arXiv:2304.01998v2 [math.RT] 8 Jul 2024

辛傅里叶-德利涅变换在 G/U 上的作用及辫子与缠结代数

CALDER MORTON-FERGUSON

Abstract. 我们明确地确定了由辛傅里叶-德利涅变换（即与 Kazhdan-Laumon 层作卷积）生成的代数。这些变换作用于基本仿射空间 G/U 上的反常层的格罗滕迪克群，从而回答了 A. Polishchuk 最初提出的一个问题。我们证明，该代数同 I. Marin 研究的广义辫子与缠结代数中的一个特殊子代数同构；这种广义代数最初由 F. Aicardi 和 J. Juyumaya 在类型 A 中定义，后由 Marin 推广到所有类型。由此，几何表示论与纽结理论背景下定义的一种代数建立了联系。对这一代数的几何解释还带来了一些代数后果：我们得到了一种简短且与类型无关的几何证明，证明了 Yokonuma-Hecke代数的 Juyumaya生成元满足辫关系（此前，Juyumaya 按类型逐一证明了类型 A、D、E 的情形；Juyumaya 与 S. S. Kannan 则分别证明了类型 B、C、F_4、G_2 的情形）；此外，我们还给出了 Kazhdan-Lusztig基的一个自然候选，最后明确给出了 Marin 在类型 A_n 下的代数维数公式（此前仅已知 $n \leq 4$的情形）。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 4 3. 范畴化定理 8 4. 与单值 Hecke 范畴的联系 12 5. 维数公式 14 参考文献 20

1. Introduction

在 [KL88]，中，给定一个在有限域 $\mathbb{F}_q$ 上分裂的半单单连通代数群 G，其对应的 Weyl 群为 W，作者通过所谓的“辛傅里叶-德利涅变换”，定义了广义辫群 B_W 在混合 ℓ- 进层的可构造导出范畴 $D^b_c(G/U)$ 上的作用；这些层定义在与 G 相关联的基本仿射空间上。在 [Pol01]，中，Polishchuk 对这一作用进行了更深入的研究，并证明每个标准辫群生成元在作用于 $K_0(G/U) = K_0(D^b_c(G/U))$ 时都满足一个三次关系。由此，Polishchuk 证明 B_W 的作用可通过“三次赫克代数” $\mathcal{H}^c_W$ 分解；该代数是将 $\mathbb{C}(v)[B_W]$ 对每个简单辫群生成元施加某个三次关系后取商得到的。在同一文献中，Polishchuk 提出：究竟是哪个代数在起作用？ $\mathbb{C}(v)[B_W]$ 在 $K_0(G/U)$ 上的作用是否还满足其他关系？我们能否

更明确地识别由这些关系生成的 $\mathcal{H}_W^c$ 的商代数? 本文的核心结果回答了这个问题。

关于辛傅里叶-德利涅变换的另一种观点，可以通过与 $G/U \times G/U$ 上的“Kazhdan-Laumon层”进行卷积来阐述，具体如下。在 [KL88],Kazhdan 和 Laumon 对每个 $w \in W$ 分层 $X(w) \subset G/U \times G/U$ 定义了一个反常层 $K(w)$，它位于 $X(w)$ 上，并将其 Goresky-MacPherson延拓 $K(w)$ 到闭包 $X(w)$。随后他们证明，对于任意简单反射 s ，辛傅里叶-德利涅变换在对应的 $D_c^b(G/U)$ 上的作用，等于在右侧与 $K(s)$ 进行卷积；此外，这些层 $K(w)$ 均为乘法映射 $G/U \times G/U \to U\backslash G/U$ 下的拉回，且它们的卷积与 $U\backslash G/U$ 上层的适当定义的卷积一致。因此，由辛傅里叶-德利涅变换生成的 $K_0(G/U)$ 的自同态子代数，同构于代数 $\mathrm{KL}(v) \subset K_0(U\backslash G/U)$；该代数由 Kazhdan-Laumon层在卷积下生成的类构成。本文将从这一视角研究该代数。

在 [AJ17], 中，作者在域 $\mathbb{C}(v)$ 上定义了一种称为辫子与纽结代数（有时也称为“bt-代数”）的图示代数，将 Yokonuma-Hecke 代数在 A_n 型中的某些性质推广到一般参数的情形。在 [Mar18], 中，作者构造了这一代数在任意 Coxeter 型下的推广（在该文中称为 C_W^R），我们称之为广义辫子与缠结代数，并记作 $\mathcal{E}(v)$。在该文中，作者还研究了一个自然子代数，我们称之为 $\mathcal{C}(v) \subset \mathcal{E}(v)$，它是自然同态 $\mathbb{C}(v)[B_W] \to \mathcal{E}(v)$ 的像。在下一个结果中，我们证明 Kazhdan-Laumon 层在卷积运算下将 $\mathcal{C}(v)$ 范畴化，从而回答了 [Pol01]中提出的上述问题。此外，我们证明，整个代数 $\mathcal{E}(v)$ 都可以由一个卷积代数生成；该代数由 Kazhdan-Laumon 代数的适度扩充生成，即由 Kazhdan-Laumon 层以及每个简单反射 s对应的、在定义2.3中引入的某些其他层 $E(s)$ 生成。

定理 1.1. 令 $\mathrm{KL}(v)$ 为包含在 $K_0(G/U) \otimes \mathbb{C}(v)$ 中的代数，它由所有 $w \in W$ 在卷积下的 Kazhdan-Laumon 层 $K(w)$ 的类生成。令 $\mathrm{KL}(v)$ 为由 Kazhdan-Laumon 层的类以及所有 $s \in S$对应的层 $E(s)$ 生成的代数。

(a) 代数 $\mathrm{KL}(v)$ 同构于广义辫子与缠结代数 $\mathcal{E}(v)$，其生成元与关系见定义 2.5。(b) 代数 $\mathrm{KL}(v)$ 同构于 $\mathcal{E}(v)$ 的特定子代数 $\mathcal{C}(v)$，该子代数仅由生成元 g_s, $s \in S$ 生成。

这将 Polishchuk 关于 $\mathrm{KL}(v)$ 是 $\mathcal{H}_W^c$ 的一个商代数的观察推广，并对该代数给出了明确的描述。

广义辫子与缠结代数 $\mathcal{E}(v)$ 被定义为 Yokonuma-Hecke 代数 $\mathrm{Y}_{q,\ k}$ 在 $\mathbb{F}_{q^k}$ 上的一般参数版本，该代数的定义见 [Yok67]。在 [Juy98] 和 [JK01], 中，作者给出了 $\mathrm{Y}_{q,\ k}$ 的一种新表示，此后这一表示在研究该代数和辫子与纽结代数时得到了有效运用（例如见 [RH11] 和 [ERH18]）。此表示采用生成集 $\{L_s\}_{s\in S} \cup \{R_t\}_{t\in T(\mathbb{F}_{q^k})}$，其关系见命题 3.5。

我们注意到，在 [Juy98] 和 [JK01], 中，为了完成关于 $\mathrm{Y}_{q,k}$ 的新生成元所满足关系的证明，作者逐一证明生成元 L_s 满足辫关系：他们在 [Juy98]中证明了单边类型的情形,

随后又在 [JK01]中证明了所有其他类型的情形。另一方面，将我们的定理 1.1 与 [KL88] 中的一个结果结合起来，便可利用 $G/U \times G/U$ 上反常层的几何，给出这一事实的类型无关证明，而无需进行该文献中所做的代数计算。

推论 1.2（最早由 [Juy98], [JK01] 证明）。Juyumaya 在 [Juy98] 中引入的生成元 $\{L_s\}_{s\in S}$ of $\mathrm{Y}_{q,k}$ 满足辫关系。

下面的图总结了迄今讨论过的代数之间的关系，其中两个竖直同构来自定理 1.1，箭头 $\mathcal{E}(v) \to \mathrm{Y}_{q,k}$ 是 $v = q^{k/2}$ 处的特化映射，最右侧的竖直箭头是弗罗贝尼乌斯迹映射 tr_{q^k}，我们将在第 3.1 节中对其进行说明。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{KL}(v) & \hookrightarrow & \widetilde{\mathrm{KL}}(v) & \hookrightarrow & K_0(G/U) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\
\mathcal{C}(v) & \hookrightarrow & \mathcal{E}(v) & & \Big\downarrow \\
 & & \Big\downarrow & & \\
 & & \mathrm{Y}_{q,k} & \hookrightarrow & \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]
\end{array}$$

最后，我们将阐述另外两个代数后果，它们都源于 [Mar18] 中提出的问题。关于代数$\mathcal{C}(v)$，一个启发性事实是，它存在一个自然的商映射到赫克代数 $\mathcal{H}$，该映射将 $g_s \mapsto -A_s$发送到 A_s，其中 A_s 是与$s \in S$相关联的赫克代数的标准生成元。在下一个结果中，我们将证明，实际上，这个代数存在一个态射，分别映射到每个单值化赫克代数 $\mathrm{H}_\mathfrak{o}$；该代数与 W-轨道 $\mathfrak{o}$ 相关联，而 $\mathfrak{o}$ 是 T 上的特征层轨道，如 [LY20] 中所述。

定理 1.3. 设 $\mathrm{H}_\mathfrak{o}$ 为与轨道 $\mathfrak{o}$相关联的单值化赫克代数。

(a) 对任意特征层 $\mathcal{L}$，与 $[\Delta(e)_\mathcal{L}]$ 卷积会诱导出一个态射$\pi_\mathcal{L} : \mathrm{KL}(v) \to \mathrm{H}_\mathfrak{o}$。特别地，$\pi = \pi_{\mathcal{L}_{\mathrm{triv}}}$ 是到通常赫克代数的商映射。(b) 存在一个自然提升 c_w，它属于 $\mathrm{KL}(v)$，是映射 π 下 Kazhdan-Lusztig基 C_w的提升，并且满足关于 $\mathrm{KL}(v)$上的自然对合的自对偶条件。

最后，在 [Mar18], 中，作者更明确地研究了 Type$A$ 中的代数 $\mathcal{C}(v)$，并讨论了它与 Links-Gould 不变量及其定义代数之间的一些联系；后者已在 [MW13] 中得到研究。在 [Mar18], 的第 4.3 节中，Marin 计算得出 $\dim \mathcal{C}_{A_1} = 3$、$\dim \mathcal{C}_{A_2} = 20$，并提供了一些计算证据，表明 $\dim \mathcal{C}_{A_3}(v) = 217$、$\dim \mathcal{C}_{A_4}(v) = 3364$；他指出这个数列未收录于在线整数数列百科全书（OEIS），并提出是否存在关于维数的通项公式这一问题。本文最后确认了 Marin 的计算结果，并进一步给出 $\mathcal{C}_{A_n}(v)$ 的维数通项公式（因此也给出了辛傅里叶变换代数 $\mathrm{KL}(v)$ 的维数；请注意，若无定理 1.1，甚至无法显而易见地断定它是有限维的），适用于 Type A_n 中的所有 $n \geq 1$。

定理 1.4。当视为 $\mathbb{C}(v)$ 上的代数时，代数 $\mathcal{C}(v)$ 的维数有一个显式公式，具体为

$$\dim \mathcal{C}(v) = |W| \sum_{I \subset S} D_I / N_I \tag{1}$$

其中， N_I 是与 $I \subset S$相关的 W的标准抛物子群的正规化子的大小， D_I 是 $w \in W$ 中满足以下条件的元素个数：对于每个连续区块 $I' \subset I$，都存在一个简单反射 $s \in I'$，使得 $\ell(ws) < \ell(w)$。

这给出了一个通项公式，延续了维数序列

$$1,\ 3,\ 20,\ 217,\ 3364, \ldots$$

见 [Mar18]。

总之，我们希望本文能够发挥两方面的作用。首先，本文明确地将由辛傅里叶–Deligne 变换生成的代数与一个已知的有限维代数联系起来；这项工作始于二十多年前 Polishchuk 对 KL(v) 中三次关系的识别。未来，我们希望利用这一识别，证明一些关于经由辛傅里叶变换代数因子化的辫群表示的猜想；这些猜想最初由 [Pol01]提出。其次，我们的主要结果为辫子与纽结理论专家熟悉的一些代数提供了几何解释，并有望应用于一些纯代数问题。本文给出了一些这类代数问题的基本示例，并通过这一几何视角对其作出解答。我们希望，这一代数的进一步研究能因这种解释而得到推动；这种解释将代数视角与反常层和代数几何领域中丰富的工具联系起来。

1.1. 致谢。我谨向 Ivan Marin 和 Louis Funar 致谢，感谢他们在我尝试明确辨认由辛傅里叶变换生成的代数的早期阶段为我指明方向。我还要感谢 Minh-Tam Trinh 和 Elijah Bodish 对我的指导，以及许多启发性的讨论；这些讨论对本文研究方向的确定起了关键作用。他们也对论文草稿提出了有益的意见。我还要感谢我的导师 Roman Bezrukavnikov，他向我介绍了 Kazhdan-Laumon 构造，并给予我反馈和支持。撰写本文期间，我从与 Alexander Polishchuk 和 Ben Elias 的交谈中获益良多。我还要感谢各位审稿人，其中一位审稿人的建议使命题 3.6 和 4.1 的证明更加简洁且更具概念性。最后，我谨此致谢加拿大自然科学与工程研究理事会（NSERC）提供的支持。

2. Preliminaries

设 q 是某个奇素数 p 的幂，令 $k = \mathbb{F}_q$，并令 G 为定义在 k 上的分裂半单连通代数群。令 T 为在 k 上分裂的卡当子群，B 为包含 T 的博雷尔子群，其幺幂根基为 U。令 $X = G/U$ 为与 G 相关联、视为定义在 k 上的簇的基本仿射空间。令 W 为 Weyl 群， $S \subset W$ 为其单反射集。记 Φ 为根集，并固定单反射 $s \in S$ 与简单根 $\alpha_s \in S$ 之间的一种对应。对于任意两个单反射 s 和 $s' \in S$，记 $m_{ss'}$ 为 ss' 在 W 中的阶。

对于每个简单根 α_s ，我们固定相应单参数子群 $U_s \subset U$ 与加法群 $\mathbb{G}_{a,\ k}$ 之间的一个同构。这唯一确定了一个同态 $\rho_s : SL_{2,\ k} \to G$ ，该同态诱导出 $\mathbb{G}_{a,\ k}$ （嵌入在 $SL_{2,\ k}$ 中，视为上三角矩阵）与 U_s 之间给定的同构；然后令

$$n_s = \rho_s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于任意 $w \in W$，取约化词 $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$，记 $n_w = n_{s_{i_1}} \dots n_{s_{i_k}}$；可以验证，这与约化词的选取无关。我们还定义：对于任意 $s \in S$，令子环面 $T_s \subset T$ 为余根 $\alpha_s^\vee$ 的像，并且对于任意 $w \in W$，将所有满足布鲁哈特序中 $s \leq w$ 的 T_s ($s \in S$) 相乘，定义为 T_w 。

我们固定选取 q的一个平方根 $q^{\frac{1}{2}}$ ，以及一个加法特征ψ : $\mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$。注意，通过与域迹复合，这会为 p 的所有幂q 诱导出 $\mathbb{F}_q$ 的自然加法特征；我们也将这些特征记为 ψ。令 $\mathcal{L}_\psi$ 为 $\mathbb{G}_a$上的相应阿廷–施赖尔层，$\mathbb{F}_q$。

我们用 $K_0(G/U)$ 表示 G/U 上混合 ℓ-进层的可构造导出范畴 $D_c^b(G/U)$ 的格罗滕迪克群。与 $q^{\frac{1}{2}}$ 对应的“半 Tate 扭曲”（1 2）赋予 $K_0(G/U)$ 自然的 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-模结构。现在我们选取一个同构 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ ，并从现在起只使用域 $\mathbb{C}$ ；这样一来，我们便能够提及复共轭。按照惯例，今后提及 $K_0(G/U) \otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathbb{C}(v)$ 时，我们将简写为 $K_0(G/U)$。

稍后我们将考虑环面上的特征层 $\mathcal{L}$ ，以及相关的乘法特征 θ: $T(\mathbb{F}_{q^k}) \to \mathbb{C}^\times$。对于这两类对象中的任一种，我们都可以关联一个反射子群 $W_{\mathcal{L}}^\circ$ 或 W_θ°，它由对应于余根的反射生成；对于这些余根， $\mathcal{L}$ 或 θ 在其上取平凡值。更多细节参见 [LY20] 。

令 $\mathcal{H}$ 为通常的赫克代数，其定义在 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 上（有时我们也将其视为定义在 $\mathbb{C}(v)$上），由 $\{A_w\}_{w \in W}$生成，并规范化为使任意 A_s 在 $s \in S$ 时满足的二次关系具有如下形式

$$A_s^2 = (v^2 - 1)A_s + v^2. \tag{2}$$

对于任意 $w \in W$，令 $\tilde{A}_w = v^{-\ell(w)} A_w$，于是对于任意 $s \in S$,

$$(\tilde{A}_s - v)(\tilde{A}_s + v^{-1}) = 0. \tag{3}$$

$\mathcal{H}$ 上有一个自然的对合，由 $\overline{A_w} \mapsto A_{w^{-1}}^{-1}$ 和 $\overline{v} = v^{-1}$给出。按照 [Wil03], 第 3.5 节中的约定，回顾一下典范基 C_w ，它属于 $\mathcal{H}$ ，并可用 Kazhdan-Lusztig 多项式 $P_{x,\ w}$ 表示为

$$C_w = \sum_{x \leq w} (-1)^{\ell(w)-\ell(x)} v^{\ell(x)-\ell(w)} P_{x,w} \tilde{A}_{x^{-1}}^{-1}$$

它们满足 $\overline{C_w} = C_w$。

2.1. Kazhdan-Laumon层与卷积。在 [KL88] 和 [Pol01], 中，作者为每个 $w \in W$ 关联一个 $D_c^b(G/U \times G/U)$ 的元素，该元素经平移后为迷向层且不可约。

按照 [Pol01],let $X(w)$, $\subset G/U \times G/U$令 gU 与 $g'U$ $\subset (G/U)^2$构成满足 $g^{-1}g' \in Un_wT_wU$ 的有序对之子簇。存在一个典范投影 pr$_w$: $X(w) \to T_w$，它将 $(gU, g'U)$ 映至满足 $g^{-1}g' \in Un_wt_wU$ 的唯一 $t_w \in T_w$。在

当 $w = s \in S$ 时，态射 $\mathrm{pr}_s : X(s) \to T_s \cong \mathbb{G}_{m,\ k}$ 可延拓为 $\mathrm{pr}_s : X(s) \to \mathbb{G}_{a,\ k}$，并且我们有

$$\overline{K(s)} = (-\overline{\mathrm{pr}}_s)^* \mathcal{L}_\psi$$

以及一般 $w \in W$ 的情形

$$\overline{K(w)} = \overline{K(s_{i_1})} * \cdots * \overline{K(s_{i_k})} \tag{4}$$

其中 $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ 是一个约化表达式。可以将此作为 Kazhdan-Laumon 层的定义（如下方命题所示，该定义是良定义的，因此不依赖于约化词），也可以参考 [KL88] 或 [Pol01] 中给出的显式定义，该定义对所有 $w \in W$ 均适用。

以下结果是 Kazhdan 和 Laumon 在他们关于这一主题的开创性论文中通过几何论证证明的；它将是我们证明 Yokonuma-Hecke代数的 Juyumaya生成元满足辫关系的主要工具，而这要等到我们证明这些生成元由 Kazhdan-Laumon层范畴化之后。

命题 2.1（[KL88]）。在卷积下，$s \in S$ 的 Kazhdan-Laumon 层 $\overline{K}(s)$ 满足辫关系（差一个同构）。

在 [Ete22] 中，观察到层 $K(w)$可由典范乘法映射 m: $G/U \times G/U \to U\backslash G/U$拉回得到，且这种等价与卷积相容。因此，从现在起，我们将$K(w)$视为 $D_c^b(U\backslash G/U)$的一个元素，并按照上述文献定义2.3的意义，直接对 $U\backslash G/U$ 上的层进行卷积。

关于 $D_c^b(U\backslash G/U)$通过右卷积对$D_c^b(G/U)$的作用，我们还参见上述文献的定义2.4。接下来讨论Kazhdan-Laumon层在 $D_c^b(G/U)$上的定义性作用时，我们将用到这一点；对于 $K(s)$，该作用与 $D_c^b(G/U)$上相应的辛Fourier-Deligne变换一致，详见2.2节。

注意，对于任意 $g \in G/U$，沿着 g 通过乘法对 G/U 的自然作用拉回，可得到 $D_c^b(G/U)$的一个自同态； [KL88] 证明了，与$K(w)$卷积和这一作用可交换。

注记 2.2. 在 [KL88] 和 [Pol01], 中，作者研究了与单反射 $s \in S$相对应的基本仿射空间上的辛傅里叶-德利涅变换。该文指出，对应于 $s \in S$ 的层在 G/U 上的辛傅里叶-德利涅变换，与通过 Kazhdan-Laumon 层 $K(s)$进行卷积相一致。因此，在复合运算下，由 $K_0(G/U)$的诱导自同态生成的“辛傅里叶变换代数”，与本文所研究的由 Kazhdan-Laumon 层在 $K_0(G/U)$中通过卷积生成的子代数相同。

除了上文引入的 Kazhdan-Laumon 层 $K(s)$（我们将在下一节证明，它们将范畴化广义代数和辫与结的生成元 g_s；后者将在稍后引入）之外，引入另一组层 $E(s)$也会很有用，它们将范畴化该代数的其他生成元 e_s。

定义2.3. 对任意 $s \in S$，注意到存在一个自然嵌入 $i_{T_s} : T_s \hookrightarrow G/U$，其中 $i_{T_s}(t_s) = t_s U$。令 $\underline{\mathbb{C}}_{T_s}$ 为 T_s 上的常值层，并定义层$E(s) = i_{T_s!}\ \underline{\mathbb{C}}_{T_s}$。

定义2.4. 令 $\overline{\mathrm{KL}(v)}$ 为代数，它由 Kazhdan-Laumon层的类 $[K(s)]$ 在 $K_0(G/U)$ 中的像生成，其中所有 $s \in S$ 均取卷积。令 $\widetilde{\mathrm{KL}(v)}$ 为 $K_0(G/U)$ 的子代数，它由 $\mathrm{KL}(v)$ 以及所有 $s \in S$对应的 $[E(s)]$ 生成。

对于任意 $w \in W$，我们使用记号 $\overline{\mathsf{a}_w} = [K(w)]$；对于任意 $s \in S$，我们使用记号 $\mathsf{e}_s = [E(s)]$。

或者，$\mathrm{KL}(v)$ 也可以定义为 $K_0(G/U \times G/U)$ 的子代数，它是在卷积运算下由 $G/U \times G/U$ 上的 Kazhdan-Laumon 层生成的（其最初定义见 [KL88]）。

2.2. 代数 $\mathcal{E}(v)$ 和 $\mathcal{C}(v)$。现在我们回顾“广义辫子与缠结代数”的定义。该代数最初由 Aicardi 和 Juyumaya 在类型 A 中定义，见 [AJ17], ; 随后 Marin 在 [Mar18] 中将其推广到所有类型。为统一记号，我们在此用 $\mathcal{E}(v)$（最初见 [AJ17] ，仅指类型 A中的原始定义）表示 Marin 意义下的广义代数（他在论文中称之为 C_W^R ）。其定义非常相似，并且在类型 A中与原始的辫子与缠结代数一致。

定义 2.5. 广义辫子与缠结代数 $\mathcal{E}(v)$ 按如下方式生成。对每个 $s \in S$，有一个生成元 g_s；对每个 $r \in W$ 反射，有一个生成元 e_r。我们先给出这些关系。

$$
\begin{aligned}
\underbrace{g_s g_t g_s \dots}_{m_{st}} &= \underbrace{g_t g_s g_t \dots}_{m_{st}} \quad s,t \in S \\
e_r^2 &= e_r \quad \text{for all reflections } r \in W \\
e_{r_1} e_{r_2} &= e_{r_2} e_{r_1} \\
e_{r_1} e_{r_2} &= e_{r_1} e_{r_1^{-1} r_2 r_1} \quad \text{for all reflections } r_1, r_2 \in W \\
g_s e_r &= e_{srs} g_s \quad \text{for all reflections } r \text{ and all } s \in S \\
g_s^2 &= 1 + (v^2 - 1) e_s (1 + g_s) \quad s \in S
\end{aligned}
$$

现在，对任意具有约化表达式 $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ 的 $w \in W$，上面的辫子关系表明，$g_w = g_{s_{i_1}} \cdots g_{s_{i_k}}$ 是良定义的。此外，对任意反射子群$J \subset W$，令 $e_J = e_{r_1} \dots e_{r_\ell}$，其中 $\{r_1, \dots, r_\ell\}$ 是J的反射生成集。在 [Mar18], 的第 3.4 节中，定义了一个映射 p ，它将 W 的反射子群集映到 Φ 的闭对称根子系集。现在我们加入以下附加关系：

$$
e_J = e_{J'}, \quad p(J) = p(J') \tag{5}
$$

以完成 $\mathcal{E}(v)$ 的定义。显然，我们注意到，该代数也仅由 $\{g_s, e_s\}_{s \in S}$ 生成。[1] 随后，我们将代数 $\mathcal{C}(v)$ 定义为 $\mathcal{E}(v)$ 的“辫子像”子代数，即由 g_s、 $s \in S$ 生成的子代数。

[1]注意，由前六个关系生成的代数在 [Mar18] 中称为 C_W ，而我们的代数 $\mathcal{E}(v)$ 是通过加入关系 (5) 得到的，在同上文献中称为 C_W^R 。另请注意，关系 (5) 在类型 A 中是冗余的，因此不会出现在最初定义的辫子与纽结代数中。

3. Categorification theorems

3.1. 层与函数。由于 G/U 定义在 $\mathbb{F}_q$ 上，$D_c^b(G/U)$ 中的任意对象都自然带有一个弗罗贝尼乌斯自同态。对于任意 $k \geq 1$ 的 q 的幂 q^k，取弗罗贝尼乌斯态射的 k 次幂的迹，可得到一个定义良好的映射

$$\mathrm{tr}_{q^k} : K_0(G/U) \to \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})].$$

这些合起来构成一个映射

$$\mathrm{tr} : K_0(G/U) \to \prod_{k \geq 1} \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})].$$

命题 3.1（[Lau87]）。tr 是单射。

定义 3.2. 对任意 $k \geq 1$，令 $\mathrm{KL}_{q,k}$ 为 $\mathrm{KL}(v) \subset K_0(G/U)$ 在态射 tr_{q^k} 下的像，它是 $\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]$, 的一个代数子空间。类似地，令 $\underline{\mathrm{KL}}_{q,k}$ 为 $\underline{\mathrm{KL}}(v)$ 的像。我们用 a_s 和 e_s 表示相应生成元在 $\mathrm{KL}_{q,k}$ 中的像。

3.2. 函数上的辛傅里叶变换。如注 2.2 所述，[KL88] 和 [Pol01] 中证明了，与 $K(s)$ 的卷积等同于此处所定义的辛Fourier-Deligne变换。特别地，由此可推得以下描述。

给定一个简单反射 $s \in S$，令 P_s 为 G的相应抛物子群，并令 $Q_s = [P_s, P_s]$。正如 [Kaz95], 第 1 节中详细说明的那样，存在一个自然的 $(\mathbb{A}_k^2 \setminus \{(0,0)\})$-纤维化 $G/U \to G/Q_s$，它可以补全为一个二维向量丛，并配备一个 G-不变的辛形式 $\langle , \rangle$。据此，$- * K(s)$ 与辛Fourier-Deligne变换之间的等价性意味着，对任意 $k \geq 1$ 以及任意 $f \in \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]$, $x \in (G/U)(\mathbb{F}_{q^k})$,

$$\left(\mathrm{tr}_{q^k}(f) * \mathrm{tr}_{q^k}\left(\overline{K(s)}\right)\right)(x) = \frac{1}{q^k} \sum_{y \in xQ_s(\mathbb{F}_{q^k})} \psi(\langle x, y \rangle) f(y). \tag{6}$$

此外，利用格罗滕迪克的层-函数对应进行直接计算可得，对任意 $x \in (G/U)(\mathbb{F}_{q^k})$,

$$\left(\mathrm{tr}_{q^k}(f) * \mathrm{tr}_{q^k}(E(s))\right)(x) = \sum_{x^{-1}y \in T_s(\mathbb{F}_{q^k}) \subset X(\mathbb{F}_{q^k})} f(y). \tag{7}$$

我们列出上述公式，是为了指出本文的主要计算（命题 3.6 和 4.1）可以（事实上，在本文的先前版本中也确实如此）借助公式 (6) 和 (7) 在函数层面显式完成，然后应用命题 3.1；但我们将改为使用六函子形式体系在层的层面证明这些结论。

3.3. 与Yokonuma-Hecke代数的联系。我们有时将 $\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]$ 中的元素写成定义在 $(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})$上的函数，有时则写成 $(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})$中元素的线性组合。对于任意 $g \in G(\mathbb{F}_{q^k})$，令 δ_g为定义在 $\overline{g} \in (G/U)(\mathbb{F}_{q^k})$上的示性函数。

定义 3.3. 将 $\mathrm{Y}_{q,k}$（Yokonuma-Hecke代数）定义为在复合运算下的代数 $\mathrm{End}_{G(\mathbb{F}_q)}(\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})])$。

如 [JK01],所述，布鲁哈特分解 $G = \coprod_{n \in N_{G(\mathbb{F}_{q^k})}(T(\mathbb{F}_{q^k}))} UnU$表明，$\mathbf{Y}_{q,k}$的标准基由 $n \in N_{G(\mathbb{F}_{q^k})}(T(\mathbb{F}_{q^k}))$ 参数化。对于任意 $s \in S$，我们可以如同上文所述定义 $R_s \in \mathbf{Y}_{q,k}$ （与 s 对应的标准基元素）；对于任意 $t \in T(\mathbb{F}_{q^k})$，也可以类似地定义 R_t。由此，我们可以将 $\mathbf{Y}_{q,k} \cong \mathbb{C}[U\backslash G/U(\mathbb{F}_{q^k})]$, 识别为函数空间，其中自同态 R_s、$R_t \in \mathbf{Y}_{q,k}$分别对应于在 s 和 t 处的示性函数，而自同态的复合对应于卷积。

按照 [JK01], ，对于任意 $r \in \mathbb{F}_{q^k}^{\times}$，我们定义

$$h_s(r) = \rho_s \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 ρ_s：$SL_2(\mathbb{F}_{q^k}) \to G(\mathbb{F}_{q^k})$ 是对应于单根α_s的态射。当对于某个 $s \in S, r \in \mathbb{F}_{q^k}^{\times}$，$t = h_s(r)$ 时，我们记作 $H_s(r) = R_t$。于是，我们为每个 $s \in S$ 定义元素

$$E_s = \sum_{r \in \mathbb{F}_{q^k}^{\times}} H_s(r).$$

现在我们回顾 Yokonuma 在 [Yok67] 中给出的 Yokonuma-Hecke 代数的原始表示。

命题 3.4。Yokonuma-Hecke代数 $\mathbf{Y}_{q,k}$ 作为代数由 $R_s (s \in S)$；以及 $R_t (t \in T(\mathbb{F}_{q^k}))$ 生成。此外，这些生成元连同这些关系

$$\begin{aligned} R_s^2 &= qH_s(-1) + R_s E_s \\ \underbrace{R_s R_{s'} R_s R_{s'} \ldots}_{m_{ss'}} &= \underbrace{R_{s'} R_s R_{s'} R_s \ldots}_{m_{ss'}}, \quad s, s' \in S \\ R_t R_s &= R_s R_{t'}, \quad t' = n_s t n_s^{-1}, t \in T(\mathbb{F}_{q^k}) \\ R_{t_1} R_{t_2} &= R_{t_1 t_2}, \quad t_1, t_2 \in T(\mathbb{F}_{q^k}) \end{aligned}$$

定义了 $\mathbf{Y}_{q,k}$ 的一个表示。

在 [Juy98] 和 [JK01], 中，作者引入了一组替代性的生成元和关系；这组新的生成元将由 Kazhdan-Laumon层直接范畴化。

对于任意 $s \in S$，令

$$\Psi_s = \sum_{r \in (\mathbb{F}_{q^k})^{\times}} \psi(r) H_s(r),$$

并令 $L_s = q^{-k}(E_s + R_s \Psi_s)$。

命题 3.5（[JK01]）。代数 $\mathbf{Y}_{q,\ k}$ 由 L_s、$s \in S$ 和 R_t、$t \in T(\mathbb{F}_{q^k})$ 生成，该代数的表示通过施加以下关系给出

$$\begin{aligned} L_s^2 &= 1 - q^{-k}(E_s - L_s E_s) \\ \underbrace{L_s L_t L_s L_t \dots}_{m_{st}} &= \underbrace{L_t L_s L_t L_s \dots}_{m_{st}} \\ R_t L_s &= L_s R_{t'}, t' = sts^{-1} \quad (t \in T(\mathbb{F}_{q^k})) \\ R_{t_1} R_{t_2} &= R_{t_1 t_2} \quad (t_1, t_2 \in T(\mathbb{F}_{q^k})). \end{aligned}$$

$\widetilde{\ }$卷积作用导出一个自然态射$\psi_{q,\ k} : \mathbf{KL}_{q,\ k} \to \mathbf{End}(\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})])$。层的卷积经由映射 $\mathbf{tr}_{q^k}$ 下降为 $\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]$中的函数卷积。

命题 3.6。$\psi_{q,\ k}$ 的像属于 $\mathbf{Y}_{q,\ k}$。我们有

$$\begin{aligned} \psi_{q,k}(\mathsf{a}_s) &= L_s \\ \psi_{q,k}(\mathsf{e}_s) &= E_s. \end{aligned}$$

证明。我们首先注意到，在识别 $\mathbf{Y}_{q,\ k} \cong \mathbb{C}[U\backslash G/U(\mathbb{F}_{q^k})]$, 之后，可以将映射 $\psi_{q,\ k}$ 视为以 $\mathbb{C}[U\backslash G/U(\mathbb{F}_{q^k})]$为目标。这样，$\psi_{q,\ k}$可$\widetilde{\ }$视为自然包含 $\mathbf{KL}_{q,\ k} \hookrightarrow \mathbb{C}[U\backslash G/U(\mathbb{F}_{q^k})]$。因此，只需证明 $\mathbf{tr}_{q^k}(K(s)) = L_s$ 和 $\mathbf{tr}_{q^k}(E(s)) = E_s$ 作为 $\mathbb{C}[U\backslash G/U(\mathbb{F}_{q^k})]$中的元素相等。

根据 $E(s) = i_{T_s,!}\mathbb{C}$ 的定义，这对 $E(s)$ 显然成立。剩下要证明的是，对任意 $s \in S$，$\mathbf{tr}_{q^k}(K(s)) = L_s$。由于在此计算中我们只考虑一个简单反射，因此只需验证 $G = \mathbf{SL}_2$ 的情形。在这种情况下，令 B 为上三角矩阵构成的博雷尔子群，其幺幂根基为 U，并令 $p_s : U\backslash \mathbf{SL}_2/U \to \mathbb{G}_a$ 为映射

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto -c. \tag{8}$$

由 [Pol01] 第 5.2 节中对 $K(s)$ 的描述可知，$K(s) = p_s^* \mathcal{L}_\psi[2](1)$。现在注意到，$N_{G(\mathbb{F}_{q^k})}(T(\mathbb{F}_{q^k}))$ 中的任意元素都可以写成 t 或 st，其中 $t \in T(\mathbb{F}_{q^k})$。对于任意这样的元素，我们有：

$$L_s(t) = q^{-k} E_s(t) + q^{-k} R_s \Psi_s(t) \tag{9}$$

$$= q^{-k} + 0 \tag{10}$$

$$L_s(st) = q^{-k} E_s(st) + q^{-k} R_s \Psi_s(st) \tag{11}$$

$$= 0 + q^{-k} \psi(t). \tag{12}$$

同样，根据我们对 $K(s)$ 的描述以及函数的六函子形式体系，作为 $\mathbb{C}[U\backslash G/U(\mathbb{F}_{q^k})]$, 的元素，我们有 $\mathbf{tr}_{q^k}(K(s)) = q^{-k}\mathbf{tr}_{q^k}(\mathcal{L}_\psi) \circ p_s$。因此，在将 $\psi_{q,k}$ 的目标与 $\mathbb{C}[U\backslash G/U(\mathbb{F}_{q^k})]$, 等同后，对任意 $t \in T(\mathbb{F}_{q^k})$，我们有

$$\psi_{q,k}(\mathsf{a}_s)(t) = q^{-k}\psi(0) = q^{-k}, \tag{13}$$

$$\psi_{q,k}(\mathsf{a}_s)(st) = q^{-k}\psi(t), \tag{14}$$

这保证了 $\psi_{q,\ k}(\mathsf{a}_s) = L_s$。 □

3.4. 具有一般参数的代数。现在我们使用命题 3.6 来证明主要结果。

定理 1.1 的证明。考虑该图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{KL}}(v) & & \mathcal{E}(v) \\ & \searrow^{\mathrm{tr}} \quad \swarrow_{i} & \\ & \prod_{k\geq 1}\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})] & \end{array},$$

其中 i 由自然映射的复合构成

$$\mathcal{E}(v) \to \mathcal{E}_{q^k} \to \mathrm{Y}_{q,k} \hookrightarrow \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})],$$

其中 $\mathcal{E}(v) \to \mathcal{E}_{q^k}$ 是 $v = q^{k/2}$ 处的特化映射。

tr 是单射这一事实可由命题 3.1 得出。现在我们来说明 i是单射。在 [Mar18], 的第 3.4 节中（该论证依赖于同一文献第 2.1 节末尾的证明），文中指出，从 $\mathcal{E}_{q'}$（在同一文献中称为 $\mathcal{C}^{R}_{W,\ q}$）到 $\mathrm{Y}_{q'}$ 的自然映射对于“泛型” q'是一个嵌入。按照同一文献第 2.1 节中对这一事实的证明，可以得到一个更精确的表述：存在某个r_0，它依赖于 W，使得自然映射 $\mathcal{E}_{q'} \to \mathrm{Y}_{q'}$（将 $g_s \to -L_s$ 映到相应对象）在 $q'-1$ 有一个大于 r_0的素因子时是单射。对于任意素数幂 $q = p^k$，都存在一个 a，使得 $q' = q^a$ 满足这一条件。事实上，取一个大于 r_0 且不同于 p的素数 p'，并令 $a = p' - 1$；那么根据费马小定理，p' 整除 $q^a - 1$。此外，我们可以取足够大的 a，使得将 $\mathcal{E}$映到 (v) 的特化映射 $v \mapsto q^{a/2}$ 本身是单射。

现在注意到，命题 3.6（同时应用于 q 的所有幂）表明 tr 和 i 的像相等，并且

$$\mathrm{tr}(\mathsf{a}_s) = i(-g_s),$$
$$\mathrm{tr}(\mathsf{e}_s) = i(e_s).$$

由于我们刚刚将 $\mathrm{KL}(v)$ 和 $\mathcal{E}(v)$ 都识别为 $\prod_{k\geq 1}\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]$, 的同一个子代数，因此映射

$$\psi : \widetilde{\mathrm{KL}}(v) \to \mathcal{E}(v)$$

在生成元上的定义为 $\psi(\mathsf{a}_s) = -g_s$, $\psi(\mathsf{e}_s) = e_s$，是一个定义良好的代数同构。相同的证明也表明，存在一个定义良好的同构 $\psi' : \mathrm{KL}(v) \to \mathcal{C}(v)$，满足 $\psi'(\mathsf{a}_s) = -g_s$。□

3.5. 与 Polishchuk 三次关系的联系。正如我们所解释的，由于定理 1.1 完整描述了代数 $\mathrm{KL}(v)$，它可以被视为对该代数生成元所满足的一些关系的既有结果的深化。

也就是说，除了 Kazhdan 和 Laumon 在 [KL88], 中证明的辫关系外，Polishchuk 还发现了以下额外关系

$$(\mathsf{a}_s^2 - 1)(\mathsf{a}_s + v^2) = 0 \tag{15}$$

对任意 $s \in S$。现在我们说明如何从我们的描述中恢复这一关系。根据定理 1.1，回想起 a_s 可与 $-g_s$ 等同，因此只需证明 $(g_s^2 - 1)(g_s - v^2) = 0$ 属于 $\mathcal{E}(v)$，所以我们可以使用定义 2.5 中的关系。最后一个关系表明 $g_s^2 - 1 = (v^2 - 1)e_s(1 + g_s)$，因此 (15) 变为

等价于 $(g_s - v^2)(1 + g_s)e_s = 0$。这可以通过将定义 2.5 中的最后一个关系乘以 e_s 得到。

对这一关系的一种非正式理解是，(15) 是两个表达式 $\mathsf{a}_s^2 - 1$ 和 $(\mathsf{a}_s - 1)(\mathsf{a}_2 + v^2)$ 的最小公倍数，前者存在于 Weyl 群中，后者存在于赫克代数中。由于我们预期 $\mathrm{KL}(v)$ 中的任何关系在 $\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]$, 上的作用都平凡，因此关系 (15) 很自然：它是 a_s 的幂之间的最小关系，在 $s \notin W_\theta^\circ$ 和 $s \in W_\theta^\circ$ 两种情形下，分别对 $\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]_\theta$ 的作用都平凡（这两种情形下分别成立 Weyl 群和赫克代数的关系）。从这个意义上说，代数 $\mathrm{KL}(v)$ 可以视为包含所有 a_s、$s \in S$ 的“最小”代数，它同时编码了所有单值化赫克代数的关系。

4. Connection to monodromic Hecke categories

4.1. 单值 Hecke 代数。对于 W-轨道 $\mathfrak{o}$ 上的特征层，Lusztig 和 Yun 在 [LY20] 的第 3.14 节中定义了一个带单位的结合 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 代数，其生成元为 A_w （在该文中称为 T_w ），满足以下关系：

$$
\begin{aligned}
&1_{\mathcal{L}} 1_{\mathcal{L}'} = \delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} 1_{\mathcal{L}}, \quad \text{for } \mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \mathfrak{o};\\
&A_w A_{w'} = A_{ww'}, \quad \text{if } w, w' \in W \text{ and } \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w');\\
&A_w 1_{\mathcal{L}} = 1_{w\mathcal{L}} A_w, \quad \text{for } w \in W, \mathcal{L} \in \mathfrak{o};\\
&A_s^2 = v^2 A_1 + (v^2 - 1) \sum_{\mathcal{L}; s \in W_{\mathcal{L}}^\circ} A_s 1_{\mathcal{L}}, \text{ for simple reflections } s \in W;\\
&A_1 = 1 = \sum_{\mathcal{L} \in \mathfrak{o}} 1_{\mathcal{L}}.
\end{aligned}
$$

如 [LY20], 中所述，我们记 $\tilde{A}_w = v^{-\ell(w)} A_w \in \mathrm{H}_{\mathfrak{o}}$。在 [LY20], 的第 3.14 节中，作者讨论了该代数与 $K_0(\oplus_{\mathcal{L},\ \mathcal{L}' \in \mathfrak{o}}(\mathcal{L}'\mathcal{D}_{\mathcal{L}}))$ 之间的联系，其中 ˜元素 $A_w 1_{\mathcal{L}}$ 与标准单值层 $\Delta(w)_{\mathcal{L}}$ 的格罗滕迪克群中的类相关联；这些标准单值层在该文中被定义并加以研究。因此，在卷积下，我们可以将 $\mathrm{H}_{\mathfrak{o}}$ 识别为 $K_0(U\backslash G/U)$ 的一个子代数，该子代数由 $[\Delta(w)_{\mathcal{L}}]$ （对 $w \in W$、 $\mathcal{L} \in \mathfrak{o}$）生成。

4.2. 由 Kazhdan-Laumon 层得到的单值层。

命题 4.1. 与 $\Delta(e)_{\mathcal{L}}$ 进行卷积诱导出一个满射 $\pi_{\mathcal{L}}$ ，从 $\mathrm{KL}(v) \to \mathrm{H}_{\mathfrak{o}}$得到。我们有

$$
\pi_{\mathcal{L}}(\mathsf{a}_s) = \begin{cases} -v\tilde{A}_s^{-1} 1_{\mathcal{L}} & s \in W_{\mathcal{L}}^\circ \\ -\tilde{A}_s 1_{\mathcal{L}} & s \notin W_{\mathcal{L}}^\circ \end{cases} \tag{16}
$$

证明。由于该断言只涉及一个简单反射，因此只需对 $G = \mathrm{SL}_2$ 证明该结果即可。设 $j_s\colon U\backslash BsB/U \to U\backslash G/U$ 和 $j_e\colon U\backslash B/U \to U\backslash G/U$ 分别为开 Bruhat 分层和闭 Bruhat 分层的包含映射。回顾在第 2.1 节中定义的投影到 T 的映射 $\mathrm{pr}_s\colon U\backslash BsB/U \to T$。

将映射 j_s 和 j_e 的通常开闭特异三角形与 $\Delta_{\mathcal{L}}(e)$ 卷积，得到特异三角形

$$
(j_{s!} j_s^* \overline{K(s)}) * \Delta_{\mathcal{L}}(e) \to \overline{K(s)} * \Delta_{\mathcal{L}}(e) \to (j_{e*} j_e^* \overline{K(s)}) * \Delta_{\mathcal{L}}(e). \tag{17}
$$

由于 $U\backslash B/U \cong T$，且 $\Delta_{\mathcal{L}}(e) = j_{e!}(\mathcal{L}) = j_{e*}(\mathcal{L})$，适当基变换和投影公式推出

$$(j_{e*}j_e^*\overline{K(s)}) * \Delta_{\mathcal{L}}(e) = (j_{e*}\mathcal{L}) \otimes R\Gamma_c(T, \mathcal{L}), \tag{18}$$

$$(j_{s!}j_s^*\overline{K(s)}) * \Delta_{\mathcal{L}}(e) = j_{s!}\mathrm{pr}_s^*(\mathcal{L}[2](1)) \otimes R\Gamma_c(T, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_\psi). \tag{19}$$

在这个秩一情形中，若 $s \in W_{\mathcal{L}}^\circ$，则 $\mathcal{L}$ 为常数。在这种情况下，由 (18) 可得 $\Delta_{\mathcal{L}}(e)$ 本身与 $T \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 的紧支撑上同调的张量积，其在 K_0 中的类为 (v^2-1)。(19) 中的因子 $R\Gamma_c(T, \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_\psi)$ 是一维的，且集中在上同调次数 1；根据 [Del77《将迹公式应用于三角和》（Applications de la formule des traces aux sommes trigonom´etriques]）的注释 4.4，它的权重为零。取格罗滕迪克群中的类，再将由 (18) 和 (19) 得到的项相加，便得到 $-v\tilde{A_s}^{-1}1_{\mathcal{L}}$。

类似地，若 $s \notin W_{\mathcal{L}}^\circ$，则此时 $\mathcal{L}$ 不为常数。因此，由于 $R\Gamma_c(T, \mathcal{L}) = 0$，项 (18) 为零。此外，[Del77] 中的同一注释说明，$R\Gamma_c(T, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_\psi)$ 仍集中在上同调次数 1，是一维的，但这次权重为 1。这样只剩下一个项，其在格罗滕迪克群中的类给出单值化赫克代数中的 $-A_s 1_{\mathcal{L}}$。□

From now on, let $\pi = \pi_{\mathcal{L}_{\mathrm{triv}}}$ be the surjection $\mathrm{KL}(v) \to \mathcal{H}$.

4.3. 提升赫克代数的 Kazhdan-Lusztig 基。现在我们回顾赫克代数的 Kazhdan-Lusztig 基 C_w，以及它通过 G/U 上的简单 pervers 层 IC(w) 所作的诠释。赫克代数 $\mathcal{H}$ 的 Kazhdan-Lusztig 基 $\{C_w\}_{w\in W}$ 是一组基，其由条件 $\tilde{}$ $\tilde{}$（即 $C_w \in A_w + \sum_{y\le w} v\mathbb{Z}[v]A_y$ 且 $\overline{C}_w = C_w$）唯一刻画。

以下引理是众所周知的（例如，参见 [Wil03] 的 (3.5.3)）：

引理 4.2. 对任意满足 $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$ 的 w、$w' \in W$，我们有

$$C_w C_{w'} - C_{ww'} \in \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{C_y\}_{y<ww'}$$

˜生成元 A_w 和 C_w 有一个众所周知的几何解释，见 $\mathcal{H}$。事实上，在 G/U 上存在标准层 $\Delta(w)$ 和 IC(w)，它们分别将这些生成元范畴化。例如，[Ach21] 的第 7 章对 G/B 情形下这一框架作了非常清晰的阐述；而与 Kazhdan-Laumon 语境相关、采用不同归一化的版本，则由 [MF22] 在第 4.1 节针对 G/U 作了解释。由此可见，引理 4.2 表明，$K_0(U\backslash G/U)$ 中 $\{[\mathrm{IC}(w)]\}_{w\in W}$ 的张成空间是一个子代数。

命题 4.3（ [Mar18] 中的命题 3.8）。赋值

$$\overline{g_s} = g_s^{-1}$$
$$\overline{e_s} = e_s$$
$$\overline{v} = v^{-1}$$

可延拓为 $\mathcal{E}(v)$ 上良定义的环自同构。我们将沿用同一记号，用上横线表示 $\mathcal{C}(v)$、KL(v) 和 KL(v) 上相应的对合，这些对合通过上一节的同构给出。

命题 4.4. 存在一个 KL(v) 的线性无关集 $\{\mathsf{c}_w\}_{w\in W}$，满足 $\mathsf{c}_w = \mathsf{c}_{w^\circ}$。它具有如下性质：

$$\pi(\mathsf{c}_w) = C_w.$$

证明. 我们首先证明，对于任意 $w \neq 1$， $[\mathrm{IC}(w)] \in K_0(G/U)$ 实际上属于 $\mathrm{KL}(v)$；完成后，我们将定义 $\mathsf{c}_1 = 1$ 和 $\mathsf{c}_w = [\mathrm{IC}(w)]$ （对任意 $w \neq 1$），然后验证命题中的性质。

我们先考虑 $w = s \in S$ 的情形。在这种情形下，我们定义

$$\mathsf{c}_s = \frac{\mathsf{a}_s^2 - 1}{v - v^3}. \tag{20}$$

通过在 $(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})$ 上函数的层面进行计算，很容易验证，按上述方式定义的 $\mathsf{c}_s\mathsf{a}$ 等于 $[\mathrm{IC}(s)]$。

我们有

$$\begin{aligned}\pi(\mathsf{c}_s) &= \frac{v^2\tilde{A}_s^{-2} - 1}{v - v^3} \\ &= \frac{v^2((v^{-1} - v)\tilde{A}_s + (v^{-2} - 1 + v^2)) - 1}{v - v^3} \\ &= \tilde{A}_s - v = c_s.\end{aligned}$$

利用关系 $(\mathsf{a}_s^2 - 1)(\mathsf{a}_s + v^2) = 0$，经过直接计算可得

$$\mathsf{a}_s^{-2} - 1 = v^{-4}(1 - \mathsf{a}_s^2),$$

这意味着

$$\begin{aligned}\overline{\mathsf{c}_s} &= \frac{\mathsf{a}_s^{-2} - 1}{v^{-1} - v^{-3}} \\ &= \frac{1 - \mathsf{a}_s^2}{v^4(v^{-1} - v^{-3})} \\ &= \mathsf{c}_s.\end{aligned}$$

对于一般 $w \in W$ 的情形，作归纳假设：对于所有满足 $\ell(y) < \ell(w)$ 的 y，都有 $[\mathrm{IC}(y)] \in \mathrm{KL}(v)$。选取某个满足 $\ell(sw) < \ell(w)$ 的 $s \in S$。由引理 4.2、归纳假设以及 $\mathrm{KL}(v)$ 是一个子代数这一事实可知，$[\mathrm{IC}(sw)] \in \mathrm{KL}(v)$。现在我们可以为所有$w \neq 1$定义 $\mathsf{c}_1 = 1$ 和 $\mathsf{c}_w = [\mathrm{IC}(w)]$，这显然构成 $\mathrm{KL}(v)$ 的一个线性无关子集。

现在证明 $\mathsf{c}_w = \mathsf{c}_{w\circ}$。事实上，对于 c_1，，这显然成立；对于任意 $s \in S$，我们已在上文验证了 c_s 的情形。根据 $\mathrm{KL}(v)$ 上对偶性的定义，它具有乘法性且是 $\mathbb{Z}$- 线性的，因此再次利用引理 4.2，按照 $\ell(w)$ 归纳即可推出 $\overline{\mathsf{c}_w} = \mathsf{c}_w$。

最后，我们证明对于所有 $w \in W$，都有 $\pi(\mathsf{c}_w) = C_w$。首先注意，显然巴 involution 具有这样的性质：它提升了赫克代数上的通常巴 involution，因此 $\pi(\mathsf{c}_w) = \pi(\mathsf{c}_w)$。再次利用引理 4.2 可得 C_w 的另一条定义性质；这意味着必有 $\pi(\mathsf{c}_w) = C_{w\circ}$ 或者，我们也可以直接根据 c_w 的定义得出，$\pi(\mathsf{c}_w)$ 是 $[\mathrm{IC}(w)] \in \mathcal{H} \cong K_0(B\backslash G/U)$，它对应于典范基元素 $C_{w\circ}$。□

5. Dimension formula

本节中，假设我们处于 Type A_n，即 $G = \mathrm{SL}_{n+1}$。在这种情形下，$\mathcal{E}(v)$ 变为最初由 [AJ17] 定义的通常意义上的辫与结代数。在这种情形下，$\mathcal{C}_{A_n}(v) \subset \mathcal{E}_{A_n}(v)$ 曾在 [Mar18] 的第4节中得到更详细的研究。在该文中，作者使用计算机计算了 $\mathcal{C}_{A_n}(v)$ 在若干有理数值 v 下的维数序列，得到了下表。

n	1	2	3	4
$\dim\ \mathcal{C}_{A_n}(v)$	3	20	217	3364

本节中，我们给出适用于 n 所有取值的 $\dim \mathcal{C}_{A_n}(v)$ 显式公式，并对该表进行了扩展。

5.1. 关于 W 的反射子群的一个公式。

定义 5.1. 我们称反射子群 $R' \subset W$ 为连续的，如果其 Dynkin 类型是连通的。对于任意反射子群 $R \subset W$，我们可以将其唯一地（除去 R'_i 的排列）写为 $R = \prod_{i=1}^{\ell} R'_i$，其中 R'_i 是连续反射子群；我们称它们为 R 的连续分支。

定义 5.2. 对于 W 的任意反射子群 R，令 J_R 为由以下形式的所有项张成的 $\mathcal{E}(v)$ 的向量子空间：

$$g_w(1+g_{r_1})\dots(1+g_{r_\ell}), \tag{21}$$

其中 $r_1, \dots, r_\ell$ 是位于 R 的不同连续分支中的反射。

引理 5.3. 对于任意反射子群 R of W, $J_R e_R \subset \mathcal{C}(v)$。

证明。对 R 的连续分支数进行归纳，只需证明：对于 W 的任意连续反射子群 R（即某个$k \le n$的类型为 A_k 的子群）以及任意反射 $r \in R$，都有 $(g_r+1)e_R \in \mathcal{C}(v)$。

作归纳假设（ $k=1$ 的情形显然），即该结论对所有类型为 $A_{k'}$, $k'<k$ 的反射子群均成立。我们首先证明，对于任意反射 $r, r' \in R$，若 $\langle r, r'\rangle$ 本身是类型为 A_2 的反射子群，则 $(g'_r+1)(g_r+1)e_{\langle r,\ r'\rangle} \in \mathcal{C}(v)$。为此，利用所有类型为 A_2 的反射子群R彼此共轭这一事实，我们可以在 R 中选取一组反射 $\{r_1, \dots, r_{k-2}\}$，使得 $\{r_1, \dots, r_{k-2}, r', r\}$ 生成 R，且其类型为A_{k-1}。因此，应用归纳假设可得 $(g_{r'}+1)e_{\langle r_1,\dots,r_{k-2},\ r'\rangle} \in \mathcal{C}(v)$，从而 $(g_{r'}+1)(g_r+1)e_R$ 也成立。同理，交换 r 和 r' 的角色，也可得到 $(g_r+1)(g_{r'}+1)e_R$。

现在再次利用 R 中 A_2型反射子群的共轭性，令 $y \in R$满足 $yry^{-1}=s_1$、$yr'y^{-1}=s_2$。于是我们可以推得

$$g_y^{-1}(g_{s_1}+1)(g_{s_2}+1)e_{\langle s_1,s_2\rangle}g_y, g_y^{-1}(g_{s_2}+1)(g_{s_1}+1)e_{\langle s_1,s_2\rangle}g_y \in \mathcal{C}(v).$$

由于$g = g_{s_1}e_{\langle s_1,\ s_2\rangle}$ 或$g = g_{s_2}e_{\langle s_1,\ s_2\rangle}$ 满足通常的二次 Hecke 关系（$g-v^2$）（$g+1$）$=0$，因此在A_2 型赫克代数中进行直接计算即可得到

$$\begin{aligned}&(g_{s_1}-1)e_{\langle s_1,s_2\rangle}, (g_{s_2}-1)e_{\langle s_1,s_2\rangle}\\ &\in \operatorname{span}\{g_2(g_{s_1}+1)(g_{s_2}+1)e_{\langle s_1,s_2\rangle}, g_w(g_{s_2}+1)(g_{s_1}+1)e_{\langle s_1,s_2\rangle}\}_{w\in\langle s_1,s_2\rangle}.\end{aligned}$$

通过 g_y进行共轭变换，我们推得（g_r+1）$e_{\langle r,\ r'\rangle}$，（$g_{r'}+1$）$e_{\langle r,\ r'\rangle} \in \mathcal{C}$（$v$）。

现在考虑一般情形。注意，对于任意反射 $r \in W$，根据 g_r所满足的二次关系，有（g_r+1）$e_{\langle r\rangle} \in \mathcal{C}$（$v$）。因此，对于所讨论的秩为 k 的反射子群 R，我们有

$$(g_{r_{i_1}}+1)e_{r_{i_1}}\dots(g_{r_{i_k}}+1)e_{r_{i_k}} = (g_{r_{i_1}}+1)\dots(g_{r_{i_k}}+1)e_R \in \mathcal{C}(v)$$

对于 $\{r_1, \dots, r_k\}$ 反射生成集 R 以及 $(i_j)_{j=1}^k$ 指标的任意排列。然后，将我们的秩 2 结果应用于该生成集中的反射对，

由归纳法也可得出，对于任意 $r \in R$，$(g_r + 1)e_R \in \mathcal{C}(v)$。□

引理 5.4. 作为 $\mathbb{C}(v)$ 上的向量空间，我们有

$$\mathcal{C}(v) = \bigoplus_{R \subset W} J_R e_R. \tag{22}$$

其中 R 遍历 W 的所有反射子群。

证明. 根据定义，代数 $\mathcal{C}(v)$ 由 $\{g_s^{\pm 1}\}_{s\in S}$ 中的字生成。利用二次关系 $g_s^2 = 1 + (v^2 - 1)(1 + g_s)e_s$，可知 $\mathcal{C}(v)$ 的任意元素都属于由项集 $\{g_s^{-1}\}_{s\in S} \cup \{(1 + g_s)e_s\}_{s\in S}$ 中的字构成的 $\mathbb{C}(v)$-生成空间。对于任意 $s, t \in S$，我们有

$$(1 + g_t)e_t g_s^{-1} = g_s^{-1}(1 + g_s g_t g_s^{-1})e_{tst}.$$

反复使用这一关系以及给定字上的二次关系，将所有 g_s 项移至左侧，并化简出现的任意幂 g_s^2, $s \in S$，便得到一个由以下形式的字组成的生成集

$$g_w^{-1}(1 + b_1 g_{t_1} b_1^{-1})e_{b_1 t_1 b_1^{-1}} \dots (1 + b_\ell g_{t_\ell} b_\ell^{-1})e_{b_\ell t_\ell b_\ell^{-1}}, \tag{23}$$

其中 b_i 是若干个 $\{g_s\}_{s\in S}$ 的乘积，且每个 t_i 都属于 S。我们希望进一步化简，以证明 $\mathcal{C}(v)$ 由以下形式的元素构成的集合生成

$$g_w^{-1}(1 + g_{r_1}) \dots (1 + g_{r_\ell})e_R \tag{24}$$

对于 R 反射子群和 r_i 反射，其中每个都位于 R的不同连续分支中。

为了将 (23) 形式的项化为 (24) 形式的项，只需根据项数作归纳，证明每个 $(1 + b g_t b^{-1})e_{b^{-1}tb}$形式的项都可写成 (24) 的形式。此结论可由对 b 中的项数作归纳得到，只要先证明对于某个 $s \in S$， $b = g_s$ 也成立。在这种情况下，

$$(1 + g_s g_t g_s^{-1})e_{sts} = (1 + g_{sts})e_{sts} + (v^{-2} - 1)g_s g_t(1 + g_s)e_{\langle s,t\rangle},$$

这正是所需的形式。按照上述归纳过程并利用这一关系，可以得到 $\mathcal{C}(v)$中的所有元素都可写成 (24) 形式的元素的 $\mathbb{C}(v)$-线性组合。

为了说明这个和是直和，我们注意到，将每个 e_R特化到 $\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]$,时，都可以将其视为到函数子空间的幂等投影；该子空间中的函数关于所有满足 $R \subset W_\theta^\circ$的 θ 都是单值的。因此，每个 R都确定了 $T(\mathbb{F}_{q^k})$的乘法特征的一个子集 M_R，使得 $e_R\, \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]_\theta = \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]_\theta$，且对于每个 $\theta' \notin M_R$，都有 $e_R \cdot \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]_{\theta'} = 0$。存在一个直和分解 $\mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})] = \oplus_\theta \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]_\theta$。还要回顾的是，我们可以选择足够大的 k，使特化映射 $\mathcal{C}(v) \to \mathbb{C}[(G/U)(\mathbb{F}_{q^k})]$ 根据第 3.4 节是单射。因此，由于每个 R都确定了一个不同的此类子集 M_R，对于不同的 R，$\mathcal{C}(v)e_R$ 中的元素之间不可能存在线性关系。□

定义 5.5. 对于任意子集 $I \subset S$，令 D_I 表示满足以下条件的元素 $w \in W$的数量：对于每个连续区块 $I' \subset I$，都存在一个简单反射 $s \in I'$，使得 $\ell(ws) < \ell(w)$。

由于我们处于 A 型，任意反射子群都共轭于某个抛物子群 $P_I \subset W$，该抛物子群对应于某个 $I \subset S$。

引理 5.6. 设 R 是 W 的任意反射子群，且共轭于 P_I。那么 dim $J_R e_R = D_I$。

证明。由共轭下维数不变可知，只需对$R = P_I$ 证明这一点，其中 $I \subset S$满足某个条件。在这种情况下，我们回顾这样一个事实：对于 $s \in P_I$，每个$g_s P_I$ 都满足一个二次关系，即.....$(g_s - v^2)(g_s + 1)e_{P_I} = 0$。这意味着 dim $J_R e_R$ 等于群代数 $\mathbb{C}[W]$中由下列元素生成的左理想的维数：

$$(1 + r_1) \dots (1 + r_k) \in \mathbb{C}[W], \tag{25}$$

其中每个 r_i 都属于 I的一个不同连续分支。若令 J'_I 为此理想，则不难验证，$\mathbb{C}[W]/J'_I$ 由等价类 $\overline{w}$张成，其中 $w \in W$ 满足：存在 I 的一个连续区块 I'，使得 w 的任何约化表达式都不以 I' 中的元素为后缀。因此，$\mathbb{C}[W]/J'_I$的维数恰为引理陈述中所述集合的补集的大小，因此后一个集合的大小等于 dim $J'_I =$ dim $J_I e_I =$ dim $J_R e_R$。□

5.2. 一个显式公式。

定义 5.7. 令 $P(n)$ 为所有分拆 $(\lambda_i)_{i=1}^k$ 的集合，使得

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) + k - 1 \leq n. \tag{26}$$

我们可以将 $P(n)$ 视为邓肯图（类型为 A_n）的一种连续区块 $I \subset S$ 的选取，其中区块大小按递减顺序排列。例如，当 $n = 7$ 时，分拆 (2, 2, 1) 对应于此处所示的选取。



给定任意子集 $I \subset S$，我们可以重新排列其中的连续区块，使其大小按递减顺序排列，并将相应的分拆定义为 λ^I。最后，对于任意 $i \geq 1$，令 $n_i(I)$ 表示 λ^I 中等于 i 的部分数。

引理 5.8（[How80]）。给定任意子集 $I \subset S$，由 I 中的简单反射生成的 W 的抛物子群 W_I 的正规化子阶数为

$$\left(n + 1 - \sum_i (i+1) n_i(I) \right)! \cdot \prod_i n_i(I)! (i+1)!^{n_i(I)}. \tag{27}$$

引理 5.9. 对于任意 $I \subset S$,

$$D_I = \sum_{T \subset \{\lambda_i^I\}_i} (-1)^{|T|} \frac{(n+1)!}{\prod_{\lambda_i^I \in T} (\lambda_i^I + 1)!} \tag{28}$$

其中，求和遍及 λ^I 的所有子分拆，包括其本身 λ^I。

证明。事实上，这由容斥原理得出，因为该量

$$\frac{(n+1)!}{\prod_{\lambda_i^I \in T} (\lambda_i + 1)!}$$

等于元素 $w \in W$ 的数量：它们没有任何约化表达式以给定块子集 T 中的任一块 λ_i^I 内的任何单反射结尾。□

定理 5.10. 对于任意 $I \subset S$，令 R_I 为 W中与 P_I 共轭的反射子群的数量（即 $|W|$ 除以引理 5.8 中的量），并令 D_I如上所述。那么，类型 A_n 中 $\mathcal{C}(v)$ 的维数为

$$\dim \mathcal{C}(v) = \sum_{I \subset S} R_I \cdot D_I. \tag{29}$$

5.3. 示例及与 [Mar18] 的比较。最后，我们通过三个示例说明这些公式在实践中的应用，并验证 Marin 在 [Mar18] 的类型 A_2, A_3, A_4 中第 4.3 节所做的计算。请注意，在上述文献的这些情形中，得到的维数序列为 20,217,3364（显然 $\dim \mathcal{C}_{A_1}(v) = 3$）。现在我们将说明如何通过我们的计算得到这一序列。

在图 1 中，我们用 N_I 表示 W_I 的正规化子的维数，即引理 5.8 中给出的量。然后，按照前文的说明，通过 $R_I = (n+1)!/N_I$ 得到 R_I，其中 D_I 由引理 5.9 中的公式给出。

I	N_I	R_I	D_I
⊙—⊙	6	1	5
⊙—•	3	2	3
•—•	6	1	6

I	N_I	R_I	D_I
⊙—⊙—⊙	24	1	23
⊙—⊙—•	6	4	20
⊙—•—⊙	8	3	6
⊙—•—•	4	6	12
•—•—•	24	1	24

I	N_I	R_I	D_I
⊙—⊙—⊙—⊙	120	1	119
⊙—⊙—⊙—•	24	5	115
⊙—⊙—•—⊙	12	10	50
⊙—⊙—•—•	12	10	100
⊙—•—⊙—•	8	15	30
⊙—•—•—•	12	10	60
•—•—•—•	120	1	120

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{C}_{A_2}(v) &= 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 20 \\ \dim \mathcal{C}_{A_3}(v) &= 1 \cdot 23 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 12 + 1 \cdot 24 = 217 \\ \dim \mathcal{C}_{A_4}(v) &= 1 \cdot 119 + 5 \cdot 115 + 10 \cdot 50 + 10 \cdot 100 + 15 \cdot 30 + 10 \cdot 60 + 1 \cdot 120 = 3364\end{aligned}$$

FIGURE 1. 情形 $n = 2$、3、4。

超越这些低秩计算，我们借助计算机计算了所有 $n \leq 43$ 的 $\mathcal{C}_{A_n}$ 维数，并在图 2 中列出了前 12 个。

n	维数 $\mathcal{C}_{A_n}(v)$
1	3
2	20
3	217
4	3364
5	71098
6	1960867
7	67886033
8	2871659468
9	145498348666
10	8683447971439
11	601843453126056
12	47875219836485209

FIGURE 2. 截至 $n = 12$ 的维数表。

References

[Ach21] Pramod N. Achar。《 *Perverse sheaves and applications to representation theory*》， *Lecture Notes in Math.*第258卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2021年。[AJ17] Francesca Aicardi和Jes ´us Juyumaya。《辫子与缠结代数》，2017年9月。[Del77] P. Deligne。《 *Cohomologie étale*》， *Lecture Notes in Math.*第569卷，施普林格出版社，柏林，1977年。S´法语研讨会《代数几何》， Bois-Marie SGA 4 1 2。[ERH18] Jorge Espinoza和Steen Ryom-Hansen。Yokonuma-Hecke代数与辫子和缠结代数的胞腔结构。《 *J. Pure Appl. Algebra* 222 11 3675 3720,》， （）：–。[2018
Ete22] Arnaud Eteve。Kazhdan-Laumon层与Deligne-Lusztig表示，2022年11月。[How80] Robert B. Howlett。反射群中抛物子群的正规化子。《 *J. Lond. Math. Soc. (2)* 21 1 62 80, 1980 》， （）：–。[

JK01] Jes ´us Juyumaya和S. Senthamarai Kannan。Yokonuma-Hecke代数中的辫关系。《 *J. Algebra*》， 239(1):272–297，2001年。[Juy98] Jes ´ ´ ` $\mathcal{H}$ G U **1** *J.* us Juyu *Algebra* 204 1 49 68, 1998
maya。关于赫克代数（， ，）的新生成元。《》， （）：–。[Kaz95] David Kazhdan。GL$_n$主系列的“形式”。载于 *Functional analysis on theeve of the 21st century, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993)*，第131卷， *Progr. Math.*，第153–171页。Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州波士顿，1995年。[KL88] David Kazhdan和G´erard Laumon。反常层的粘合与离散系列表示。《 *J. Geom. Phys.*》，5(1):63–120，1988年。[Lau87] G´erard Laumon。傅里叶变换、函数方程常数与韦伊猜想。《 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*》，65:131–210，1987年。[LY20] George Lusztig和Zhiwei Yun。赫克范畴、特征层与表示的端oscopy。《 *Forum Math. Pi*》，8:e12，93，2020年。[Mar18] Ivan Marin。Artin群与Yokonuma-Hecke代数。《 *Int. Math. Res. Not. IMRN*》，2018 13 4022 4062，2018（）：–。[MF22] Calder Morton-Ferguson。Kazhdan-Laumon范畴O、Braverman-Kazhdan Schwartz空间与半无限旗簇，2022年10月。[MW13] Ivan Marin和Emmanuel Wagner。Links-Gould多项式的一个三次定义代数。《 *Adv. Math.*》，248:1332–1365，2013年。[Pol01] Alexander Polishchuk。在基本仿射空间上粘合反常层。《 *Selecta Math. (N.S.)* 7 1 83 147, 2001 》， （）：–。

附录由R. Bezrukavnikov与作者合写。[RH11] Steen Ryom-Hansen。关于辫子与缠结代数表示论。《 *Algebraic Combin.* 33 1 57 79, 2011 》， （）：–。[

Wil03] Geordie Williamson。留意你的P和Q符号：为什么A型赫克代数的Kazhdan-Lusztig基具有胞腔结构，2003年。[Yok67] Takeo Yokonuma。关于有限Chevalley群赫克环的结构。《 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*》，264:A344–A347，1967年。