arXiv:2304.02000v1 [math.RT] 4 Apr 2023

$U(p,q)$的全纯离散系列表示的张量积与箭图

Velleda Baldoni 和 Mich`ele Vergne

摘要 考察 $U(p,q)$李代数中全纯轨道所构成的凸锥。与厄米矩阵的经典情形相同，包含在两个全纯轨道之和中的椭圆轨道集合可由“Horn不等式”描述。借助箭图表示，我们给出 P-E Paradan 所得 Horn递归不等式的另一种证明。我们回顾这些不等式对于分解群$U(p,q)$两个全纯离散系列表示的张量积所产生的影响。

1 引言

设 (λ,μ) 是紧群 $G=U(n)$ 的一对支配权。我们的目标是描述 G 的不可约表示 V_ν 中哪些以非零重数 $c^\nu_{\lambda,\mu}$ 出现在 $V_\lambda\otimes V_\mu$ 中。这里，V_λ,V_μ,V_ν 分别是 $U(n)$（或 $GL(n)$）的不可约表示，其最高权分别为 λ,μ,ν。

$G\mathrm{Lie}(G)$ 表示 $\sqrt{-1}$ 的李代数。那么，空间 $G\mathrm{Lie}(n\times n)$ 是由 T 厄米矩阵构成的空间。令 G 为 $n\times n$ 中由模长为 1 的对角矩阵组成的 Cartan 子群。若 $a=(a(1),\ldots\ldots,a(n))$ 是一列 n 实数，我们也用 $a\in\sqrt{-1}\,\mathrm{Lie}(T)$ 表示对角线上的系数为 $a(i)$ 的对角 $n\times n$厄米矩阵。利用矩阵上的内积 $\mathrm{tr}(AB)$，我们可以将 a 视为 $(\sqrt{-1}\,\mathrm{Lie}(G))^*$ 的一个元素。于是，Weyl 室 $\mathfrak{c}_{\geq 0}=\{a=(a(1)\geq a(2)\geq\cdots\geq a(n))\}$ 是一组

Velleda Baldoni 数学系，罗马第二大学，Via della Ricerca Scientifica 1-00133 罗马，意大利，电子邮件： baldoni@mat.uniroma2.itMich`ele Vergne 巴黎朱西厄数学研究所，巴黎西岸运河大学，索菲·热尔曼校区，法国巴黎13区，电子邮件: michele.vergne@imj-prg.fr

$(\sqrt{-1}\mathrm{Lie}(G))^*$ 中 G 的余伴随轨道的代表元。记 O_a 为 a 的余伴随轨道。轨道 O_a 带有一个 G-不变的 Kähler 结构。

设 $\lambda = (\lambda(1) \geq \lambda(2) \geq \cdots \geq \lambda(n))$ 是一个支配权，也就是 $\mathfrak{c}_{\geq 0}$ 中一个具有整数系数的元素。由于 V_λ 的表示 $U(n)$ 是通过对相应余伴随轨道 O_λ 进行几何量子化得到的，因此，对于一组三个支配权 (λ, μ, ν)，性质 $V_\nu \subset V_\lambda \otimes V_\mu$ 的几何类比，就是对于一组三个厄米矩阵 (a, b, c) 的性质 $O_c \subset O_a + O_b$。令 $\mathrm{Cone}(n) \subset \mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0}$ 为此类三元组 (a, b, c) 的集合。锥 $\mathrm{Cone}(n)$ 是一个多面锥，A. Horn ([13]) 猜想了一系列递归不等式来描述这个锥。Knutson-Tao ([15]) 证明了 Horn 猜想以及著名的饱和猜想：当且仅当存在一个整数 $N \geq 1$ 使得 $c^{N\nu}_{N\lambda, N\mu} \neq 0$ 时，才有 $c^\nu_{\lambda,\mu} \neq 0$。等价地，当且仅当 $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathrm{Cone}(n)$ 时，才有 $c^\nu_{\lambda,\mu} \neq 0$。

现在考虑伪酉变换的非紧群 $G = U(p, q) \subset GL(p+q)$，并令 $n = p+q$。群 G 有一个紧致 Cartan 子群 T：由模长为一的 $n \times n$ 对角矩阵构成的空间。G 存在一系列酉不可约表示 π_λ，称为与 T的一个特征标子集相关联的全纯离散系列。这样的表示 π_λ 同样由一列缓慢递减的整数来标记

$$\lambda = (\lambda(1) \geq \cdots \geq \lambda(p) \geq \lambda(p+1) \geq \cdots \geq \lambda(p+q)),$$

其中 $\lambda(p)$ 与 $\lambda(p+1)$ 之间存在间隔（见第 4 节，例 4）。容易证明，全纯离散系列中的两个表示 π_λ 和 π_μ 的张量积可分解为具有有限重数的表示 π_ν 之和，这些表示属于全纯离散系列：

$$\pi_\lambda \otimes \pi_\mu = \oplus_\nu m^\nu_{\mathrm{hol}}(\lambda, \mu)\pi_\nu. \tag{1}$$

因此，一个自然的问题是描述满足 $\pi_\nu \subset \pi_\lambda \otimes \pi_\mu$ 的三元组 (λ, μ, ν)。

Let

$$A = (A(1) \geq \cdots \geq A(p) \geq A(p+1) \geq \cdots \geq A(p+q))$$

是一个递减缓慢的实数序列。我们还将 $A \in \sqrt{-1}\mathrm{Lie}(T)$ 记为对角线上系数为 $A(i)$ 的对角矩阵。再次利用双线性形式 $\mathrm{tr}(AB)$，我们可以将 A 视为 $(\sqrt{-1}\mathrm{Lie}(G))^*$ 的一个元素。令 O^{nc}_A为 A在 $U(p, q)$ 作用下对应的（非紧）余伴随轨道。于是，O^{nc}_A带有一个 $U(p, q)$-不变的 K¨ahler 结构，我们称 O^{nc}_A 为全纯轨道。$U(p, q)$ 的全纯离散系列表示 π_λ由相应的（非紧）余伴随全纯轨道 O^{nc}_λ的几何量子化得到。因此，性质 $\pi_\nu \subset \pi_\lambda \otimes \pi_\mu$的几何类比是性质 $\mathrm{O}^{nc}_C \subset \mathrm{O}^{nc}_A + \mathrm{O}^{nc}_B$。令 $\mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(p, q)$ 为这类三元组 (A, B, C) 的集合。

在 ([19]) 中，P-E Paradan 描述了 (A, B, C) 属于 $\mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(p, q)$ 的归纳式充要条件，这与定号情形下的 Horn 条件类似。利用 Derksen-Weyman 饱和定理 ([7])，可推出离散系列表示的饱和猜想成立：存在一个整数 $N \geq 1$，使得 $m^{N\nu}{}_{\text{全纯}}(N\lambda, N\mu) \neq 0$ 当且仅当 $m^{\nu}{}_{\text{全纯}}(\lambda, \mu) \neq 0$。因此，锥 $\mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(p, q)$ 的不等式给出了 $m^{\nu}{}_{\text{全纯}}(\lambda, \mu)$ 非零的归纳式充要条件。

本文通过将$m^{\nu}{}_{\mathrm{hol}}(\lambda, \mu)$与箭图联系起来，给出了 Paradan 条件的另一种证明。这样做的一个好处是，归纳条件在这一框架下显得十分自然。此外，还可以看出一些在原问题中无法发现的对称性（见命题 2）。我们还简要介绍了另一种证明（基于轨道([4])的傅里叶变换的 Rossmann 公式）：由满足 $m^{\nu}{}_{\mathrm{hol}}(\lambda, \mu) > 0$ 的三元组(λ, μ, ν)生成的锥，等于锥 $\mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(p, q)$，这正是预期的结果。

回顾一般的箭图框架。设 $Q = (Q_0, Q_1)$是一个箭图，其中 Q_0是有限顶点集，Q_1 是有限箭集。Q 的维数向量是一个由非负整数组成的向量 $\mathbf{n} = (n_x)_{x \in Q_0}$（若顶点标记为$\{1, 2, \ldots, q_0\}$，我们也采用记号 $\mathbf{n} = [n_1, \ldots, n_{q_0}]$）。我们考虑复向量空间族 $\mathbf{E} = (E_x)_{x \in Q_0}$，其中 $E_x = \mathbb{C}^{n_x}$。箭图 Q 在 $\mathbf{E}$ 上的表示空间定义为

$$\mathcal{H}_Q(\mathcal{E}) := \bigoplus_{a: x \to y \in Q_1} \mathrm{Hom}(E_x, E_y).$$

李群 $\mathrm{GL}_Q(\mathbf{n}) = \hat{\mathrm{I}}_{x \in Q_0} \mathrm{GL}(n_x)$ 在 $\mathrm{H}_Q(\mathbf{E})$ 上有自然作用，因此也自然作用于 $\mathrm{H}_Q(\mathbf{E})$ 上多项式函数的空间 $\mathrm{Sym}^*(\mathrm{H}_Q(\mathbf{E}))$。将其分解

$$\mathrm{Sym}^*(\mathcal{H}_Q(\mathcal{E})) = \bigoplus_{\lambda} m_Q(\lambda) V_\lambda,$$

其中 V_λ 表示 $\mathrm{GL}_Q(\mathbf{n})$ 的最高权为 λ 的不可约表示。如果 Q 没有有向环，则重数 $m_Q(\lambda)$ 有限。

当 Q 是 Horn 箭图 H_2 时

$$1 \to 3 \leftarrow 2 \tag{2}$$

且维数向量为 $\boldsymbol{n} = [n, n, n]$ 时，则 $m_Q([\lambda, \mu, \nu]) = c_{\lambda, \mu}^{\nu^*}$ 其中 $\nu^* = (-\nu(n) \geq \cdots \geq -\nu(1))$ 标记对偶表示 V_ν^*。

可以通过研究表示 Q 在 $\mathbf{E}$ 上的一般子表示的舒伯特位置，判断 $m_Q(\lambda) > 0$ 是否成立。由此得到一个自然的归纳判据（[2]）；对于箭图 H_2，该判据与 Belkale 关于舒伯特胞腔交的归纳判据（[3]）一致。

紧群 $K = \mathrm{U}_Q(\mathbf{n}) = \hat{\mathrm{I}}_{x \in Q_0} \mathrm{U}(n_x)$ 在 $\mathrm{H}_Q(\mathbf{E})$ 上的作用导出一个取值于 $(\sqrt{-1}\mathrm{Lie}(K))^*$ 的动量映射，以及一个“动量锥”$\mathrm{Cone}_Q(\mathbf{E})$，它参数化了包含在动量映射像中的 K 的余伴随轨道。Derksen-Weyman 饱和定理等价于

如下陈述： $m_Q(\lambda) > 0$ 当且仅当 λ 属于动量锥 $\mathrm{Cone}_Q(E)$。

考虑箭图 $Q = Q_{3,\,3}$，它有 6 个顶点 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 和箭$1 \to 3$, $2 \to 3$, $4 \to 3$, $4 \to 5$, $4 \to 6$, 见图 1。由 Q_0 参数化的对象族将写成列表。

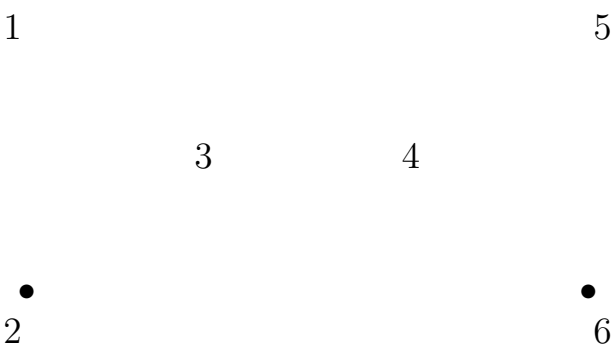


图 1

考虑维数向量 $\beta = [p, p, p, q, q, q]$，并令

$$\mathcal{E} = [\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^q].$$

我们将动量锥 $\mathrm{Cone}_Q(E)$ 记作 $\mathrm{Cone}_Q(p, q)$。它包含于$\mathfrak{c}_{\geq 0} = \oplus_{i=1}^{6} \mathfrak{c}_{\geq 0}^{(i)}$，其中 $\mathfrak{c}_{\geq 0}^{(i)}$ 是紧群 $U(\beta_i)$ 的正 Weyl 室。

例1； $p = 2$, $q = 1$。
设 $a = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6] \in \mathfrak{c}_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned}
a_1 &= (a_1(1) \geq a_1(2)),\\
a_2 &= (a_2(1) \geq a_2(2)),\\
a_3 &= (a_3(1) \geq a_3(2)),\\
a_4 &= (a_4(1)),\\
a_5 &= (a_5(1)),\\
a_6 &= (a_6(1)).
\end{aligned}$$

那么，当且仅当 a 属于 $\mathrm{Cone}_Q(2, 1)$

$$\begin{aligned}
a_1(1)+a_1(2)+a_2(1)+a_2(2)+a_3(1)+a_3(2)+a_4(1)+a_5(1)+a_6(1)=0,\\
a_1(2)\geq 0,\ a_2(2)\geq 0,\ a_5(1)\leq 0,\ a_6(1)\leq 0,\\
a_1(2)+a_2(2)+a_3(2)+a_4(1)+a_5(1)+a_6(1)\leq 0,\\
a_1(1)+a_1(2)+a_2(1)+a_2(2)+a_3(1)+a_3(2)\leq 0,\\
a_1(1)+a_2(2)+a_3(2)\leq 0,\\
a_1(2)+a_2(1)+a_3(2)\leq 0,\\
a_1(2)+a_2(2)+a_3(1)\leq 0.
\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6]$是 $U_Q(\boldsymbol{\beta})$的一个支配权。若 $m_Q(\boldsymbol{\lambda})>0$, 则可得 λ_1, λ_2, λ_3^*是 $GL(p)$的多项式表示的指标，λ_4^*, λ_5, λ_6是 $Gl(q)$ 的多项式表示的对偶。我们可以考虑拼接后的序列 $A=(\lambda_1,\ \lambda_5)$、$B=(\lambda_2,\ \lambda_6)$、$C=(\lambda_3^*,\ \lambda_4^*)$。它们是缓慢递减的 n 整数序列。因此，本文的主要论述是

命题 1.

$$m_Q(\boldsymbol{\lambda})=m_{\mathrm{hol}}^C(A,B).$$

因此，当 $m^C{}_{\text{全纯}}(A,B)>0$ 时，我们可以读出锥 $\mathrm{Cone}\varrho(\mathrm{E})$ 的方程；等价地，当 $\mathrm{O}_C^{nc}\subset\mathrm{O}_A^{nc}+\mathrm{O}_B^{nc}$ 时也是如此。

例1的续篇
Let

$$\begin{aligned}
A&=(A(1)\geq A(2)\geq A(3)),\\
B&=(B(1)\geq B(2)\geq A(3)),\\
C&=(C(1)\geq C(2)\geq C(3)),
\end{aligned}$$

是一个由缓慢递减的实数序列组成的三元组，这些序列为 $U(2,1)$ 中的全纯轨道编索引。利用命题 1，我们重新得到（见 [19]）

$$O_C^{nc}\subset O_A^{nc}+O_B^{nc}$$

当且仅当

$$\begin{aligned} A(1)+A(2)+A(3)+B(1)+B(2)+B(3) &= C(1)+C(2)+C(3),\\ A(1)+B(1) &\geq C(2),\\ A(1)+A(2)+B(1)+B(2) &\leq C(1)+C(2),\\ A(2)+B(2) &\leq C(2),\\ A(2)+B(1) &\leq C(1),\\ A(1)+B(2) &\leq C(1). \end{aligned}$$

本文结构如下。

在第 2 节中，我们回顾关于箭图表示的一般子表示的结果（[2]），以及用于确定动量锥 Cone$_Q$(E) 不等式的一般归纳算法。

在第 3 节中，我们更详细地介绍该算法及其在箭图$Q_{3,\ 3}$这一特殊情形下的一些简化。我们指出了问题中对称性的存在。

在第 4 节中，我们回顾一般厄米对称空间 G/K 上全纯离散系列的定义。我们回顾如下结论：表示 π_ν 在全纯离散系列的两个表示 π_λ、π_μ 的张量积中的重数，可以通过显式表示中极大紧子群 K 在 G 上的作用来计算。

在第 5 节中，我们陈述了描述两个全纯轨道之和的几何类比。正如 P.E. Paradan 所得，包含在两个全纯轨道 O_A^{nc}、O_B^{nc} 之和中的轨道集合，可以描述为 K 在一个（非紧）哈密顿空间上的作用所对应的动量锥。我们概述一种更直接的证明，该证明基于轨道傅里叶变换的 Rossmann 公式。

在第 6 节中，我们考察 $G = U(p,\ q)$，并将重数 $m^\nu_{\text{全纯}}(\lambda,\ \mu)$ 与 $m_Q(\lambda)$ 联系起来，其中 $Q = Q_{3,\ 3}$ 是上文所述的特定箭图。这是本文的主要发现。

在第 7 节中，我们将本文的不等式与 P.E. Paradan 得到的不等式进行比较。

在第 8 节中，我们给出本文不等式的更多例子。

本文内容曾在“几何与分析中的对称性”会议上报告（兰斯，2022 年 6 月）。我们希望，这篇关于分支规则问题的贡献，能够成为向小林俊行致敬的恰当方式。

正如我们所指出的，本文的结果归功于 P.E. Paradan。但我们希望展示箭图对于非紧群表示论中的一些特殊问题可能有所帮助。尤其是在低维情形下，相应的“Horn不等式”很容易猜出并直观呈现。

感谢 Jean-Louis Clerc 和 David Vogan 在会议期间提出的意见。感谢 Michel Duflo 提出的诸多意见并提供的参考文献。

记号与约定

所有向量空间均为有限维复向量空间。给定一个向量空间 E，我们用 $\dim E$ 表示其（复）维数，并用 $\mathrm{Gr}(r, E)$ 表示 E 中维数为 r 的子空间所构成的格拉斯曼流形，其中 $0 \le r \le \dim E$。我们用花体或粗体字母表示由箭图的顶点集 Q_0 标记的对象族。例如，$\mathbf{E} = (E_x)_{x\in Q_0}$ 表示由 Q_0 索引的一族向量空间，$\mathbf{n} = (n_x)_{x\in Q_0}$ 表示一族自然数。若 Q_0 标记为由连续整数组成的集合 $\{1,2,\dots,q_0\}$，则由顶点集 Q_0 标记的对象族将写成列表。例如，箭图 $Q_{3,3}$ 的维数向量 $[3,1,2,1,1,1]$ 表示满足 $n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 2, n_4 = 1, n_5 = 1, n_6 = 1$ 的 $\mathbf{n} = (n_x)$。

2 箭图表示空间 $\boldsymbol{Q}$

设 $Q = (Q_0, Q_1)$ 是一个箭图，其中 Q_0 是有限顶点集，Q_1 是有限箭集。我们用记号 $a: x \to y$ 表示一条从 $x \in Q_0$ 到 $y \in Q_0$ 的箭 $a \in Q_1$。我们允许 Q 在两个顶点之间有多条箭，但不允许有环。设 $\mathbf{n} = (n_x)_{x\in Q_0}$ 是一个维数向量。我们考虑一个复向量空间族 $\mathbf{E} = (E_x)_{x\in Q_0}$，其维数向量为 $\mathbf{n}$，即 $\dim E_x = n_x$。反过来，一个由 Q_0 索引的向量空间族 $\mathbf{E} = (E_x)_{x\in Q_0}$ 定义了维数向量 $\dim \mathbf{E} = (\dim E_x)_{x\in Q_0}$。因此，维数向量这一说法既指非负整数族，也指复向量空间族。

箭图 Q 在 $\mathbf{E}$ 上的表示空间为

$$\mathcal{H}_Q(\mathcal{E}) \coloneqq \bigoplus_{a:x\to y\in Q_1} \mathrm{Hom}(E_x, E_y), \tag{3}$$

其元素是由线性映射 $r_a: E_x \to E_y$ 组成的族 $r = (r_a)_{a\in Q_1}$，每个箭 $a: x \to y$ 对应一个，该族取自 Q_1。李群 $\mathrm{GL}_Q(\mathbf{E}) = \hat{\mathrm{I}}_{x\in Q_0} \mathrm{GL}(E_x)$ 在 $\mathrm{H}_Q(\mathbf{E})$ 上自然作用。对于 $g \in \mathrm{GL}_Q(\mathbf{E})$ 和 $r \in \mathrm{H}_Q(\mathbf{E})$，其作用为 $(g \cdot r)_{a:x\to y\in Q_1} = g_y r_a g_x^{-1}$。

因此，群 $\mathrm{GL}_Q(\mathbf{E})$ 自然作用于空间 $\mathrm{Sym}^*(\mathrm{H}_Q(\mathbf{E}))$，即定义在 $\mathrm{H}_Q(\mathbf{E})$ 上的多项式函数空间。描述在 $\mathrm{Sym}^*(\mathrm{H}_Q(\mathbf{E}))$ 中以非零重数出现的 $GL_Q(\mathbf{E})$ 的不可约表示，与研究表示 r的子表示有关。下面回顾一些相关结果。

令 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 为两个维数向量。考虑 Ringel 双线性型

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \sum_{x \in Q_0} \alpha_x \beta_x - \sum_{a : x \to y \in Q_1} \alpha_x \beta_y .$$

设 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x)_{x \in Q_0}$ 为一个维数向量，满足 $\alpha_x \leq \dim E_x$。我们称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 E. 的子维数向量。

按以下公式定义预期维数 edim$Q$：

$$\mathrm{edim}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{E}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\beta}$ 是由 $\beta_x = \dim E_x - \alpha_x$. 定义的维数向量。

若 S $\subseteq$ E，且 S $= (S_x)_{x \in Q_0}$ 是子空间族 $S_x \subseteq E_x$，则记作 S $\subseteq$ E。如果对 Q_1 中的每个箭 $a : x \to y$，都有 $r_a S_x \subseteq S_y$，则称族 S 为 $r \in$ HQ(E) 的子表示；我们将此条件简记为 rS $\subseteq$ S。

Schofield（[23]）归纳地刻画了满足以下条件的子维数向量 $\boldsymbol{\alpha}$：任意 $r \in$ HQ(E) 都有一个子表示 S，使得 dim S $= \boldsymbol{\alpha}$。我们称这样的维数向量为 E 的 Schofield 子维数向量，并用 $\boldsymbol{\alpha} \leq_Q \boldsymbol{n}$ 表示这一性质，其中 dim E $= \boldsymbol{n}$。此外，如果至少一个不等式 $\alpha_x \leq n_x$ 是严格的，我们也记作 $\boldsymbol{\alpha} <_Q \boldsymbol{n}$。条件 $\boldsymbol{\alpha} \leq_Q \boldsymbol{\beta}$ 具有传递性。容易看出，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 E 的 Schofield 子维数向量的必要条件是 edim$Q$($\boldsymbol{\alpha}$, E) ≥ 0。在 [2], 中，我们证明了以下自然判据，它细化了 Schofield 判据:

定理 1. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 E 的一个子维数向量。那么 $\boldsymbol{\alpha} \leq_Q$ dim E 当且仅当

1. edim$Q$($\boldsymbol{\alpha}$, E) ≥ 0。
2. 若 $\boldsymbol{\beta} <_Q \boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\beta} <_Q$ dim E（传递性）。

考虑

$$\mathrm{Gr}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{E}) := \prod_{x \in Q_0} \mathrm{Gr}_Q(\alpha_x, E_x)$$

其中 Gr(α_x, E_x) 表示 E_x 的维数为 α_x的子空间所构成的格拉斯曼流形。GrQ($\boldsymbol{\alpha}$, E) 的维数为 Í $_{x \in Q_0} \alpha_x \beta_x$，其中 $\boldsymbol{\beta}$是由 $\beta_x = \dim E_x - \alpha_x$。定义的维数向量。因此，我们有

$$\mathrm{edim}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{E}) = \dim(\mathrm{Gr}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{E})) - \sum_{a : x \to y \in Q_1} \alpha_x \beta_y . \tag{5}$$

给定一个表示 $r \in$ HQ(E) 和一个维数向量 $\boldsymbol{\alpha}$，我们将相应的箭图格拉斯曼流形定义为

$$\mathrm{Gr}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{E})_r := \{\mathcal{S} \in \mathrm{Gr}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{E}) : r\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}\}.$$

在这种语言中，Schofield 子维数向量是一个子维数向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得对于每个表示 $r \in$ HQ(E)，都有 GrQ($\boldsymbol{\alpha}$, E)$_r \neq \emptyset$。如果 α 是一个

Schofield 子维数向量，那么“预期维数” $\operatorname{edim}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathrm{E})$ 就是对一般的 r 而言，簇 $\mathrm{Gr}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathrm{E})_r$ 的维数。

现在选择 B $GL_Q(\mathrm{E})$ 的一个 Borel 子群（或 E 的一个完备滤过）。若 $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{E}$，则 E 的 Borel 子群决定了 $GL_Q(\mathrm{S})$ 的一个 Borel 子群，仍记为 B。根据定义，Schubert 簇 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 $\mathrm{Gr}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathrm{E})$ 中元素 S 的 B 轨道的闭包（因此 $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x)_{x \in Q_0}$ 是 $\mathrm{Gr}_Q(\alpha_x, E_x)$ 中 Schubert 簇 Ω_x 的乘积）。给定一个表示 $r \in \mathrm{H}_Q(\mathrm{E})$ 和一个 Schubert 簇 $\boldsymbol{\Omega}$，定义

$$\boldsymbol{\Omega}_r := \mathrm{Gr}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{E})_r \cap \boldsymbol{\Omega} = \{\mathcal{S} \in \boldsymbol{\Omega} : r\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}\}.$$

定义 1。若对于每个 $r \in \mathrm{H}_Q(\mathrm{E})$，$\boldsymbol{\Omega}_r$ 都非空，则称 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 Q-相交的。

换言之，若对于每个 $r \in \mathrm{H}_Q(\mathrm{E})$，Schubert 簇 $\boldsymbol{\Omega}$ 都包含一个 r 的子表示，则称 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 Q-相交的；只需考虑一般表示 r。若 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 S 的 B-轨道的闭包，则当 Ω 是 Q-相交的时，记作 $\mathrm{S} \subseteq_{Q,\ B} \mathrm{E}$。若 $\mathrm{S} \neq \mathrm{E}$，则记作 $\mathrm{S} \subset_{Q,\ B} \mathrm{E}$，。显然，$\boldsymbol{\Omega}$ 是 Q-相交的一个必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 Schofield 子维数向量。

若 Q 是 Horn 箭图 H_2

$$1 \to 3 \leftarrow 2 \tag{6}$$

且向量维数为 $[n, n, n]$，则 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}(r, n)$ 中的 Schubert 簇三元组 $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]$ 是 Q-相交的，当且仅当 Schubert 簇 $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ 在同调意义上相交。因此，这也解释了我们的术语。

我们用于判定 $\boldsymbol{\Omega}$ 是否为 Q-相交的归纳判据，基于一个数值量：预期维数 $\operatorname{edim}_{Q,B}(\boldsymbol{\Omega}, \mathrm{E})$，它是对 (5) 的推广。

$$\operatorname{edim}_{Q,B}(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{E}) := \dim \boldsymbol{\Omega} - \sum_{a:\ x \to y \in Q_1} \alpha_x \beta_y. \tag{7}$$

（因此，当 $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{Gr}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathrm{E})$ 是大胞腔的闭包时，$\operatorname{edim}_{Q,B}(\boldsymbol{\Omega}, \mathrm{E}) = \operatorname{edim}_Q(\boldsymbol{\alpha}, \mathrm{E})$。）

若 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 S 的 B-轨道的闭包，我们将 $\operatorname{edim}_{Q,B}(\mathrm{S}, \mathrm{E})$ 记作 $\operatorname{edim}_{Q,B}(\boldsymbol{\Omega}, \mathrm{E})$。

若 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 Q-相交的，那么很容易看出，预期维数 $\operatorname{edim}_{Q,B}(\boldsymbol{\Omega}, \mathrm{E})$ 就是对一般的 r 而言簇 $\boldsymbol{\Omega}_r$ 的维数。因此，$\boldsymbol{\Omega}$ 在 E 中为 Q-相交的必要条件是 $\operatorname{edim}_{Q,B}(\boldsymbol{\Omega}, \mathrm{E}) \geq 0$（但该条件并不充分）。

我们的主要结果（[1], [2]）是以下归纳判据：

定理 2.设 E 是一个向量空间族，S 是 E 的一个子空间族。当且仅当 $\mathrm{S} \subseteq_{Q,\ B} \mathrm{E}$ 时，

1. S，E 的 $\operatorname{edim}_{QB} \geq 0$,

2. 对每个 T $\subset_{Q,\ B}$ S，都有 T $\subset_{Q,\ B}$ E（传递性）。

我们来回顾这个定理对重数的推论。

对于 $x \in Q_0$，令 $E_x = \mathbb{C}^{n_x}$，其标准基为 $(e_j)_{1\le j\le n_x}$，并考虑 Borel 子群 B_x，它由 GL(E_x) $=GL(n_x)$ 中的上三角矩阵构成。令 U_x 为 $GL(n_x)$ 中由酉算子构成的极大紧子群，其李代数为 $\mathfrak{u}_x$。按照引言中的定义，我们将 $(\sqrt{-1}\mathfrak{u}_x)^*$ 与 E_x 上的厄米算子空间等同。考虑 Weyl 室 $C_x \subset (\sqrt{-1}\mathfrak{u}_x)^*$，它可与由 n_x 个缓慢递减的实数 a 构成的锥等同 $a = (a_x(1) \ge \cdots \ge a_x(n_x))$. 一个取值于 C_x 的 $\mathbb{Z}$ 元素是一个支配权：$\lambda_x = (\lambda_x(1) \ge \cdots \ge \lambda_x(n_x))$。

GLQ(E) 的不可约表示具有如下形式：$V_\lambda = \ddot{\mathrm{E}}_{x\in Q_0} V_{\lambda_x}$，其中 $\lambda = (\lambda_x)_{x\in Q_0}$；这里，$\lambda_x$是支配权，而 V_{λ_x}是 $GL(E_x)$ 的最高权为 λ_x 的不可约表示。

记作

$$\mathrm{Sym}^*(\mathcal{H}_Q(\mathcal{E})) = \bigoplus_{\lambda} m_Q(\lambda) V_\lambda.$$

考虑单参数子群 $(e^{i\theta}\mathrm{Id}_{E_x})_x$。它在 H$Q$(E) 上平凡作用。因此，要使 $m_Q(\lambda)$ 为正，我们需要

$$\sum_{x\in Q_0}\sum_{j=1}^{n_x} \lambda_x(j) = 0.$$

我们将这个方程称为中心方程。

根据定义，锥 Cone$Q$(E) 是由满足 $m(\lambda) > 0$ 的支配权 λ 在 Weyl 室 $\oplus_{x\in Q_0} C_x$中生成的锥。由 Ressayre [22] 指出，我们很容易从 Derksen-Weyman [7] 推导出系数 $m_Q(\lambda)$ 的饱和性质，即 $m_Q(\lambda) > 0$ 当且仅当存在一个正整数 N，使得 $m_Q(N\lambda) > 0$。

锥 Cone$Q$(E) 也可以用辛几何意义下的动量映射来描述。极大紧子群 U(E) 在 HQ(E) 上的作用，其取值于 $\oplus_x(\sqrt{-1}\mathfrak{u}_x)^*$ 的动量映射为

$$\mu : \mathcal{H}_Q(\mathcal{E}) \to \bigoplus_x (\sqrt{-1}\mathfrak{u}_x)^*, \quad r = (r_a)_{a\in Q_1} \mapsto \mu(r) = (\mu_x(r))_{x\in Q_0},$$

其中 $\mu_x(r)$ 是厄米矩阵 Í $_{y,\ b:\ y\to x} r_b r_b^*$ − Í $_{y,\ a:\ x\to y} r_a^* r_a$。

若 n 是整数，我们用 $[n]$ 表示列表 $[1, 2, \ldots\ldots, n]$。若 K 是 $[n]$ 的一个含有 r 个元素的子集，我们记作 $K \subseteq [n]$，也记作 $K = \{K(1), K(2) \ldots\ldots, K(r)\}$，即 $[n]$ 中按递增整数索引排列的相应子列表。

设集合 K 的基数为 $|K| = r$。若 $J \subseteq [|K|]$ 是 $[1, 2, \ldots, r]$ 的一个含有 s 个元素的子集，我们可以将 K 与 J 复合，得到 $[n]$ 中一个含有 s 个元素的子集 $\{K(J(1)), \ldots, K(J(s))\}$。

基数为 r 的任意子集 $K \subseteq [n]$ 都确定了 $\mathbb{C}^n$ 的子空间 $S = \oplus_{i\in K} e_i$（其中 e_i 表示 $\mathbb{C}^n$ 的标准基），从而确定 Gr(r, n) 中的一个舒伯特簇 Ω。空子集 $K = \{\}$ 对应于 $\mathbb{C}^n$ 的子空间 $S = \{0\}$。子集 $K = \{1\}$ 对应于 $\Omega = \{\mathbb{C}e_1\}$，即 Gr(1, n) 中的 B 固定点。子集 $K = \{n\}$ 对应于 Ω = Gr(1, n)，等等……

现在我们考虑这类集合的族。若 $\boldsymbol{n} = (n_x)_{x\in Q_0}$ 是一个维数向量，我们用 $[\boldsymbol{n}] = ([n_x])_{x\in Q_0}$ 表示列表 $[1, \ldots, n_x]$的族。任意族 K $\subseteq [\boldsymbol{n}]$（意即 K $= (K_x)_{x\in Q_0}$ 由子集$K_x \subseteq \{1, \ldots, n_x\}$组成）确定了子空间 $S_x = \oplus_{i\in K_x} e_i$的族 S $= (S_x)_{x\in Q_0}$，从而确定一个舒伯特簇 $\boldsymbol{\Omega}$。每个舒伯特簇都由一个族 K 标记。我们用 K$\subseteq_{Q,B}$ $[\boldsymbol{n}]$ 表示 S$\subseteq_{Q,B}$ E，其中 S 是由 K 确定的子空间族。我们用 edim$_{Q,B}$(K, E)表示数值 edim$_{Q,B}$(S, E)，其中 S 是由 K 标记的子空间。

现在我们回顾：

定理3. 对 GL$_Q$(E) 的任意支配权 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_x)_{x\in Q_0}$，以下条件等价：

1. $-\boldsymbol{\lambda}$ 属于动量映射的像，2. $\boldsymbol{\lambda} \in$ Cone$_Q$(E)，3. $V_{\boldsymbol{\lambda}} \subseteq$Sym*(H$_Q$(E)),
4. $\prod_{x\in Q_0}\prod_{j=1}^{n_x} \lambda_x(j) = 0$且 $\prod_{x\in Q_0}\prod_{j\in K_x} \lambda_x(j) \leq 0$对所有 K$\subseteq_{Q,B}$ [n]均成立。

（1）与（2）的等价性归功于 Mumford ([16]) 和 Guillemin-Sternberg ([10],[11])。（2）与（3）的等价性源于系数 $m_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 的饱和性质。（3）与（4）的等价性则来自一般几何不变理论的 Ressayre 条件；此情形的显式版本见 [1], [24]。在不等式（4）中，只需考虑满足 edim$_{Q,B}$(K, E) $= 0$ 的 K 族。即使施加这一限制，通常得到的用于描述多面锥 Cone$_Q$(E) 的不等式集合仍有冗余。

定义 2. 我们将 Horn(Q,E) 记为满足 J$\subseteq_{Q,B}$ [n] 的集合，并将 Horn$_0$(Q,E) 记为其中满足 edim$_{Q,B}$(J, E) $= 0$ 的 J 所构成的子集。我们称 Horn(Q,E) 中的元素 J 为 Q-相交集。对于 A 这一 Q_1 的子集，将 Horn(A, Q, E) 记为满足以下条件的 Q-相交集 J 所构成的子集：当存在一条箭 $a: x \to y \in$ A 时，$|J_x| = |J_y|$；将 Horn$_0$(A, Q, E) 记为其中满足 edim$_{Q,B}$(J, E) $= 0$ 的 J $\in$Horn(A, Q, E) 的子集。

作为定理3的推论，要用不等式显式描述锥 Cone$_Q$(E)，我们只需确定 ”Horn 集” Horn$_0$(Q, E)。定理2可立即转化为归纳数值判据，我们将在第3节中对此作出明确说明。

我们来对条件 $\boldsymbol{\Omega} \subseteq_{Q,B}$ E 作一些说明。

注 1. 设 $\Omega = (\Omega_x)_{x\in Q_0}$ 是一个舒伯特簇族。设 $P \subset Q$ 是一个子箭图，并且 $\Omega_P = (\Omega_x)_{x\in P}$,$\mathrm{E}_P = (E_x)_{x\in P}$。显然，$\Omega$ 在 E 中是 Q-相交的一个必要条件是 Ω_P 在 E_P 中是 P-相交的。

注 2. 给出 $\mathrm{Horn}_0(Q, \mathrm{E})$ 中始终存在的一些元素。

- 完整列表 $\mathrm{K}_{全部}$ 与 $K_x = [n_x]$ 适用于任意 $x \in Q_0$，对应的空间为 $\mathrm{S} = \mathrm{E}$。

- 设 v 为一个极大顶点。令 $K_x = \{\}$ 对于 $x \neq v$，且令 $K_v = \{1\}$。这为 $x \neq v$ 的情形标记了族 S，其中 $S_x = \{0\}$，而 $S_v = \mathbb{C}e_1$ 属于 E_v。显然，S 是任意 $r \in \mathrm{H}_Q(\mathrm{E})$ 的子表示。因此，对于任意极大顶点 v，$\mathrm{K}_{(v)\max} = (K_{x,x\neq v} = \{\}, K_v = \{1\})$ 始终属于 $\mathrm{Horn}_0(Q, \mathrm{E})$。

特别地，对于 $Q = Q_{3,3}$ 以及维数向量 n,

$$\mathcal{K}^{(5)}_{\max} = [\{\}, \{\}, \{\}, \{\}, \{1\}, \{\}]$$

and

$$\mathcal{K}^{(6)}_{\max} = [\{\}, \{\}, \{\}, \{\}, \{\}, \{1\}]$$

是 Q-相交集。

- 现在考虑 u 一个极小顶点。令 $K_u = \{1, 2, \ldots, n_u - 1\}$，而$K_x = \{1,2, \ldots, n_x\}$，如果 $x \neq u$。这为族 $S_u = \mathbb{C}^{n_u-1}$（在 B下的稳定子空间）编了索引，且 $S_x = \mathbb{C}^{n_x}$ 对于 $x \neq u$。因此，对于任意极小顶点 u，$\mathrm{K}_{(u)\,min} = (K_{x,x\neq u} = \{1,2, \ldots, n_x\}, K_u = \{1,2, \ldots, n_u - 1\})$ 总属于 $\mathrm{Horn}_0(Q, \mathrm{E})$。特别地，对于$Q_{3,3}$ 以及维数向量 $\mathrm{n} = [n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6]$,

$$\mathcal{K}^{(1)}_{\min} = [\{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}, \{1, 2, \ldots, n_2\}, \{1, 2, \ldots, n_3\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n_6\}]$$

and

$$\mathcal{K}^{(2)}_{\min} = [\{1, 2, \ldots, n_1\}, \{1, 2, \ldots, n_2 - 1\}, \{1, 2, \ldots, n_3\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n_6\}]$$

是 Q-相交的集合。

我们将用 $E(\mathrm{J})$表示与子集族 $J_x \subseteq [1, 2, \ldots, n_x]$相关联的线性形式 $\lambda \mapsto \prod_{x\in Q_0} \prod_{j\in J_x} \lambda_x(j)$。因此，线性形式 $E(\mathrm{K}_{\mathrm{full}})$就是线性形式 $\lambda \mapsto \prod_{x\in Q_0} \prod_{j=1}^{n_x} \lambda_x(j)$，也就是中心方程。

由定理3可知，锥 $\mathrm{Cone}_Q(\mathrm{E})$ 可由不等式 $E(\mathrm{J}) \leq 0 \,\mathrm{when}\, \mathrm{J} \in \mathrm{Horn}_0(Q, \mathrm{E})$ 和等式 $E(\mathrm{K}_{\mathrm{full}}) = 0$ 描述。因此，为了明确描述 $\mathrm{Cone}_Q(\mathrm{E})$，我们通过低维情形下的“直接观察”或使用下一节所述的算法，确定集合 $\mathrm{Horn}_0(Q, \mathrm{E})$。然后，我们消去冗余不等式，从而用本质不等式描述 $\mathrm{Cone}_Q(\mathrm{E})$。

维数向量为 $\boldsymbol{n} = [p, p, p, q, q, q]$ 的例子 $Q_{3,\,3}$。

将 Horn$_0$(p, q) 记为 Horn 集 Horn$_0$(Q_3,3, $\boldsymbol{n}$)（定义 2）。令 A 为由 4 个箭组成的子集： $1 \to 3$, $2 \to 3$ 和 $4 \to 5$, $4 \to 6$。我们将集合 Horn$_0$(A, Q_3,3, $\boldsymbol{n}$) 记为 Horn$_0$(A, p, q)。它由满足以下条件的 Q- 相交子集 K $= [K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6]$ 组成：集合 K_1, K_2, K_3 的基数相同，集合 K_4, K_5, K_6 的基数也相同。引理 1 将 Horn$_0$(p, q) 的描述归结为 Horn$_0$(A, p, q) 的描述，因此我们称后一个集合为非平凡。

通过交换 $1 <> 2$ 和 $5 <> 6$，显然存在两个对称性，因为它们分别对应于箭图中交换顶点 $1 <> 2$ 和 $5 <> 6$ 。因此，集合 Horn$_0$(p, q) 在该对称群作用下保持不变。

我们还将置换顶点 1，2，3 以及顶点 4，5， 6 的对称群记为 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$。集合 Horn$_0$(A， p， q) 在 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$ 作用下保持不变，下一节将对此加以证明。

例 $Q_{3,\ 3}$ 中， $\boldsymbol{n} = [2, 2, 2, 1, 1, 1]$以下是 Horn$_0$(2，1) 中的集合列表。全部

[{1， 2}， {1， 2}， {1， 2}， {1}， {1}， {1}]

极端

$$\mathcal{K}^{(5)}_{\max} = [\{\}, \{\}, \{\}, \{\}, \{1\}, \{\}],$$
$$\mathcal{K}^{(6)}_{\max} = [\{\}, \{\}, \{\}, \{\}, \{\}, \{1\}],$$
$$\mathcal{K}^{(1)}_{\min} = [\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{1\}, \{1\}],$$
$$\mathcal{K}^{(2)}_{\min} = [\{1, 2\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{1\}, \{1\}].$$

非平凡

$$[\{2\}, \{2\}, \{2\}, \{1\}, \{1\}, \{1\}],$$
$$[\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 2\}, \{\}, \{\}, \{\}],$$
$$[\{2\}, \{1\}, \{2\}, \{\}, \{\}, \{\}],$$
$$[\{1\}, \{2\}, \{2\}, \{\}, \{\}, \{\}],$$
$$[\{2\}, \{2\}, \{1\}, \{\}, \{\}, \{\}].$$

注意，集合 非平凡 = Horn$_0$(A，2，1) 在 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$ 作用下保持不变。

设 a $= [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$ 如例1所示。对于属于极端集合的 J，不等式 E (J) 蕴含方程

$$a_5(1) \le 0,\ a_6(1) \le 0,$$

以及方程

$$a_1(2) \ge 0, a_2(2) \ge 0,$$

使用中心方程 $E(\mathrm{K}_{\mathrm{full}}) = a_1(1) + a_1(2) + a_2(1) + a_2(2) + a_3(1) + a_3(2) + a_4(1) + a_5(1) + a_6(1) = 0$。

集合“非平凡”解释了例1中其余的 5 个不等式。

例$Q_{3,\ 3}$ 与 $\boldsymbol{n} = [2,2,2,2,2,2]$以下是 $\mathrm{Horn}_0(2,\ 2)$ 中的集合列表。全部

$$[\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\}]$$

极端

$$\mathcal{K}^{(5)}_{\max} = [\{\},\{\},\{\},\{\},\{1\},\{\}],$$
$$\mathcal{K}^{(6)}_{\max} = [\{\},\{\},\{\},\{\},\{\},\{1\}],$$
$$\mathcal{K}^{(1)}_{\min} = [\{1\},\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\}],$$
$$\mathcal{K}^{(2)}_{\min} = [\{1,2\},\{1\},\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\}].$$

非平凡

[{1}, {2}, {2}, {}, {}, {}], [{2}, {1}, {2}, {}, {}, {}], [{2}, {2}, {1}, {}, {}, {}],[{1,2}, {1,2}, {1, 2}, {}, {}, {}],[{1,2}, {1,2}, {1, 2}, {1}, {2}, {2}], [{1, 2}, {1,2}, {1, 2}, {2}, {1}, {2}], [{1, 2}, {1,2}, {1,2}, {2}, {2}, {1}],[{1}, {2}, {2}, {2}, {2}, {2}], [{2}, {1}, {2}, {2}, {2}, {2}], [{2}, {2}, {1}, {2}, {2}, {2}],[{2}, {2}, {2}, {1}, {2}, {2}], [{2}, {2}, {2}, {1}, {2}, {2}], [{2}, {2}, {2}, {2}, {2}, {1}].

注意到，非平凡的 $= \mathrm{Horn}_0(\mathrm{A},\ 2,\ 2)$集合在对称群 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$的作用下保持不变。因此，为了描述它，只需给出$\mathrm{Horn}_0(\mathrm{A},\ 2,\ 2)$在 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$中的置换等价类代表元列表。下面给出这样一组代表元:

$$[\{1\},\{2\},\{2\},\{\},\{\},\{\}],$$
$$[\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\},\{\},\{\},\{\}],$$
$$[\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\},\{1\},\{2\},\{2\}],$$
$$[\{1\},\{2\},\{2\},\{2\},\{2\},\{2\}],$$
$$[\{2\},\{2\},\{2\},\{1\},\{2\},\{2\}].$$

下面来看如何用一般性论证证明上述列表。考虑维数向量为 $\mathbf{n} = [2,2,2,2,2,2]$的箭图$Q_{3,\ 3}Q_{3,\ 3}$，它包含一个与式（2）中描述的箭图 H_2 同构的子箭图 P_1 ，以及一个通过改变 H_2中的箭头方向得到的子箭图 P_2 。具体而言，考虑箭头 $a:\ 3 \to 4$ ，以及左侧由点 1，2，3 构成的两个子箭图 P_1 和右侧由点 4，5，6 构成的子箭图 P_2 ，；它们是通过在箭图$Q_{3,\ 3}$中删去箭头得到的，见图 *2*。因此，适当的，3-

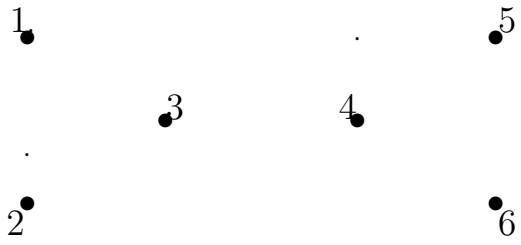


图 2

不属于极端情形的相交集合必然（见引理 1）具有以下形式：$\mathbf{J} = [I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3]$，其中（$I_1$、$I_2$、$I_3$）参数化了 $\mathrm{Gr}(r_1, \mathbb{C}^2)$ 中相交的舒伯特胞腔，而（J_1、J_2、J_3）参数化了 $\mathrm{Gr}(r_2, \mathbb{C}^2)$ 中相交的舒伯特胞腔（当 $|I_1| = [I_2| = |I_3| = r_1$ 和 $|J_1| = [J_2| = |J_3| = r_2$ 时，其中交的维数可能大于 0）。关于 $\mathrm{edim}_{Q,B}$ 的简短论证可以排除除上述情况以外的其他情形。接着，很容易直接看出，上述列表中的任一元素确实给出 Q-相交集合。例如，我们来证明 $[\{2\},\{2\},\{2\},\{1\},\{2\},\{2\}]$ 是 Q-相交的。给定 $r = (r_a) \in \mathrm{H}_Q(\mathrm{E})$ 的一般元素（因此我们可以假设所有 2×2 矩阵 r_a 都可逆），在位置 $[\{2\},\{2\},\{2\},\{1\},\{2\},\{2\}]$ 处存在一个子表示 $\mathrm{S} \subset r$，且它由唯一确定。确实，我们只能取 $S_4 = \mathbb{C}e_1$。由于 $\{2\}$ 对应的是全部射影空间 $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{C}^2)$，其他顶点处没有任何限制。因此，我们通过沿连接顶点 i 与 4 的连续映射 r_a ，取 S_4 的像或逆像，来构造 $\mathrm{S} = [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6]$。

3 算法

集合 K $\in$ Horn(Q, E) 总能为锥 Cone$_Q$(E) 给出一个有效不等式，即

$$E(\mathcal{K}) = \sum_{x\in Q_0}\sum_{k\in K_x} \lambda_x(k) \le 0.$$

因此，为了确定锥 Cone$_Q$(E)，我们必须确定集合 K$\subset_{Q,B}$[n]。

设 K $= (K_x)_{x\in Q_0}$。设 $\boldsymbol{k} = (k_x)_{x\in Q_0}$ 为集合K_x的基数组成的族。容易看出，若 $K_x(1) < \cdots < K_x(k_x)$ 是 K_x 的元素，则由 K 确定的舒伯特簇的维数为

$$\dim \mathbf{\Omega} = \sum_{x\in Q_0}\sum_{j=1}^{k_x} (K_x(j) - j)\,. \tag{8}$$

任意族 L $\subseteq [\boldsymbol{k}]$ 都可以与 K 复合，从而得到一个子空间族 T $= (T_x)_{x\in Q_0}$

$$T_x = \oplus_{j=1}^{l_x} e_{K_x(L_x(j))} \subseteq S_x,$$

其中 $L_x(1) < \cdots < L_x(l_x)$ 是 L_x 的元素，且 $l_x = |L_x|$。因此我们有

$$\mathrm{edim}_{Q,B}(\mathcal{T},\mathcal{E}) = \sum_{x\in Q_0}\sum_{j=1}^{l_x} (K_x(L_x(j)) - j) \; - \sum_{a:x\to y\in Q_1} l_x(n_y - l_y) \tag{9}$$

与 $l_x = |L_x|$ 和 $l_y = |L_y|$。

因此，定理 2 可转化为以下归纳数值判据：

定理 4. ([5])
K$\subseteq_{Q,\ B}$ $[\boldsymbol{n}]$ 当且仅当

$$\sum_{x\in Q_0}\sum_{j=1}^{l_x} (K_x(L_x(j)) - j) \;\ge \sum_{a:x\to y\in Q_1} l_x(n_y - l_y) \tag{10}$$

对于所有 L$\subseteq_{Q,B}$ $[\boldsymbol{k}]$。

（10）中的判据很容易通过数值方法检验。正如我们马上将看到的，还可以进一步缩小需要考察的族 \(L\) 的范围。

在（[5]）中，我们证明，只需在满足 edim$_{Q,B}$(L, $\boldsymbol{k}$) $= 0$. 的 L$\subseteq_{Q,B}$ $[\boldsymbol{k}]$ 上进行检验。

给定箭组成的集合 A，我们将 Horn(A, Q, E) 定义为满足以下条件的 K $\in$ Horn(Q, E) 的集合： $|K_x| = |K_y|$ 对于每个箭头 $x \to y$

属于子集 A $\subseteq Q_1$。随后我们证明 [5]，集合 Horn(A, Q, E) 可通过归纳方式确定：检验满足相同维数条件（即 $|L_x| = |L_y|$ 对于每个箭头 $x \to y \in$ A）且 edim$_{Q,B}$(L, k) $= 0$。的 L $\subseteq_{Q,B}$ [k]

现在我们将结果专门应用于箭图 $Q_{3,\ 3}$、维数向量 $[p, p, p, q, q, q]$和顶点 $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$。

考虑 $Q_{3,\ 3}$ 中的箭集 A $= \{1 \to 3,\ \ 2 \to 3,\ \ 4 \to 5,\ \ 4 \to 6\}$。我们定义

Horn(p, q) $=$Horn($Q_{3,\ 3}$, $[p, p, p, q, q, q]$), Horn$_0$(p, q) $=$Horn$_0$($Q_{3,\ 3}$, $[p, p, p, q, q, q]$) ,

Horn(A, p, q) $=$Horn(A, $Q_{3,\ 3}$, $[p, p, p, q, q, q]$), Horn$_0$(A, p, q) $=$Horn$_0$(A, $Q_{3,\ 3}$, $[p, p, p, q, q, q]$)。

令 $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6]$ 位于 $GL(p)^3 \times GL(q)^3$ 的 Weyl 室中。考虑以下四个不等式

$$\textbf{Extremal} = \{\lambda_1(p) \geq 0, \lambda_2(p) \geq 0, \lambda_5(1) \leq 0, \lambda_6(1) \leq 0\}.$$

若 λ 是一个权，则 Extremal 中的方程仅表示 λ_1, λ_2 $GL(p)$ 的指标多项式表示，而 λ_5, λ_6 $GL(q)$ 的指标对偶多项式表示。

引理 1。令 $Q = Q_{3,\ 3}$, n $= [p, p, p, q, q, q]$ 且 E $= [\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^q]$.

考虑集合 A $= \{1 \to 3,\ \ 2 \to 3,\ \ 4 \to 5,\ \ 4 \to 6\}$。那么锥 Cone$_Q$(E) 是由中心方程 E(K$_{\text{full}}$)、不等式 E(K)（其中 K $\in$ Horn(A, p, q）以及 Extremal 中的四个不等式定义的锥。

证明。设 U_Q(E) $= U(p)^3 \times U(q)^3$。令 μ: H$_Q$(E) $\to (\sqrt{-1}\,\text{Lie}(U_Q(\text{E})))^*$为动量映射。令 $\mathfrak{t}$为 U_Q(E) 的 Cartan 子代数。于是 $\mathfrak{t} = \oplus_{j=1}^{6} \mathfrak{t}_j$，其中 $\mathfrak{t}_j$在 $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$ 时的维数为 p，在 $j \in \{4,\ 5,\ 6\}$ 时的维数为 q。令 h_k 为对角 $p \times p$ （或 $q \times q$）矩阵，其第 k 个位置为 1，其他位置为 0。

令 J $=$ $[J_1, J_2, \ldots, J_6]$ 为一个整数子集的子集族，其中J_1, J_2, $J_3 \subseteq [p]$ 和 J_4, J_5, $J_6 \subseteq [q]$。令 v 为 $Q_{3,\ 3}$ 的一个顶点。我们定义 $X_{\mathcal{J}}$为 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$中的元素，其在 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}_v$中的分量 X_v由 Í $_{j \in J_v} h_j$给出（若J_v 为空，则为 $X_v = 0$）。

例如，若 $p = 2, q = 2$ 且 J $= [\{2\}, \{2\}, \{2\}, \{1\}, \{2\}, \{2\}],$, 则

$$X_{\mathcal{J}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

设 $\lambda \in (\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*$。则 $E(\text{J})(\lambda)$ $=$h$X_{\mathcal{J}}, \lambda$i。

对于 $X = (X_v)$ 中的 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$, 我们考虑 HX 在 H$_Q$(E) 中的子空间，其定义如下：

$$\mathcal{H}(X) = \{r \in \mathcal{H}_Q(\mathcal{E}); r_a X_v = X_w r_a\}$$

对于 $a\colon\ v \to w$属于 Q_1，也就是说，H (X) 是 HQ(E) 中被 X 在 HQ(E) 上的无穷小作用消去的子空间。设 J 与 Q 相交，则 $\{E(\mathrm{J}) = 0\} \cap$ Cone$Q$(E) 是 Cone$Q$(E) 的一个面，因为 $E(\mathrm{J}) \leq 0$ 是一个有效的不等式。任意点 $\lambda \in \{E(\mathrm{J}) = 0\} \cap$Cone$Q$(E) 都可写成 $-\mu(r)$ 的形式，其中 $r \in$H ($X_{\mathcal{J}}$))。这可由 Kirwan 多面体各个面的性质推出。例如参见 ([24])。

假设 J 不属于 Horn(A，Q，E)。例如 $|J_1| \neq |J_3|$，对于箭 $a\colon\ 1 \to 3$。令 $\lambda = -\mu(r)$，其中 $r \in$H（$X_{\mathcal{J}}$）。那么 r 的分量r_a 不可逆；否则，方程 $r_a X_{J_1} = X_{J_3} r_a$ 将意味着 X_{J_1} 和 X_{J_3} 共轭，因此 $|J_1| = |J_3|$。但此时，分量 $\lambda_1 = -\mu(r)[1]$ 是行列式为 0 的半正定厄米矩阵 $r_a^* r_a$。由此可得 λ_1（p）$= 0$（因为 λ_1（p）≥ 0），并且面 $\{E(\mathrm{J}) = 0\} \cap$Cone$Q$(E) 包含于 Cone$Q$(E) 的面 $\{\lambda_1(p) = 0\} \cap$Cone$Q$(E) 中。其他所有情形的证明都类似。

将该子集也记为极端

$$\mathbf{Extremal} = \{\mathcal{K}^{(6)}_{\max}, \mathcal{K}^{(5)}_{\max}, \mathcal{K}^{(1)}_{\min}, \mathcal{K}^{(2)}_{\min}\}$$

Horn$_0$(p，q)，它给出了上面列出的 4 个极端不等式。

令 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$ 为对称群，它置换顶点 1、2、3，以及顶点 4、5、6。

命题 2. 我们有

$$\mathrm{Horn}(p,q) = \mathcal{K}_{\mathrm{full}} \cup \mathbf{Extremal} \cup \mathrm{Horn}(\mathcal{A}, p, q).$$

此外，Horn(A，p，q) 在 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$ 作用下不变。

证明. 设 K $=$ $[K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6]$。显然，当 $|K_1| = |K_2| = |K_3|$ 且 $|K_4| = |K_5| = |K_6|$ 时，数值量 edim$_{Q,\ B}$(K，E) 在 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$ 作用下不变。设 K 满足 $|K_1| = |K_2| = |K_3| = p'$ 且 $|K_4| = |K_5| = |K_6| = q'$。要判断 K $\in$ Horn(A，p，q)，我们需要检验（如 [5] 中所证明的），L 与 K 的复合属于 Horn(A，p，q)，其中 L 是 Horn(A，p'，q') 的真子集。因此，根据归纳法、定理 4 以及 edim$_{Q,\ B}$ 关于对称性的对称不变性，我们得到所述命题。

4 全纯离散系列与张量积

设 G 是一个连通半单李群，具有有限中心和极大紧子群 K。当且仅当 rank(G) $=$rank(K) 时，G 在 $L^2(G)$ 中的表示才具有离散系列。若进一步假设 G/K 是一个厄米对称空间，则在离散系列中还存在一系列称为全纯离散系列的表示。属于全纯离散系列的表示，其实现方式在分析和代数两方面都非常简单。尽管如此，我们仍将采用代数观点。

因此，我们假设 G/K 配备了一个 G-不变的复结构。首先引入一些通用记号。我们用大写拉丁字母表示相关的群，用相应的哥特字母表示对应的李代数。上标 * 表示对偶空间，下标 $_{\mathbb{C}}$ 表示复化；例如，我们写作 $\mathfrak{g}^*$ 和 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解。G/K 的复结构确定了一个 K-不变分解 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$，其中 $\mathfrak{p}_+$、$\mathfrak{p}_-$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的阿贝尔子代数。存在一个在 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 中心的 $z \in \sqrt{-1}\mathfrak{k}$，使得 $\mathfrak{p}^+ = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\ [z, X] = X\}$。元素 z 在模去 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的中心中的元素后唯一确定。

示例 $G = U(2, 3)$。

极大紧子群为 $K = U(2) \times U(3)$。分块形式下的李代数$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2, 3)$表示为 $\mathfrak{g} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix}\right\}$其中 $a \in \mathfrak{u}(2)$，$d \in \mathfrak{u}(3)$，b 是任意一个 3×2 复矩阵，而 b^* 是b的共轭转置矩阵。Cartan 分解表示为 $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{u}(3) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right\}$以及 $\mathfrak{p} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

The complexification of $\mathfrak{g}$ is $\mathfrak{gl}(5, \mathbb{C})$。我们有 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ 其中，$\mathfrak{p}_+$ 中的矩阵具有分块形式 $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，而 $\mathfrak{p}_-$ 中的矩阵具有分块形式 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$。每个 $\mathfrak{p}_\pm$ 都在 $K_{\mathbb{C}} = GL(2, \mathbb{C}) \times GL(3, \mathbb{C})$的伴随作用下保持不变。更明确地说，$\mathfrak{p}_+$ 对应于

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5, \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2)$$

其作用由 $K_{\mathbb{C}} = GL(2, \mathbb{C}) \times GL(3, \mathbb{C})$ 给出：$g_1 r g_2^{-1}$当 $r \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_5, \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2)$ 时。$\mathfrak{p}_-$的情形类似。

设 T 是 K的 Cartan 子群，因此 T 也是G的 Cartan 子群。设 $\Lambda \subset (\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*$ 是 T的权格。中心元 z属于 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$。记 W_K 为 K的 Weyl 群。设 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 相对于 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$的根。我们将根空间分解记作 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$。若 $\alpha \in \Delta$，则其余根 H_α 属于 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$，并满足$\alpha(H_\alpha) = 2$。根据根空间属于 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 还是 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$，这些根称为紧根或非紧根。我们用 Δ_c, Δ_n 表示紧根和非紧根的集合，其中 Δ_n 按照分解 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$分解为 $\Delta_n^+ \cup \Delta_n^-$。取一组正紧根 Δ_c^+，并令 $\Delta^+ = \Delta_c^+ \cup \Delta_n^+$。设 $\lambda \in (\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*$ 满足：对所有 $\alpha \in \Delta^+$，均有 $\lambda(H_\alpha) \geq 0$。那么 $\langle \lambda, z \rangle \geq 0$，因为 $\lambda \in \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha$；对于 α 紧根，$\alpha(z) = 0$；而对于 α 非紧正根，$\alpha(z) = 1$。

令 $\lambda \in \Lambda$ 满足对所有 $\alpha \in \Delta_c^+$，$\lambda(H_\alpha) \geq 0$。我们将最高权为 λ 的 K（或 $K_{\mathbb{C}}$）的不可约表示记为 V_λ。考虑广义 Verma 模 π_λ，其定义如下

$$\pi_\lambda = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_-)} V_\lambda$$

其中 V_λ 是最高权为 λ 的 K-模，并通过令 $\mathfrak{p}_-$ 平凡作用，将其扩张为 $\mathrm{U}(\mathfrak{p}_-)$ 模（此处 U 表示万有包络代数）。因此，表示 π_λ 对于根系 $\Delta_c^+ \cup -\Delta_n^+$ 的最高权为 λ, , 并且作为 K-模,

$$\pi_\lambda = \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}_+) \otimes V_\lambda. \tag{11}$$

注意， z 在 π_λ 中的作用具有非负特征值，即特征值集合为 $\{\mathrm{h}\lambda, \ z\mathrm{i} \ + n, \ n \geq 0\}$，且每个特征值的重数有限。

如果 $\rho = \frac{1}{2} \acute{\mathrm{I}}_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$， $\rho_c = \frac{1}{2} \acute{\mathrm{I}}_{\alpha \in \Delta_c^+} \alpha$ ， $\rho_n = \frac{1}{2} \acute{\mathrm{I}}_{\alpha \in \Delta_n^+}$，那么 π_λ 的无穷小特征标为 $\lambda + \rho_c - \rho_n$。如果对所有 $\alpha \in \Delta^+$都有 $\mathrm{h}\lambda + \rho_c - \rho_n, \ H_\alpha > 0$ ，那么 Harish-Chandra 构造了G 的一个酉不可约表示，其对应的（$\mathfrak{g}$, K）模为 π_λ。这种表示属于全纯离散系列，我们仍将其记为 π_λ。“全纯”这一名称源于它可以实现为 G/K上的全纯丛 $G \times_K V_\lambda$ 的全纯截面空间的一个子空间；条件 $\mathrm{h}\lambda + \rho_c - \rho_n, \ H_\alpha\mathrm{i} \ > 0$ 保证了平方可积全纯截面的存在。

例 $U(p, \ q)$ 考虑 $U(p, \ q)$，其中 $\sqrt{-1}\mathrm{t}$ 由实数对角 $(p+q) \times (p+q)$ 矩阵组成。令 h_k 为对角 $(p+q) \times (p+q)$ 矩阵，其第 k 个位置为 1，其他位置为 0。则 $(h_k)_{k=1}^{p+q}$ 是$\sqrt{-1}\mathrm{t}$的一组基。我们将对偶基记为 ϵ^k。Weyl 群 W_K 是置换群 $\Sigma_p \times \Sigma_q$的乘积。

考虑正根的标准系

$$\Delta^+ = \{\epsilon^i - \epsilon^j, 1 \leq i < j \leq p+q\}.$$

Then

$$\Delta_c^+ = \{\epsilon^i - \epsilon^j, 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{\epsilon^i - \epsilon^j, p+1 \leq i < j \leq p+q\}.$$

$$\Delta_n^+ = \{\epsilon^i - \epsilon^j, 1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+q\}.$$

于是 $\rho_n = \frac{1}{2}(q \acute{\mathrm{I}}_{i=1}^{p} \epsilon^i - p \acute{\mathrm{I}}_{j=1}^{q-p} \epsilon^{j+p})$ 且 $(\rho_n - \rho_c)(h_p - h_{p+1}) = (p+q) - 1$。令 $\lambda = \acute{\mathrm{I}}_{i=1}^{p+q} \lambda_i \epsilon^i$ 属于 $(\sqrt{-1}\mathrm{t})^*$ ，且具有整数系数。对所有紧根，条件 $\mathrm{h}\lambda + \rho_c - \rho_n, \ H_\alpha\mathrm{i} \ > 0$ 分别给出

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p,$$

$$\lambda_{p+1} \geq \lambda_{p+2} \geq \cdots \geq \lambda_{p+q},$$

且 $\mathrm{h}\lambda + \rho_c - \rho_n, H_{\epsilon^p - \epsilon^{p+1}}\mathrm{i} \ > 0$ 给出条件 $\lambda_p > \lambda_{p+1} + p + q - 1$。

设 λ, μ, ν 为 K的支配权。定义 $m_D^\nu(\lambda, \mu)$ 为表示 V_ν 在表示 $V_\lambda \otimes V_\mu \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}_+)$ 中的重数，其中K

回顾以下定理 [20],[14]。

定理 5。属于全纯离散系列的两个表示 π_λ，π_μ 的张量积是若干个属于全纯离散系列的表示的直和，且重数有限：

$$\pi_\lambda \otimes \pi_\mu = \otimes_\nu m_{\mathrm{hol}}^\nu(\lambda, \mu)\pi_\nu.$$

我们有：

$$m_{\mathrm{hol}}^\nu(\lambda, \mu) = m_D^\nu(\lambda, \mu). \tag{12}$$

换言之，如果参数 λ，μ 满足 Harish-Chandra 不等式，并且 $m_D^\nu(\lambda, \mu)$ 不为零，那么参数 ν 也满足 Harish-Chandra 不等式，且 m^ν 全纯$(\lambda, \mu) = m_D^\nu(\lambda, \mu)$。

（如果参数 λ，μ 不满足 Harish-Chandra 不等式，那么 $(\mathfrak{g}, K)$ 模 π_λ 可能不可约，也可能不可酉化。不过，$\pi_\lambda \otimes \pi_\mu$ 存在一个 Jordan-H¨older 模列，其各项为 π_ν，且重数为 $m_D^\nu(\lambda, \mu)$。）

我们来快速检查一下公式的自洽性（这不是证明，不过证明并不难）：将等式两边限制到 K。将公式 12 的左边限制到 K 后，其分解为

$$(\pi_\lambda \otimes \pi_\mu)_{|\mathfrak{k}} = \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}_+) \otimes V_\lambda \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}_+) \otimes V_\mu.$$

右边的分解为

$$\sum_\nu m_D^\nu(\lambda, \mu)\pi_\nu|_K = \sum_\nu m_D^\nu(\lambda, \mu)\,(V_\nu \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}_+))$$

$$= \left(\sum_\nu m_D^\nu(\lambda, \mu)V_\nu\right) \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}_+).$$

Now

$$\sum_\nu m_D^\nu(\lambda, \mu)V_\nu = V_\lambda \otimes V_\mu \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}_+)$$

根据 $m_D^\nu(\lambda, \mu)$ 的定义。因此右边为

$$V_\lambda \otimes V_\mu \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}_+) \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}_+)$$

因此，关于 K 作用，等式 12 成立。

5 几何类比

与上一节一样，我们考虑厄米对称空间 G/K，以及正根系 $\Delta^+ = \Delta_c^+ \cup \Delta_n^+$ 的选取。考虑 $\mathfrak{c}_{\geq 0} = \{\lambda \in (\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*, \lambda(H_\alpha) \geq 0;\ \alpha \in \Delta^+\}$，即相应的 Weyl 室。本节中，我们不假设 λ 属于权格。若 $\lambda \in \mathfrak{c}_{\geq 0}$ 我们将其在G作用下的余伴随轨道记为 $\mathrm{O}_\lambda^{nc} \subset (\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$。$G$-哈密顿空间（或 K-哈密顿空间）的动量映射取值于 $(\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$（或 $(\sqrt{-1}\mathfrak{k})^*$）。特别地，若紧群 K 作用于配有 K- 不变厄米形式 $\langle , \rangle$ 的复向量空间 E，且我们取该形式在第一个变量上为反线性，则动量映射 $\mu : E \to (\sqrt{-1}\mathfrak{k})^*$由 $\mu(r)(X) = \langle r, Xr\rangle$ 给出，其中 $r \in E$且 $X \in (\sqrt{-1}\mathfrak{k})$。

回顾一下，O_λ^{nc}是一个（非紧）G-哈密顿流形，动量映射 $\mathrm{O}_\lambda^{nc} \to (\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$ 就是包含映射。由于 O_λ^{nc}带有一个 G-不变的 Kähler 结构，我们称 O_λ^{nc} 为全纯轨道。集合 $G\mathfrak{c}_{\geq 0}$ 是 $(\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$ 中的凸锥，正如 Vinberg ([25]) 所证明的（见 [12]）。因此，两个全纯轨道 $\mathrm{O}_\lambda^{nc} + \mathrm{O}_\mu^{nc}$之和是若干全纯轨道的并集。

我们用 $\mathfrak{c}_{\geq 0}^K = \{\lambda \in (\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*,\ \lambda(H_\alpha) \geq 0;\ \alpha \in \Delta_c^+\}$ 表示 K的 Weyl 室。

设 z 属于 $\sqrt{-1}\mathfrak{k}$ 的中心，且满足 $\mathfrak{p}^+ = \{X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}},\ [z, X] = X\}$。若 $f \in (\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$，则 $\langle f,\ z\rangle$ 为实数。如下命题（见 [8]）给出了这样一个几何类比：在全纯离散系列的一个表示 π_λ 中，z的特征值均为正，且相应的特征空间具有有限重数。

命题 3. 设 $\lambda \in \mathfrak{c}_{\geq 0}$，令 O_λ^{nc} 为其余伴随轨道，并令 $f \in \mathrm{O}_\lambda^{nc} \subset (\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$。则

1. $\langle f,\ z\rangle \geq \langle \lambda,\ z\rangle \geq 0$。
2. 对任意 $t \in \mathbb{R}$，集合

$$O_\lambda^{nc}(t) = \{\xi \in O_\lambda^{nc}, \langle f, z\rangle = t\}$$

是 O_λ^{nc} 的一个紧子集。

换言之，由 $p(f) = \langle f,\ z\rangle$ 给出的函数 $p : \mathrm{O}_\lambda^{nc} \to \mathbb{R}$ 的下界为 $\langle \lambda,\ z\rangle \geq 0$。此外，$p$ 的纤维是紧的。

证明使用了将 G 分解为 KAK，以及通过强正交根对 $\mathfrak{p}$ 的 Cartan 子代数进行的 Harish-Chandra 描述。

令 $\lambda,\ \mu \in \mathfrak{c}_{\geq 0}$。$G$ 在乘积 $\mathrm{O}_\lambda^{nc} \times \mathrm{O}_\mu^{nc}$ 上的对角作用所对应的动量映射是加法 $A : \mathrm{O}_\lambda^{nc} \times \mathrm{O}_\mu^{nc} \to \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$：$A(f_1,\ f_2) = f_1 + f_2$。容易看出 A 是适当的。

全纯离散系列表示的张量积可分解为全纯离散系列的直和，这一事实的几何对应物

（其中每个系列出现的重数均有限）是以下命题。该命题直接源于 $G\mathfrak{c}_{\geq 0}$ 是凸锥这一事实以及命题 3。

命题 4。设 λ, μ 属于 $\mathfrak{c}_{\geq 0}$，且 O_λ^{nc}、O_μ^{nc}为相应的余伴随轨道。那么

1. O_λ^{nc} +O_μ^{nc}是 $\mathfrak{c}_{\geq 0}$中元素的轨道的并集。
2. 对任意 $\xi \in (\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$，集合

$$(O_\lambda^{nc} \times O_\mu^{nc})(\xi) = \{(f_1, f_2) \in O_\lambda^{nc} \times O_\mu^{nc}; f_1 + f_2 = \xi\}$$

是 O_λ^{nc} ×O_μ^{nc}的紧子集。

定义 $P(\lambda, \mu) = (\mathrm{O}_\lambda^{nc} + \mathrm{O}_\mu^{nc}) \cap \mathfrak{c}_{\geq 0}$。它是一个参数化动量映射像 $A(\mathrm{O}_\lambda^{nc} \times \mathrm{O}_\mu^{nc})$ 的集合，并对 G的作用取模。

现在我们考虑对所有 $\alpha \in \Delta_n^+$, $\mathrm{h}\lambda, H_\alpha\mathrm{i} > 0$, $\mathrm{h}\mu, H_\alpha\mathrm{i} > 0$ 的情形。令O_λ, O_μ为 λ, μ 的（紧）余伴随 K-轨道。考虑 $\mathfrak{p}^+$。这是一个带有动量映射 $\Phi_+ : \mathfrak{p}^+ \to (\sqrt{-1}\mathfrak{k})^*$ 的 K-哈密顿空间。因此，乘积$O_\lambda \times O_\mu \times \mathfrak{p}^+$是一个 K-哈密顿空间，其动量映射为 ϕ: $O_\lambda \times O_\mu \times \mathfrak{p}^+ \to \sqrt{-1}\mathfrak{k}^*$，由 $\phi(\xi_1, \xi_2, Y) = \xi_1 + \xi_2 + \Phi_+(Y)$ 给出。令 $\mathrm{Kir}(O_\lambda \times O_\mu \times \mathfrak{p}^+)$ 为 $\phi(O_\lambda \times O_\mu \times \mathfrak{p}^+)$ 与正 Weyl 室 $\mathfrak{c}_{\geq 0}^K$ 的交。它是一个有理多面体。

以下命题归功于 P.E. Paradan [19], ，是定理 5 的几何类比。它可以通过 Paradan 对全纯离散系列 [18] 情形下“$[Q, R] = 0$”定理的证明，由定理 5 推得。我们概述另一种基于轨道的傅里叶变换的证明。

命题 5. 设 $\lambda, \mu \in \mathfrak{c}_{\geq 0}$ 满足 $\mathrm{h}\lambda, H_\alpha\mathrm{i} > 0$，且 $\mathrm{h}\mu, H_\alpha\mathrm{i} > 0$ 对所有$\alpha \in \Delta_n^+$均成立。那么

$$P(\lambda, \mu) = \mathrm{Kir}(O_\lambda \times O_\mu \times \mathfrak{p}^+).$$

证明。我们将使用等变体积。若 M 是一个带有刘维尔测度 $d\beta_M$ 和适当动量映射 $\Phi : M \to (\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$的 G-哈密顿空间，则该 G-哈密顿空间 M 的 Duistermaat-Heckman 测度（按定义）为 $\Phi_* d\beta_M$。M的 G-等变体积是由 $X \in \mathfrak{g}$ 定义的广义函数

$$I_M(X) = \int_M e^{\langle \Phi(m), X\rangle} d\beta_M = \int_{(\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*} e^{\langle \xi, X\rangle} \Phi_*(d\beta_M),$$

因此是 $\Phi_*(d\beta_M)$ 的傅里叶变换。

类似地，如果 N 是一个具有刘维尔测度 $d\beta_N$ 和适当动量映射 $\phi : N \to (\sqrt{-1}\mathfrak{k})^*$ 的 K-哈密顿空间，那么该 K-哈密顿空间 N 的 Duistermaat-Heckman 测度为 $\phi_*(d\beta_N)$。N 的 K-等变体积是由下式定义的 $X \in \mathfrak{k}$ 的广义函数:

$$I_N(X) = \int_N e^{\langle \phi(n), X\rangle} d\beta_N = \int_{(\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*} e^{\langle \xi, X\rangle} \phi_*(d\beta_N),$$

同样也是 $\phi_*(d\beta_N)$ 的傅里叶变换。

对于 $M = \mathcal{O}_\lambda^{nc} \times \mathcal{O}_\mu^{nc}$（分别是 $N = O_\lambda \times O_\mu \times \mathfrak{p}^+$），测度$\Phi_*(d\beta_M)$很容易直接计算。换言之，很容易给出其傅里叶变换的显式公式。由于函数 $m \mapsto h\Phi(m), z\mathfrak{i}$ 在 M 上（分别是函数 $n \mapsto h\phi(n), z\mathfrak{i}$ 在 N 上）是真映射，因此，将非紧空间 M 或 N 的等变体积限制到 $\mathfrak{t}$（甚至限制到 $\mathbb{R}z \subset \mathfrak{t}$）上，可良好定义为广义函数。

我们还将使用 $\mathfrak{t}$ 上的傅里叶变换以及以下结果。设 m 是 $(\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*$ 上的局部多项式测度，并考虑其傅里叶变换 $F(m)(X) = \int_{\xi \in (\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*} e^{\langle X, \xi\rangle} dm(\xi)$，它是 $\mathfrak{t}$ 上的广义函数。假设存在一组 $\{l_k \in \mathfrak{t}^*, k = 1, \ldots, s\}$，由 $\mathfrak{t}$ 上的非零线性形式组成，使得 $\hat{I}_{k=1}^s l_k(X)F(m)(X)$ 是解析的。进一步假设 m 支集在闭半空间 $h\xi, z\mathfrak{i} \geq 0$ 上。那么，方程 $\hat{I}_{k=1}^s l_k F(m) = 0$ 蕴含 $F(m) = 0$，因此 $m = 0$。

设 $\lambda \in \mathfrak{c}_{\geq 0}$。令

$$I_\lambda(X) = \int_{\mathcal{O}_\lambda^{nc}} e^{\langle \xi, X\rangle} d\beta_\lambda$$

为 $\mathcal{O}_\lambda^{nc}$ 的等变体积，即轨道 $\mathcal{O}_\lambda^{nc}$ 配备刘维尔测度 $d\beta_\lambda$ 后的傅里叶变换。G-哈密顿空间 $\mathcal{O}_\lambda^{nc} \times \mathcal{O}_\mu^{nc}$ 的等变体积是乘积 $I_\lambda(X)I_\mu(X)$，其中 $I_\lambda(X)$、$I_\mu(X)$ 分别是 $\mathcal{O}_\lambda^{nc}$ 和 $\mathcal{O}_\mu^{nc}$ 的等变体积。由于加法映射 $A : \mathcal{O}_\lambda^{nc} + \mathcal{O}_\mu^{nc} \to (\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$ 是真映射，因此该乘积有定义。令 $d\beta = d\beta_\lambda d\beta_\mu$ 为刘维尔测度的乘积。于是

$$\begin{aligned} & I_\lambda(X)I_\mu(X) \\ &= \int_{\mathcal{O}_\lambda^{nc}} \int_{\mathcal{O}_\mu^{nc}} e^{\langle f_1, X\rangle} e^{\langle f_2, X\rangle} d\beta = \int_{\mathcal{O}_\lambda^{nc} \times \mathcal{O}_\mu^{nc}} e^{\langle f_1 + f_2, X\rangle} d\beta \\ &= \int_{\mathcal{O}_\lambda^{nc} \times \mathcal{O}_\mu^{nc}} e^{\langle A(f_1, f_2), X\rangle} d\beta = \int_{(\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*} e^{\langle \xi, X\rangle} DH(\xi) \end{aligned}$$

其中 $DH = A_*(d\beta)$ 是 G-哈密顿空间 $\mathcal{O}_\lambda^{nc} \times \mathcal{O}_\mu^{nc}$ 在动量映射 A 下的 Duistermaat-Heckman 测度。因此，根据 $P(\lambda, \mu)$ 的定义，DH 的支集为

$$\mathcal{O}_\lambda^{nc} + \mathcal{O}_\mu^{nc} = G \cdot (P(\lambda, \mu))$$

其中 $P(\lambda, \mu) \subset \mathfrak{c}_{\geq 0} \subset (\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*$。注意，对于每个 $\xi \in P(\lambda, \mu)$，$h\xi, z\mathfrak{i} \geq 0$。现在我们在 $G\mathfrak{c}_{\geq 0} \subset (\sqrt{-1}\mathfrak{g})^*$ 上使用 Weyl 积分公式。利用 G-轨道 $G\xi$ 的刘维尔测度对测度 DH 进行分解，其中 $\xi \in P(\lambda, \mu)$，我们得到 S 上的一个测度 $P(\lambda, \mu) \subset \mathfrak{c}_{\geq 0} \subset (\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*$。我们考察紧致韦尔群 W_K 在 $(\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*$ 上的作用以及反不变式

测度 ant(S) = Í w∈W_K ϵ(w)w · S 在 (√−1t)* 上。由于 z 是√−1t中的一个中心元，ant(S)仍支集于 hz, ξi ≥ 0。我们有如下公式：对于 X ∈ t:

$$\left(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\langle\alpha,X\rangle\right)I_\lambda(X)I_\mu(X)=\int_{\xi\in(\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*}e^{\langle\xi,X\rangle}\,\mathrm{ant}(S)(\xi).$$

现在考虑 K-哈密顿空间 N = O_λ × O_μ × p+ 及其动量映射 φ: N → (√−1t)*。同样可见，对于任意 n ∈ N，有 hφ(n), zi ≥ hλ, zi + hμ, zi，且动量映射 φ 是适当映射。

考虑 N 的等变体积:

$$I_N(X)=\int_N e^{\langle X,\phi(n)\rangle}d\beta_N=\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*}e^{\langle X,\xi\rangle}\phi_*(d\beta_N).$$

因此， N 给出了一个 K-不变的 Duistermaat-Heckman 测度 DH_N = φ*(dβ_N)，定义在 (√−1t)* 上，其支集为 φ(N)。根据 Kir(O_λ × O_μ × p+) 的定义，

$$\phi(N)=K\cdot(\mathrm{Kir}(O_\lambda\times O_\mu\times\mathfrak{p}^+))$$

其中 Kir(O_λ × O_μ × p+) ⊂ c^K_{≥0} ⊂ √−1t*。

类似地，利用 K-轨道 Kξ 上的刘维尔测度对测度 DH_N = φ*(dβ_N) 进行分解，其中 ξ ∈ Kir(O_λ × O_μ × p+)，并在 (√−1t)* 上应用 Weyl 积分公式，可得一个支集位于 Kir(O_λ×O_μ × p+) 上的测度 S′。令 ant(S′) 为反不变测度，其定义为 ant(S′) = Í w∈W_K ϵ(w)w · S′，定义在 (√−1t)* 上。我们有以下公式。对于 X ∈ t:

$$\prod_{\alpha\in\Delta_c^+}\langle\alpha,X\rangle I_N(X)=\int_{(\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*}e^{\langle\xi,X\rangle}\,\mathrm{ant}(S')(\xi).$$

两个测度 ant(S) 和 ant(S′) 的支集都包含在闭半空间 hξ, zi ≥ 0 中，并且是 (√−1t)*上的局部多项式测度。只需证明 S = S′，或者证明 ant(S) = ant(S′)，因为 S, S′ 都支集于 Weyl 室 c^K_{≥0}中，因此不会发生抵消。容易看出，(Î α∈Δ+ hα, Xi)F (S) (X) 和 (Î α∈Δ+ hα, Xi)F (S′) (X) 都是解析的（例如参见 [9]中的命题 32）。因此，只需在满足 Î α∈Δ+ hα, Xi ≠ 0的 X ∈ t开集上证明 F (ant(S)) (X) = F (ant(S′)) (X)，即可证明 S = S′。现在，对于这样的 X，所有涉及的等变体积都可以通过相应的、可能非紧致且具有适当动量映射的哈密顿空间的 Berline-Vergne 局部化公式的一个（简单）特例来计算。我们给出 hλ, H_αi ≠ 0 且对所有 α ∈ Δ+ 都有 hμ, H_αi ≠ 0 时的公式，因为它们更容易表述。

根据 Rossmann 公式（[4]），我们有:

$$I_\lambda(X)I\mu(X)$$

$$= \left(\sum_{w_1 \in W_K} \epsilon(w_1) \frac{e^{\langle w_1 \lambda, X \rangle}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \langle \alpha, X \rangle} \right) \left(\sum_{w_2 \in W_K} \epsilon(w_2) \frac{e^{\langle w_2 \mu, X \rangle}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \langle \alpha, X \rangle} \right).$$

因此，我们得到:

$$\mathcal{F}(\mathrm{ant}(S))(X) = \frac{\sum_{w_1, w_2 \in W_K \times W_K} \epsilon(w_1)\epsilon(w_2) e^{\langle w_1 \lambda + w_2 \mu, X \rangle}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \langle \alpha, X \rangle}. \tag{13}$$

现在我们计算 N 的等变体积，即紧致 K-轨道 O_λ、O_μ 与辛空间 $\mathfrak{p}^+$ 的等变体积之积。T 在 $\mathfrak{p}^+$ 上的作用的权列表为 Δ_n^+。因此，对于满足 $\hat{\mathrm{I}}_{\alpha \in \Delta_n^+} \mathrm{h}\alpha,\ X\mathrm{i} \neq 0$ 的 $X \in \mathfrak{t}$，$\mathfrak{p}^+$ 的等变体积由 $\prod_{\alpha \in \Delta_n^+} \frac{1}{\langle \alpha,\ X \rangle}$ 给出。紧致 K-轨道 O_λ、O_μ 的等变体积由 Harish-Chandra 公式给出。于是我们得到

$$\mathcal{F}(\mathrm{ant}(S'))(X) = \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Delta_n^+} \langle \alpha, X \rangle} \left(\frac{\sum_{w_1, w_2 \in W_K \times W_K} \epsilon(w_1)\epsilon(w_2) e^{\langle w_1 \lambda + w_2 \mu, X \rangle}}{\prod_{\alpha \in \Delta_c^+} \langle \alpha, X \rangle} \right)$$

由此我们得出，在满足 $\hat{\mathrm{I}}_{\alpha \in \Delta} \mathrm{h}\alpha,\ X\mathrm{i} \neq 0$ 的 $X \in \mathfrak{t}$ 开集上，F (ant(S)) (X) =F (ant(S')) (X)，因此该等式处处成立。因此，测度 S 与 S' 相等，其支集 $P(\lambda,\ \mu)$ 与 $\mathrm{Kir}(O_\lambda \times O_\mu \times \mathfrak{p}^+)$ 也相等。

记 $\mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(G) \subset \mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0}$ 为满足 $\mathrm{O}_C^{nc} \subset \mathrm{O}_A^{nc} + \mathrm{O}_B^{nc}$ 的三元组 $(A,\ B,\ C)$ 的集合。

上述讨论的一个重要推论是以下命题

命题 6. ([19]) 锥 $\mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(G)$ 是由满足 $m_D^\nu(\lambda,\ \mu) > 0$ 的权 $(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ 生成的锥。

证明。由紧群表示的 Kirwan 多面体 ([16],[11]) 理论可知，$\{(\lambda,\ \mu,\ \nu);\ \nu \in \mathrm{Kir}(O_\lambda \times O_\mu \times \mathfrak{p}^+)\}$ 是由满足$V_\nu \subset V_\lambda \otimes V_\mu \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}^+)$的支配权三元组 $(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ 生成的多面体。

因此，正如应有的那样，根据命题 5，$\mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0}$中的锥 $\mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(G)$ 由满足 $\mathrm{O}_\nu \subset \mathrm{O}_\lambda + \mathrm{O}_\mu$ 的 $(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ 生成，它与由全纯离散系列的参数 $(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ 生成的锥相一致，其中$m^\nu{}_{\mathrm{hol}}(\lambda,\ \mu) > 0$。这与一般的思想一致，即 $[Q, R] = 0$（反过来，这是关于全纯可量子化轨道的 $[Q, R] = 0$ 的推论，正如 P-E-Paradan ([18]) 所证明的那样）。

注记 3. 考虑 G-哈密顿空间 $\mathrm{O}_\lambda^{nc} \times \mathrm{O}_\mu^{nc}$以及诱导出的 G-哈密顿空间 $G \times_K (O_\lambda \times O_\mu \times \mathfrak{p}^+)$。要证明命题 5，一个更令人满意的方法是（依照 Deltour [6] 的思路）证明这两个 G-哈密顿空间是同构的。

6 箭图表示

本节旨在将 $U(p,q)$ 的全纯离散级数张量积与箭图 $Q_{3,3}$ 的表示联系起来。我们考虑图 3 所示的箭图$Q_{3,3}$，但现在将顶点标记为 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$。一对 (x_i, y_i) 将参数化 $U(p,q)^3$ 中 i 个 $U(p,q)$ 副本之一对应的对象。见 3。

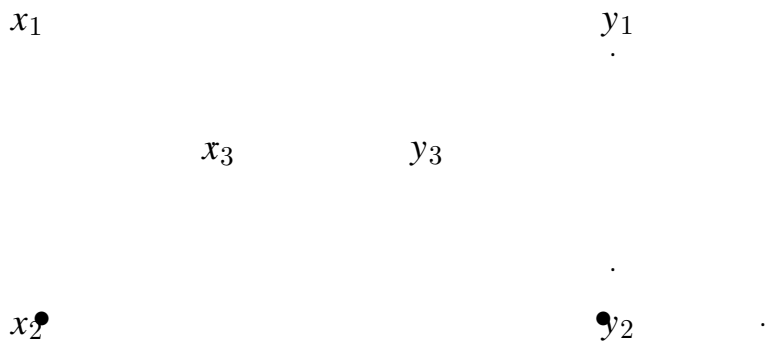


图 3

给定一个整数 s，我们用一个由 s 个缓慢递减的整数组成的序列λ（$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_s$）来标记 $U(s)$ 的支配权。若 $\lambda_s \geq 0$，则简记为$\lambda \geq 0$。若 $\lambda_1 \leq 0$，则记为 $\lambda \leq 0$。设 V_λ 为具有最高权 λ 的 $U(s)$ 表示。对偶表示 V_λ^*由 $\lambda^* = (-\lambda_s \geq \cdots \geq -\lambda_1)$ 标记。注意，若 $\lambda \geq 0$，则 $\lambda^* \leq 0$。

我们选取 $E_{x_i} = \mathbb{C}^p$、 $E_{y_i} = \mathbb{C}^q$ 和 $\mathrm{E} = (E_{x_1}, E_{x_2}, E_{x_3}, E_{y_1}, E_{y_2}, E_{y_3})$。与 E 相关联的空间 $H(Q_{3,3})$ 为

$$\oplus_{i=1}^{2} \operatorname{Hom}(E_{x_i}, E_{x_3}) \oplus \operatorname{Hom}(E_{y_3}, E_{x_3}) \oplus \oplus_{j=1}^{2} \operatorname{Hom}(E_{y_3}, E_{y_i}).$$

那么，$\mathrm{Sym}^*(H(Q_{3,3}))$ 是 $GL(\mathrm{E}) = \mathrm{GL}(E_{x_1}) \times GL(E_{x_2}) \times GL(E_{x_3}) \times GL(E_{y_1}) \times GL(E_{y_2}) \times GL(E_{y_3})$ 的表示空间。

写出其分解

$$\mathrm{Sym}^*(H(Q_{3,3}))$$

$= \oplus_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3} m_Q(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3) V_{\alpha_1}^{x_1} \otimes V_{\alpha_2}^{x_2} \otimes V_{\alpha_3}^{x_3} \otimes V_{\beta_1}^{y_1} \otimes V_{\beta_2}^{y_2} \otimes V_{\beta_3}^{y_3}$ 其中，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $U(p)$ 的支配权，而 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 $U(q)$ 的支配权。

对于 λ、μ、ν，即 $U(p) \times U(q)$ 的一组三个支配权（因此 λ 是一对 (α, β)，其中 α 是 $U(p)$ 的支配权，而 β 是 $U(q)$ 的支配权，等等），回顾一下，$m_D^\nu(\lambda, \mu)$ 是 V_ν 在 $V_\lambda \otimes V_\mu \otimes$ 对称幂$(\mathfrak{p}^+)$ 中的重数，其中 $\mathfrak{p}^+ = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^q, \mathbb{C}^p)$。

引理 2. 若 $m_Q(\alpha_1、\ \alpha_2、\ \alpha_3、\ \beta_1、\ \beta_2、\ \beta_3) > 0$，则 $\alpha_1 \geq 0、\ \beta_1 \leq 0、\ \alpha_2 \geq 0、\beta_2 \leq 0$ 和 $\alpha_3 \leq 0、\ \beta_3 \geq 0$。此外，

$$m_Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = m_D^{\nu}(\lambda, \mu),$$

其中

$$V_\lambda = V_{\alpha_1} \otimes V_{\beta_1}, \qquad V_\mu = V_{\alpha_2} \otimes V_{\beta_2}, \qquad V_\nu = V_{\alpha_3^*} \otimes V_{\beta_3^*}.$$

证明。

我们在 $p \leq q$ 的情形下给出证明。记

$$\mathrm{Sym}^*(\mathcal{H}_{Q_{3,3}}) = A \otimes B \otimes C$$

with

$$A = \mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(E_{x_1}, E_{x_3})) \otimes \mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(E_{x_2}, E_{x_3})),$$
$$B = \mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(E_{y_3}, E_{x_3})),$$
$$C = \mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(E_{y_3}, E_{y_1})) \otimes \mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(E_{y_3}, E_{y_2})).$$

回顾柯西公式：

引理 3. 设 N, n 为正整数，并假设 $N \geq n$。关于 $U(n) \times U(N)$ 的自然作用，$\mathrm{Sym}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^N)$ 的分解由柯西公式给出

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^N) = \bigoplus_{\nu \geq 0} V_\nu^{U(n)} \otimes V_{\tilde{\nu}}^{U(N)}. \tag{14}$$

这里 $\tilde{\nu}$ 是序列 ν，我们在右侧补上 $N - n$ 个零。

利用这一对应关系

$$\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$$

再考察上文中 A, C 的分解，我们得到

$$\mathrm{Sym}^*(\mathcal{H}_{Q_{3,3}})$$

$$\sum_{\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 \leq 0} V_{\alpha_1}^{x_1} \otimes V_{\alpha_2}^{x_2} \otimes \mathrm{Middle}_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2} \otimes V_{\beta_1}^{y_1} \otimes V_{\beta_2}^{y_2}$$

其中，$\mathrm{Middle}_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2}$ 是 $U(E_{x_3}) \times U(E_{y_3})$ 的表示，等于

$$V_{\alpha_1^*}^{x_3} \otimes V_{\alpha_2^*}^{x_3} \otimes \mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(E_{y_3}, E_{x_3})) \otimes V_{\beta_1^*}^{y_3} \otimes V_{\beta_2^*}^{y_3}.$$

So

$$\mathrm{Middle}_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2} = V_\lambda^* \otimes V_\mu^* \otimes \mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(E_{y_3}, E_{x_3}))$$

$$= (V_\lambda \otimes V_\mu \otimes \mathrm{Sym}(\mathrm{Hom}(E_{y_3}, E_{x_3}))^*,$$

with

$$V_\lambda = V_{\alpha_1} \otimes V_{\beta_1}, \qquad V_\mu = V_{\alpha_2} \otimes V_{\beta_2}.$$

根据 m_D 的定义，这是

$$\sum_\nu m_D^\nu(\lambda,\mu)V_\nu^* = \sum_\nu m_D(\nu^*,\lambda,\mu)V_\nu$$

将 Middle$_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2}$ 替换为这个表达式，我们便得到所需公式。

7 锥不等式及与 P.E. Paradan 列表的比较

设 $G = U(p,\ q)$ 和 $n = p+q$。设 $K = U(p) \times U(q)$ 为 G 的极大紧子群。

设 $\mathfrak{h}$ 为 Lie(G) 的 Cartan 子代数，由对角元为虚数的矩阵组成。元素 $\xi \in (\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ 写作 $\acute{\mathrm{I}}_{i=1}^{p+q}\,\xi(i)\epsilon^i$，其中 $\xi(i)$ 为实数，采用例 4 中的记号。令

$$\mathfrak{c}_{\geq 0} = \{\xi;\xi(1) \geq \cdots \geq \xi(p) \geq \xi(p+1) \geq \cdots \geq \xi(p+q)\}.$$

回顾一下，锥 Cone$_{\mathrm{hol}}(p,\ q)$ 由满足 $\mathrm{O}_C^{nc} \subset \mathrm{O}_A^{nc} + \mathrm{O}_B^{nc}$ 的三元组 $(A,\ B,\ C)$ 构成。等价地（沿用 [19] 并根据命题 6），它是由 $\mathfrak{c}_{\geq 0}\oplus\mathfrak{c}_{\geq 0}\oplus\mathfrak{c}_{\geq 0}$ 中满足 $m_D^\nu(\lambda,\ \mu) > 0$ 的权 $\lambda,\ \mu,\ \nu$ 生成的锥。

令 $\mathrm{J} = [J_1, J_2, \ldots, J_6]$ 为一个整数子集族，其中$J_1, J_2, J_3 \subseteq [p]$和 $J_4, J_5, J_6 \subseteq [q]$。考虑三元组 (A, B, C)，它属于 $(\sqrt{-1}\mathfrak{h})^* \oplus (\sqrt{-1}\mathfrak{h})^* \oplus (\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$。我们将线性形式 $e(\mathrm{J})$ 定义为

$$e(\mathcal{J})(A,B,C)$$

$$= \sum_{i\in J_1} A(i) + \sum_{i\in J_2} B(i) - \sum_{i\in J_3} C(p+1-i) - \sum_{i\in J_4} C(p+q-i+1) + \sum_{i\in J_5} A(p+i) + \sum_{i\in J_6} B(p+i).$$

现在考虑箭图 $Q_{3,3}$，并将其顶点按 {1,2,3,4,5,6} 编号。以 Q_0 为索引的对象族按 $1 \to 6$ 的顺序列成列表。因此，元素 $[J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6] \in \mathrm{Horn}_0(\mathrm{A},\ p, q)$ 是一个集合序列，满足$J_1, J_2, J_3 \subseteq [p]$并且 $J_4, J_5, J_6 \subseteq [q]$，其中 $|J_1| = |J_2| = |J_3|$ 和 $|J_4| = |J_5| = |J_6|$。

命题 7。锥 $C_{\mathrm{hol}}(p, q) \subset \mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0}$由以下方程定义

$$\sum_{i=1}^{p+q} A(i) + \sum_{i=1}^{p+q} B(i) = \sum_{i=1}^{p+q} C(i)$$

以及不等式 $e(\mathrm{J})(A,\ B,\ C) \leq 0$对所有 $\mathrm{J} \in \mathrm{Horn}_0(\mathrm{A},\ p,\ q)$ 均成立。

证明。

设 $(A,\ B,\ C)$ 属于 $\mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0} \oplus \mathfrak{c}_{\geq 0}$。设 $t \in \mathbb{R}$ 为一个实数。考虑 $t\,\mathrm{Id}_n = t(\sum_{k=1}^{n} h_k)$，它属于 $\sqrt{-1}\,\mathrm{Lie}(G)$。它是 $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ 的中心。因此，$r_t = \sum_{k=1}^{n} t\epsilon^k$ 在 $U(p,\ q)$ 的余伴随作用下保持不变。由此可见，平移

$$(A, B, C) \to (A + r_{t_1}, B + r_{t_2}, C - r_{t_1} - r_{t_2})$$

对于任意 $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$，它保持锥 $C_{\mathrm{hol}}(p, q)$ 不变。

由于集合 J_1, J_2, J_3 以及集合 J_4, J_5, J_6 的基数相同，线性形式 $e(J)$ 在相同的二维平移参数群作用下保持不变。我们可以找到 t_1, t_2，使得 $A = (A(1) \geq \cdots \geq A(p) \geq 0 \geq A(p+1) \geq \cdots \geq A(p+q)$ 和 $B = (B(1) \geq \cdots \geq B(p) \geq 0 \geq B(p+1) \geq \cdots \geq B(p+q))$。定义

$$\begin{aligned} a_1 &= (A(1), \ldots, A(p)), \\ a_5 &= (A(p+1), \ldots, A(p+q)), \\ a_2 &= (B(1), \ldots, B(p)), \\ a_6 &= (B(p+1), \ldots, B(p+q)), \\ a_3 &= (-C(p), \ldots, -C(1)), \\ a_4 &= (-C(p+q), \ldots, -C(p+1)). \end{aligned} \tag{15}$$

那么，$= [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$ 属于群 $U_Q(\mathrm{E}) = U(p)^3 \times U(q)^3$ 的 Weyl 室。

此外，根据我们的选择，$a_1, a_2 \geq 0$ 和 $a_5, a_6 \leq 0$。容易看出，$e(J)(A, B, C) = E(J)(a)$。因此，若 (A, B, C) 满足方程 $e(J) \leq 0$，则元素 a 属于锥 $\mathrm{Cone}_Q(\mathrm{E})$，因为 Extremal 中的四个不等式符合我们的选择，而描述 $\mathrm{Cone}_Q(\mathrm{E})$ 的其他不等式为 $E(J) \leq 0$，其中 $J \in \mathrm{Horn}_0(\mathrm{A}, p, q)$（引理 1）。设 (A, B, C) 的系数为整数，则 $m_Q(a) > 0$，因此 $m_D^{\nu}(\lambda, \mu) > 0$，其中 $V_\lambda = V_{a_1} \otimes V_{a_5}$，$V_\mu = V_{a_2} \otimes V_{a_6}$ $V_\nu = V_{a_3}^* \otimes V_{a_4}^*$ 视为 $K = U(p) \times U(q)$ 的不可约表示。根据命题 1，这又意味着 $(A, B, C) \in \mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(p, q)$。命题得证。

现在给出维数向量为 $[2, 2, 2, 2, 2, 2]$ 时，$Q = Q_{3,3}$ 对应的 $\mathrm{Cone}_Q(\mathrm{E})$ 示例。因此，与 $\mathrm{Horn}_0(\mathrm{A}, 2, 2)$ 中各元素相对应的不等式为

$$a_1(1) + a_2(2) + a_3(2) \le 0, a_1(2) + a_2(1) + a_3(2) \le 0, a_1(2) + a_2(2) + a_3(1) \le 0, a_1(1) + a_1(2) + a_2(1) + a_2(2) + a_3(1) + a_3(2) \le 0, a_1(2) + a_2(2) + a_3(2) + a_4(1) + a_5(2) + a_6(2) \le 0, a_1(2) + a_2(2) + a_3(2) + a_4(2) + a_5(1) + a_6(2) \le 0, a_1(2) + a_2(2) + a_3(2) + a_4(2) + a_5(2) + a_6(1) \le 0, a_1(1) + a_2(2) + a_3(2) + a_4(2) + a_5(2) + a_6(2) \le 0, a_1(2) + a_2(1) + a_3(2) + a_4(2) + a_5(2) + a_6(2) \le 0, a_1(2) + a_2(2) + a_3(1) + a_4(2) + a_5(2) + a_6(2) \le 0, a_1(1) + a_1(2) + a_2(1) + a_2(2) + a_3(1) + a_3(2) + a_4(1) + a_5(2) + a_6(2) \le 0, a_1(1) + a_1(2) + a_2(1) + a_2(2) + a_3(1) + a_3(2) + a_4(2) + a_5(1) + a_6(2) \le 0, a_1(1) + a_1(2) + a_2(1) + a_2(2) + a_3(1) + a_3(2) + a_4(2) + a_5(2) + a_6(1) \le 0. \tag{16}$$

事实证明，所有不等式都是必要的。

使用 (15) 中定义的变换（A, B, C）→（a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6），我们重新得到 $\mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(2, 2)$ 的不等式就是 [19] 中得到的不等式，我们在此列出：

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4, \\ A_1 + A_2 + B_1 + B_2 &\le C_1 + C_2, \\ A_2 + B_2 \le C_2,\ A_2 + B_1 &\le C_1,\ A_1 + B_2 \le C_1, \\ A_3 + B_3 \ge C_3,\ A_3 + B_4 &\ge C_4,\ A_4 + B_3 \ge C_3, \\ A_2 + A_4 + B_2 + B_4 \le C_1 + C_4,\quad A_2 + A_4 + B_2 + B_4 &\le C_2 + C_3, \\ A_2 + A_4 + B_1 + B_4 \le C_1 + C_3,\quad A_1 + A_4 + B_2 + B_4 &\le C_1 + C_3, \\ A_2 + A_4 + B_2 + B_3 \le C_1 + C_3,\quad A_2 + A_3 + B_2 + B_4 &\le C_1 + C_3. \end{aligned}$$

8 更多示例

我们再给出一些 $\mathrm{Horn}_0(A, p, q)$ 的示例，它进而确定了锥 $\mathrm{Cone}_{\mathcal{Q}}(E)$ 的不等式，或者等价地，锥 $\mathrm{Cone}_{\mathrm{hol}}(p, q)$ 的不等式。要得到全部 $\mathrm{Horn}_0(p, q)$，我们需要加入 $\mathrm{K}_{\mathrm{full}}$（给出一个等式）以及另外 4 个集合 $\mathrm{K}^{(6)}_{\max}$、$\mathrm{K}^{(5)}_{\max}$、$\mathrm{K}^{(1)}_{\min}$、$\mathrm{K}^{(2)}_{\min}$，它们对应于极值顶点 1，2，5，6。

以下是一些事实，可帮助我们通过“手算”得到下面的示例。

回想一下（命题 2），集合 $\mathrm{Horn}_0(A, p, q)$ 在 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$ 作用下保持不变。

此外，回顾备注 1。设 B 为箭图 $1 \to 3,\ 2 \to 3$ 的箭集$_2$。考虑 P_1 具有顶点 {1, 2, 3} 的子箭图$Q_{3,3}$，以及P_2 具有顶点 {4, 5, 6} 的子箭图，如图 2 所示。因此，P_1 是箭图 H_2，而 P_2 与具有相反的定向的 H_2 同构。如果 $\mathrm{K} = [K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6]$

属于 $\mathrm{Horn}_0(\mathrm{A},\ p,\ q)$，且 $|K_1| = |K_2| = |K_3| = r_1$、$|K_4| = |K_5| = |K_6| = r_2$，那么 $\mathrm{K}_{\mathrm{left}} = [K_1, K_2, K_3]$ 必然在 E^{P_1} 中是 P_1-相交的，而 $\mathrm{K}^{\mathrm{right}} = [K_4, K_5, K_6]$ 在 E^{P_2} 中是 P_2-相交的。这意味着由 K_1，K_2，K_3 确定的舒伯特簇在 $\mathrm{Gr}(r_1,\ p)$ 中相交，而由 K_4，K_5，K_6 确定的舒伯特簇在 $\mathrm{Gr}(r_2,\ q)$ 中相交。

为方便读者核对我们的列表，我们列出箭图 H_2 中 $|J_1| = |J_2| = |J_3| = r$ 对应的 $\mathrm{J} = [J_1, J_2, J_3] \in \mathrm{Horn}(\mathrm{B},\ \mathrm{H}_2, [2,2,2])$ 和 $\mathrm{Horn}(\mathrm{B},\ \mathrm{H}_2, [3,3,3])$，以及它们的 $\dim = \mathrm{edim}_{Q,\ B}$ 该值计算相应舒伯特簇的同调交的维数 Ω_1，Ω_2，Ω_3。

集合 $\mathrm{Horn}(\mathrm{B},\ \mathrm{H}_2, [2,2,2])$ 在对顶点 1，2，3 的置换下保持不变。因此，我们按集合 J_i 的基数 r 对代表元进行分组列出。

$r = 1$

$$[\{1\}, \{2\}, \{2\}], \dim = 0$$

$r = 2$

$$[\{1,2\}, \{1,2\}, \{1,2\}], \dim = 1$$

集合 $\mathrm{Horn}(\mathrm{B},\ \mathrm{H}_2, [3,3,3])$ 在对顶点 1，2，3 的置换下保持不变。因此，我们按集合 J_i 的基数 r 对代表元进行分组列出。由于格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}(r,\ n)$ 与 $\mathrm{Gr}(n-r,\ r)$ 同构，因此 $r = 2$ 的 H_2-交集集合列表可由 $r = 1$ 的列表立即推得；这显然成立，因为我们处于射影空间中。

$r = 1$ 代表元：

$$[\{1\}, \{3\}, \{3\}], \dim = 0,$$
$$[\{2\}, \{2\}, \{3\}], \dim = 0,$$
$$[\{2\}, \{3\}, \{3\}], \dim = 1,$$
$$[\{3\}, \{3\}, \{3\}], \dim = 2.$$

$r = 2$ 代表元：

$$[\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,3\}], \dim = 0,$$
$$[\{1,3\}, \{1,3\}, \{2,3\}], \dim = 0,$$
$$[\{1,3\}, \{2,3\}, \{2,3\}], \dim = 1,$$
$$[\{2,3\}, \{2,3\}, \{2,3\}], \dim = 2.$$

我们还通过以下引理将数值量 $\mathrm{edim}_{Q,\ B}$ 关于 $Q = Q_{3,\ 3}$ 与子箭头 P_i 的 $\mathrm{edim}_{Q,\ B}$ 联系起来：

引理 4. 令 $\mathrm{E} = [\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^q]$，并令 $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{E}$。那么

$$\begin{aligned}&\operatorname{edim}_{Q_{3,3},B}(\mathcal{K},\mathcal{E}) = \\ &\operatorname{edim}_{P_1,B}(\mathcal{K}_{\text{left}},[p,p,p]) + \operatorname{edim}_{P_2,B}(\mathcal{K}_{\text{right}},[q,q,q]) - |K_4|(p-|K_3|).\end{aligned} \tag{17}$$

证明。若 K $=(K_x)_{x\in Q_0} \subset_{Q,\ B}$ [n], $k_x = |K_x|$, 且 $\mathbf{\Omega}$ 是由 K 确定的舒伯特簇, 则一般公式（见 9）

$$\operatorname{edim}_{Q_{3,3},B}(\mathcal{K},\mathcal{E}) = \dim \mathbf{\Omega} - \sum_{a\colon x\to y\in Q_1} k_x(n_y - k_y).$$

可推出引理中的公式。

因此，利用这些性质，可以很容易地计算以下示例。

示例 $Q_{3,\ 3}$，维数向量为 $[3,3,3,2,2,2]$

Horn_0(A，3，2) 中有 38 个元素。该集合在群 $\Sigma_3\times\Sigma_3$ 的作用下保持不变。因此，我们仅列出在 $\Sigma_3\times\Sigma_3$ 中置换作用下的代表元集合。

$$\begin{aligned}
&[\{1\},\{3\},\{3\},\{\},\{\},\{\}],\\
&[\{2\},\{2\},\{3\},\{\},\{\},\{\}],\\
&[\{2\},\{3\},\{3\},\{2\},\{2\},\{2\}],\\
&[\{3\},\{3\},\{3\},\{1\},\{2\},\{2\}],\\
&[\{1,2\},\{2,3\},\{2,3\},\{\},\{\},\{\}],\\
&[\{1,2\},\{2,3\},\{2,3\},\{2\},\{2\},\{2\}],\\
&[\{1,3\},\{1,3\},\{2,3\},\{\},\{\},\{\}],\\
&[\{1,3\},\{1,3\},\{2,3\},\{2\},\{2\},\{2\}],\\
&[\{1,3\},\{2,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{2\}],\\
&[\{2,3\},\{2,3\},\{2,3\},\{1,2\},\{1,2\},\{1,2\}],\\
&[\{1,2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,3\},\{\},\{\},\{\}],\\
&[\{1,2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,3\},\{1\},\{2\},\{2\}].
\end{aligned}$$

注意，元素 [{1，3}，{2，3}，{2，3}，{1}，{2}，{2}] 通过分别置换元素 [{1}，{2}，{2}] 和[{1，3}，{2，3}，{2，3}]。因此，我们确实得到了由 $3\times 8 + 9 + 2 + 3$ 给出的 38 个元素。再次可以直接看出，我们能够“手工”构造一个一般 $r \in \mathrm{H}Q$(E) 的子表示，其舒伯特位置满足所需条件。

举个例子。考虑 K = [{2}，{3}，{3}，{2}，{2}，{2}]，我们来看看，对于一般的 r，在这个位置上存在唯一的 r 子表示 S。事实上，我们只能取 $S_3 = r_{4\to 3}(\mathbb{C}^2) \cap r_{1\to 3}(\mathbb{C}^2)$ 作为一个维数为 1 的子空间，并通过映射 r_a 或其逆映射沿着 S_3 继续。

归纳判据也很容易验证。

示例 $Q_{3,\ 3}$，维数向量 $[3,3,3,3,3,3]$

Horn_0(A，3，3) 中的元素列表包含 103 个元素。由于它在 $\Sigma_3 \times \Sigma_3$ 中的置换作用下不变，我们仅列出模去该群后的代表元，共有 23 个代表元。

[{1}, {3}, {3}, {3}, {3}, {3}]⨿{2}, {2},
{3}, {3}, {3}, {3}]⨿{3}, {3}, {3}, {1}, {3}, {3}]⨿[
{3}, {3}, {3}, {2}, {2}, {3}]⨿{2,3}, {2, 3},
{2,3}, {1,2}, {2,3}, {2,3}]⨿{2,3}, {2, 3}, {
2,3}, {1,3}, {1,3}, {2,3}]⨿{1,2}, {2, 3}, {2,3},
{2,3}, {2,3}, {2,3}]⨿{1,3}, {1, 3}, {2,3}, {
2,3}, {2,3}, {2,3}]⨿{1,2,3}, {1, 2,3}, {1,2,3},
{1,3}, {1,3}, {2,3}]⨿{1}, {3}, {3}, {}, {}, {}]⨿[
{2}, {2}, {3}, {}, {}, {}]⨿{2}, {3}, {3}, {2},
{3}, {3}]⨿{1, 2}, {2,3}, {2,3}, {}, {}, {}]⨿[
{1,2}, {2, 3}, {2,3}, {2}, {3}, {3}]⨿{1, 3},
{1,3}, {2,3}, {}, {}, {}]⨿{1,3}, {1, 3}, {2,3},
{2}, {3}, {3}]⨿{1,3}, {2, 3}, {2,3}, {1}, {3},
{3}]⨿{1,3}, {2, 3}, {2,3}, {2}, {2}, {3}]⨿{1,3},
{2, 3}, {2,3}, {1,3}, {2,3}, {2,3}]⨿{1, 2,3},
{1,2,3}, {1,2,3}, {}, {}, {}]⨿{1,2,3}, {1, 2,3},
{1,2,3}, {1}, {3}, {3}]⨿{1,2,3}, {1, 2,3},
{1,2,3}, {2}, {2}, {3}]⨿{1,2,3}, {1,2,3},
{1,2,3}, {1,2}, {2, 3}, {2,3}]

因此，我们确实得到了 103 个元素，即 $103 = 16 \times 3 + 9 \times 6 + 1$。与前一个例子一样，可以直接看出，我们能够“手动”构造一个一般 $r \in \mathrm{H}\varrho$(E) 的子表示，其舒伯特位置符合要求。

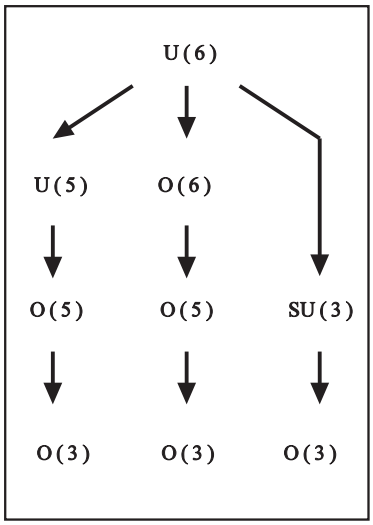
举一个例子。考虑 K $= [\{1,3\}, \{2,3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,3\}]$。集合 K 为 $\mathbf{\Omega} = [\Omega_1, \ldots, \Omega_6]$ 编号，其中 $\Omega_1 = \Omega_4 = \{X \subset \mathrm{Gr}(2,3), \mathbb{C}e_1 \subset X\}$ 和 $\Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_5 = \Omega_6 = \mathrm{Gr}(2,3)$。事实上，$\Omega_1$ 是 $\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3$ 的 B 轨道，而 e_1 在 B 下不变，等等.....我们来看看，对于一般的 r，r 存在唯一一个满足 $S_i \in \Omega_i$ 的子表示 S $= [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6]$。事实上，我们

必须取 $S_3 = r_{1\to3}(e_1) \cup r_{4\to3}(e_1)$ 作为一个维数为 2 的子空间（r 是一般的），并像之前一样沿着映射 r_a 或其逆映射，通过 S_3 继续进行。

参考文献

[1] Velleda Baldoni、Mich
`
Horn inequalities and ele Vergne 和 Michael
quivers **1804 00431** 2018
Walter，arXiv：。（）。[2] Velleda Baldoni、Mich
`
Horn conditions for quiver ele Vergne 和 Michael
subrepresentations and the moment map **1901 07194** 2019
Walter，arXiv：。（）。即将在《纯粹与应用数学季刊》发表。[3] Prakash Belkale，
Geometric proofs of Horn and saturation conjectures，《代数几何杂志》15（2006），133–173。[4]
Nicole Berline 和 Mich`ele Vergne，*Fourier transforms of orbits of the coad-joint representation*，载于
《约化群表示论》（美国犹他州帕克城，1982），《数学进展》，第40卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马
萨诸塞州，1983年，第53–67页。[5] Nicole Berline、Mich
`
The Horn inequalities from ele Vergne 和 Michael
a geometric point of view **63** 2017 403 470
Walter，，《数学教学》（），–。[6] Guillaume Deltour，
Kirwan polyhedron of holomorphic coadjoint orbits，《变换群》17（2012），第2期，351–392。[7]
Harm Derksen 和 Jerzy Weyman，*Semi-invariants of quivers and saturation*
for Littlewood-Richardson coefficients **13** 2000 467 479，《美国数学会杂志》（），–。
[8] Michel Duflo、Esther Galina 和 Jorge A. Vargas，*Square integrable representa-*
tions of reductive Lie groups with admissible restriction to $_2\ \mathbb{R}$ SL（），《李理论杂志》
27（2017），第4期。[9]Michel Duflo 和 Mich`ele Vergne，*Orbites coadjointes et cohomologie*
équivariante，载于《表示论中的轨道方法》（哥本哈根，1988），《数学进展》，第82卷，Birkh¨auser
Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990年，第11–60页。（法文）。[10] Victor Guillemin 和 Shlomo Sternberg，
Convexity properties of the moment
mapping **67** 1982 419 513 ，《数学发明》（），–。
[11]，*Geometric quantization and multiplicities of group representations*，《数学发明》67（1982），
515–538。[12] Joachim Hilgert、Karl-Hermann Neeb 和 Bent Ørsted，*The geometry of nilpo-*
tent coadjoint orbits of convex type in Hermitian Lie algebras **4**，《李理论杂志》（
1994 2, 185 235 1337191），第–期。MR Alfred Horn，
[13]
Eigenvalues of sums of Hermitian matrices，《太平洋数学杂志》12（1962），225–241。[14] Hans
Plesner Jakobsen 和 Mich
`
Restrictions and expansions of holo-
morphic representations **34** 1979 1, 29 53
ele Vergne，，《泛函分析杂志》（），第–期。[15] Allen Knutson 和 Terence Tao，
The honeycomb model of $_n\ \mathbb{C}$ *tensor prod-* GL（），《美国数学会杂
ucts. I. Proof of the saturation conjecture **12** 1999 1055
志》（），– 1090。

[16] Linda Ness, *A stratification of the null cone via the moment map*, 《美国数学杂志》106（1984），1281–1329。附有 David Mumford 撰写的附录。[17] Grigorii Iosifovich Olshanski, *Invariant cones in Lie algebras Lie semigroups and the holomorphic discrete series* **15** 1981 《函数分析及其应用》() 第4期（俄文）。[18] Paul-Emile Paradan, *Quantization commutes with reduction in the non-compact setting: the case of holomorphic discrete series* **17**，《欧洲数学会杂志》（JEMS）（2015），第4期，955–990。[19]， *Horn(p,q)* arXiv:2006.08989（2020）。[20] Joe Repka, *Tensor products of holomorphic discrete series representations*, 《加拿大数学杂志》31（1979），第4期，836–844。[21] Nicolas Ressayre, *Geometric invariant theory and the generalized eigenvalue problem* **180** 2010 389 441 ，《数学发明》()，–。[22]， *private communication*, 2018年。[23] Aidan Schofield, *General representations of quivers*, 《伦敦数学会会刊》（3）65（1992），46–64。[24] Mich ` ele Vergne 和 Michael Walter, *Inequalities for Moment Cones of Finite-Dimensional Representations* **15** 2017 1209 1250，《辛几何杂志》()，–。[25] Ernest Borisovitch Vinberg, *Invariant convex cones and orderings in Lie groups*, 《函数分析及其应用》14（1980），第1期，1–13，96（俄文）。


U(6)
U(5)
O(6)
O(5)
O(5)
SU(3)
O(3)
O(3)
O(3)