预印本

通过一般各向异性介质中的动态射线追踪探究速度扩展因子及其影响：全面教程

arXiv:2304.02069v1 [physics.geo-ph] 4 Apr 2023

Tiago A. Coimbra[1], 、Rodrigo Bloot[2], 和 Jorge H. Faccipieri[1]

[1] 坎皮纳斯州立大学能源与石油研究中心高性能地球物理 *L* *ab*
科拉·科拉利纳街 *350* 号，大学城，邮编 *13089-970*，坎皮纳斯，圣保罗州，巴西[2] 拉丁美洲一体化联邦大学，西尔维奥·阿梅里科·萨斯德利大道 *6731* 号，*4* 号楼，邮编 *85867-970*，伊瓜苏港，巴拉那州，巴西

2023年4月6日

摘要

在地震成像中，理解波前传播速度与时间间隔速度之间的关系，对于实现最佳分辨率至关重要。然而，考虑各向异性情况时，这项任务会更具挑战性。要准确考虑各向异性对波前的影响，必须扎实掌握其背后的物理原理。遗憾的是，最能描述该介质的各向异性模型往往是未知的。为解决这一问题，我们采用射线中心坐标系中的近轴射线理论研究波前现象。通过这一方法，我们能够推导出明确描述问题物理规律的表达式。借助这一理论框架，我们将速度扩展因子纳入一般各向异性介质，从而准确推广时间偏移射线与Dix速度之间的关系。该因子使我们能够确定介质中存在的各向异性类型。此外，速度扩展因子还为多种应用提供了有价值的信息，包括模型构建、时间成像和时间—深度转换。总体而言，本文提出的理论框架有助于全面理解各向异性介质中的波前传播，并深化对形成地震图像的各种现象的认识。

关键词：近轴射线理论，几何扩散，各向异性，Dix速度。

1 引言

介质中存在各向异性，给地震处理带来了额外困难。文献中已有实用框架，并将其应用于具有某一对称轴各向异性的模型，例如横向各向同性介质。这是因为其数学表达式相对简单，且有多个实际应用案例（例如 Grechka & McMechan 1996、Grechka & Tsvankin 1998、Sadri & Riahi 2010、Tohti et al. 2021、Sethi et al. 2021）。Thomsen（1986）在其开创性研究中提出了一种实用的表述方式，用简单参数描述问题的物理特性及各向异性。历史上，Alkhalifah & Tsvankin（1995）和 Tsvankin（2001）等将这些参数用于地震处理。他们提出的表述非常成功，使人们能够在局部均匀介质中更容易理解各向异性参数对叠加速度的影响，从而服务于地震处理。因此，为避免采用局部均匀近似方法，我们将各向异性因子描述为与相速度和群速度之间偏差相关的参数。本文主要关注相速度随方向（各向异性）和位置（非均匀性）的变化。

为了量化各向异性偏差因子如何影响任意各向异性下的这些属性。要使这种表征足够准确，就必须在特定坐标系中正确描述波前现象。基于这一前提，正文的全部推导均以该坐标系中的相速度及其一阶和二阶导数的显式表达为基础。

为了研究地震波波前的复杂行为，采用动态射线理论是很方便的。对于各向同性介质，这种理论方法已相当成熟，并在文献中有许多实际应用（例如，Popov 等人 1978年、Farra 和 Madariaga 1987年、ˇCervený 2001、Popov 2002、Cameron 等人 2007年、Iversen 和 Tygel 2008年）。然而，就一般的各向异性介质而言，仍有许多结果有待探索。尽管如此，已有多位作者在许多出版物中研究了这一问题（例如，ˇCervený 1972年、1985年、2001年、Klimeš 1994年、ˇCervený 和 Moser 2009年、ˇCervený 和 Klimeš 2010年、Iversen 等 2018年、2021年）。

尽管射线理论对许多应用至关重要，但要清晰地描述物理问题，它仍带来诸多挑战。此外，对一般各向异性介质进行数学建模也可能十分复杂。因此，在本文中，

我们采用近轴射线理论（Popov 2002）通过简明的过程研究各向异性介质中的射线理论现象，并给出一般各向异性非均匀介质的拉格朗日量和哈密顿量的显式表达式。这种方法便于运用数学术语理解模型所描述的物理特征，并构建应用算法，而无需对该主题有深厚的背景知识。换言之，它提供了一套形式严谨且具有实用性的理论方法。

通过简洁明了的数学表达式理解物理现象，有助于将各向同性情形下成熟的结果推广到各向异性介质。此外，对波前传播现象进行形式化描述，也为地震处理与解释提供了相关工具。基于这些前提，我们阐释了在地表测得的出射波前（Hubral & Krey 1980）所蕴含的物理意义，以及各向异性如何影响其形状。我们将 Cameron 等（2007）关于一般各向异性介质中速度扩展因子效应的研究结果加以推广。由此，我们表明，扩展因子与介质的非均匀性和各向异性有关。此外，我们阐明了Dix速度（Dix 1955）与时间偏移波前之间的内在联系。因此，这些研究所得结果可直接用于准确理解时间偏移射线（Fomel & Kaur 2021）。通过这些研究，我们得到了Dix速度与群速度之间的关系，这有助于确定介质中各向异性的类型和程度。最后，如前所述，哈密顿量的显式表达式对于理解物理现象至关重要，并可用于引入易于实现的算法，以处理建模、成像和时间—深度转换等任务。

在接下来的各节中，我们将按顺序全面推导本文的公式，并简要介绍如下。在笛卡尔坐标系中的射线追踪一节，我们重新考察射线理论，并从弹性动力学波动方程出发，通过相速度方法建立问题的公式。我们表明，与文献中常见的处理过程相比（例如，Aki & Richards 1980年、ˇCervený 2001、Popov 2002、Pujol 2003年），采用这种方式建立问题的公式具有独特优势。在射线中心坐标中的公式一节，我们将射线理论的相关结果推广到非正交中心坐标系，以加深对相应物理现象的理解。此外，我们还在该坐标系中给出近轴射线理论的拉格朗日量和哈密顿量表述。在动态射线追踪系统一节，我们利用哈密顿系统分析中心射线上的动态属性，并采用非正交坐标系来简化系统方程。此外，我们还给出本文公式中的传播矩阵元素，以及根据起始点为各类波前设定的初始条件。在出射波前的物理解释与应用一节，我们解释在地表测得的波前物理属性，并直接从所提出的公式中推导出精确的正常时差（NMO）速度。在一般各向异性介质中的速度扩展因子一节，我们阐述 Dix 速度与时间偏移曲率之间的关系，并将 Cameron 等（2007）的工作拓展到一般各向异性介质。最后，在时间偏移的程函型方程一节，我们推导出一个用于时间偏移的程函型方程，该方程确定时间偏移射线（Fomel 和 Kaur 2021年），并展示 Dix 速度与时间偏移射线速度之间的关系，因此我们描述了一种确定介质各向异性的方法。

2 笛卡尔坐标系中的射线追踪

本节以教程形式介绍一种基于笛卡尔坐标的射线追踪算法，该算法给出弹性动力学波动方程的近似高频解。此解将波场分解为彼此独立的贡献，称为基本波；这些基本波沿射线路径传播，代表在介质中传播的地震体波。这种分解的显著优势是可以分别分析和处理每个基本波。此外，我们还简要回顾了推导步骤，以获得各向异性介质中笛卡尔坐标下以相速度为函数的哈密顿系统表达式。

假设不存在体力等外力，则非均匀各向异性介质的频域一般波动方程（例如，Aki & Richards 1980年）可写为

$$-\omega^2 \rho u_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right), \quad i=1,2,3, \quad (1)$$

其中，$u_i = u_i(\bar{\mathbf{x}};\, \omega)$表示位移向量的各个分量。记作 $\bar{\mathbf{u}} = [u_1, u_2, u_3]^T$，其中上标 T表示转置算子，$\bar{\mathbf{x}} = [x_1, x_2, x_3]^T$为三维笛卡尔坐标，$\omega$ 为圆频率。非均匀性和各向异性由刚度张量$c_{ijkl} = c_{ijkl}(\bar{\mathbf{x}})$体现；该张量根据介质的不同具有若干对称性，因此其表达式可以简化（更多详情参见 Aki & Richards 1980年、ˇCervený 2001、Pujol 2003），而 $\rho = \rho(\bar{\mathbf{x}})$为与时间无关的密度参数。

为得到渐近解，我们采用如下射线拟设解（Sommerfeld & Runge 1911）

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \omega) = \bar{\mathbf{u}}_0(\bar{\mathbf{x}}) e^{-\mathcal{I}\omega\tau(\bar{\mathbf{x}})}, \quad (2)$$

其中，$\bar{\mathbf{u}}_0(\bar{\mathbf{x}})$ 是极化向量，$\mathcal{I}$ 是虚数单位，$\tau(\bar{\mathbf{x}})$ 是走时函数。因此，将式（2）代入式（1），并令乘以 ω^2 的项为零，可得克里斯托费尔方程（Christoffel 1877年）

$$\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{u}}_0 = \bar{\mathbf{u}}_0, \quad (3)$$

$\bar{\mathbf{W}}$克里斯托费尔矩阵的分量$\mathbf{W} = [W_{\mathrm{ik}}]$为

$$W_{ik}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{w}}) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{ijkl}(\bar{\mathbf{x}}) w_j w_l, \quad (4)$$

其中，$a_{\mathrm{ijkl}} = c_{\mathrm{ijkl}}(\bar{\mathbf{x}})/\rho(\bar{\mathbf{x}})$ 是密度归一化的弹性模量，$\bar{\mathbf{w}} = [w_1, w_2, w_3]^T$ 表示慢度向量，即

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\mathbf{x}}} = \left[\frac{\partial \tau}{\partial x_1}, \frac{\partial \tau}{\partial x_2}, \frac{\partial \tau}{\partial x_3}\right]^T. \quad (5)$$

在式 (3) 中，我们注意到极化向量 $\bar{\mathbf{u}}_0$ 是 $\bar{\mathbf{W}}$ 的特征向量，其特征值等于 1。此外，根据 ˇCer-ˉvený（2001年），克里斯托费尔矩阵 $\mathbf{W}$ 至少还具有三个重要性质。首先，$\bar{\mathbf{W}}$ 是对称的，即 $W_{ik} = W_{ki}$。其次，W_{ik} 的元素是关于 $\bar{\mathbf{w}}$ 的二次齐次函数，即 $W_{ik}(\bar{\mathbf{x}}\ v\ \bar{\mathbf{w}}) = v^2 W_{ik}(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{w}})$。最后，$\bar{\mathbf{W}}$ 是正定的，即对任意单位向量 $\hat{\mathbf{n}}$，均有 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{W}}\hat{\mathbf{n}} > 0$，其中

符号 · 表示内积算子。因此，取自 $\bar{\mathbf{w}}$的单位向量 $\hat{\mathbf{n}}$，令其为 $\hat{\mathbf{n}} = [n_1, n_2, n_3]^T$，即可得到归一化形式的 Christoffel 矩阵，即

$$N_{ik}(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}}) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{ijkl}(\bar{\mathbf{x}}) n_j n_l \,. \tag{6}$$

此外，值 $v(\bar{\mathbf{x}};\hat{\mathbf{n}})$ 是相应波模态的相速度，该速度沿射线路径具有如下形式

$$\bar{\mathbf{w}} = \|\bar{\mathbf{w}}\|\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{v} \,. \tag{7}$$

此外，根据齐次函数的性质，我们可以观察到以下等式

$$v^2\bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{x}}, v\bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}}) \,. \tag{8}$$

$\bar{}$基于 $\mathbf{W}$ 的对称性和正定性，以及式（8），归一化 Christoffel 矩阵 $\bar{\mathbf{N}}$ 具有三个正实特征值，这意味着存在三个彼此正交的相应特征向量。我们用符号 $N_\lambda(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}}) = v^2(\bar{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{n}})$ 表示 $\bar{\mathbf{N}} = [N_{ik}]$ 的特征值，其中 λ 的值分别对应于 P、SV 或 SH 波模态，即，值 N_λ 是下述 $\bar{}$特征多项式的根，该特征多项式由$\mathbf{N}$ 描述为

$$\det[\bar{\mathbf{N}} - v^2\bar{\mathbf{I}}] = (v^2 - N_P)(v^2 - N_{SV})(v^2 - N_{SH}) \,. \tag{9}$$

需要明确的是，在我们的方法中，相速度是法向量的函数，而不是慢度向量的函数，这是因为相速度的平方是 $\bar{\mathbf{N}}$ 的特征值。从物理角度来看，将矩阵特征值视为相速度，可以直接分析各向异性沿其变化率的影响。从数学角度来看，由于该表述允许使用相位的单位向量，因此关于相速度本身，该公式不具有递归性。这种表述还使我们能够推导出控制各向异性非均匀介质中射线理论的一般方程，即 Hamilton-Jacobi 方程（Gelfand & Fomin 2000年）。

现在，考虑所有先前的假设，根据公式和（6），可接 (3) 受的相位矢量 $\bar{\mathbf{w}}$ 当且仅当

$$\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{W}}\hat{\mathbf{n}} = 1 \,, \tag{10}$$

当且仅当

$$\bar{\mathbf{w}} \cdot \left(\bar{\mathbf{N}} - v^2(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}})\bar{\mathbf{I}}\right)\bar{\mathbf{w}} = 0 \,. \tag{11}$$

因此，直接由公式（10）和（11）可得以下表达式

$$v^2\left(\bar{\mathbf{x}}, \frac{\bar{\mathbf{w}}}{\|\bar{\mathbf{w}}\|}\right)\|\bar{\mathbf{w}}\|^2 = 1. \tag{12}$$

因此，我们可以取一个描述笛卡尔坐标中波动运动学的哈密顿量，例如 $\mathcal{H}_t(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{w}})$，由此可得

$$\mathcal{H}_t(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2}v^2\left(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{w}})\right)\|\bar{\mathbf{w}}\|^2 = \frac{1}{2} \,. \tag{13}$$

哈密顿量（公式（13））可使用特征线法求解（ Courant 和 Hilbert，1989年）。该方法给出了传播所沿的特征轨迹，这些轨迹从一个起始点位置延伸至另一个位置。此外，公式（13）所示哈密顿量在全局坐标系中的轨迹为

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\bar{\mathbf{w}}} \,, \quad \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\bar{\mathbf{x}}} \,. \tag{14}$$

此外，如地震学文献中所述（例如 Bleistein 1984），我们将射线法描述为这些特征轨迹的解，这也为数学和物理学上对波传播的理解提供了自然的综合。从数学上看，射线法通过射线渐近解方法，将偏微分方程问题转化为常微分方程问题（John 1971）。从物理上看，射线法将几何光学的基本概念推广到一大类光波现象中，再将这些结果扩展到其他波动现象（Pujol 2003）。

为了分析公式（14），我们假设一个在空间中传播的波前可表示为 $t - \tau(\bar{\mathbf{x}}) = 0$，依据公式（5）中的记号，这意味着

$$dt = \frac{\partial\tau}{\partial\bar{\mathbf{x}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{w}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} \,. \tag{15}$$

因此，可以证明，式（14）的左侧方程给出

$$\bar{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\bar{\mathbf{w}}} = \bar{\mathbf{w}} \cdot \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = 1 \,. \tag{16}$$

为便于阅读，这里稍微放宽符号的使用方式，假设

$$\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}} = \frac{\partial\hat{\mathbf{n}}^T}{\partial\bar{\mathbf{w}}}\frac{\partial v}{\partial\hat{\mathbf{n}}} \,. \tag{17}$$

此外，式（14）中的第一组矢量形式方程描述了群速度矢量，它与射线相切。因此，将这一表述代入式（13），并结合式（16）中的性质，可得

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = v^2\bar{\mathbf{w}} + \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}} \,, \tag{18}$$

这意味着，沿射线路径有以下信息

$$\bar{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}} = 0 \,. \tag{19}$$

换言之，相速度变化矢量始终与相位矢量正交，因为 v 在 $\bar{\mathbf{w}}$ 中是零次齐次的。鉴于上述观察，需要指出的是，要使式（16）所述情况成立，对相速度所作的任何近似都必须满足式（19）的关系。

文献中（例如 Helbig 1994）指出，群速度矢量不一定垂直于波前。因此，在波传播运动学分析中，应考察的速度是相速度。因此，取群速度模 v_g，则

$$v_g = \left\|\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt}\right\| \,, \tag{20}$$

结合公式（16）中的余弦定律，可得

$$v_g = \frac{v}{\cos\psi} \,, \tag{21}$$

with

$$\frac{1}{\cos\psi} = \sqrt{1 + \frac{1}{v^4}\left\|\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}}\right\|^2} \,. \tag{22}$$

因此，所提出的方法得出的结果与 Tsvankin (2001) 等文献中所示的结果相同。因此，仅基于相速度的本文表述与现有文献一致。

群速度模块（公式（20））与能量流方向有关，并通过一个与介质各向异性相关的 ψ 角偏差因子与相速度相联系。然而，当相速度与群速度重合时，不会出现这一偏差因子。各向同性介质就是此类情况之一。换言之，无论介质的各向异性程度如何

参数 ψ 都能建立群速度与相速度之间的关系，如图（1）所示，该关系由两个速度矢量之间的夹角表示；在非色散介质中，其变化量化了各向异性偏差。为了给出公式（14）的一种可行计算形式，根据附录 A，公式（14）中的笛卡尔坐标射线追踪系统可描述为

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + \left(v - \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \hat{\mathbf{n}} \,, \quad \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \,. \tag{23}$$

此外，由于 v^2 是关于 $\hat{\mathbf{n}}$ 的二次齐次函数，这意味着 v 是一次齐次函数，即

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = v \,, \tag{24}$$

将此结果代入式（23），可得

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \,. \tag{25}$$

换言之，我们现在已将群矢量描述为相速度的法向导数。接下来，我们分析一些特殊情况，以理解参数 ψ 所体现的性质。此外，在本文中，若某点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的相速度 $v(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}})$ 沿单位向量 $\hat{\mathbf{n}}$ 的所有方向测量时均为常数，则将该点的介质定义为各向同性，即

$$v^2(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}}) = c^2(\bar{\mathbf{x}}) \|\hat{\mathbf{n}}\|^2 \triangleq c^2(\bar{\mathbf{x}}) \,. \tag{26}$$

否则，该点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的介质具有各向异性。注意，$c(\bar{\mathbf{x}})$ 表示仅取决于位置的各向同性介质中的波传播速度，它表征了介质的非均匀性。因此，对于各向同性介质，我们有以下结果

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = v \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = c^2 \hat{\mathbf{n}} \,, \tag{27}$$

对于所有 $\hat{\mathbf{n}}$。此外，如果存在某种情况使得

$$\frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = v \hat{\mathbf{n}} \,, \tag{28}$$

我们称各向异性性质存在一条对称轴，该轴平行于 $\hat{\mathbf{n}}$。因此，根据公式 (A.4)，有

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{\mathbf{w}}} = \bar{\mathbf{0}} \,. \tag{29}$$

这意味着群矢量与相位矢量相同；因此，在这样的对称轴上，$\psi(\hat{\mathbf{n}})$ 为零。此外，当相速度满足下式时，我们称慢度为椭圆形（Burridge 等，1993）

$$v(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}})^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(c_i(\bar{\mathbf{x}}) n_i \right)^2 \,. \tag{30}$$

因此，将公式 (30) 和 (25) 代入公式 (21)，可得

$$\cos \psi(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\sum_{i=1}^{3} (c_i(\bar{\mathbf{x}}) n_i)^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} (c_i^2(\bar{\mathbf{x}}) n_i)^2}} \,. \tag{31}$$

Tsvankin (2001)指出，椭圆慢度面会由点源产生椭球形波前（射线速度面），并且这一性质是横向各向同性介质中 SH波各向异性所固有的。

总之，式（21）给出的关系对我们的研究目的非常有利，即研究中心射线附近波前的高阶近似，并理解该波前的几何扩散如何实际发生。值得一提的是，对于这种方法，使用笛卡尔坐标并不适合展现物理数学性质的某些特殊之处。因此，在以下各节中，我们采用一种基于射线中心坐标的方法，称为射线中心物理坐标，并在一个约化系统中用这些坐标推导出哈密顿量的显式表达式及其应用。此外，速度和位移慢度表达式使我们能够在特定材料的背景下研究波动现象。具体而言，我们利用这些表达式构建反问题，根据实验测量得到的走时斜率和曲率信息计算弹性参数。

3 射线中心坐标系中的公式推导

中心坐标中的动态射线追踪使用由常微分方程更新的矢量基底，以获取沿射线路径的波前信息。该射线中心基底给出了射线点相空间坐标关于初始条件的一阶导数。还可以计算空间走时的二阶或更高阶导数；这些导数对于计算射线关于初始条件或参数模型变化的扰动至关重要，尤其适用于两点射线追踪和近轴射线近似方法（Klimeš 1994年）。为使这一方法更易于理解，我们在不一定正交的射线中心坐标系中，介绍近轴射线理论的拉格朗日量和哈密顿量表述，并假定射线轨迹穿过任意光滑的非均匀各向异性介质。

我们首先假设射线路径由方程组（23）描述，且位置矢量曲线以射线的弧长参数化（此处用字母 s表示），其定义为

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = x_1(s)\hat{\mathbf{i}}_1 + x_2(s)\hat{\mathbf{i}}_2 + x_3(s)\hat{\mathbf{i}}_3 \,, \tag{32}$$

其中 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2,$ 和 $\mathbf{i}_3$ 是定义三维笛卡尔坐标系的刚性 versor。因此，假设 $\bar{\mathbf{x}}(s)$ 是以弧长为参数的光滑曲线。于是，根据微分几何，对于射线路径上的任意一点，都可以定义一个单位向量函数

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{ds}(s). \tag{33}$$

那么，根据定义，在射线路径 $\bar{\mathbf{x}}(s)$ 上的任意一点，都有一个单位向量 $\hat{\mathbf{t}}$ 与该点处的曲线相切。此外，由式（20）和式（33）以及射线速度矢量，可得如下推导

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{ds} \frac{ds}{dt} = v_g \hat{\mathbf{t}} \,, \tag{34}$$

关于这些量的物理意义，我们注意到 $\hat{\mathbf{t}}$ 表示群速度运动的归一化方向，而标量

$$v_g = \frac{ds}{dt} \,, \tag{35}$$

则是群速度模，即沿弧长的无穷小传播距离与时间之比。

为了引入近轴射线坐标，我们沿某条特定射线定义射线中心坐标 $\bar{\mathbf{q}} = [q_1, q_2, s]^T$。如

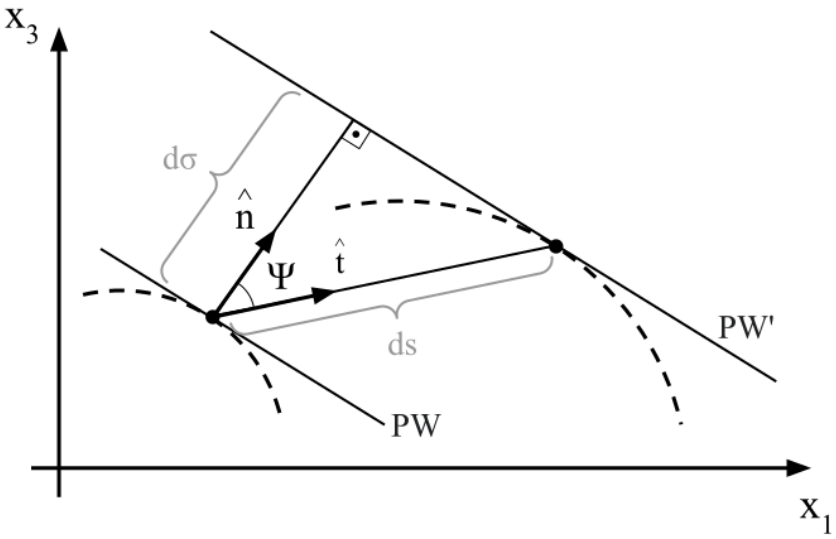

图 1. 与群速度相关的波前传播（以虚线圆弧表示）和与相速度相关的平面波传播 PW 之间的差异。角度 ψ 表示波传播现象中的各向异性偏差。

前文所述，我们用单调变量 s（弧长）对射线上的点进行参数化。同样，在曲线$\bar{\mathbf{x}}(s)$上的每一点 $\bar{\mathbf{x}}$处，这条曲线描述了射线路径，我们选取两个与该点的相位单位向量 $\hat{\mathbf{n}}$ 垂直的正交归一向量 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_2$,。我们将主射线的路径称为中心射线，并将其附近近轴射线的路径称为邻近路径。因此，射线中心坐标系由一个与中心射线相关的曲线坐标$\bar{\mathbf{q}}$ 以及沿中心射线单调变化的第三个坐标组成，其中 $q_1 = q_2 = 0$。

基于上述参数化构造，我们引入一个参数化酉系，其基底为$\{\hat{\mathbf{e}}_1(s), \hat{\mathbf{e}}_2(s), \hat{\mathbf{t}}(s)\}$，其中 $\hat{\mathbf{e}}_1(s)$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_2(s)$ 分别满足以下关系，

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_1}{ds}(s) = h_1(s)\hat{\mathbf{n}}(s) \quad \text{and} \quad \frac{d\hat{\mathbf{e}}_2}{ds}(s) = h_2(s)\hat{\mathbf{n}}(s)\,. \tag{36}$$

我们稍后将更详细地描述向量输入 $\mathbf{h}$ $[h_1\ s\ \ h_2\ s\ ]^T$ 3 2 = ( ) ( ) 的物理量，详见第 . . 节。通过射线中心坐标系 $\bar{\mathbf{q}}$，我们定义由近轴射线确定的位置向量 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{q}})$，并将其写作（Popov 等人，1978年；Klimeš，1994年）

$$\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{x}}(s) + q_1\hat{\mathbf{e}}_1(s) + q_2\hat{\mathbf{e}}_2(s)\,, \tag{37}$$

即从射线中心坐标 $\bar{\mathbf{q}}$ 到笛卡尔坐标 $\bar{\mathbf{r}}$的变换。图2展示了上述坐标系。我们可以看到，射线中心坐标系的前两个向量 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_2$ 定义了一个平面波 PW，$\hat{}$ 该平面波在 $\bar{\mathbf{x}}$处与波前 σ 相切，而第三个向量$\mathbf{t}$ 在某一点处与中心射线相切。实际上，射线中心坐标还存在其他基底构型，但我们选择基底 $\{\hat{\mathbf{e}}_1(s), \hat{\mathbf{e}}_2(s), \hat{\mathbf{t}}(s)\}$ 来探究其物理性质。事实上，这种基底构造包含了波前平面及其在中心射线上的射线路径方向信息。此外，在全文中，我们将这种射线中心坐标的物理构式称为射线中心坐标系。

现在，为了直接计算近轴射线位置的微分，我们对该位置向量在近轴射线坐标下取微分，得到

$$d\bar{\mathbf{r}} = \left(\hat{\mathbf{t}} + (\mathbf{h}\cdot\mathbf{q})\,\hat{\mathbf{n}}\right) ds + \hat{\mathbf{e}}_1 dq_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 dq_2\,, \tag{38}$$

其中，约化射线中心坐标$\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$ 决定了平面波前坐标。由此，我们定义中心射线附近有效的面积元 $(d\sigma)^2$,，其与微分 $d\bar{\mathbf{r}}$ 的关系为

$$(d\sigma)^2 = d\bar{\mathbf{r}}\cdot d\bar{\mathbf{r}}. \tag{39}$$

此外，根据构造，我们有以下坐标向量之间的关系

$$\hat{\mathbf{t}}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \cos\psi\,, \quad \hat{\mathbf{t}}\cdot\hat{\mathbf{e}}_1 = \sin\psi\cos\phi\,, \quad \hat{\mathbf{t}}\cdot\hat{\mathbf{e}}_2 = \sin\psi\sin\phi\,. \tag{40}$$

这意味着波前传播的近轴射线位置的微分可表示为

$$d\sigma = \sqrt{\chi^2 ds^2 + 2\,(d\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_\phi)\sin\psi ds + (d\mathbf{q}\cdot d\mathbf{q})^2}\,, \tag{41}$$

with

$$\chi^2 = \chi(\bar{\mathbf{q}})^2 = 1 + 2\,(\mathbf{h}\cdot\mathbf{q})\cos\psi + (\mathbf{h}\cdot\mathbf{q})^2\,, \tag{42}$$

其中$\mathbf{a}_\phi = [\cos\phi,\ \sin\phi]^T$是射线中心方位向量。此外，射线中心坐标在中心射线附近有特定的有效区域，这是因为对于弯曲射线，不同的 $\bar{\mathbf{q}}$ 值可能对应相同的 $\bar{\mathbf{r}}$值。因此，当傍轴距离较大时，射线中心坐标与笛卡尔坐标之间不存在一一对应关系。为确定这一有效区域，我们使用方程（41），并观察到射线中心坐标系的度量张量 g_{ij} 分量具有以下关系

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22} = 1\,, \\ g_{12} = g_{21} = 0\,, \\ g_{13} = g_{31} = \sin\psi\cos\phi\,, \\ g_{23} = g_{32} = \sin\psi\sin\phi\,, \\ \qquad g_{33} = \chi^2\,. \end{cases} \tag{43}$$

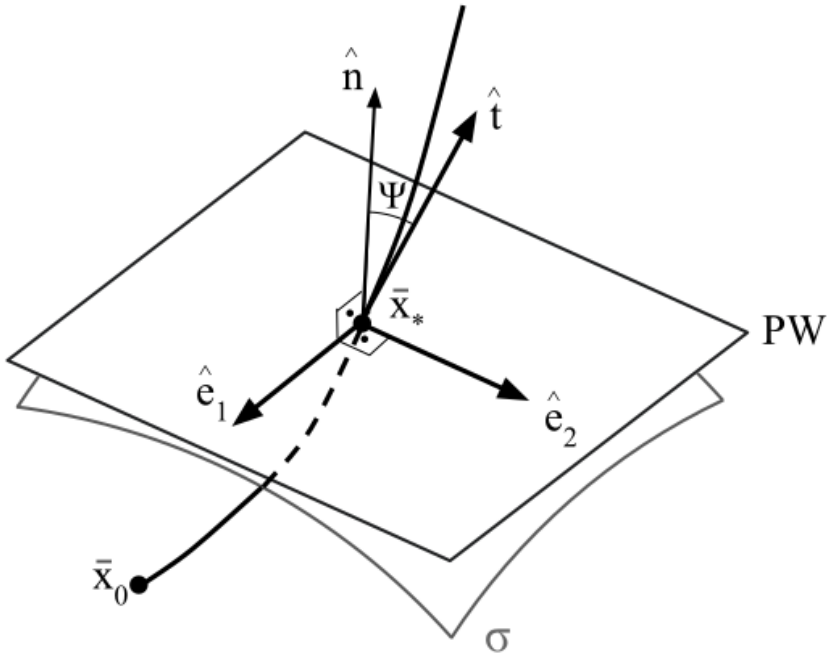

图2. 沿射线在给定点处的射线中心坐标 $\{\hat{\mathbf{e}}_1(s), \hat{\mathbf{e}}_2(s), \hat{\mathbf{t}}(s)\}$，与波前 σ 相切于平面波 PW。角度 ψ 表示波传播现象中的各向异性偏差。

我们可以使用变分原理（Lanczos，1986）采用另一种方法来定义射线。然而，要使给定方程（43）中的度量张量的黎曼空间中的射线路径成为测地线，只需满足

$$\cos\psi > |\mathbf{h}\cdot\mathbf{q}|\,. \tag{44}$$

换言之，若满足式（44）中的条件，则射线追踪的运动学性质在式（37）给出的坐标变换下保持不变。因此，微分 $d\sigma$ 表示相邻波前之间的距离，而 ds 表示两点射线路径的长度，如图1所示。

根据式（21）和式（35），两点射线路径走时可由以下泛函作用量表示

$$t = \int_0^{s_*} \frac{ds}{v_g} = \int_0^{s_*} \frac{(\cos\psi)ds}{v}\,. \tag{45}$$

对于长度为 s_* 的给定两点射线路径，式（45）的第一个等式从该射线路径上的群速度角度描述传播现象的走时。第二个等式则涉及走时变化，它是相速度与权函数的函数；该权函数由群速度矢量与相位矢量之间夹角的余弦给出。

给定一条连接两点 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 和 $\bar{\mathbf{x}}_*$的中心射线，如图2所示，我们证明，在由 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 至 $\bar{\mathbf{r}}_*$ 的平面上，任何其他由位于 $\bar{\mathbf{x}}_*$ 处的单位向量 $\hat{\mathbf{e}}_1(s_*)$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_2(s_*)$ 生成的近轴射线，其射线路径都是驻走时轨迹。因此，基于前文提及的观察，我们首先分析泛函作用量积分在什么条件下满足

$$\int_0^{s_*} \frac{(\cos\psi)ds}{v} = \int_0^{s_*} \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{v}\,. \tag{46}$$

不过，要使该等式对任意值 v 都成立，我们首先取 $d\sigma/ds = \cos\psi$。用数学术语表示，并取 $\dot{\bar{\mathbf{q}}} = d\mathbf{q}/ds$为简化记号，我们有

$$\cos^2\psi = \chi^2 + 2\,(\mathbf{a}_\phi\cdot\dot{\mathbf{q}})\sin\psi + (\dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}})^2\,. \tag{47}$$

在中心射线上，即 $\mathbf{q} = \mathbf{0}$，由此得到前面的表达式，并可推出

$$\cos^2\psi = 1 + 2\,(\mathbf{a}_\phi\cdot\dot{\mathbf{q}})\sin\psi + (\dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}})^2\,, \tag{48}$$

而这又当且仅当以下条件成立时有效

$$(\dot{\mathbf{q}} + \sin\psi\mathbf{a}_\phi)\cdot(\dot{\mathbf{q}} + \sin\psi\mathbf{a}_\phi) = 0\,, \tag{49}$$

最终可得

$$\dot{\mathbf{q}}|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \dot{\mathbf{q}}_0 = -\mathbf{a}_\phi\sin\psi\,. \tag{50}$$

在中心射线上计算时，可以看到，量 $|\sin\psi|$ 表征了各向异性偏差对 $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$ 的影响。

因此，由式（45）和（50），沿中心射线方向，即 $(\mathbf{q}\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = (\mathbf{0}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_0)$，满足以下等式

$$\int_0^{s_*} \frac{ds}{v_g} = \int_0^{s_*} \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{v}\,, \tag{51}$$

这样，我们就保证了从 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 到 $\bar{\mathbf{x}}_*$的两点射线路径唯一，且出发和到达时的射线路径切向量相同。

为了保证沿中央射线方向的射线路径遵循费马原理，也就是作用量驻值原理，我们将走时作用泛函设为

$$t(\mathbf{q}) = \int_0^{s_*} \left(\sqrt{\chi^2 + 2\sin\psi\,(\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{a}_\phi) + \dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}}}\right)\frac{ds}{v}\,, \tag{52}$$

其中拉格朗日量 $\mathcal{L}_s$ 定义为

$$\mathcal{L}_s\,(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{v}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{v}\sqrt{\chi^2 + 2\sin\psi\,(\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{a}_\phi) + \dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}}}\,. \tag{53}$$

因此，为了确保解在 t 中是驻定的，我们需要

证明 $\mathcal{L}_s$ 遵循射线中心方向上的欧拉-拉格朗日方程。为帮助证明这一点，我们引入共轭型动量 $\mathbf{p} = [p_1, p_2]^T$，根据定义，可写为

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \,. \tag{54}$$

因此，根据欧拉-拉格朗日方程，要使 $t(\mathbf{0})$ 成为方程 (52) 的驻定解，必须满足如下关系（Gelfand & Fomin 2000年）

$$\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \mathbf{0} \,, \tag{55}$$

沿中心射线方向。由方程 (54) 可得，沿中心射线方向的$\mathbf{p}$ 值如下

$$\mathbf{p} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right|_{(\mathbf{0},\dot{\mathbf{q}}_0)} = \mathbf{0} \,, \tag{56}$$

要使方程 (55) 成立，必须满足

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \mathbf{q}}\right|_{(\mathbf{0},\dot{\mathbf{q}}_0)} = \mathbf{0} \,. \tag{57}$$

根据构造（见方程 (40)），对于任意$\mathbf{q}$值，$\partial\psi/\partial\mathbf{q}$ 和 $\partial\mathbf{a}_\phi^T/\partial\mathbf{q}$ 分别是零向量和矩阵。此外，根据方程 (37)，在中心射线上可写为

$$\frac{\partial v}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial \bar{\mathbf{r}}}\bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \,, \quad i = 1, 2 \,. \tag{58}$$

因此，沿中心射线方向的条件为

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \mathbf{q}}\right|_{(\mathbf{0},\dot{\mathbf{q}}_0)} = \frac{1}{v_0}\left(\mathbf{h}_0 - \frac{\cos\psi_0}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{q}}\right) \,, \tag{59}$$

其中，v_0、$\cos\psi_0$、$\mathbf{h}_0$, 和 $\partial v_0/\partial\mathbf{q}$ 均在中心射线方向上取值。

因此，要使式（57）中的条件成立，必须满足

$$\mathbf{h}_0(s) = \frac{\cos\psi_0}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{q}} \,. \tag{60}$$

为证明式（60）的结果，需要注意的是，根据定义，沿任意中心射线都有 $\bar{\mathbf{w}}\cdot\hat{\mathbf{e}}_i = 0$。因此，对时间变量求导可得

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{\mathbf{w}}\cdot\hat{\mathbf{e}}_i\right) = \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt}\cdot\hat{\mathbf{e}}_i + \bar{\mathbf{w}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt} = 0 \tag{61}$$

并利用式（23）、（35）和（36）的关系替换后，可得

$$\frac{\mathbf{h}}{\cos\psi} = \left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \,, \tag{62}$$

对于中心射线上的任意 $\dot{\mathbf{q}}$ 值均成立。最后，在中心射线方向上，式（62）证明了所需结论。

在这些长度为 ds 和 $d\sigma$ 的物理轨迹上，射线走时和波前距离同时达到最优，如图 1 所示。此外，与式（33）中的处理相同，由式（39）可知，在中心射线上有

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{d\sigma} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^{-1} = \hat{\mathbf{n}} \tag{63}$$

给出了与波前相切的平面波的正交单位向量。此外，点 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 到包含点 $\bar{\mathbf{x}}_*$ 的平面波前的近轴射线的最短距离为微分量 $d\sigma = d\bar{\mathbf{r}}_*$。

3.1 哈密顿表述

哈密顿力学在地震波前应用中的一种简单解释，来自其在近轴射线理论中的解释；该理论描述走时轨迹的动力学性质（Červený 2001）。通过勒让德变换（Gelfand & Fomin 2000），其约化中心坐标（$\mathbf{q}$，$\mathbf{p}$）下的哈密顿量表达式为（见附录 B）

$$\mathcal{H}_s(\mathbf{q},\mathbf{p}) = -\frac{1}{v}(\cos\psi + \mathbf{h}\cdot\mathbf{q})\sqrt{1 - v^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})} - \sin\psi(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_\phi) \,. \tag{64}$$

因此，对拉格朗日函数 $\mathcal{L}_s$应用勒让德变换，将 $\dot{\mathbf{q}}$ 视为变换中的主动变量，将位置坐标 $\bar{\mathbf{q}}$ 视为被动变量。$\dot{\mathbf{q}}$ 值被变换为共轭型动量 $\mathbf{p}$，而拉格朗日函数被变换为哈密顿函数 $\mathcal{H}_s$，该函数沿弧长参数变化。因此，其哈密顿系统为

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{p}} \,, \quad \text{and} \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{q}} \,, \tag{65}$$

其中

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{p}} &= \frac{v\,(\cos\psi + \mathbf{h}\cdot\mathbf{q})\,\mathbf{p}}{\sqrt{1 - v^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})}} - \sin\psi\mathbf{a}_\phi \,, \\
\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{q}}\frac{(\cos\psi + \mathbf{h}\cdot\mathbf{q})}{\sqrt{1 - v^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})}} - \frac{\mathbf{h}}{v}\sqrt{1 - v^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})} \,.
\end{aligned} \tag{66}$$

我们采用哈密顿方程而非拉格朗日方程，主要原因在于变量数量会加倍这一性质。变量数量的增加使我们能够扩展坐标变换的可能范围，从而拥有更多可供使用的变量。然而，在拉格朗日力学中，我们没有系统的方法来简化拉格朗日函数。与此同时，在哈密顿力学中，可以变换坐标，以系统地生成可忽略变量并简化哈密顿函数。因此，借助这一约化过程，我们将包含六个不同方程的积分问题（$\bar{\mathbf{r}}(s)$ $d\bar{\mathbf{r}}/ds$）化为仅包含四个方程的问题。此外，四维空间中由曲线（$\mathbf{q}(s)$，$\mathbf{p}(s)$)表示的系统，是近轴射线问题的解。因此，根据方程（50）和（57）中确立的条件，我们得到中心射线方向上的哈密顿量为

$$\left.\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{p}}\right|_{(\mathbf{0},\mathbf{0})} = -\sin\psi_0\mathbf{a}_\phi \,, \quad \text{and} \quad \left.\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{q}}\right|_{(\mathbf{0},\mathbf{0})} = \mathbf{0} \,. \tag{67}$$

3.2 射线路径曲率

一般而言，射线路径是曲线。在各向同性介质中，射线路径曲率已知为（Popov 2002）

$$|\kappa(s)| = \frac{1}{v_0}\left\|\frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{q}}\right\| \,, \tag{68}$$

其中，$\kappa(s)$ 表示 $\bar{\mathbf{x}}(s)$ 处的射线路径曲率。因此，我们从一般各向异性介质的射线中心坐标系中的近轴射线追踪系统确定了该量。

在中心射线方向上的初始点处，向量 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 的方向原则上可以在慢度向量的法平面内任意选取。基于这一前提，我们将起始单位向量 $\hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{0})$视为与 $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{0})$正交的任意向量，并

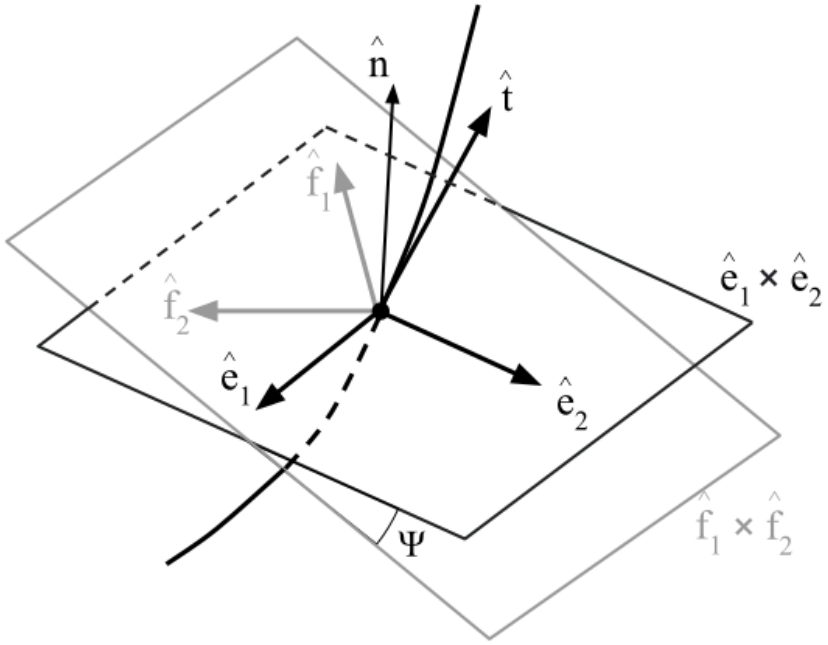

图 3。法　分别与相位矢量和群矢量相关的法平面，$\hat{\mathbf{n}}$ 和 $\hat{\mathbf{t}}$。请注意，这两个平面之间的夹角为 ψ　　.

使用叉积 ×构造与这两个向量均正交的第二个向量：

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}_1 \,. \tag{69}$$

因此，我们构建了射线中心坐标系中波前正交基的标准选项，即向量 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_2$。此外，我们取两个正交向量，它们生成群矢量$\mathbf{t}$ 的法平面：

$$\bar{\mathbf{f}}_1 = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{e}}_2 \,, \quad \bar{\mathbf{f}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{t}} \,, \tag{70}$$

该射线到达处（见图 3）

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{f}}_i = -\cos\psi \,, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{f}}_1 = \sin\psi\cos\phi \,, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{f}}_2 = \sin\psi\sin\phi \,. \tag{71}$$

我们可以观察到，如果各向异性偏差为零，即 $\psi = 0$，$\bar{\mathbf{f}}_1$，$\bar{\mathbf{f}}_2$，那么向量 $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \mathbf{f}_1$, 和 $\mathbf{f}_2$ 属于慢度向量的同一法平面。

现在，对射线的单位向量$\mathbf{t}$关于 s求导，可得射线路径曲率乘以由$\mathbf{f}_1$ 和$\mathbf{f}_2$, 生成的平面上的某个单位向量，即

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{f}}_{12} = \kappa\left((\hat{\mathbf{f}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{12})\hat{\mathbf{f}}_1 + (\hat{\mathbf{f}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{12})\hat{\mathbf{f}}_2\right) , \tag{72}$$

其中，$\kappa(s)$表示射线在 $\bar{\mathbf{x}}(s)$处的曲率，而$\mathbf{f}_{12}$ 是与$\mathbf{t}$ 正交的单位向量，例如

$$(\hat{\mathbf{f}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{12})^2 + (\hat{\mathbf{f}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{12})^2 = 1 \,. \tag{73}$$

为求得射线路径曲率值，我们令

$$[\hat{\mathbf{e}}_1; \hat{\mathbf{e}}_2]^T\hat{\mathbf{t}} = -\dot{\mathbf{q}}_0(s) \tag{74}$$

并根据附录 C，在中心射线方向上，我们有

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\left(\frac{d\mathcal{H}_s}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathcal{H}_s}{\partial\mathbf{p}}\right) = \frac{d\dot{\mathbf{q}}_0}{ds} = \ddot{\mathbf{q}}_0(s) = \mathbf{0} \,. \tag{75}$$

因此，在中心射线方向上，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i\right) &= \hat{\mathbf{t}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{ds} + \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \\ &= \cos\psi_0\left(h_i - (\hat{\mathbf{f}}_i \cdot \hat{\mathbf{f}}_{12})\frac{\kappa}{\|\bar{\mathbf{f}}_i\|}\right) = 0 \,,\ i = 1, 2,\end{aligned} \tag{76}$$

也就是说，射线曲率取决于速度及其导数，如下所示

$$|\kappa| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\|\bar{\mathbf{f}}_i\|h_i\right)^2} \,. \tag{77}$$

由于$\cos\psi_0$ 和 v_0 始终为非零数，式（77）意味着下述定理

$$\kappa = 0 \iff \frac{\partial v_0}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{0} \,, \tag{78}$$

对任意非均匀各向异性介质都成立。换言之，当且仅当射线路径曲率为零时，慢度向量 $d\bar{\mathbf{w}}/dt$ 的变化才与波前正交。此外，由式（44）可知，射线路径曲率会影响使坐标变换保持一一对应的有效区域宽度。

4 动态射线追踪系统

一般各向异性介质的动力学射线追踪系统可用多种坐标系表示。最方便且最常用的是波前正交坐标系（Klimeš 1994年，Cervený 2001年）和笛卡尔坐标系（Červený 1972年，Iversen 等 2021年）。本节采用前文定义的哈密顿系统，利用非正交

坐标系分析中心射线上的动力学性质。与由六个普通线性方程组成的笛卡尔坐标系不同，射线中心公式可简化为仅包含四个线性方程（Bliss 1916）。

该方法从笛卡尔坐标出发，通过坐标变换生成一个约化坐标系，以解决数值建模中涉及的数学难题。然而，直接从中心坐标物理系统中的哈密顿量进行推导，能更清晰地说明这一动力学问题的物理性质。此外，波前正交坐标系能够以数学上的精确性描述该系统，尽管其中不包含明确的物理信息。另一方面，由于公式中明确包含各向异性校正因子，我们的方法有助于理解这一物理现象。因此，在近轴射线公式中分析相速度随方向和位置的变化，可以全面刻画各向异性和非均匀性的影响。

4.1 几何扩散

从历史上看，几何扩散的概念在计算地震体波相关振幅方面发挥着至关重要的作用。通常，几何扩散是根据射线管的横截面积，或通过与射线雅可比的某种关系来引入的（Popov 2002）。遗憾的是，地震学文献中几何扩散的定义并不统一。就我们的研究而言，我们采用 Cervený（2001）给出的定义。

几何扩散是指波前扩张或收缩导致能量在地表上传播的现象。这种几何变形与频率无关，并会显著影响几乎所有传播射线矢量的情况。为理解这些问题并确定这种几何变形，我们指出，射线和波前构成一个正交曲线坐标系。此外，对于曲线坐标系中的一组射线和波前，我们可以作如下参数化 $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{q}}(\bar{\boldsymbol{\gamma}}))$，其中 $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = [\gamma_1, \gamma_2, t]^T$，且

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \gamma_i} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} = 0\,, \quad i = 1, 2. \tag{79}$$

因此，根据 Cervený（2001年），我们可以通过雅可比行列式 $\mathcal{J}$ 对几何扩散作数学定义：

$$\Lambda(\bar{\boldsymbol{\gamma}}) = \sqrt{\frac{1}{v_g}|\mathcal{J}(\bar{\boldsymbol{\gamma}})|} = \left| \frac{dt}{ds} \det \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}^T}{\partial \bar{\boldsymbol{\gamma}}} \right] \right|^{\frac{1}{2}} . \tag{80}$$

因此，每个参数 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2]^T$ 定义一条射线，而 t值是变化参数。以这种形式定义的曲线坐标集 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$通常称为局部射线坐标系。射线照亮区域内的任意点都可以用其射线坐标来表示。换言之，$\mathcal{J}$是从笛卡尔坐标到局部射线坐标变换的雅可比行列式。最后，在射线管体积 $\mathcal{V}$中的任意位置，我们都可以在此坐标系中测量其体积微元：

$$d\mathcal{V} = \mathcal{J}(\bar{\boldsymbol{\gamma}}) v_g dt d\gamma_1 d\gamma_2\,. \tag{81}$$

为计算几何扩散，Λ，我们考虑一个射线系统，并用射线参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 对其进行参数化，使得$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\gamma})$ 和 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\gamma})$ 是从初始邻域中的一点 $\boldsymbol{\gamma}$ 出发的解，该初始邻域表示射线管。为了进行此类计算，我们对哈密顿系统关于这些参数求导，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right] &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\left[\frac{ds}{dt}\dot{\mathbf{q}}\right]^T = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\left[\frac{v}{\cos\psi}\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{p}}\right]^T, \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right] &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\left[\frac{ds}{dt}\dot{\mathbf{p}}\right]^T = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\left[\frac{v}{\cos\psi}\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{q}}\right]^T. \end{aligned} \tag{82}$$

因此，取以下向量为

$$\mathbf{m}_p = \frac{v}{\cos\psi}\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}\,, \quad \mathbf{m}_q = \frac{v}{\cos\psi}\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{d\mathbf{p}}{dt}\,, \tag{83}$$

其中，v、ψ 和 $\mathbf{a}\phi$ 也都是 $\mathbf{p}$ 的函数。此外，记$\mathbf{Q} = \partial \mathbf{q}^T/\partial \boldsymbol{\gamma}$和 $\mathbf{P} = \partial \mathbf{p}^T/\partial \boldsymbol{\gamma}$，并利用链式法则，上述系统可写成矩阵形式，它表示中心射线方向上的传播矩阵（Červený 2001），如下所示

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}\\ \mathbf{P}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{m}_p^T}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{m}_p^T}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial \mathbf{m}_q^T}{\partial \mathbf{q}} & -\frac{\partial \mathbf{m}_q^T}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{Q}\\ \mathbf{P}\end{bmatrix}. \tag{84}$$

最后，为了计算第三坐标导数的值，根据中心射线方向上的式（34）、（37）和（D.8），取

$$\left.\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}\right|_{\bar{\boldsymbol{\gamma}}_0} = \frac{\partial s}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}^T}{\partial \bar{\mathbf{q}}}\right)^{-T}\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial s} = v_g \bar{\mathbf{F}}_0 \hat{\mathbf{t}} = [0, 0, v_g]^T\,, \tag{85}$$

因此，由式（79）给出的性质可得 $\partial s/\partial \bar{\boldsymbol{\gamma}} = [0, 0, v_g]^T$，这意味着

$$\left.\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}^T}{\partial \bar{\boldsymbol{\gamma}}}\right|_{\bar{\boldsymbol{\gamma}}_0} = \bar{\mathbf{E}}_0 \left.\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}^T}{\partial \bar{\boldsymbol{\gamma}}}\right|_{\bar{\boldsymbol{\gamma}}_0} = \bar{\mathbf{E}}_0 \begin{bmatrix}\mathbf{Q} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & v_g\end{bmatrix}, \tag{86}$$

根据式（80）给出的几何扩散定义，可得

$$\Lambda(\bar{\boldsymbol{\gamma}}_0) = \sqrt{\cos\psi |\det \mathbf{Q}|}\,. \tag{87}$$

4.2 传播矩阵描述

为了确定传播矩阵各元素在中心射线方向上的明确表达式，必须使用式 (83) 给出的定义计算式 (84) 中所示的传播矩阵。不过，需要注意的是，参数 v、ψ 和 $\mathbf{a}\phi$ 也依赖于 $\mathbf{p}$。因此，根据式 (D.18)，可以得出

$$\frac{\partial \mathbf{m}_p^T}{\partial \mathbf{p}} = \left(v_0^2 \mathbf{I} - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{p}} \otimes \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{p}} + \frac{1}{v_0}\frac{\partial^2 v_0}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{p}^T} \right), \tag{88}$$

其中，如前所述，符号 $\otimes$ 表示外积运算。如附录 E 所示，中心慢度二阶导数可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{1}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial p_i}\right) = \frac{1}{\cos^2\psi_0}\Bigg(&\bar{\mathbf{f}}_j \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_t}{\partial \bar{\mathbf{w}} \partial \bar{\mathbf{w}}^T} - v_0^2 \bar{\mathbf{I}}\right)\bar{\mathbf{f}}_i \\ &+ 2v_0^2 \left(\bar{\mathbf{f}}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}\right)\left(\bar{\mathbf{f}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}\right)\Bigg)\,. \end{aligned} \tag{89}$$

此外，在.....的情况下

$$\frac{\partial \mathbf{m}_p^T}{\partial \mathbf{p}} = v_0^2 \mathbf{I}\,, \tag{90}$$

我们称波前在该传播方向上是各向同性的。此外，各向同性情形下的波传播度量张量（Klimeš 1994年），其中 $\psi = 0$，为

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_t}{\partial \bar{\mathbf{w}} \partial \bar{\mathbf{w}}^T} = v_0^2 \bar{\mathbf{I}}\,. \tag{91}$$

此外，鉴于 Klimeš（2002年）给出的波传播度量张量命名方式，我们将式（88）称为约化波传播度量张量。

此外，利用这一显式方程，我们可以推导出沿中心射线方向定义的其他子矩阵的直接表达式。通过直接的数学推导，可以证明

$$\frac{\partial \mathbf{m}_q^T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{v_0}\frac{\partial^2 v_0}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}^T}\,, \tag{92}$$

其中，根据方程 (58) 中的链式法则，我们有

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial q_i \partial q_j} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{\mathbf{x}}\partial \bar{\mathbf{x}}^T}\hat{\mathbf{e}}_j\,, \quad i,j=1,2. \tag{93}$$

现在，我们按照前面相同的步骤计算混合表达式，得到以下恒等式

$$\frac{\partial \mathbf{m}_p^T}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathbf{m}_q^T}{\partial \mathbf{p}}\right)^T = \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{q}} \otimes \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{p}}\,. \tag{94}$$

我们可以观察到，传播矩阵具有 ˇCervený (2001) 所确立意义下的辛形式。因此，根据刘维尔定理，该系统沿中心射线轨迹保持守恒。正如 ˇCervený (1972) 所示，用笛卡尔坐标系表述动态射线追踪系统，可以确保由 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 中的混合偏导数得到的矩阵具有对称性。因此，如 Klimeš (1994) 和 ˇCervený (2007) 所示，在射线中心坐标系中表述问题时也保留了这一性质。最后，借助明确给出的表达式，我们的表述无需将坐标变换到 6×6 笛卡尔坐标系，即可定性理解传播现象。

4.3 关于初始条件

使用显式表述的哈密顿系统时，动态射线追踪需要初始条件。为此，考虑从原点出发的位置矢量和慢度矢量，即 $t=0$，它们在 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_0=[\gamma_1,\gamma_2,0]^T$ 中应用的一般形式如下

$$\mathbf{q}_0(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{q}(\bar{\boldsymbol{\gamma}}_0) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{p}_0(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\gamma}}_0)\,. \tag{95}$$

在初始面上，自由参数 $\boldsymbol{\gamma}=[\gamma_1,\gamma_2]^T$ 随所采用的初始条件而变化。因此，初始条件为

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{\partial \mathbf{q}_0^T}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{P}_0 = \frac{\partial \mathbf{p}_0^T}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\,. \tag{96}$$

需要注意的是，根据式（79），参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 直接影响射线中心坐标。下面详细介绍两种合适的初始条件，即点源初始条件和爆炸反射界面初始条件。

我们先讨论点源的情况。取参数 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{p}$，由于所有射线都从同一个初始点出发，利用方程（96），立即可得

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{O} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{P}_0 = \mathbf{I}. \tag{97}$$

这些初始条件称为归一化点源初始条件，如图4所示。

为了考虑由 σ函数表示的反射面源，可以引入基于与波前传播相切的曲率面的初始条件。对于这种构造，我们假设初始面是波前面，该波前由点源在特定时刻 $t<0$ 发出，但以 $t=0$为单位测量。为此，我们精确地选择中心射线坐标，使得 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{q}$，由方程（96）可立即得出以下关系

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{P}_0 = \frac{\partial \mathbf{p}_0^T}{\partial \mathbf{q}}. \tag{98}$$

为推导式（98）中初始条件的显式表达式，我们考虑以下位置参数化 $t\mathbf{q} = \tau(\bar{\mathbf{x}}(\sigma\mathbf{q}))$，由此可得

$$\mathbf{p} = \frac{\partial t}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{q}}\,, \tag{99}$$

代入式（98）可得

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\partial \mathbf{p}_0^T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}^T} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial \sigma^2}\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{q}} \otimes \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{q}}\,. \tag{100}$$

因此，中心射线附近的走时变化可由下式充分表征

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial \sigma}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\mathbf{r}}}\cdot\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{d\sigma} = \bar{\mathbf{w}}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{v_0}. \tag{101}$$

因此，波前面函数 $\sigma(t=0,\ \mathbf{q})$ 表示中心射线附近波前的近似，因而有

$$\left.\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}\,, \quad \text{and} \quad \left.\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}^T}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \mathbf{K}_0\,, \tag{102}$$

其中，$\mathbf{K}_0$ 表示起点处的表面曲率，如图 6 所示。请注意，$\mathbf{K}_0$ 与反射体的局部曲率相符，即曲率矩阵是在由 $\sigma_0=\sigma(t=0)$ 生成的平面上测量的，平面坐标由向量 $\mathbf{q}$ 在 $\mathbf{0}$ 处给出。最后，初始条件的显式表达式如下

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{P}_0 = \frac{1}{v_0}\mathbf{K}_0. \tag{103}$$

若反射体为平面，则 $\mathbf{K}_0$ 为零矩阵，因此初始条件为

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{P}_0 = \mathbf{O}\,. \tag{104}$$

这些初始条件称为归一化望远镜点初始条件或归一化平面波前初始条件。

5 出射波前的物理解释与应用

本节展示哈密顿量物理属性显式表述在走时参数中的两种应用。首先，我们阐释在地表测得的波前物理属性；其次，我们给出直接由所提出的表述推导出的正常时差速度精确值。为便于说明，假设所有模型中的介质均为均匀介质。

动态射线追踪描述沿中心射线演化的波前曲率。根据式（102），我们可以将这一演化过程表述为在 t_0处运行：

$$\left.\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}^T}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = v_0\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{K}_{t_0}\,, \tag{105}$$

其中 $\mathbf{K}t_0$ 是波前曲率矩阵。因此，正如前面所述，

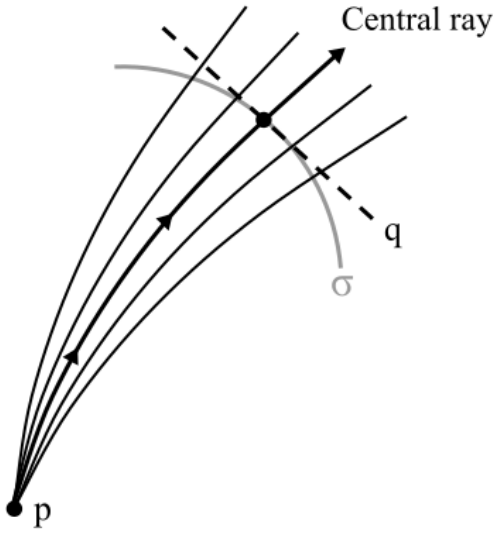

图4. 二维示意图：中央射线和近轴射线从点源发出，并以波前 σ变化 p； 波前以灰色表示，其切平面波则以坐标 q表示，并用虚线绘出。

初始条件会影响波前在介质中的传播形状，进而决定波前曲率。此外，正如 Hubral（1980年）所证明的，通过了解波前沿射线路径传播的行为，我们可以获得反演过程所需的重要运动学信息。通过改变 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{P}$的初始条件，我们可以构造两个假想波前。首先，法向入射点（NIP）波前由反射体上 NIP 处的点源产生。其次，法向波前由传播反射体的局部曲率形成。此外，这两个假想波前与相应的慢度向量共享同一条法向入射射线。这里，我们以一种直接的方式分析均匀各向异性介质中的这些波前。需要指出的是，此处的垂直入射指的是地表上的相位矢量。

为了分析这些虚拟波前，我们考察了 NIP 波前和法向波前各自的曲率矩阵$\mathbf{K}_{\text{NIP}}$ 和$\mathbf{K}_{\text{N}}$。图5和图6展示了这两种波前在各向异性均匀介质中的传播。采用归一化点源初始条件（见式（97））， 并求解式（84）给出的哈密顿系统，可得到如下表达式:

$$\mathbf{K}_{\text{NIP}} = \frac{1}{r_0}\left[\frac{\mathbf{C}_0}{v_0^2}\right]^{-1}, \tag{106}$$

其中， $r_0 = t_0 v_0$ 是以 NIP 为中心的球面波前的曲率半径，而

$$\mathbf{C}_0 = \frac{\partial \mathbf{m}_p^T}{\partial \mathbf{p}}, \tag{107}$$

作为中心射线方向上的约化波传播度量张量。各向异性拉伸因子 $\mathbf{C}_0/v_0^2$ 会影响 NIP 源波前的曲率，使其呈非球形。此外，根据公式 (87)，NIP 中心射线上的几何扩散为

$$\Lambda_{\text{NIP}} = v_0\sqrt{\cos\psi_0 |\det \mathbf{K}_{\text{NIP}}|^{-1}}. \tag{108}$$

需要指出的是， Λ_{NIP} 是点源产生的几何扩展。

为了分析爆炸反射界面发出的波前曲率行为，我们考虑一个在 NIP 位置处曲率与反射界面相匹配的源，如图6所示。初始条件由从 NIP 源点出发的式（103）给出。利用哈密顿系统计算$\mathbf{Q}$ 和$\mathbf{P}$ ，可得

$$\mathbf{Q}(t_0) = \frac{t_0}{v_0}\mathbf{C}_0\mathbf{K}_0 + \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}(t_0) = \frac{1}{v_0}\mathbf{K}_0\,. \tag{109}$$

将这些方程与式（106）结合，可得

$$\mathbf{K}_{\text{N}} = \mathbf{K}_0\left[\mathbf{K}_{\text{NIP}}^{-1}\mathbf{K}_0 + \mathbf{I}\right]^{-1}. \tag{110}$$

由此，我们可以描述爆炸反射界面沿中心射线方向的几何扩散:

$$\Lambda_{\text{N}} = \sqrt{\cos\psi_0 |\det\left[\mathbf{K}_{\text{NIP}}^{-1}\mathbf{K}_0 + \mathbf{I}\right]|}. \tag{111}$$

请注意，若 $\mathbf{K}_{\text{NIP}} = -\mathbf{K}_0$,，则意味着存在 $\Lambda_{\text{N}} = 0$ 所示的焦散情况。此外，对于平面反射界面，我们有 $\Lambda_{\text{N}} = \sqrt{\cos\psi_0}$；可以看出，在这种情况下，只有各向异性偏差会影响几何扩展。

总之，NIP定理表明，反射体的形状不会影响 $\mathbf{K}_{\text{NIP}}$ （Chernjak与Gritsenko 1979年，Hubral & Krey 1980年）。因此，在均匀介质中，零偏移距入射点（NIP）波前曲率只包含有关介质各向异性的信息，而各向异性拉伸因子决定了这种影响。对于法曲率，在均匀介质中，我们观察到反射体的曲率会受到其几何扩散的修正，即 $\mathbf{K}_{\text{N}} = \mathbf{K}_0\mathbf{Q}^{-1}$。因此，只要掌握 $\mathbf{K}_{\text{NIP}}$ 的信息，对 $\mathbf{K}_{\text{N}}$ 的任何分析都能使我们了解反射体的形状。

5.1 正常时差速度的精确表达式

为理解双曲线时差速度（Al-Chalabi，1973），我们分析其理论版本，即正常时差速度。我们表明，所提出的公式能够推导出

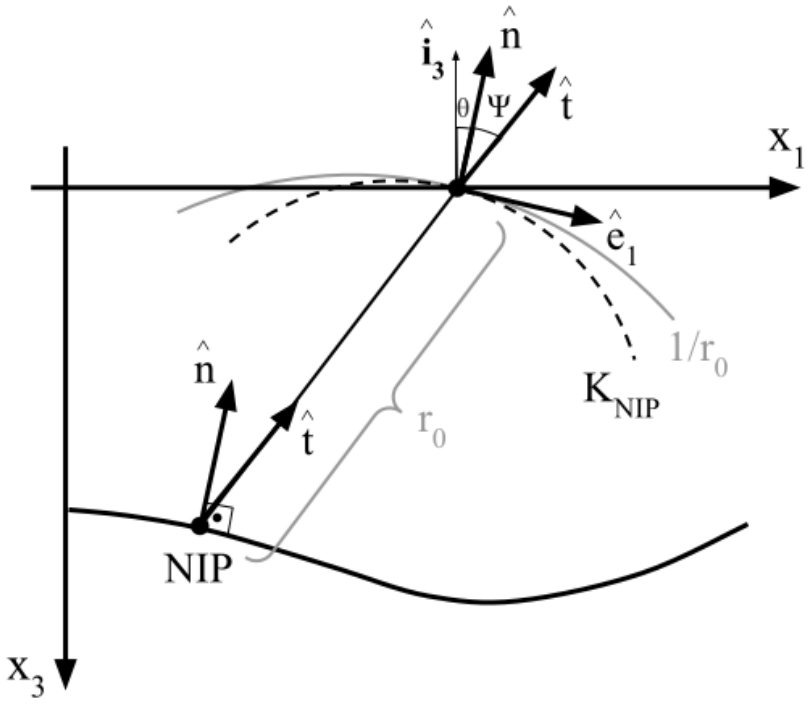

图 5. 各向异性介质中，从反射体出发的零偏移距入射点（NIP）波前的二维示意图。请注意，由于各向异性，射线从 NIP 出发的角度并不垂直于反射体的地表。

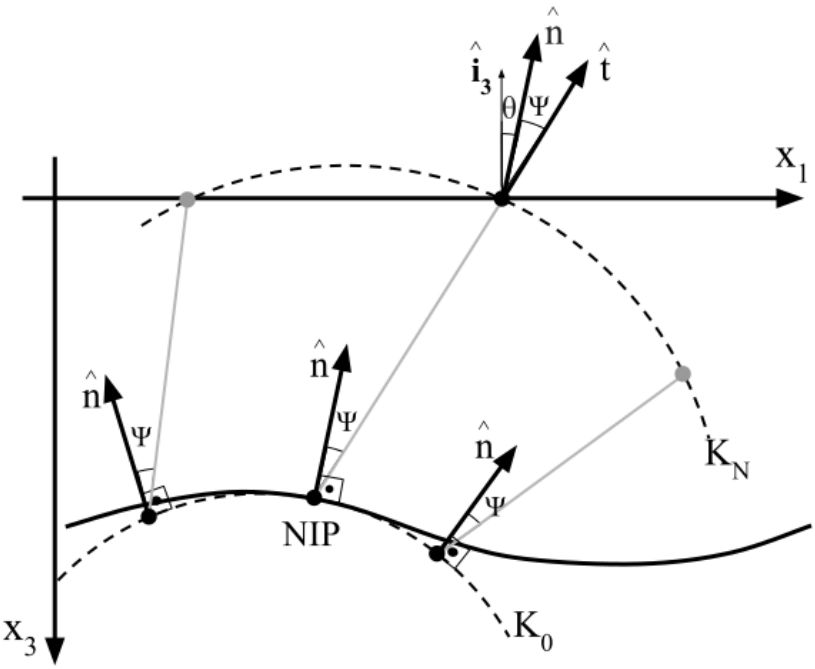

图 6. 从反射体出发的零偏移距入射点（NIP）波前的二维示意图，其曲率为，处于各向异性介质。请注意，由于各向异性，法向波前出发的射线角度并不垂直于反射体的地表。

由共中心点（CMP）观测系统得到的NMO速度与被均匀各向异性层覆盖的反射体倾斜平面有关。我们以动力学射线傍轴公式的形式给出NMO速度的矩阵形式。

根据定义，CMP双程走时近似$\mathcal{T}_{\text{CMP}}$ 表示为

$$\mathcal{T}_{\text{CMP}}(\mathbf{x}_h,\mathbf{x}_0)^2=\tau_0^2+4\Delta\mathbf{x}_h\cdot[\mathbf{V}_{\text{NMO}}]^{-2}\,\Delta\mathbf{x}_h\,, \tag{112}$$

其中， τ_0 表示从NIP到测量面上$\mathbf{x}_0$ 的双程走时， $\Delta\mathbf{x}_h=\mathbf{x}_h-\mathbf{0}$， $\mathbf{x}_h=(\mathbf{x}_r-\mathbf{x}_s)/2$ 表示震源与检波器半偏移矢量的位置， $\mathbf{x}_0=(\mathbf{x}_r+\mathbf{x}_r)/2$ 表示参考中点的位置，而$\mathbf{x}_s$ 和$\mathbf{x}_r$ 分别表示测量面上的震源位置和检波器位置。因此，利用哈密顿系统的解，可以解释与射线傍轴波前相关的运动学参数$\mathbf{V}_{\text{NMO}}$。

基于 Hubral & Krey（1980年）的工作，我们可以写出$\mathbf{V}_{\text{NMO}}$，即正常时差速度矩阵的表达式：

$$4\,[\mathbf{V}_{\text{NMO}}]^{-2}=\tau_0\,\frac{\partial^2\tau}{\partial\mathbf{x}_h\partial\mathbf{x}_h^T}\bigg|_{(\mathbf{0},\mathbf{x}_0)}\,, \tag{113}$$

其中，采用射线傍轴方法，我们可以证明：

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\mathbf{x}_h\partial\mathbf{x}_h^T}=\frac{2}{v_0}\left(\frac{\partial\mathbf{q}^T}{\partial\mathbf{x}_h}\right)^T\mathbf{K}_{\text{NIP}}\left(\frac{\partial\mathbf{q}^T}{\partial\mathbf{x}_h}\right). \tag{114}$$

^^现在，令$\mathbf{x}=x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2$,，可得以下推导：

$$\frac{\partial\mathbf{q}^T}{\partial\mathbf{x}_h}=\frac{\partial\mathbf{q}^T}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\mathbf{x}^T}{\partial\mathbf{x}_h}\,, \tag{115}$$

其中

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathbf{x}^T}{\partial\mathbf{x}_h}=2\mathbf{I}\,,\\&\frac{\partial q_i}{\partial x_j}=\frac{1}{\cos\psi}\left(\hat{\mathbf{i}}_j\cdot\bar{\mathbf{f}}_i\right)\,,\ i,j=1,2\,.\end{aligned} \tag{116}$$

上述方法可用于获得$\mathbf{V}_{\text{NMO}}$的三维形式。在这种情况下，考虑笛卡尔坐标，可得以下表达式：

$$[\mathbf{V}_{\text{NMO}}]^2=v_0^2\mathbf{H}\left[\frac{\mathbf{C}_0}{v_0^2}\right]\mathbf{H}^T\,, \tag{117}$$

其中$\mathbf{H}$ 是一个变换矩阵，定义为：

$$\mathbf{H}=\left(\frac{\partial\mathbf{q}^T}{\partial\mathbf{x}}\right)^{-1}. \tag{118}$$

因此，我们通过$\mathbf{H}$ 矩阵建立了笛卡尔表述与射线中心表述之间的联系。因此，通过坐标变换，在求解动力学射线追踪系统的三维形式后，可以得到NMO速度的精确表达式。此外，在均匀模型中，根据CMP观测几何记录的反射走时估算出的NMO速度，能够提供有关地下速度场和各向异性参数的宝贵信息。最后，我们证明，测得的NMO速度与各向异性拉伸因子矩阵之间存在关联。

6 一般各向异性介质中的速度扩展因子

本节介绍 Dix 速度与时间偏移曲率矩阵之间的关系。时间偏移走时基于绕射走时近似方程，该方程通常是震源和接收点坐标的函数。该方法的基本假设是，这种走时近似能够在其顶点处与绕射走时相切。起始点是将走时方程近似为以下形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_M(\mathbf{x}_s,\mathbf{x}_r)=&\sqrt{t_0^2+\Delta\mathbf{x}_s\cdot[t_0\boldsymbol{\Gamma}_M]\Delta\mathbf{x}_s}\\&+\sqrt{t_0^2+\Delta\mathbf{x}_r\cdot[t_0\boldsymbol{\Gamma}_M]\Delta\mathbf{x}_r}\,,\end{aligned} \tag{119}$$

其中， $\Delta\mathbf{x}_s=\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_s$、 $\Delta\mathbf{x}_r=\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_r$ 位于测量平面上，且将走时 t 设定为式（52）中的形式，可得

$$\boldsymbol{\Gamma}_M=\frac{\partial^2 t}{\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}^T}\bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}. \tag{120}$$

各向同性介质中，波前传播速度与时间偏移速度之间的关系已得到充分确立。正如 Cameron 等（2007）所示，时间偏移慢度平方矩阵与

$$[\mathbf{V}_M]^{-2}=t_0\boldsymbol{\Gamma}_M=\frac{t_0}{v_0}\mathbf{K}_M\,, \tag{121}$$

以及由下式给出的 Dix 速度（Dix，1955年）

$$[\mathbf{V}_{\text{Dix}}]^2=\frac{\partial}{\partial t_0}\boldsymbol{\Gamma}_M^{-1}(t_0)\,, \tag{122}$$

其中 $\mathbf{K}_M$ 是成像射线上零偏移距入射点（NIP）波前的曲率矩阵（Hubral，1977年）。图 8（左侧）展示了一条穿过 NIP 位置的成像射线，每个位置在时间上都由同一 γ_1上的走时 τ 表示。在时间偏移域的这些点上，提取时间偏移速度，以执行式（122）所述的处理。

成像射线概念说明了如何将深度速度模型转换为各向同性介质中的时间坐标。为此，我们将成像射线定义为中心射线的射线路径，其相速度矢量垂直于测量面入射。关于成像射线路径的主要物理思想，可从第 3 节已介绍的拉格朗日力学部分中了解。在一般各向异性介质中，我们通过相速度研究这一相同关系，因此 Cameron 等（2007年）建立的框架完全适用于我们的表述。

考虑到$\mathbf{K}_M$的时间依赖性，我们设$\mathbf{M}=v_0\mathbf{K}_M^{-1}$，这意味着$\mathbf{M}=\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$。因此，需要注意的是，动力学方程具有时间依赖性，可写为

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{P}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_0^T&\mathbf{C}_0\\-\mathbf{V}_0&-\mathbf{Y}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{P}\end{bmatrix}, \tag{123}$$

其中

$$\mathbf{Y}_0=\frac{1}{v_0^2}\frac{\partial v_0}{\partial\mathbf{q}}\otimes\frac{\partial v_0}{\partial\mathbf{p}}\,,\quad\mathbf{V}_0=\frac{1}{v_0}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}^T}\,, \tag{124}$$

所有矩阵元素均在中心射线方向上求值。因此，方程组（123）有助于全面理解一般介质中的波传播现象和速度扩展因子。现在，将$\mathbf{Q}$ 和$\mathbf{P}$表示为图像射线上随 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ 变化的函数，可得

$$\mathbf{M}\,(\bar{\boldsymbol{\gamma}})=\mathbf{Q}(\bar{\boldsymbol{\gamma}})\mathbf{P}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\gamma}})\,. \tag{125}$$

注意，根据式（122），我们可以得到式（125）中t_0 的变化量：

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t_0}=\mathbf{Q}_v\mathbf{P}^{-1}-\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}_v\mathbf{P}^{-1}\,, \tag{126}$$

为方便起见，我们引入以下记号：

$$\mathbf{Q}_v = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t_0}\,, \quad \mathbf{P}_v = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t_0}\,. \tag{127}$$

˘根据 Cervený（2001年），我们将矩阵$\mathbf{Q}_2$和$\mathbf{P}_2$定义为在考虑深度点源时，式（123）所述动态射线追踪系统的解，即该系统具有按照式（97）描述的初始条件。同样，我们将$\mathbf{Q}_1$和$\mathbf{P}_1$,定义为：它们假设中心射线附近的一族射线，这在地下称为归一化望远镜点；也就是说，该系统具有按照式（104）描述的初始条件。

现在，为了表征这一问题的初始条件，我们在式（126）中表示$\mathbf{X}_q = \mathbf{Q}_2$和$\mathbf{X}_p = \mathbf{P}_2$。因此，利用这一关系，我们进行如下推导

$$\frac{d\mathbf{X}_j}{dt} = \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial t_0}\frac{dt_0}{dt} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial \gamma_i}\frac{d\gamma_i}{dt}\,, \quad j = p, q\,, \tag{128}$$

代入$t = 0$后，得到

$$\frac{dt_0}{dt} = 1\,, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \mathbf{0}\,. \tag{129}$$

由此可得以下结果

$$\frac{d\mathbf{X}_j}{dt} = \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial t_0}\,. \tag{130}$$

因此，可以得到初始条件，即

$$\mathbf{Q}_{v0} = \left.\frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial t_0}\right|_0 = \mathbf{C}_0\,, \quad \text{and} \quad \mathbf{P}_{v0} = \left.\frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial t_0}\right|_0 = -\mathbf{Y}_0\,. \tag{131}$$

根据表达式（123），可以得到以下关于方程（127）的方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_v\\ \mathbf{P}_v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_0^T & \mathbf{C}_0\\ -\mathbf{V}_0 & -\mathbf{Y}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_v\\ \mathbf{P}_v\end{bmatrix}\,, \tag{132}$$

其初始条件由方程（131）给出。请注意，将其解与方程（126）结合，即可得到一个表达式，用于计算深度处点源所产生传播波对应的 Dix 速度。此外，不难证明

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_v\\ \mathbf{P}_v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2\\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_0\\ -\mathbf{Y}_0\end{bmatrix}\,, \tag{133}$$

这是具有给定初始条件的方程组的解。最后，将答案代入方程（126），并利用传播矩阵为辛矩阵这一众所周知的性质（Cervený 2001，Popov 2002），可得

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t_0} = \left(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1\right)\mathbf{C}_0\mathbf{P}_2^{-1} = \mathbf{P}_2^{-T}\mathbf{C}_0\mathbf{P}_2^{-1}\,. \tag{134}$$

˘考虑到 Cer- vený（1972年）所述的传播矩阵理论，并遵循 Cameron 等人（2007年）的详细推导（该推导可适用于我们的公式），存在一种互易性论证，可确保关系式$\mathbf{P}_2^T(\bar{}\mathbf{x}_{\text{NIP}},\ \bar{}\mathbf{x}_0) = \mathbf{Q}_1(\bar{}\mathbf{x}_0,\ \bar{}\mathbf{x}_{\text{NIP}})$对两个点$\bar{}\mathbf{x}_{\text{NIP}}$和$\bar{}\mathbf{x}_0$成立。在我们的情形中，$\bar{}\mathbf{x}_{\text{NIP}}$是深度处的 NIP，而$\bar{}\mathbf{x}_0$是测量面上的一个点。这种互易性意味着：以位于地表的“归一化望远镜点”作为初始条件进行传播，在深度点处得到的形式，与位于深度处的点源在地表处求得的解形式相同。图7展示了这一特性，因此可得

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t_0} = \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}_0\mathbf{Q}_1^{-T} = v_0^2\left[\mathbf{Q}_1^{-1}\frac{\mathbf{C}_0}{v_0^2}\mathbf{Q}_1^{-T}\right]\,. \tag{135}$$

基于这些结果，与 Iversen 和 Tygel（2008年）不同，我们将速度扩展因子$\mathbf{Q}_F$定义为

$$[\mathbf{Q}_F]^2 = \mathbf{Q}_1^T\left[\frac{\mathbf{C}_0}{v_0^2}\right]^{-1}\mathbf{Q}_1\,. \tag{136}$$

上述表达式可表示由方程（122）计算得到的时间-速度矩阵$\mathbf{V}_{\text{Dix}}$，从而得到

$$\mathbf{V}_{\text{Dix}}^2 = \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}_0\mathbf{Q}_1^{-T} = v_0^2\,[\mathbf{Q}_F]^{-2}\,. \tag{137}$$

必须确保射线路径从测量平面出发并朝 NIP 延伸，且采用归一化望远镜点初始条件。

恢复底层等效介质方向相关速度场的另一种方法，是从广义时间偏移速度矩阵入手。设测量平面周围存在一个足够薄的均匀邻域，使相速度的空间导数在测量点$\bar{}\mathbf{x}_0$处为零。因此，类比成像射线的情形，可将广义时间偏移速度矩阵定义为

$$[\mathbf{V}_{\text{M}}(t_0)]^2 = \mathbf{H}^{-1}[\mathbf{V}_{\text{NMO}}(t_0)]^2\mathbf{H}^{-T}\,. \tag{138}$$

矩阵$\mathbf{H}$仅取决于相位矢量的方向参数，而$\mathbf{V}_{\text{Dix}}$和$\mathbf{V}_{\text{NMO}}$则取决于时间。如图8右侧所示，沿$\bar{\boldsymbol{\gamma}}$坐标的时间轴观察，可以选取慢度方向相同、即旅行时斜率参数相同的正常时差速度。因此，通过$\mathbf{H}$矩阵的逆变换改变坐标后，便可以像式（122）中那样应用Dix方法，获得该方向上的Dix速度矩阵。通过变换矩阵利用正常时差速度构建Dix速度这一概念，Gelius & Tygel (2015) 已经进行过探讨。最后，要获得同样取决于相位矢量入射方向的Dix速度矩阵，可以采用Coimbra 等人（2019）提出的绕射分离方法，作为提取任意相位方向上的斜率矢量和速度矩阵的一种实用手段。

7 时间偏移的程函型方程

本节推导时间偏移的程函型方程，即用于确定时间偏移射线的方程（Fomel 和 Kaur，2021年）。我们将时间偏移射线描述为时间域中的射线路径，其中假设深度方向射线路径上的每一点都是散射点，并将其映射到该点旅行时响应的顶点，如图9左侧所示。

我们从以下关系式开始

$$t_0(\bar{\boldsymbol{\gamma}}) = t\,, \tag{139}$$

其中$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = [\gamma_1, \gamma_2, t]^T$，并改写为

$$t_0(\bar{\boldsymbol{\gamma}}) = t(\bar{\mathbf{q}}(\bar{\boldsymbol{\gamma}}))\,, \tag{140}$$

其中，$t_0(\bar{\boldsymbol{\gamma}})$是一般介质在运行参数$t$下的程函型方程解。换言之，式（139）表示时刻$t$的时间偏移射线波前。因此，对式（140）两边关于$\bar{\boldsymbol{\gamma}}$求偏导，可得

$$\frac{\partial t_0}{\partial \bar{\boldsymbol{\gamma}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}^T}{\partial \bar{\boldsymbol{\gamma}}}\frac{\partial t}{\partial \bar{\mathbf{q}}}\,. \tag{141}$$

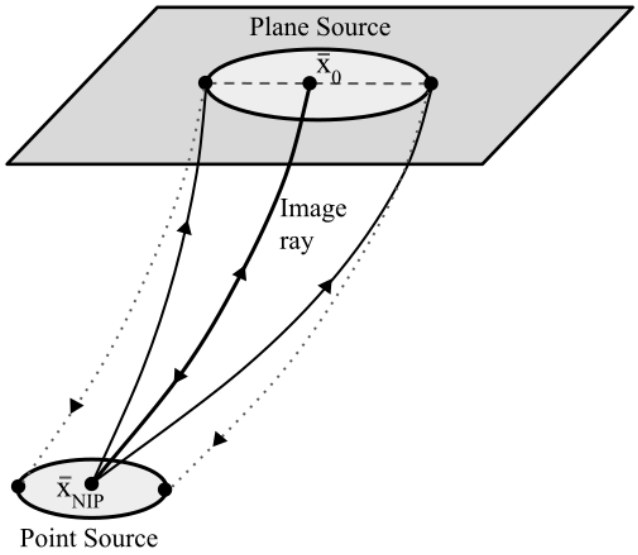

图7. 射线管中两种不同类型源对应的两种情形。第一种情形表示位于 NIP 的点源，其射线流沿测量面的方向传播。第二种情形表示沿深度方向传播的线源，近轴射线构成望远镜族。

引入雅可比矩阵

$$\bar{\mathbf{Q}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}^T}{\partial \bar{\boldsymbol{\gamma}}}\,, \tag{142}$$

因此，式（141）可改写为向量形式：

$$\bar{\mathbf{Q}}^{-1}\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{p}}\,, \tag{143}$$

其中，时间偏移慢度型向量定义为：

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{\partial t_0}{\partial \bar{\boldsymbol{\gamma}}}\,. \tag{144}$$

将式（143）左乘其共轭方程，可直接得到：

$$\bar{\mathbf{g}}\cdot\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{p}}\cdot\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{v_g^2}\,, \tag{145}$$

其中，$\bar{}\mathbf{p}$ 由（D.1）给出；根据式（79），可得：

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \left(\bar{\mathbf{Q}}^T\bar{\mathbf{Q}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_1\right)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & v_g^{-2} \end{bmatrix}. \tag{146}$$

式（145）构成了一般情形下的程函型方程；对于二维各向同性情形，它与 Fomel 和 Kaur（2021）提出的程函型方程一致。然而，根据近轴射线理论的有效条件，该推导表明，这种方程对包含各向异性的任意一般介质都成立。将式（146）中的速度相关表达式$[\mathbf{V}_G(\bar{\boldsymbol{\gamma}})]^2 = v_g^2\left(\mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_1\right)^{-1}$代入，可得哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{t_0}(\bar{\boldsymbol{\gamma}},\bar{\mathbf{g}}) = \left(\mathbf{g}\cdot[\mathbf{V}_G(\bar{\boldsymbol{\gamma}})]^2\mathbf{g} + g_3^2 - 1\right)/2\,. \tag{147}$$

根据哈密顿理论，控制时间偏移射线的程函型方程由特征曲线（Courant & Hilbert，1989年）确定，如下所示

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} &= \lambda_t\frac{\partial\mathcal{H}_{t_0}}{\partial\mathbf{g}}\,, \\ \frac{d\bar{\mathbf{g}}}{dt} &= -\lambda_t\frac{\partial\mathcal{H}_{t_0}}{\partial\bar{\boldsymbol{\gamma}}}\,, \\ \frac{dt_0}{dt} &= \left(\frac{\partial\mathcal{H}_{t_0}}{\partial g_3}\right)^{-1} = \lambda_t\,. \end{aligned} \tag{148}$$

图9展示了时间偏移域中的这些时间偏移射线。

为满足我们的目的，在时间偏移域中，波前传播时间 t 是时间偏移射线的演化参数。施加适当的初始条件后，可以对常微分方程组进行数值求解。因此，我们从测量平面出发，朝顶点移动，以利用某些简化条件（图9右侧）；也就是说$t(0) = 0, \boldsymbol{\gamma}_0 = \mathbf{x}_0$, 且

$$\mathbf{g}_0 = \left.\frac{\partial\tau}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad g_3(0) = \sqrt{1-(\|\mathbf{g}_0\|v_g)^2}\,. \tag{149}$$

注意，$\mathbf{g}_0$ 是测量平面$\mathbf{x}_0$ 处绕射走时的斜率向量，而该平面 $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$，这意味着 $[\mathbf{V}_G]^2 = v_g^2\mathbf{I}$。

因此，若要用Dix速度对时间偏移射线进行建模，必须满足

$$\mathbf{V}_{\text{Dix}} = \mathbf{V}_G\,. \tag{150}$$

换言之，Dix速度与时间偏移射线速度之间的关系是：各向异性拉伸因子等于各向异性偏差平方的倒数，数学表达式为

$$\frac{\mathbf{C}_0}{v_0^2} = \frac{1}{\cos\psi_0^2}\mathbf{I}\,. \tag{151}$$

然而，根据式（88）、（E.5）和（E.6），式（151）中的关系成立当且仅当，

$$\frac{\partial^2\mathcal{H}_t}{\partial\bar{\mathbf{w}}\partial\bar{\mathbf{w}}^T} = v_0^2\bar{\mathbf{I}}\,, \tag{152}$$

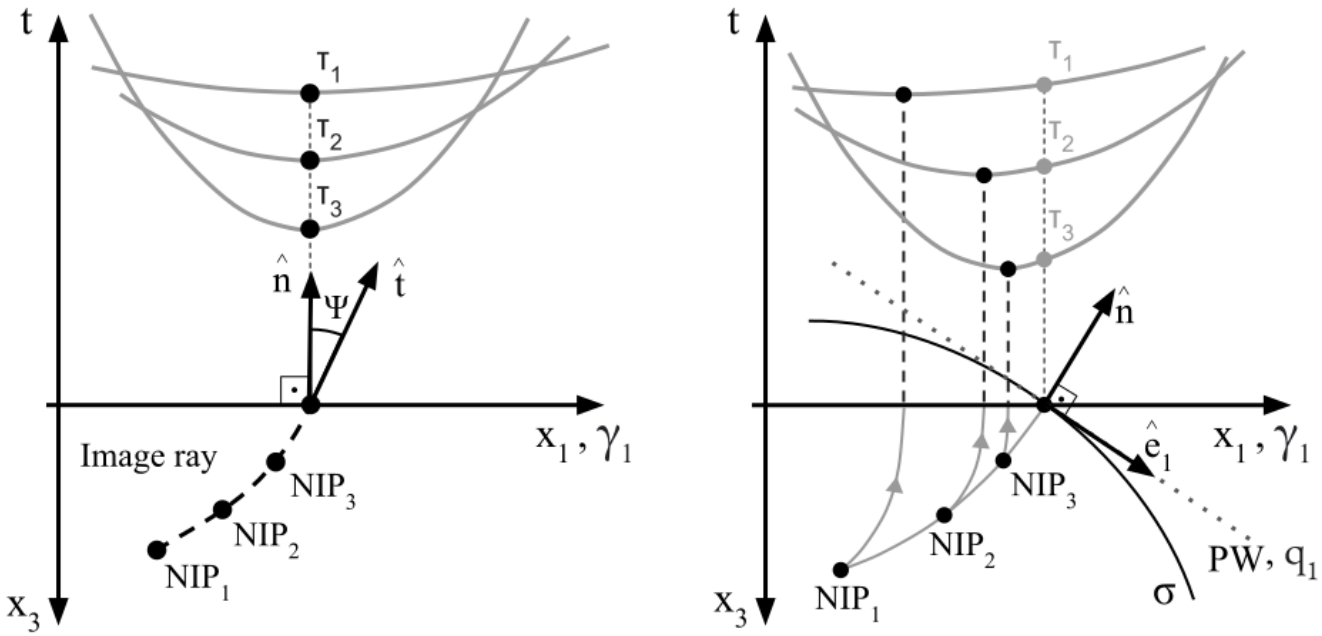

图 8. 左：与点源、NIP_1, NIP_2, 和 NIP_3, 分别相关的走时响应，以 τ_1、 τ_2 和 τ_3 表示。在此情况下，所有绕射走时均与成像射线对齐，相位矢量垂直到达 x_1。右：与前一种情况类似，但此时成像射线与参考平面 PW 有关，其相对于 x_1并非垂直入射。从 NIP_1, NIP_2, 和 NIP_3 得到的也是相对于测量平面的成像射线。

也就是说，该介质在该相位方向上确实是各向同性的。因此，我们将以下结论表述为定理：Dix 射线速度与时间偏移射线速度在所有传播方向上均相同的充要条件是该介质具有各向同性。

8 结论

总之，深入理解时间偏移层间速度和速度扩展因子，对于地震成像中的准确时间—深度转换至关重要。本研究提出了一个综合框架，以相速度显式描述波前传播，具有现有文献所不具备的多项优势。借助这一框架，我们能够理解各向异性和非均匀性对波传播的贡献及其对波前的影响。该框架可从笛卡尔坐标转换为射线中心坐标，并适用于多种地震处理流程。此外，该框架推广了时间偏移坐标域中定义的 Dix速度与深度域中描述的物理速度之间的关系，清晰揭示了各向异性对几何扩展因子的影响。值得注意的是，即使在均匀各向异性介质中，Dix速度也不同于偏移速度，这凸显了在地震成像中考虑各向异性的必要性。借助该框架，我们可以开发计算技术，以识别各向异性对地震数据的影响，并将其与介质非均匀性的影响区分开来。未来，这种对物理现象的扎实理解将有助于改进地震成像，并提升我们准确解释地下特征的能力。

致谢

作者感谢高性能地球物理（HPG）团队提供技术支持。本研究得以完成，离不开巴西国家石油公司的支持。

参考文献

Aki, K. & Richards, P. G., 1980年. 《定量地震学》– 第*1*卷：理论与方法, W. H. Freeman, New York, (第二版：2002年). Al-Chalabi, M., 1973. 速度与走时计算中的级数近似, 《*Geophysical Prospecting*》,**21**(4), 783–795. Alkhalifah, T. & Tsvankin, L., 1995. 横向各向同性介质的速度分析, 《地球物理学》, **60**, 1550–1566. Bleistein, N., 1984. 《波动现象的数学方法》, Academic Press, INC., Orlando, Florida. Bliss, G. A., 1916. 参数形式下变分法问题的Jacobi条件, 《*Transactions of the American Mathematical Society*》, **17**(2), 195. Burridge, R., Chadwick, P., & Norris, A. N., 1993. 椭球慢度面各向异性介质的基本弹性动力学解, 《伦敦皇家学会会刊。*A*辑：数学与物理科学》, **440**(1910), 655–681. Cameron, M. K., Fomel, S. B., & Sethian, J. A., 2007. 通过时间偏移进行地震速度估计, 《反问题》, **23**, 1329–1369. ˇCervený, V., 1972年. 非均匀各向异性介质中的地震射线与射线强度, 《国际地球物理学杂志》, **29**(1), 1–13. ˇCervený, V., 1985年. 射线追踪在复杂结构地震波场数值建模中的应用，A部分：理论，载于《地震横波》，第15卷，《**地球物理勘探手册，第一部分：地震**》，第1–124页，编者 Dohr, G.，地球物理出版社，伦敦–阿姆斯特丹。

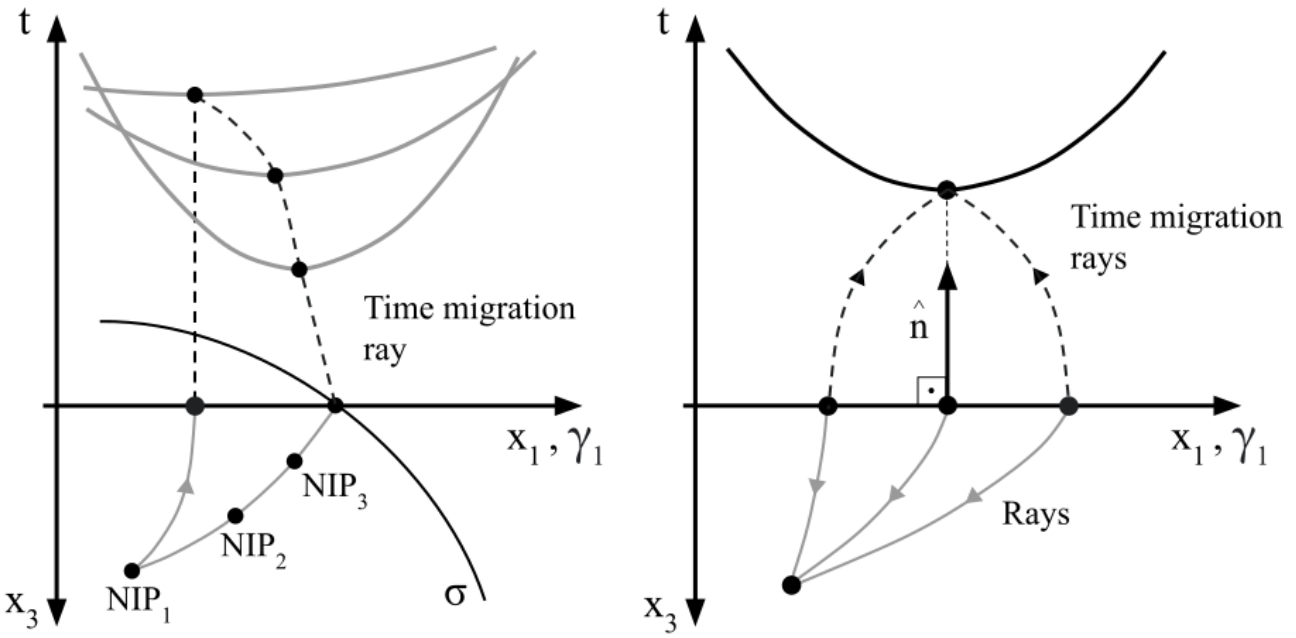

图9. 时间偏移域中时间偏移射线的轨迹。

ˇCervený, V., 2001年. 《地震射线理论》, 剑桥大学出版社. ˇ Cervený, V., 2007. 关于各向异性非均匀介质中射线中心坐标下动态射线追踪的注记, 《地球物理与大地测量学研究》,**51**, 411–422. ˇ Cervený, V. & Klimeš, L., 2010年. 各向异性介质中走时二阶导数的变换关系, 《*Studia Geophysica et Geodaetica*》,**54**(2), 257–267. ˇ Cervený, V. & Moser, T. J., 2009年. 各向异性非均匀介质的近轴射线方法：初始条件, 《地球物理与大地测量学研究》, **53**, 199–214. Chernjak, V. S. & Gritsenko, S. A., 1979年. 曲线边界均匀层空间系统的有效共深度点参数解释, 《苏联地质与地球物理》,**20**(12), 91–98. Christoffel, E. B., 1877年. 关于冲击在弹性固体中的传播, 《纯粹与应用数学年鉴》, **8**(1), 193–243. Coimbra, T. A., Faccipieri, J. H., Speglich, J. H., Gelius, L.-J., & Tygel, M., 2019年. 利用有限偏移距双平方根走时增强叠前域中的绕射波, 《地球物理学》, **84**(1), V81–V96. Courant, R. & Hilbert, D., 1989年. 《数理物理方法》第*2*卷, 威利经典丛书, Interscience出版社, 第一版. Dix, C. H., 1955年. 基于地表测量的地震速度, 《地球物理学》 ,**20**, 68–86. Farra, V. & Madariaga, R., 1987年. 利用射线扰动理论对非均匀介质中的地震波形进行模拟, 《地球物理研究杂志：固体地球》,**92**(B3), 2697–2712. Fomel, S. & Kaur, H., 2021年. 波动方程时间偏移, 《地球物理学》, **86**, S103–S111. Gelfand, I. M. & Fomin, S. V., 2000年. 《变分法》, Dover Publications. Gelius, L.-J. & Tygel, M., 2015年. 基于三维（二维）共反射面（ CRS ）叠加的时间与深度偏移速度建模——理论框架, 《*Studia Geophysica et Geodaetica*》, **59**(2), 253–282.

Grechka, V. & Tsvankin, I., 1998年。横向各向同性介质中非双曲线时距反演的可行性, 《地球物理学》, **63**(3), 957– 969。Grechka, V. Y. & McMechan, G. A., 1996年。针对非均匀、弱横向各向同性介质的三维双点射线追踪, 《*GeophysicsS*》, **61**(6), 1883–1894。Helbig, K., 1994年。勘探地震学中的各向异性基础, PERGAMON。Hubral, P., 1977年。时间偏移——射线理论的一些方面, 《*Geophysi- cal Prospecting*》, **25**(4), 738–745。Hubral, P., 1980年。具有曲面界面的三维横向非均匀介质中的波前曲率, 《地球物理学》, **45**, 905– 913。Hubral, P. & Krey, T., 1980年。根据地震反射时间测量得到层速度, SEG专著第3号。Iversen, E. & Tygel, M., 2008年。用于三维地震速度估计和时间—深度转换的联合像射线追踪, 《地球物理学》, **73**(3), S99–S114。Iversen, E., Ursin, B., Saksala, T., Ilmavirta, J., & de Hoop, M. V., 2018年。各向异性非均匀介质的高阶哈密顿–雅可比摄动理论：笛卡尔坐标中的动态射线追踪, 《国际地球物理学杂志》, **216**(3), 2044–2070。Iversen, E., Ursin, B., Saksala, T., Ilmavirta, J., & de Hoop, M. V., 2021年。各向异性非均匀介质的高阶哈密顿–雅可比摄动理论：笛卡尔坐标与射线中心坐标之间的变换, 《国际地球物理学杂志》, **226**(2), 893–927。John, F., 1971年。《偏微分方程》, Springer US。Klimeš, L., 1994年。各向异性介质中的动态射线追踪变换, 《*Wave Motion*》, **20**(1), 261–272。Klimeš, L., 2002年。波传播度量张量与慢度面和射线速度面曲率之间的关系, 《*Studia Geo- physica et Geodaetica*》, **46**(3), 589–597。Lanczos, C., 1986。力学变分原理, Dover物理学丛书, Dover Publications, 纽约州米尼奥拉。

M·波波夫. M.，2002年。地学家的射线理论与高斯束法 - 物理学家，巴伊亚联邦大学，萨尔瓦多，巴伊亚州。

M. M. 波波夫、I. 普舍尼奇克与V. 切尔韦尼，1978年。《在具有曲面界面的非均匀介质中计算射线振幅》，《Studia Geophysica et Geodaetica》，**22**(3)，248–258。

J. 普霍尔，2003年。《地震学中的弹性波传播与产生》，剑桥大学出版社。

M·萨德里. & Slawinski, M.，2010年。各向异性层状介质中的射线追踪与振幅计算，《国际地球物理学杂志》，**180**(3)，1170–1180。

Sethi, H., Shragge, J., & Tsvankin, I., 2021年。耦合声学/弹性各向异性介质的张量弹性动力学：纳入水深地形，《国际地球物理学杂志》，**228**(2)，999–1014。

Sommerfeld, A. & Runge, J., 1911年。向量演算在几何光学基础中的应用，《物理学年鉴》，**340**(7)，277–298。

Thomsen, L.，1986年。弱弹性各向异性，《地球物理学》，**51**，1954–1966。

Tohti, M., Wang, Y., Xiao, W., Di, Q., Zhou, K., Wang, J., An, S., & Liao, S., 2021年。《三维正交各向异性孔弹性介质中的地震波数值模拟及微地震震源实现》，《国际地球物理学杂志》，**227**(2)，1012–1027。

Tsvankin, I. 各向异性介质中的地震特征与反射数据分析，PERGAMON。2001年

附录 A：关于射线速度矢量 $\mathbf{R}$

为了得到方程（14）的可计算形式，我们取

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{\mathbf{w}}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}^T}{\partial \bar{\mathbf{w}}} \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}}\,, \tag{A.1}$$

并结合方程（7），可得

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\mathbf{w}}}{\|\bar{\mathbf{w}}\|}\,, \tag{A.2}$$

对 $\bar{}\mathbf{w}$ 求导后，可得

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}^T}{\partial \bar{\mathbf{w}}} = \frac{1}{\|\bar{\mathbf{w}}\|}\left(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}\right)\,, \tag{A.3}$$

其中，符号 $\otimes$ 表示外积运算的结果，在此为一个 3×3 矩阵。将方程（A.3）代入方程（A.1），可得相速度关于慢度向量的导数为

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \bar{\mathbf{w}}} = \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - \left(\frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\right)\hat{\mathbf{n}}\,. \tag{A.4}$$

附录 B：哈密顿量公式推导

为展示通过公式（64）所给的勒让德变换，在中心射线的简化坐标下得到的哈密顿方程，我们使用公式（53）中的共轭型动量，如下所示：

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\,. \tag{B.1}$$

通过使用显式的拉格朗日量表达式，并考虑相速度函数 v，我们得到

$$\mathbf{p} = \frac{1}{v}\frac{\sin\psi\mathbf{a}_\phi + \dot{\mathbf{q}}}{\sqrt{\chi^2 + 2\sin\psi\mathbf{a}_\phi\cdot\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}}}}\,, \tag{B.2}$$

现在，我们将求解关于 $\dot{}\mathbf{q}$的方程。注意，

$$(vp_i)^2 = \frac{(a_i\sin\psi + \dot{q}_i)^2}{\chi^2 + 2\sin\psi\mathbf{a}_\phi\cdot\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}}}\,. \tag{B.3}$$

为简便起见，我们记

$$\xi_i = 2a_i\sin\psi\dot{q}_i + \dot{q}_i^2\,. \tag{B.4}$$

经过一些计算，可得

$$\begin{aligned}(vp_1\chi)^2 - (a_1\sin\psi)^2 &= (1-v^2p_1^2)\xi_1 - v^2p_1^2\xi_2\,,\\ (vp_2\chi)^2 - (a_2\sin\psi)^2 &= (1-v^2p_2^2)\xi_2 - v^2p_2^2\xi_1\,.\end{aligned} \tag{B.5}$$

因此，我们得到如下方程组：

$$\begin{bmatrix} 1-v^2p_1^2 & -v^2p_1^2 \\ -v^2p_2^2 & 1-v^2p_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\chi^2v^2p_1^2 - a_1^2\sin^2\psi\\ \chi^2v^2p_2^2 - a_2^2\sin^2\psi\end{bmatrix}, \tag{B.6}$$

当且仅当以下条件成立时，该方程组有解

$$1 - v^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}) > 0, \tag{B.7}$$

各向同性情形下的条件相同。在该条件下，我们可以求解公式（B.6），并通过此解求解一个二次方程组，得到

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{v\left(\cos\psi + \mathbf{h}\cdot\mathbf{q}\right)\mathbf{p}}{\sqrt{1-v^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})}} - \sin\psi\mathbf{a}_\phi\,. \tag{B.8}$$

考虑到哈密顿量由下式给出

$$\mathcal{H}_s(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}_s(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,, \tag{B.9}$$

其中 $\mathcal{L}_s$ 为拉格朗日量，我们得到正文中的表达式。

附录 C：哈密顿量的二阶导数

为证明公式（75）的最后一个等式，我们取公式（64），沿中心射线方向对**(q，p)**坐标求二阶导数，得到以下等式，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathcal{H}_s}{\partial\mathbf{p}\partial\mathbf{p}^T} &= v_0\cos\psi_0\mathbf{I}\,,\\ \frac{\partial^2\mathcal{H}_s}{\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}^T} &= \frac{\cos\psi_0}{v_0^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}^T}\,,\\ \frac{\partial^2\mathcal{H}_s}{\partial\mathbf{p}\partial\mathbf{q}^T} &= \frac{\partial^2\mathcal{H}_s}{\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{p}^T} = \mathbf{O}\,,\end{aligned} \tag{C.1}$$

其中**O** 是 2×2 零矩阵。因此，由公式（65）、（67）和（C.1）可得

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathcal{H}_s}{\partial\mathbf{p}}\right) = \frac{\partial^2\mathcal{H}_s}{\partial\mathbf{p}\partial\mathbf{q}^T}\frac{d\mathbf{q}}{ds} + \frac{\partial^2\mathcal{H}_s}{\partial\mathbf{p}\partial\mathbf{p}^T}\frac{d\mathbf{p}}{ds} = 0\,. \tag{C.2}$$

附录 D：坐标变换

为了考察笛卡尔坐标与射线中心坐标之间的正变换和逆变换，我们从广义型动量 $\bar{}\mathbf{p} = [p_1,p_2,p_3]^T$, $t(\bar{}\mathbf{q}) = \tau(\bar{}\mathbf{r}(\bar{}\mathbf{q}))$ 出发，并对 τ 应用导数的链式法则，得到

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\partial t}{\partial\bar{\mathbf{q}}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}^T}{\partial\bar{\mathbf{q}}}\frac{\partial\tau}{\partial\bar{\mathbf{r}}} = \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{w}}_q\,, \tag{D.1}$$

其中，利用公式（38）可得以下表达式

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}^T}{\partial\bar{\mathbf{q}}} = \left[\hat{\mathbf{e}}_1,\ \hat{\mathbf{e}}_2,\ \hat{\mathbf{t}} + (\mathbf{h}\cdot\mathbf{q})\hat{\mathbf{n}}\right]^T\,, \tag{D.2}$$

这意味着

$$|\det \bar{\mathbf{E}}| = |\cos\psi + (\mathbf{h}\cdot\mathbf{q})|\,. \tag{D.3}$$

公式（D.1）将沿射线路径的位移与慢度向量 $\bar{\mathbf{w}}_q$ 联系起来，该向量与波前相关，并针对$\mathbf{q} = \mathbf{0}$由以下表达式描述

$$\bar{\mathbf{w}}_q = \frac{\partial\tau}{\partial\bar{\mathbf{r}}} = \frac{\partial\tau}{\partial\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{w}}\,. \tag{D.4}$$

坐标变换的显式表达式由$\bar{\mathbf{E}}$ 给出，在描述波前传播现象时具有优势。因此，对坐标变换矩阵进行扰动，可得

$$d\bar{\mathbf{E}} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{E}}}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial\bar{\mathbf{E}}}{\partial p_i}dp_i\right)\,. \tag{D.5}$$

然而，与 Iversen 等（2021年）中的做法相同，对于$d\bar{\mathbf{p}}$ 的任意取值，都可以利用$\mathbf{E}$ 的显式形式证明

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\bar{\mathbf{E}}}{\partial p_i}dp_i = \bar{\mathbf{O}}\,, \tag{D.6}$$

这意味着 $\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{q}}\ \bar{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{q}})$，其中 $\bar{\mathbf{O}}$是 3×3零矩阵。因此，对式 D.1 求 $\bar{\mathbf{p}}$ 导数，得到

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{w}}^T}{\partial\bar{\mathbf{p}}}\bar{\mathbf{E}}^T\,, \tag{D.7}$$

这意味着逆表达式为

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{E}}^{-T} = \frac{\partial\bar{\mathbf{w}}^T}{\partial\bar{\mathbf{p}}}\,. \tag{D.8}$$

此外，根据定义，$d\bar{\mathbf{q}}$与$d\bar{\mathbf{r}}$ 之间的坐标变换，以及根据先前的构造，$d\bar{\mathbf{p}}$ 与 $d\bar{\mathbf{w}}$ 之间的坐标变换分别为：

$$d\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{E}}^T d\bar{\mathbf{q}}\,,\quad \text{and}\quad d\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{F}}^T d\bar{\mathbf{p}}\,. \tag{D.9}$$

要写出$\mathbf{E}$的逆矩阵的显式表达式，并不存在代数上的困难。不过，为了更好地理解，有必要引入一种辅助记号。

因此，借助向量$\mathbf{f}_1$ 和$\mathbf{f}_2$, , 我们得到下面的逆矩阵$\mathbf{F}$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{\mathbf{h}\cdot\mathbf{q}+\cos\psi}\left[(\mathbf{h}\cdot\mathbf{q})\hat{\mathbf{e}}_1 - \bar{\mathbf{f}}_1,\ (\mathbf{h}\cdot\mathbf{q})\hat{\mathbf{e}}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2,\ \hat{\mathbf{n}}\right]^T\,. \tag{D.10}$$

与此记号相关的几何解释见图 8。我们不能将坐标变换矩阵与计算中定义的、用于联系由基{$\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{t}}$} 以及 {$\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \hat{\mathbf{n}}$} 所确定的局部坐标系的矩阵混淆。根据式 (18) 和式 (33)，我们得到群向量：

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\cos\psi}{v}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}} + v^2\bar{\mathbf{w}}\right)\,, \tag{D.11}$$

代入式 38，得到

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds} = \frac{\cos\psi}{v}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}} + v^2\bar{\mathbf{w}}\right) + (\mathbf{h}\cdot\mathbf{q})\hat{\mathbf{n}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{2}\hat{\mathbf{e}}_i\frac{dq_i}{ds}\,. \tag{D.12}$$

由方程 D.9 和 D.8 可得以下关系

$$\mathbf{F}\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds} = \frac{d\bar{\mathbf{q}}}{ds}\,, \tag{D.13}$$

换言之，我们可以将方程 D.13 改写为以下形式

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds} &= \bar{\mathbf{F}}\left(\frac{\cos\psi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}} + (\cos\psi + \mathbf{h}\cdot\mathbf{q})\hat{\mathbf{n}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{2}\hat{\mathbf{e}}_i\frac{dq_i}{ds}\right)\,;\\ \frac{d\bar{\mathbf{q}}}{ds} &= [\dot{\mathbf{q}} + \sin\psi\mathbf{a}_\phi, 1] + \frac{\cos\psi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{p}}}\,.\end{aligned} \tag{D.14}$$

根据定义，空间矢量对弧长的变化表示为

$$\frac{d\bar{\mathbf{q}}}{ds} = [\dot{\mathbf{q}}, 1]\ , \tag{D.15}$$

因此，我们得到如下显式关系：

$$\bar{\mathbf{F}}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}} = \frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{p}}} = -v^2\tan\psi\left[\mathbf{a}_\phi^T, 0\right]^T\,. \tag{D.16}$$

由上式可知，由于矩阵 $\mathbf{F}$有对应的逆矩阵，因此可得如下闭式表达式：

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}} = (\hat{\mathbf{e}}_1\cos\phi + \hat{\mathbf{e}}_2\sin\phi)\tan\psi\,, \tag{D.17}$$

由此得到下文给出的 $\sin\psi\mathbf{a}_\phi$ 的良定义表达式

$$\frac{\cos\psi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial\mathbf{p}} = -\sin\psi\mathbf{a}_\phi\,. \tag{D.18}$$

最后，考察中心射线方向上的公式 D.18，可得

$$\frac{\cos\psi_0}{v_0^2}\frac{\partial v_0}{\partial\mathbf{p}} = -\sin\psi_0\mathbf{a}_\phi\,, \tag{D.19}$$

据此，我们可以用两点要旨概括本节。首先，我们可以通过显式矩阵充分描述坐标变换。其次，我们可以得到射线参数 $\sin\psi\mathbf{a}_\phi$的显式表达式。请注意，公式 (D.18) 给出的表达式对于明确描述射线传播这一目标至关重要。

附录 E：关于射线速度矢量变化的讨论

为计算群速度矢量的重要二阶导数（这对建模至关重要），需要建立速度变化与方向之间的关系，而不受所采用坐标系的限制。注意，平方相速度是相位分量的二阶齐次函数。因此，我们可以取以下表达式

$$\nu(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{w}})^2 = v(\bar{\mathbf{x}},\|\bar{\mathbf{w}}\|\hat{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{w}}))^2 = \|\bar{\mathbf{w}}\|^2 v(\bar{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{w}}))^2\,, \tag{E.1}$$

因此，我们可以将哈密顿量表示为

$$\mathcal{H}_t(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2}\nu(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{w}})^2\,. \tag{E.2}$$

相位参数的一阶导数可表示为

$$\frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\bar{\mathbf{w}}} = \frac{1}{2}\frac{\partial\nu^2}{\partial\bar{\mathbf{w}}} = v^2\bar{\mathbf{w}} + \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}}\,, \tag{E.3}$$

这样的表达式可用于现象建模。为了使这一过程具有实用性，根据公式 E.2，可得以下结果

$$\frac{\partial^2\mathcal{H}_t}{\partial\bar{\mathbf{w}}\partial\bar{\mathbf{w}}^T} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu^2}{\partial\bar{\mathbf{w}}\partial\bar{\mathbf{w}}^T} = v^2\bar{\mathbf{I}} + \frac{\partial v^2}{\partial\bar{\mathbf{w}}}\otimes\bar{\mathbf{w}} + \frac{\partial}{\partial\bar{\mathbf{w}}}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}}\right)^T\,. \tag{E.4}$$

利用前文介绍的坐标变换，可以证明

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{1}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial p_i}\right)^T = \frac{\bar{\mathbf{f}}_j}{\cos\psi}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\mathbf{w}}}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial\bar{\mathbf{w}}}\right)^T\right]\frac{\bar{\mathbf{f}}_i}{\cos\psi}\,, \quad \text{(E.5)}$$

and

$$\frac{\bar{\mathbf{f}}_j}{\cos\psi}\cdot\left[\frac{\partial v^2}{\partial\bar{\mathbf{w}}}\otimes\bar{\mathbf{w}}\right]\frac{\bar{\mathbf{f}}_i}{\cos\psi} = -2\left(\frac{v_0}{\cos\psi}\right)^2\left(\bar{\mathbf{f}}_j\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\left(\bar{\mathbf{f}}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\,. \quad \text{(E.6)}$$

对 E.4 应用坐标变换，并汇总方程 (E.5) 和 (E.6)，即可得到正文中方程 (89) 所给出的关系。