arXiv:2304.02067v1 [quant-ph] 4 Apr 2023

普朗克辐射定律的非交换推导

M. A. De Andrade, * L. G. Ferreira Filho, † 和 C. Neves‡
Departamento de Matemática, Física e Computação, Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rodovia Presidente Dutra, Km 298, Pólo Industrial, CEP 27537-000, Resende-RJ, Brazil.

普朗克辐射定律能够解释实验测得的黑体辐射谱。为了得到这一结果，普朗克从两个方面提出了他的辐射定律：1）通过 *ad hoc* 修改热辐射能量与熵之间假定的关系；2）假设计算与辐射处于热平衡的振子的熵时，能量以离散单位计量。由此，能量与频率成正比的能量量子化便被引入物理学。然而，普朗克最初以不完整的方式假定了简谐振子的能量量子化，即没有假设基态能量为零。当然，这个问题后来以不同方式得到了解决。尽管如此，我们仍提出一种解决这一问题的替代方法：在非交换（NC）框架下描述谐振子，此时非零基态能量会自然地作为非交换贡献出现。采用这种方法，普朗克量子理论得以更新，因此与1925年开创的量子力学相兼容。

I. 引言

通常，量子概念——与频率成线性关系的能量量子——出现在近代物理学教科书中[1]，其背景是通过理论推导热辐射的黑体能谱，展示经典理论的失效，并提出建立一种新力学，即量子力学。当然，量子力学的发展早已远远超出推导普朗克辐射定律时对经典理论所作的最初修正。

然而，一些有趣的论文[2–5] 在不采用量子假设（能量离散）的情况下，推导出了实验测得的黑体能谱和非零基态能量；不过，除了经典理论的常见思想外，还需要一些经典假设，例如：温度处于绝对零度时的洛伦兹不变电磁辐射，或探讨经典理论与量子理论在谐振子方面的某些联系，或将纯热力学理论应用于经典简单谐振子。

另一方面，将量子力学描述在相空间而非希尔伯特空间中的愿望，与量子力学本身一样古老[6–8] ，其他学者也为这一课题作出了贡献[9–13]。在此背景下，我们提出利用 $\star$-乘积代替相空间变量之间的标量积，从而推导出完整的黑体能谱对应的普朗克辐射定律。因此，基态能量$\hbar\omega/2$ 作为非对易贡献出现；相应地，简谐振子的普朗克假设和普朗克辐射定律也作了修正，将这一基态能量纳入其中。

II. 通过非交换性更新普朗克辐射定律

将把非交换性[7, 8] 引入瑞利-金斯定律[1] ，从而解决普朗克量子理论[14] 中的核心问题

* 电子邮箱：marco@fat.uerj.br
† 电子邮箱：kph120@gmail.com
‡ 电子邮箱：clifford@fat.uerj.br

。为此，相空间变量之间的标量积将改为 $\star$- 积[7, 8], ，其定义如下:

$$f(\xi)\star g(\xi) = f(\xi)\, exp\left[\frac{i\hbar}{N}\,\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Q_i}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial P_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial P_i}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial Q_i}\right)\right] g(\xi), \tag{1}$$

其中， $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Q_i}$ e $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial P_i'}$ 分别表示左导数和右导数， N 是任意常数。令 $\hbar/N << 1$，式（1）化为

$$f(\xi)\star g(\xi) = f(\xi)\left[1 + \frac{i\hbar}{N}\,\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Q_i}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial P_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial P_i}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial Q_i}\right)\right] g(\xi). \tag{2}$$

非对易框架下谐振子的能量为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}\star\mathbf{p} + \omega^2\mathbf{x}\star\mathbf{x}\right), \\ &= \frac{(\mathbf{p} - \imath\omega\mathbf{x})}{\sqrt{2}}\star\frac{(\mathbf{p} + \imath\omega\mathbf{x})}{\sqrt{2}}, \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}^2 + \omega^2\mathbf{x}^2\right) + \frac{\hbar\omega}{N}, \end{aligned} \tag{3}$$

其中，相空间变量之间通常的标量积被 $\star$-积取代。这使我们能够将普朗克假设更新为

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \tag{4}$$

其中 $N = 2$。注意，对于 $n = 0$ ，由于非对易性，存在非零的基态能量（$\hbar\omega/2$）。在这种情况下，普朗克量子理论再现了现代量子力学中得到的结果，该结果发表于 1925[15–22]。

非对易框架下的黑体电磁能量 W 为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_V u(\nu, T)\; dV, \\ &= \frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon_0\,\vec{E}\star\vec{E}^{*} + \frac{1}{\mu_0}\,\vec{B}\star\vec{B}^{*}\right) dV\,, \end{aligned} \tag{5}$$

其中， $u(\nu,T)$、 $\vec{E}$和 $\vec{B}$分别表示电磁能量密度、电场和磁场，并且通常的标量积被 $\star$-积所取代。由真空中的麦克斯韦方程组可得位矢的以下微分方程

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0\,, \tag{6}$$

其中应用了洛伦兹规范，即 $\nabla\cdot A = 0$。式（6）是一个波动方程，因此位矢场 $\vec{A}$是周期矢量函数，并在黑体空腔边界处满足 $\vec{A} = \vec{0}$。经过直接计算，求解式（6）可得周期矢量场

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_n \sum_{\lambda=1}^{2}\left(\vec{q}\,(\vec{k}_n, \lambda)\, e^{i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}} + \vec{q}^{\,*}(\vec{k}_n, \lambda)\, e^{-i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\right), \tag{7}$$

其中 k_n 和 λ 分别为辐射传播方向和相互正交的偏振方向。此外，$\vec{q}$（$\vec{k}_n$, λ）是彼此独立且垂直于 $\vec{k}_n$ 的矢量。由于 $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$（$\vec{r}$, t）和$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$（$\vec{r}$, t），式（5）可改写为

$$W = 2\,V\,\varepsilon_0\sum_n\sum_\lambda\left[\dot{\vec{q}}\star\dot{\vec{q}}^{\,*} + \omega_n^2\,(\vec{q}\star\vec{q}^{\,*})\right], \tag{8}$$

其中 $\omega_n^2 = k_n^2\,c^2$ 和 $c = \sqrt{1/\varepsilon_0\,\mu_0}$。假设

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \frac{1}{2\sqrt{2\,V\,\varepsilon_0}}\left(\vec{Q} + i\,\frac{\vec{P}}{\omega_n}\right)\hat{e}(\vec{k}_n, \lambda)\, e^{-i\,\omega_n\,t}\,, \\ \vec{q}^{\,*} &= \frac{1}{2\sqrt{2\,V\,\varepsilon_0}}\left(\vec{Q} - i\,\frac{\vec{P}}{\omega_n}\right)\hat{e}(\vec{k}_n, \lambda)\, e^{i\,\omega_n\,t}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

式（8）可改写为

$$W = \frac{1}{2}\sum_n\sum_\lambda\left(P^2 + \omega_n^2\,Q^2 + \frac{\hbar}{2}\,\omega_n\right), \tag{10}$$

其中 $N = 2$。这是辐射场的非对易版本瑞利-金斯定律。

将能量的玻尔兹曼分布应用于限制在体积为 V 的空腔中的无限且可数的振子，并考虑修订后的普朗克假设和式（10），类比

通常的普朗克理论的发展，可得辐射场能量为

$$W_n = \left(n_\lambda(\omega) + \frac{1}{2} \right) \hbar\, \omega\,, \tag{11}$$

其中，假设 $n_\lambda(\omega)$ 表示频率为 ω、偏振为 λ 的光子数；而对于 $n_\lambda(\omega) = 0$，存在一个非零基态能量，等于 $\hbar\,\omega/2$。鉴于此，通过用 $\star$-乘积替代通常的标量积来引入非交换性，会产生非零基态能量。请注意，这种方法改变了黑体辐射谱的普朗克辐射定律，其表达式为

$$\begin{aligned}
\rho(\omega, T) &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1/2)\hbar\omega}{kT} e^{-(n+1/2)\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{kT} e^{-(n+1/2)\hbar\omega/kT}}, \\
&= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/kT}}, \\
&= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/kT}} + \frac{1}{2}\hbar\omega \right), \\
&= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \left(\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} + \frac{1}{2}\hbar\omega \right),
\end{aligned} \tag{12}$$

其中，k 和 T 分别为玻尔兹曼常数和温度。方程（12）正是完整黑体能谱的普朗克辐射定律[23] 。

需要注意的是，黑体空腔边界上的分子——即连接到热库的导电表面上的分子——会发生振荡，因此发射电磁波。电磁波穿过空腔内部，随后撞击空腔内表面并向其传递能量，使分子发生振荡；于是这些分子再次发射电磁波。这一过程不断重复。这些分子表现得像带电谐振子，并且仍会与周围的热辐射达到热平衡。辐射[23]。事实上，经典带电谐振子获得的平均能量，等于其频率为 ω_0 时周围随机经典辐射每个正规模的平均能量。因此，当温度趋近于零时，带电谐振子将与绝对零度下存在的随机辐射处于平衡状态。这种绝对零度下的随机辐射称为经典电磁零点辐射。卡西米尔效应[24],是另一个例子：两块不带电的平行导电板之间的力取决于板周围的全部辐射。该力已通过实验测得[24–29]，结果表明，在绝对零度下，卡西米尔力并不为零；对此，可用存在具有能谱 $\varepsilon_\omega = (1/2)\hbar\omega$ 的随机经典辐射来作定量解释，其中能谱按每个正规模计。由此，式（11）中的 N 确定为 2，因此无论对于辐射场还是振荡系统，都能得到正确的基态能量。

III. 结论

将相空间坐标之间的 $\star$-乘积应用于确定黑体辐射所对应电磁能量的过程。由此得到了确定谐振子量子化的正确关系，即得到了基态能量，并将原有的普朗克辐射定律扩展至涵盖基态能量（$\hbar\,\omega/2$）。

还有一点需要说明。考虑腔体表面具有边界条件

位于无穷远处。在这种情况下，我们假设辐射场是自由的，且 $N \to \infty$。基于这一假设，非对易贡献消失， $\frac{1}{N}\hbar\omega \to 0$，公式（11）化简为

$$W_n = n_\lambda(\omega)\hbar\omega. \tag{13}$$

现在，对所有传播方向求和，即式（10），不会出现发散。

此时，让我们将这里得到的结果与正则量子化[15, 17, 22]联系起来看。众所周知，在经典力学中，相空间坐标之间的泊松括号为

$$\{\, Q_i \;,\; P_j \,\} = \delta_{ij}\;,\; i,j = 1,2,3. \tag{14}$$

这样，通过应用以下关系即可实现正则量子化过程：

$$\{\, Q_i \;,\; P_j \,\} = \delta_{ij} \quad \to \quad \left[\, \widehat{Q}_i \;,\; \widehat{P}_j \,\right] = i\,\hbar\;\delta_{ij} \tag{15}$$

其中，$[\,,\,]$ 是量子对易子，而 $\widehat{Q}_i$ 和 $\widehat{P}_j$是希尔伯特空间中的量子算符。

相空间坐标之间的 $\star$-乘积定义（式（2））使我们得到与正则量子化所定义的结构相同的结构（式（15）），即

$$Q_i \star Pj - P_j \star Q_i = \imath\hbar\delta_{ij}, \tag{16}$$

其中包含 $N = 2$。然而，相空间坐标的地位并未提升到作用于希尔伯特空间的量子算符所具有的地位。这使得我们可以推断，只要处于由$\star$-乘积所诱导的非对易框架中，某些被认为是量子效应的现象仍可能在经典层面显现。这是量子力学的一种替代表述，在某些用途（例如研究经典极限）上，可能比希尔伯特空间表述更为有用。

在文献[2–5] 中，研究者假设温度绝对零度下存在洛伦兹不变的电磁辐射，并未采用能量与频率呈离散线性关系的概念、狄拉克对谐振子的经典—量子类比，也未基于纯粹的温度观点，由此推导出黑体能谱的普朗克定律和基态能量（$\hbar\,\omega/2$）。另一方面，我们通过使用 $\star$-乘积扩展普朗克假设，得到了相同的结果。此外，现代量子力学也得出了相同的结果。因此，至少存在四种不同的黑体能谱普朗克定律和基态能量（$\hbar\,\omega/2$）描述；从实验层面比较来看，它们彼此等效。这表明，判断哪种理论正确，不仅要依据实验层面（例如黑体辐射），也要依据理论层面。事实上，自1925年诞生以来，现代量子力学已逐渐成为最能描述自然界在原子和亚原子粒子尺度上物理性质的理论，远远超越了半经典极限。

IV. 致谢

本研究部分得到 FAPERJ 和巴西研究机构 CNPq 的资助。

[1] 例如，R. Eisberg 和 R. Resnick，《原子、分子、固体、原子核与粒子的量子物理学》，第2版（John Wiley & Sons 出版，纽约，1985 *Estrutura Quântica da Matéria:* ）；J. Leite *do átomo pré-socrático às partículas elementares* 2^a Lopes，，编（Editora UFRJ，里约热内卢，1993年）；K. S. Krane，《近代物理学》，第2版（Wiley，纽约，1996年）；J. R. Taylor、C. D. Zafiratos 和 M. A. Dubson，《科学家和工程师的近代物理学》，第2版（Pearson，纽约，2003年）；S. T. Thornton 和 A. Rex，《科学家和工程师的近代物理学》，第4版（Brooks/Cole，Cengage Learning，马萨诸塞州波士顿，2013年）。[2] T. H. Boyer, *Derivation of the blackbody radiation spectrum without quantum assumptions* ，《物理评论》182，1374–1383（1969年）。[3] Timothy H. Boyer, *Blackbody radiation in classicalphysics: A historical perspective*，《美国物理学杂志》86，495（2018年）；2018年11月2日修订。[4] T. H. Boyer, *Dirac's Classical Quantum Analogy for the Harmonic Oscillator: Classical Aspects in Thermal Radiation Including Zero-Point Radiation* ，《美国物理学杂志》88，640（2020年）。[5] T. H. Boyer, *Thermodynamics of the harmonic oscillator: derivation of the Planck blackbody spectrum from pure thermodynamics* **40**, 025101 2019 ，《欧洲物理学杂志》（）。[6] Wigner, E., *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium* **40**, 749 759 1932 ，《物理评论》–（）。[7] H. J. Groenewold, *On the Principles of elementary quantum mechanics* **12**, 405 1946 ，《物理学》（乌得勒支）（）。[8] J. E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*，《剑桥哲学学会会刊》45，99（1949年）。[9] de Groot S. R. 和 Suttorp L. G., *Foundation of Electrodynamics* 1972 ，（阿姆斯特丹：North-Holland，）。[10] Bayen, F.、Flato, M.、Fronsdal, C.、Lichnerowicz, A. 和 Sternheimer, D., *Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures* ，《物理年鉴》第111卷，第1期，第61–110页（1978年）。[11] Bayen, F.、Flato, M.、Fronsdal, C.、Lichnerowicz, A. 和 Sternheimer, D., *Deformation theory and quantization. II. Physical applications* **111**, ，《物理年鉴》，第1期，第111–151页（1978年）。[12] Lesche, B., *From classical mechanics to Feynman's graphs with ⋆-products* **29**, 2270 1984 ，《物理评论》D（）。[13] Lesche, B. 和 Seligman, T. H., *Quantum mechanics in coherent algebras on phase space* ，《物理学杂志A：数学与一般物理》19，91–105（1986年）。

[14] A. Hermann, *The Genesis of Quantum Theory (1899-1913)* ，（C. W. Nash 译）（麻省理工学院出版社，Cambridge MA，1971年），第 15–17 页。[15] P.A.M. Dirac, *The fundamental equations of quantum mechanics*，《皇家学会会刊》，伦敦，A109，第 752 期，第 642 页（1925年）。[16] M. Born 和 P. Jordan, *On Quantum Mechanics*，《物理学杂志》，第 34 卷，第 858 页（1925年）。[17] P.A.M. Dirac, *On the theory of quantum mechanics*，《皇家学会会刊》，伦敦，A112，第 762 期，第 661 页（1926年）。[18] M. Born、W. Heisenberg 和 P. Jordan, *Zur Quantenmechanik II* 557 1926 ，《物理学杂志》，第 35 卷，第（）；英文译文见参考文献 3，论文 15。Google Scholar，Crossref [19] Schr¨odinger，E., *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinem* *Annalen der Physik* **79**， 734 1926 ，第 卷，第（）。[20] Schr¨odinger，E., *Quantisierung als Eigenwertproblem*（第一篇通讯）。《物理学年鉴》，第 384 卷，361–376 页（1926年）。[21] Schr¨odinger，E., *Quantisierung als Eigenwertproblem*（第二篇通讯）。《物理学年鉴》，第 384 卷，489–527 页（1926年）。[22] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*（贝尔弗科学研究生院、叶史瓦大学，纽约，1964年）。[23] M. Planck, *The Theory of Heat Radiation*（多佛出版社，纽约，1959年）。[24] H. B. G. Casimir, *On the attraction between two perfectly conducting plates* ，荷兰皇家科学院学报第 51 卷，793–795 页（1948年）。[25] M. J. Sparnaay, *Measurement of the attractive forcesbetween flat plates*，《物理学》（阿姆斯特丹）第 24 卷，751–764 页（1958年）。[26] S. K. Lamoreaux, *Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 μ 55m range* **78**, 5 8 1997 ，《物理评论快报》，（）：81，5475–5476 页（1998年）。[27] U. Mohideen, *Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μm* **8**1, 4549 4552 ，《物理评论快报》（1998年）[28] H. B. Chan、V. A. Aksyuk、R. N. Kleinman、D. J. Bishop 和 F. Capasso, *Quantum mechanical actuation of microelectromechanical systems by the Casimir force*，《科学》第 291 卷，1941–1944 页（2001年）。[29] G. Bressi、G. Carugno、R. Onofrio 和 G. Ruoso, *Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces* **88**, 041804 4 2002 ，《物理评论快报》（）（）。