}(t)$ 接收版本更新，节点 i 发往节点 j、经由链路 (i,j) 的数据包按照更新过程 $N^{(i,j)}(t)$ 到达。相应的有限随机时刻 $0 \le T_{(i,j)1} \le T_{(i,j)2} \le \cdots$ 表示更新时间，因此到达间隔 $Y_{(i,j)n} = T_n^{(i,j)} - T^{(i,j)n-1}$ 是服从共同分布 $F^{i,j}$的正独立同分布随机变量。假设该分布为非格点分布，且具有有限的一阶和二阶矩。给定

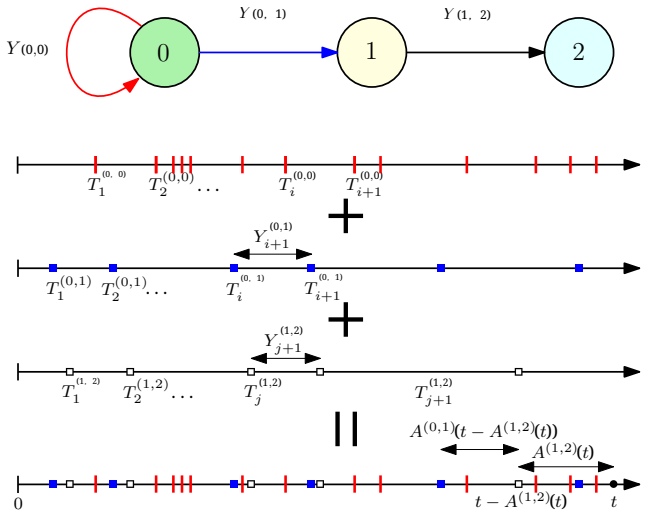


图 4. 两跳模型中，源更新过程 $N^{(0,0)}(t)$ 与两个更新过程 $N^{(0,1)}(t)$ 和 $N^{(0,1)}(t)$ 的叠加。

$N^{(i,j)}(t)$ ＝最大值$\{n: T_{(i,j)n} \leq t\}$，再生过程 $A^{(i,j)}(t) = t - T_{(i,j)N^{(i,j)}(t)}$ 表示时刻 t 对应的后向复发时间（或更新过程龄），即 t 之前上一次更新至该时刻的时间。同理，再生过程 $B^{(i,j)}(t) = T^{(i,j)}_{N^{(i,j)}(t)+1} - t$ 表示时刻 t 对应的前向复发时间（或更新过程的更新剩余时间），即该时刻到 t 之后下一次更新的时间。注意，$0 \leq A^{(i,j)}(t) \leq t$（后文将反复使用）。更多详情请参阅文献 [23], [24]。

考虑任意节点网络中的一个典型节点 j，并令 S_j 表示数据包到达节点 j的节点集合。来自节点 $i \in S_j$ 的最新数据包在时间 t 之前到达节点 j，其到达时刻为 $t - A^{(i,j)}(t) = T^{(i,j)}_{N^{(i,j)}(t)}$。此时，节点 j 会将到达数据包的版本号与其缓存中的数据包版本号进行比较，并丢弃较旧的版本，保留较新的版本。

令 $X_j(t)$ 表示节点 j 在时间 t的信息瞬时版本年龄。那么，$X_j(t)$ 可写为

$$X_j(t) = \sum_{i\in S_j}\Big[\prod_{k\in S_j\setminus\{i\}} \chi_{\{A^{(i,j)}(t)<A^{(k,j)}(t)\}}\Big] \times\Big[\min\big\{X_i(t-A^{(i,j)}(t)), X_j(t-A^{(i,j)}(t)\big\} + N^{(0,0)}(t) - N^{(0,0)}(t-A^{(i,j)}(t))\Big] \quad (2)$$

其中，$\chi_{\mathcal{A}}$ 表示可测集 $\mathcal{A}$ 的指示随机变量，且 $X_j(0) = 0$。由于源节点始终持有最新的数据包，$X_0(t) = 0$ 在所有时刻均成立。[1]

在（2）中，$\prod_{k\in S_j\setminus\{i\}} \chi_{\{A^{(i,j)}(t) < A^{(k,j)}(t)\}}$ 对应于这样一种情形：在时间 t 之前到达节点 j 的最后一个数据包来自节点 i，而这意味着

[1](2) 对更新间隔的分布不含原子点的情况成立。当分布含有原子点时，不同节点发出的数据包可能以非零概率同时到达节点 j。可以通过为不同的入链路指定优先级顺序来解决这一情况；这会使式 (2) 中指示变量里的某些“<”变为“≤”。

在时间 t，所有其他相关更新过程的后向复发时间均大于 $A^{(i,j)}(t)$。式（2）中的最后一项$N^{(0,0)}(t) - N^{(0,0)}(t - A^{(i,j)}(t))$ 源于这样一个事实：在最后一个数据包到达 $t - A^{(i,j)}$ 之后，每当源节点更新一次，节点 j 的版本年龄就增加 1。

下一步，$\min\{X_i(t - A^{(i,j)}(t)), X_j(t - A^{(i,j)}(t)\}$，即两个年龄过程的最小值，可以通过考虑来自集合 $S_i \cup S_j$ 的节点 $\{i, j\}$ 处的到达情况，按照类似于式 (2) 的方式进一步刻画；相应的表达式将包含对三个年龄过程取最小值的项，例如 min $\{X_i(t') \; X_j(t') \; X_k(t')\}$ $t' = t - A^{(i,j)}(t) - A^{(k,j)}(t - A^{(i,j)}(t))$，其中 t' 的定义中遇到了项 $A^{(k,j)}(t - A^{(i,j)}(t))$。尽管这两项对应于同一个更新过程 $N^{(k,j)}(t)$，但这些后向复发时间可能会随时间产生相关性，从而使分析变得复杂。

乍一看，这可能会让人觉得，由于所有更新过程及其相关的复发时间都是相互独立的，通过将 $X_j(t)$ 化简为仅由后向复发时间构成的函数，就可以方便地计算 $X_j(t)$ 的期望。然而请注意，在上述递推的第一步和第二步中，我们在式（2）的指示变量乘积中遇到了项 $A^{(k,j)}(t)$，并在 t' 的定义中遇到了项 $A^{(k,j)}(t - A^{(i,j)}(t))$。尽管这两项对应于同一个更新过程 $N^{(k,j)}(t)$，但这些后向复发时间可能会随时间产生相关性，从而使分析变得复杂。

然而，如果假设网络中的每个节点只有一条入链路，如图 1 所示的树形网络那样，则不会出现这一复杂情况。这是因为，$|S_j| = 1$，式（2）中的乘积项为零。此外，由于数据包现在从单个前置节点 i 到达节点 j，对于所有 t，都有 $X_i(t) \leq X_j(t)$，因此这简化了最小值项，如下所示

$$\min\big\{X_i(t-A^{(i,j)}(t)), X_j(t-A^{(i,j)}(t))\big\} = X_i(t-A^{(i,j)}(t)) \quad (3)$$

在下一节中，我们将推导出具有树形拓扑的网络中每个节点的长期期望版本信息年龄 $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X_j(t)]$ j 的闭式表达式。

III. 树形结构网络中的版本年龄

A. 单跳网络

我们考虑一个单跳网络，其中源节点按照不一定服从泊松分布的更新过程进行更新；见图 3。在时刻 t，节点 1 从节点 0 接收到的最后一个数据包到达时间为 $t - A^{(0,1)}(t)$，因此，节点 1 的瞬时版本年龄取决于源节点在区间 $(t-A^{(0,1)}(t)\; t]$ 内发生的版本更新次数，从而得到

$$X_1(t) = N^{(0,0)}(t) - N^{(0,0)}(t-A^{(0,1)}(t)) + X_0(t-A^{(0,1)}(t)) \quad (4)$$

引理 1 给定独立随机过程 $S_1(t)$ 和$S_2(t)$，满足 $\sup_{t\geq 0}|\mathbb{E}[S_1(t)]|<\infty$ 且 $0\leq S_2(t)\leq t$，并且满足$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[S_1(t)]$ 和$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[S_2(t)]$ 存在，则有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[S_1(t-S_2(t))]=\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[S_1(t)] \tag{5}$$

引理 1 首先在 [21]中提出并证明。

引理 2 设 $N(t)$ 为一个具有独立同分布（*i.i.d.*）间隔更新时间的更新过程，其典型随机变量记为 Y，具有非格点分布且一阶和二阶矩有限。设 $S(t)$ 为一个与 $N(t)$独立的随机过程，并且 $0\leq S(t)\leq t$ 且$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[S(t)]$ 存在。那么，

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[N(t)-N(t-S(t))]=\frac{\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[S(t)]}{\mathbb{E}[Y]} \tag{6}$$

证明： 取 $\mu=\mathbb{E}[Y]$, [25]，可得更新过程 $N(t)$ 的如下半鞅表示,

$$N(t)=\frac{t+B(t)}{\mu}+M(t) \tag{7}$$

其中 $B(t)$ 是与更新过程 $N(t)$ 相关的前向复发时间，而 $M(t)=N(t)+1-\frac{T_{N(t)+1}}{\mu}$是一个鞅。设 $m(t)=\mathbb{E}[N(t)]$且 $b(t)=\mathbb{E}[B(t)]$,，则由于 $\mathbb{E}[Y]<\infty$和 $\mathbb{E}[Y^2]<\infty$，由更新报酬定理[24]可得 $\lim_{t\to\infty}b(t)=\frac{\mathbb{E}[Y^2]}{2\mathbb{E}[Y]}=b_1$。这意味着存在 T，使得对所有 $t\geq T$，$b(t)<b_1+\epsilon$，其中某个 $\epsilon>0$。此外，对于任意 $t<T$，$B(t)\leq(T-t)+B(T)\leq T+b_1+\epsilon$；在最坏情况下，时间区间（$t$，$T$）内不会发生更新，因此有 $B(t)=(T-t)+B(T)$。因此,

$$\sup_{t\geq 0}|b(t)|\leq T+b_1+\epsilon<\infty \tag{8}$$

利用 $\mathbb{E}[M(t)]=\mathbb{E}[M(0)]=0$ 对所有 t 均成立这一事实（参见 Wald恒等式， [24]），由于 $M(t)$ 是一个鞅，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[N(t)-N(t-S(t))]\\&=\mathbb{E}\left[\frac{t+B(t)}{\mu}-\frac{t-S(t)+B(t-S(t))}{\mu}\right] &(9)\\&=\mathbb{E}\left[\frac{S(t)+B(t)-B(t-S(t))}{\mu}\right] &(10)\end{aligned}$$

对两边取极限 $t\to\infty$，并利用引理 1 以及 $S_1(t)=B(t)$ 和 $S_2(t)=S(t)$，即可得到所需结果。 ■

回到计算图 3 中的 $\lim_{\to\infty}\mathbb{E}[X_1(t)]$，利用式 (4)、引理 2 以及 $X_0(t-A^{(0,1)}(t))=0$，可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X_1(t)]&=\frac{\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[A^{(0,1)}(t)]}{\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]} &(11)\\&=\frac{\mathbb{E}[\left(Y^{(0,1)}\right)^2]}{2\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]\mathbb{E}[Y^{(0,1)}]} &(12)\end{aligned}$$

注意，如果图 3 中的两个过程都是泊松分布，那么用户节点处的期望版本年龄已知为 $\frac{\lambda_s}{\lambda}$ [7],[12]。因此，值得注意的是，λ_s这里是$\frac{1}{\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]}$,的代理量，而 λ是 $\frac{2\mathbb{E}[Y^{(0,1)}]}{\mathbb{E}[\left(Y^{(0,1)}\right)^2]}$的代理量。

B. 两跳网络

考虑图 4 中的两跳网络，我们希望确定节点 2 处的长期期望年龄。那么，瞬时版本年龄 $X_2(t)$可以写为

$$\begin{aligned}X_2(t)=&N^{(0,0)}(t)-N^{(0,0)}(t-A^{(1,2)}(t))\\&+X_1(t-A^{(1,2)}(t))\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $X_1(t-A^{(1,2)}(t))$ 又可表示为

$$\begin{aligned}&X_1(t-A^{(1,2)}(t))\\&=N^{(0,0)}(t-A^{(1,2)}(t))\\&\quad-N^{(0,0)}(t-A^{(1,2)}(t)-A^{(0,1)}(t-A^{(1,2)}(t)))\\&\quad+X_0(t-A^{(1,2)}(t)-A^{(0,1)}(t-A^{(1,2)}(t)))\end{aligned} \tag{14}$$

定义

$$\Delta_1(t)=A^{(1,2)}(t) \tag{15}$$

$$\Delta_2(t)=A^{(0,1)}(t-A^{(1,2)}(t)) \tag{16}$$

将 (14)、(15) 和 (16) 代入 (13)，并利用 $X_0(t-\Delta_1(t)-\Delta_2(t))=0$，可得

$$\begin{aligned}X_2(t)=&N^{(0,0)}(t)-N^{(0,0)}(t-\Delta_1(t))+N^{(0,0)}(t-\Delta_1(t))\\&-N^{(0,0)}(t-\Delta_1(t)-\Delta_2(t)) &(17)\\=&N^{(0,0)}(t)-N^{(0,0)}(t-\Delta_1(t)-\Delta_2(t)) &(18)\end{aligned}$$

为计算 (18) 中的期望，$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X_2(t)]$,，我们使用引理 2，这需要计算在 $t\to\infty$ 处的项 $\mathbb{E}[\Delta_1(t)]$和 $\mathbb{E}[\Delta_2(t)]$ 。后向复发时间$A^{(1,2)}(t)$的极限期望如下： [24]

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\Delta_1(t)]=\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[A^{(1,2)}(t)]=\frac{\mathbb{E}\left[\left(Y^{(1,2)}\right)^2\right]}{2\mathbb{E}\left[Y^{(1,2)}\right]} \tag{19}$$

同理，有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[A^{(0,1)}(t)]=\frac{\mathbb{E}\left[\left(Y^{(0,1)}\right)^2\right]}{2\mathbb{E}\left[Y^{(0,1)}\right]} \tag{20}$$

由于极限 $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[A^{(0,1)}(t)]$ 存在，存在 T，使得对所有 $t>T$，$\mathbb{E}[A^{(0,1)}(t)]<\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[A^{(0,1)}(t)]+\epsilon$，其中某个 $\epsilon>0$。此外，根据定义，$0\leq A^{(0,1)}(t)\leq t$，因此对于 $t\leq T$，有 $\mathbb{E}[A^{(0,1)}(t)]<T$。于是,

$$\sup_{t\geq 0}\left|\mathbb{E}[A^{(0,1)}(t)]\right|\leq\max\left\{\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[A^{(0,1)}(t)]+\epsilon,T\right\}<\infty \tag{21}$$

因此，根据引理 1,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\Delta_2(t)]=\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[A^{(0,1)}(t)]=\frac{\mathbb{E}\left[\left(Y^{(0,1)}\right)^2\right]}{2\mathbb{E}\left[Y^{(0,1)}\right]} \tag{22}$$

由于 $0\leq\Delta_1(t)+\Delta_2(t)\leq t$ 且 $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\Delta_1(t)+\Delta_2(t)]$存在，根据引理 2，节点 2 的长期期望年龄为

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X_2(t)]=\frac{\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\Delta_1(t)+\Delta_2(t)]}{\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]} \tag{23}$$

$$= \frac{1}{\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]} \left(\frac{\mathbb{E}\left[\left(Y^{(1,2)}\right)^2\right]}{2\mathbb{E}\left[Y^{(1,2)}\right]} + \frac{\mathbb{E}\left[\left(Y^{(0,1)}\right)^2\right]}{2\mathbb{E}\left[Y^{(0,1)}\right]} \right) \quad (24)$$

有趣的是，节点 2 的年龄由从节点 0 到节点 2 的路径上各条链路的独立贡献之和除以 $\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]$ 决定。一般而言，对于树形网络，除了源节点处的更新过程外，只有源节点与终端用户之间路径上的链路会影响终端用户的年龄动态。因此，在下一小节中，我们研究 n 跳线性网络。

C. 多跳网络

考虑图 5 所示的 n 跳网络，我们希望确定网络节点 n 处的长期期望年龄。我们通过以下递推方程定义时间段 $\Delta_i(t)$、$i \geq 1$

$$\Delta_i(t) = A^{(n-i,n-i+1)}(t - \sum_{j=0}^{i-1} \Delta_j(t)) \quad (25)$$

其中 $\Delta_0(t) = 0$，见图 5。请注意，根据 $A^{(n-i,n-i+1)}(t)$ 的定义，$\Delta_i(t)$ 小于 $t - \sum_{j=0}^{i-1} \Delta_j(t)$。类似于式 (13)，节点 n 处的瞬时年龄 $X_n(t)$ 可写为

$$\begin{aligned} X_n(t) =& N^{(0,0)}(t) - N^{(0,0)}(t - A^{(n-1,n)}(t)) \\ &+ X_{n-1}(t - A^{(n-1,n)}(t)) \end{aligned} \quad (26)$$

这也可以表示为

$$\begin{aligned} X_n(t - \Delta_0(t)) =& N^{(0,0)}(t) - N^{(0,0)}(t - \Delta_0(t) - \Delta_1(t)) \\ &+ X_{n-1}(t - \Delta_0(t) - \Delta_1(t)) \end{aligned} \quad (27)$$

在下一步中，式 (26) 中的 $X_{n-1}(t - A^{(n-1,n)}(t))$ 将以类似方式再次进行刻画，而在这种递归方法中得到的完整方程组形式为

$$\begin{aligned} X_{n-i}(t - \sum_{j=0}^{i} \Delta_j(t)) =& N^{(0,0)}(t - \sum_{j=0}^{i} \Delta_j(t)) \\ &- N^{(0,0)}(t - \sum_{j=0}^{i+1} \Delta_j(t)) \\ &+ X_{n-i-1}(t - \sum_{j=0}^{i+1} \Delta_j(t)) \end{aligned} \quad (28)$$

对于 $0 \leq i \leq n-1$，其中 $X_0(t - \sum_{j=1}^{n} \Delta_j(t)) = 0$ 表示节点 0 为源节点。然后，由（28）可得

$$X_n(t) = N^{(0,0)}(t) - N^{(0,0)}(t - \sum_{j=1}^{n} \Delta_j(t)) \quad (29)$$

与（19）类似，有

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\Delta_1(t)] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[A^{(n-1,n)}(t)] = \frac{\mathbb{E}\left[\left(Y^{(n-1,n)}\right)^2\right]}{2\mathbb{E}\left[Y^{(n-1,n)}\right]} \quad (30)$$

此外，采用式 (21) 的方法，我们得到 $\sup_{t\geq 0} \left|\mathbb{E}[A^{(n-i,n-i+1)}(t)]\right| < \infty$。由于 $\sum_{j=0}^{i-1} \Delta_j(t) \leq t$，

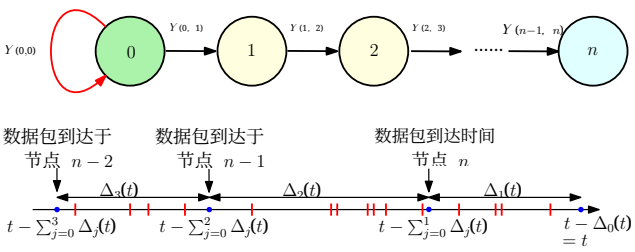


图 5. n跳模型中用于 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 的时间段 $\Delta_i(t)$。红色标记的点表示源节点处的版本更新。

我们可以利用引理 1，从式 (25) 递归地证明 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\Delta_i(t)] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[A^{(n-i,n-i+1)}(t)]$，对于 $i = 2, 3, \ldots, n$。

因此，由（29）可得

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X_n(t)] = \frac{\sum_{j=1}^{n} \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\Delta_j(t)]}{\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]} \quad (31)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]} \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\left[\left(Y^{(n-j,n-j+1)}\right)^2\right]}{2\mathbb{E}\left[Y^{(n-j,n-j+1)}\right]} \quad (32)$$

有趣的是，节点 n 处的年龄取决于中间链路 $(i, i+1)$ 的独立贡献，$0 \leq i \leq n-1$，且不受这些链路排列顺序的影响。因此，每个节点都可以通过优化自身的数据包请求更新过程来最小化其年龄，而无需考虑网络中其他节点和链路的统计特性。由于常数随机变量的方差为零，对于给定的均值 $\mathbb{E}[Y^{(n-j,n-j+1)}]$，（32）表明，所有节点都应以近似固定的时间间隔请求数据包，以降低方差。此外，节点 n 处的年龄与 $\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]$ 成反比，这意味着平均而言，对于更新速度较快的源节点，各节点的版本年龄会更大。

此外，如果图 5 中的所有更新过程均为泊松分布，其中 λ_s 为源更新率，λ_j 为链路 $(n-j, n-j+1)$ 更新率，那么式（32）可简化为

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X_n(t)] = \lambda_s \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \quad (33)$$

这也可由 [12, 定理 1]或 [8, 式(11)] 推得，并且与 [1,定理 2] 存在有趣的相似性。

IV. 数值结果

我们首先针对 $n = 3$ 对图 5 中的模型进行仿真，即一个包含 3 跳的模型，其链路为 (0，1)，(1，2) 和 (2，3)，链路间更新间隔分布分别为：尺度参数为 $\sigma = 1$ 的瑞利分布、自由度为 $k = 1$ 的卡方分布，以及形状参数为 $\alpha = 2$、$\beta = 3$ 的贝塔分布。我们按照帕累托（I型）分布更新源节点，该分布的均值为 $\mathbb{E}[Y^{(0,0)}] = \frac{am}{a-1}$，形状参数为 a，尺度参数为 m。我们对网络进行长时间仿真，仿真时长为 $T = 10^3$，并在 2×10^5 次迭代中对 $X_n(T)$ 取平均，以根据大数定律近似 $\mathbb{E}[X_n(T)]$。该值用作 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X_n(t)]$ 的代理量。图 6 展示了 $\mathbb{E}[X_n(T)]$ 随 $\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]$ 变化的曲线，该曲线通过改变尺度参数 m、同时保持帕累托分布中的 $a = 3$ 不变而得到。该曲线支持公式 (32) 对 $\frac{2.5479}{\mathbb{E}[Y^{(0,0)}]}$ 的理论预测。

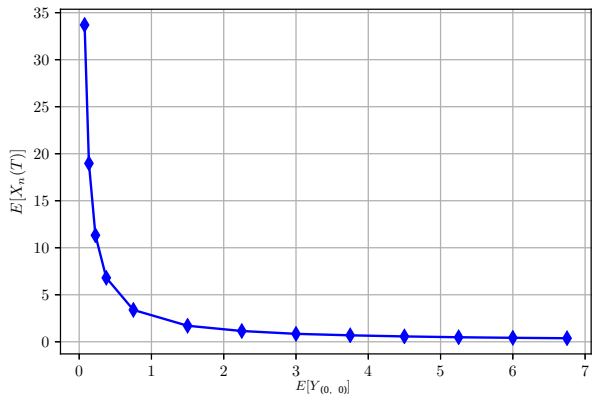
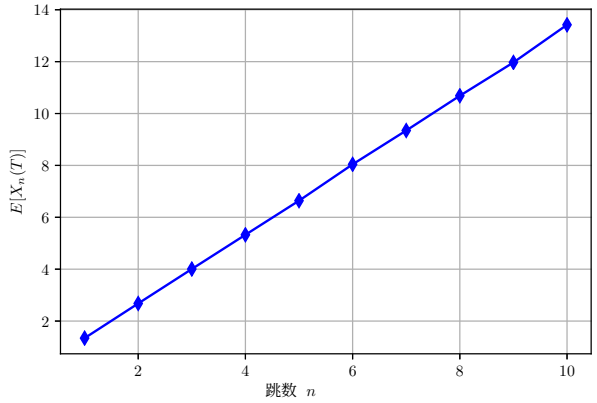


图 6. $\mathbb{E}[X_n(T)]$ 在具有 $Y_{(0,\ 0)} \sim Pareto(3,$ m $\sim$ $Rayleigh\ 1$ $Y^{1,2} \sim \chi^2\ 1$ $Y^{2,3} \sim Beta\ 2,3$ ）、$Y_{(0,\ 1)}$（）、（）（）和（）（）的 3跳网络中，绘制为不同 $\mathbb{E}[Y_{(0,\ 0)}]$ 值下通过改变 m获得的结果。



n ~

图 7. $\mathbb{E}[X_n(T)]$ 在具有 $Pareto$ 跳网络的 $Y_{(i,\ i+1)} \sim \mathcal{U}_{[0,2]}$ 和 $Y_{(0,\ 0)}$（3，13）中。

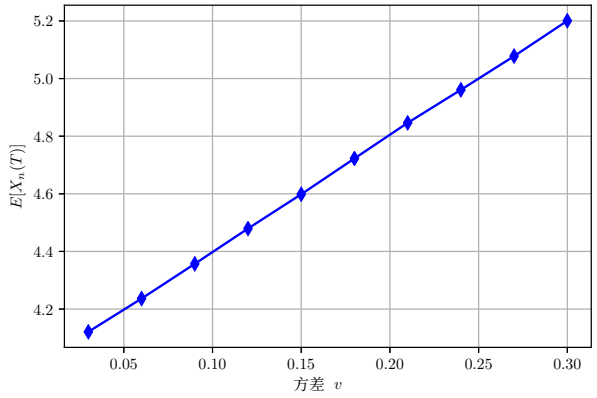


图 8. $\mathbb{E}[X_n(T)]$ 在具有 Y跳网络的 $(i,\ i+1) \sim \mathcal{U}_{[1-\sqrt{3v},1+\sqrt{3v}]}$ 和 $Y_{(0,\ 0)} \sim Pareto$（3，13）中。

接下来，我们仿真一个 n 跳网络，其中所有链路 $(i,\ i+1)$ 的更新间隔均服从区间 $[0,2]$，上的均匀分布，即 $Y_{(i,\ i+1)} \sim Y \sim \mathcal{U}_{[0,2]}$，因此 $\frac{\mathbb{E}[Y^2]}{2\mathbb{E}[Y]} = \frac{2}{3}$；源节点按照帕累托（I型）分布进行更新，其中 $a = 3$ 和 $m = \frac{1}{3}$，得到 $\mathbb{E}[Y_{(0,\ 0)}] = 0.5$。我们在图 7 中绘制了 $\mathbb{E}[X_n(T)]$ 随 n 变化的曲线。线性关系图 7 中跳数为 n 的图展示了（32）中所发现的终端用户处的信息年龄的可加结构。由于所有链路的更新间隔服从相同的概率分布，图 7 中的图按照线性方程 n 中的 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X_n(t)] = \frac{4}{3}n$ 变化，这与（32）的预测一致。

最后，我们模拟了一个 4跳网络，其中所有链路（i、$i+1$）上的更新间隔服从均匀分布$Y_{(i,\ i+1)} \sim Y \sim \mathcal{U}_{[1-\sqrt{3v},1+\sqrt{3v}]}$，使得 $\mathbb{E}[Y] = 1$ 和 $Var[Y] = v$，其中 $Y_{(0,\ 0)} \sim Pareto$（3、13），$\mathbb{E}[Y_{(0,\ 0)}] = 0.5$。注意，对于固定均值 1，$v$ 的最大值为 13，以确保概率分布具有非负支撑集。图 8 显示，对于固定均值，$\mathbb{E}[X_n(T)]$ 随方差 v $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X_n\ t] = \frac{1}{0.5} \times 4 \times \frac{v+1}{2} = 4v + 4$ 32 线性增加，并且 lim ( ) ( )，这与（ ）的预测一致。 —— ——

参考文献

[1] R. D. Yates。《抢占式服务器网络中的信息年龄》。发表于 IEEE Infocom，2018 年 4 月。[2] C. Kam、J. P. Molnar 和 S. Kompella。《串联队列的信息年龄》。发表于 IEEE MILCOM，2018 年 10 月。[3] R. D. Yates。《并行服务器网络中的状态更新》。发表于 IEEE ISIT，2018 年 6 月。[4] R. Talak、S. Karaman 和 E. Modiano。《多跳无线网络中的信息年龄最小化》。发表于 Allerton 会议，2017 年 10 月。[5] J. Selen、Y. Nazarathy、L. L. H. Andrew 和 H. L. Vu。《谣传网络中的信息年龄》。载于《分析与随机建模技术及应用》，第 364–379 页。Springer Berlin，2013 年。[6] R. D. Yates、P. Ciblat、A. Yener 和 M. Wigger。《年龄最优的受约束缓存更新》。发表于 IEEE ISIT，2017 年 6 月。[7] M. Bastopcu 和 S. Ulukus。《Google Scholar 应更频繁地更新谁？》。发表于 IEEE Infocom，2020 年 7 月。[8] B. Buyukates、M. Bastopcu 和 S. Ulukus。《集群谣传网络中的版本年龄》。IEEE 信息论选题领域期刊，3(1):85–97，2022 年 3 月。[9] M. Bastopcu 和 S. Ulukus。《缓存更新系统中的信息新鲜度》。IEEE 无线通信汇刊，20(3):1861–1874，2021 年 3 月。[10] P. Kaswan、M. Bastopcu 和 S. Ulukus。《并行中继网络中基于新鲜度的缓存更新》。发表于 IEEE ISIT，2021 年 7 月。[11] R. D. Yates。《及时谣传》。发表于 IEEE SPAWC，2021 年 9 月。[12] R. D. Yates。《网络中的谣传年龄》。发表于 IEEE ISIT，2021 年 7 月。[13] A. Maatouk、M. Assaad 和 A. Ephremides。《年龄相关随机混合系统的分析》。发表于 IEEE ISIT，2022 年 6 月。[14] P. Kaswan 和 S. Ulukus。《存在干扰攻击时环形网络中的谣传年龄》。发表于 Asilomar 会议，2022 年 10 月。[15] P. Kaswan 和 S. Ulukus。《谣传年龄对篡改时间戳的易感性》。发表于 IEEE ITW，2022 年 11 月。[16] P. Mitra 和 S. Ulukus。《ASUMAN：网络中的年龄感知更新多址接入》。发表于 Allerton 会议，2022 年 9 月。[17] P. Kaswan 和 S. Ulukus。《基于年龄的谣传中的可靠源和不可靠源》。可见于 arXiv:2302.03006。[18] E. Delfani 和 N. Pappas。《能量采集传感器谣传网络中的版本年龄最优缓存状态更新》。可见于 10.36227/techrxiv.21696617.v1。[19] M. Abd-Elmagid 和 H. Dhillon。《网络中谣传年龄的分布》。Entropy，25(2):520–535，2023 年 2 月。[20] P. Mitra 和 S. Ulukus。《稠密网络中的及时机会式谣传》。可见于 arXiv:2301.00798。[21] P. Kaswan 和 S. Ulukus。《缓存更新网络中采用非泊松更新的信息年龄》。可见于 arXiv:2301.13830。[22] R. D. Yates。《网络中的信息年龄：矩、分布与采样》。IEEE 信息论汇刊，66(9):5712–5728，2020 年 9 月。[23] R. Serfozo。《应用随机过程基础》。Springer，2009 年。[24] R. Gallager。《离散随机过程》。MIT 开放式课程，2011 年。[25] D. J. Daley 和 M. Miyazawa。《Blackwell 更新定理及其推广到一般计数过程的鞅视角》。应用概率学杂志，56(2):602–623，2019 年 7 月。