多个巨原子波导量子电动力学系统中的原子-光子缀饰态

W.Z. Jia* 和 M. T. Yu

物理科学与技术学院，

西南交通大学，成都 *610031*，中国

（日期：2024年4月18日）

arXiv:2304.02072v2 [quant-ph] 2 Mar 2024

摘要

我们研究了由多个巨原子耦合到耦合谐振器波导所构成的波导量子电动力学系统中束缚态的性质。基于这些态及其相应能谱的一般解析表达式，我们详细分析了不同构型下束缚态出现的阈值条件，以及缀饰原子之间由光子介导的相互作用。此外，当多个巨原子耦合到波导时，通过调节耦合构型可以获得不同类型的相互作用原子链。相应地，束缚态的能谱会在光子带隙中形成元能带结构。因此，该系统可作为量子模拟和量子信息处理的实用平台。

* wenzjia@swjtu.edu.cn

I. 引言

波导量子电动力学（wQED）系统 [1, 2], 通过将单个原子或多个原子耦合到一维（1D）波导而实现，近年来受到了广泛关注。这类系统是研究单光子尺度下强光物质相互作用的理想平台，并可能应用于现代量子技术 [3–19]。当波导经过设计而具有有限带宽和非平庸色散关系时，例如由紧束缚模型描述的线性或非线性光学谐振器阵列 [20–22]以及由 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）模型描述的一维拓扑光子浴 [23–25]，一维中的光物质相互作用物理会变得更加复杂。当量子发射体耦合到有限带宽波导时，会出现能量位于传播模式连续谱之外、且光子分量呈指数局域化的原子-光子束缚态（BSs） [22, 26–38], ，可将其视为腔量子电动力学结构中缀饰态在连续谱中的推广[29]。

随着现代纳米技术的发展，人工原子（例如跨蒙特量子比特[39]）可以在波长间隔的多个位置与一维波导中的玻色模式（声子或微波光子）耦合，这种结构称为巨原子 [40]。这种巨原子结构可以通过压电效应，使跨蒙特量子比特与多个表面声波叉指换能器相互作用来实现；也可以通过电容耦合将 Xmon量子比特连接到蛇形共面波导 [41]来实现。与点状小原子不同，通常的偶极近似不再适用于巨原子，因此，干涉和时延效应会带来一些新现象，例如频率依赖的衰减率、兰姆位移 [41–43], 、无退相干相互作用 [42, 44, 45], 、非马尔可夫动力学[46, 47], ，以及由超越偶极近似的效应引起的非常规散射谱 [46, 48–52]。研究人员还考察了巨原子波导量子电动力学系统中的手性原子-波导耦合 [53] 和超强耦合 [54, 55] 。巨原子结构还可以通过光学晶格中的冷原子 [56]、巨自旋系综 [57], ，甚至合成维度 [58, 59]来实现。巨原子与有限带宽波导耦合时的光物质相互作用也受到关注。这类结构中的一个重要效应是原子-光子束缚态 [60–63], ，与小原子结构中的相应效应相比，它可以通过干涉效应进行调控。

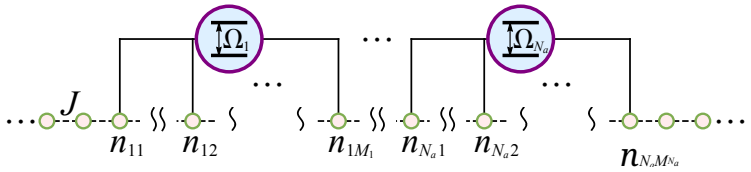


图 1. 多个巨原子耦合到耦合光学谐振腔阵列的示意图。

结构中。

本文分析了多个巨原子耦合到共同光子浴的系统中束缚态的性质，该光子浴由耦合谐振腔的一维阵列实现。具体而言，对于单巨原子和双巨原子束缚态的情形，我们详细分析了不同构型下束缚态的阈值条件，以及由束缚态光子介导的类偶极-偶极相互作用。基于这些结果，我们进一步研究了多巨原子束缚态，并发现通过设计连接点的布局及这些点处的相互作用强度，可以构造不同类型的原子链，例如 SSH 链。相应的能谱在光子带隙中形成元能带结构，这些结构可用相互作用着装原子链的有效模型得到很好的解释。这些结果在量子模拟和量子信息处理方面具有潜在应用价值。

本文其余部分的组织如下。在第II节，我们给出单激发原子-光子束缚态的一般解析表达式。在第III、IV和V节中，我们分别讨论单巨原子、双巨原子和多巨原子束缚态的性质。最后，在第VI节给出进一步的讨论和结论。

II. 原子-光子束缚态的一般解析表达式

我们考虑这样一个系统：一组 N_{a} 两能级巨原子与有限带宽的光学波导耦合。该波导被建模为由 $N \to \infty$ 个中心频率为 ω_c 、最近邻隧穿耦合为 J的光学谐振腔组成的阵列。第 m个（$m = 1$、2、$\cdots$、 N_{a}）原子同时与 M_m 个谐振腔耦合，如图1所示。该

该系统的总哈密顿量为 ($\hbar = 1$)

$$H = \omega_c \sum_j c_j^\dagger c_j - J \sum_j \left(c_j^\dagger c_{j+1} + \text{H.c.} \right) + \sum_{m=1}^{N_\text{a}} \Omega_m \sigma_m^+ \sigma_m^- + \sum_{m=1}^{N_\text{a}} \sum_{l=1}^{M_m} g_{ml} \left(c_{n_{ml}}^\dagger \sigma_m^- + \text{H.c.} \right), \quad (1)$$

其中，c_j（$c_j^\dagger$）是第 j个格点处光子模式的湮灭（产生）算符。$\sigma_m^+ = |e_m\rangle\langle g|$（$\sigma_m^- = |g_m\rangle\langle e|$）是第 m个原子的升（降）算符。 Ω_m是基态 $|g_m\rangle$ 与激发态 $|e_m\rangle$之间的跃迁频率。 n_{ml} 用于标记连接到第 m个原子的第 l个耦合点的格点，相应的原子-光子耦合强度为 g_{ml}。注意，在公式（1）中，我们假设 $\omega_c \simeq \Omega_m$ 并且 ω_c、 $\Omega_m \gg J$、 g_{ml}，采用了旋波近似。

引入动量算符 $c_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{-ikj} c_j$，其中 $k \in [-\pi, \pi]$，我们可以得到动量空间中的哈密顿量

$$H = \sum_k \omega_k c_k^\dagger c_k + \sum_{m=1}^{N_\text{a}} \Omega_m \sigma_m^+ \sigma_m^- + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \sum_{m=1}^{N_\text{a}} \sum_{l=1}^{M_m} g_{ml} \left(e^{-ikn_{ml}} c_k^\dagger \sigma_m^- + \text{H.c.} \right), \quad (2)$$

其中，谐振器阵列的紧束缚哈密顿量被改写为对角形式，模式频率 $\omega_k = \omega_c - 2J \cos k$ 位于一个以中心频率 ω_c 为中心、总宽度为 $4J$ 的能带内。

在单激发子空间中，哈密顿量（2）的一个本征态具有如下形式

$$|\psi\rangle = \left(\cos\theta \sum_{m=1}^{N_\text{a}} u_m \sigma_m^+ + \sin\theta \sum_k f_k c_k^\dagger \right) |G\rangle, \quad (3)$$

其中， u_m 和 f_k 分别是第 m个原子和波矢为 k 的光子的归一化激发振幅， θ 是原子分量与光子分量的混合角。 $|G\rangle$ 是系统的基态。将此试探态代入本征方程$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$，并消去波导模式的自由度，可得以下方程

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = E\mathbf{u}, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_{N_\text{a}})^\top$ 和

$$\mathbf{H} = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{N_\text{a}}) + \mathbf{\Sigma}(E). \quad (5)$$

在此，我们已变换到相对于 ω_c 的旋转参考系（即进行代换$E - \omega_c \to E$）。

$\delta_m = \Omega_m - \omega_c$ 为原子-腔失谐。能量

修正矩阵 $\mathbf{\Sigma}$（E）的元素定义为

$$\Sigma_{mm'}(E)=\sum_{l=1}^{M_m}\sum_{l'=1}^{M_{m'}}\frac{g_{ml}g_{m'l'}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}k\frac{e^{ik(n_{ml}-n_{m'l'})}}{E+2J\cos k}. \tag{6}$$

对角元 $\Sigma_{mm}(E)$表示原子 m因同一原子发射并再吸收光子而产生的自能修正。非对角项 $\Sigma_{mm'}(E)(m\neq m')$表示原子 m与 m' 之间通过光学波导进行光子交换所产生的相互作用能修正，这可能导致原子之间产生由光子介导的相互作用。式（6）中的积分可显式计算 [64] ，方法如下 $|E|>2J$:

$$\Sigma_{mm'}^{(\beta)}(E)=\frac{\sum_{l=1}^{M_m}\sum_{l'=1}^{M_{m'}}g_{ml}g_{m'l'}(-\beta)^{|n_{ml}-n_{m'l'}|}e^{-\frac{|n_{ml}-n_{m'l'}|}{\lambda(E)}}}{E\sqrt{1-\frac{4J^2}{E^2}}}, \tag{7}$$

其中 $\lambda(E)$ 定义为

$$\lambda(E)=\left[\operatorname{arccosh}\left(\frac{|E|}{2J}\right)\right]^{-1}. \tag{8}$$

当 $\beta=1(\beta=-1)$时，表达式（7）表示$E>2J$ $(E<-2J)$的能量修正函数，可用于确定散射连续谱上方（下方）束缚态的能量。

由式（4）可知，束缚态的能量是下列方程的实数解

$$\det[\mathbf{H}-E\mathbf{I}]=0, \tag{9}$$

其中$\mathbf{I}$ 为单位矩阵。注意，由于$\mathbf{H}$ 是 E 的函数，因此该方程是超越方程。对于固定的 β，至多有 N_a 个实数解，记作 $E_{\beta s}$ $[s=1,2,\cdots s_\mathrm{m}(s_\mathrm{m}\leq N_\mathrm{a})]$。当 $\beta=1(\beta=-1)$ 时，解满足 $E_{1s}>2J(E_{-1s}<-2J)$，对应于上方（下方）束缚态的能量。

确定束缚态的能量 $E_{\beta s}$ 后，还可以根据方程 $u_m^{(\beta s)}$（4）进一步得到原子对应的激发振幅。束缚态在实空间中的相应表达式可写为

$$\left|\psi_{\beta s}\right\rangle=\sum_{m=1}^{N_\mathrm{a}}u_m^{(\beta s)}D_{\beta s}^{\dagger}(m)\left|G\right\rangle, \tag{10}$$

其中，与原子 m 相关的缀饰态产生算符 $D_{\beta s}^{\dagger}(m)$ 定义为

$$D_{\beta s}^{\dagger}(m)=\cos\theta_{\beta s}\sigma_m^{+}+\beta\sin\theta_{\beta s}\sum_{l=1}^{M_m}\frac{\tilde{c}_{\beta s}^{\dagger}(n_{ml})}{\mathcal{N}_{\beta s}}. \tag{11}$$

未归一化的光子产生算符形式为

$$\tilde{c}^{\dagger}_{\beta s}(n_{ml}) = \sum_{j} \tilde{g}_{ml}(-\beta)^{|j-n_{ml}|} e^{-\frac{|j-n_{ml}|}{\lambda_{\beta s}}} c^{\dagger}_{j}, \tag{12}$$

该态在第 m个原子的第 l个耦合点周围形成一个指数局域波包中的光子，其局域长度定义为 $\lambda_{\beta s} = \lambda(E_{\beta s})$。混合角 $\theta_{\beta s}$满足关系 tan $\theta_{\beta s}$ =N$_{\beta s}$/(2 sinh $\frac{1}{\lambda_{\beta s}}$)。归一化常数N$_{\beta s}$为

—

$$\mathcal{N}_{\beta s} = \sqrt{\sum_{mm'} \sum_{ll'} u^{(\beta s)}_{m} u^{(\beta s)*}_{m'} \tilde{g}_{ml} \tilde{g}_{m'l'} (-\beta)^{d_{ml,m'l'}} \left(\coth \lambda^{-1}_{\beta s} + d_{ml,m'l'} \right) e^{-\frac{d_{ml,m'l'}}{\lambda_{\beta s}}}}, \tag{13}$$

其中 $\tilde{g}_{ml} = g_{ml}/J$是以 J为标度的耦合强度。 $d_{ml,\ m'l'} = |n_{ml} - n_{m'l'}|$是耦合点之间的距离。由式（10）可见，格点 j处的光子激发振幅具有 $\tilde{f}_{(\beta s)j}$ $= \beta \sin \theta_{\beta s} f_{(\beta s)j}$的形式，其中

$$f^{(\beta s)}_{j} = \frac{1}{\mathcal{N}_{\beta s}} \sum_{m=1}^{N_{\mathrm{a}}} \sum_{l=1}^{M_m} u^{(\beta s)}_{m} \tilde{g}_{ml} (-\beta)^{|j-n_{ml}|} e^{-\frac{|j-n_{ml}|}{\lambda_{\beta s}}}. \tag{14}$$

这里得到的束缚态是能量位于带隙中的原子-光子缀饰态，其光子分量围绕每个耦合点呈指数局域。需要注意的是，在含有巨原子的波导量子电动力学系统中，还存在另一类位于连续谱中的束缚态，其光子被限制在不同耦合点之间 [65, 66]，；此前在含有小原子的波导量子电动力学系统中也研究过类似现象 [67, 68]。

III. 单个巨原子的束缚态

我们首先考虑一个具有 N_{c} 个连接点的巨原子。第 l个耦合点连接到格点 n_l，耦合强度为 g_l。在这种情况下，方程（9）可化为以下形式

$$E - \delta = \Sigma_{\beta}(E), \tag{15}$$

with

$$\Sigma_{\beta}(E) = \frac{\sum_{l,l'=1}^{N_{\mathrm{c}}} g_l g_{l'} (-\beta)^{|n_l - n_{l'}|} e^{-\frac{|n_l - n_{l'}|}{\lambda(E)}}}{E\sqrt{1 - \frac{4J^2}{E^2}}} \tag{16}$$

单个巨原子的自能函数。 δ 是原子的跃迁频率与波导中心频率之间的失谐。我们将实数解标记为

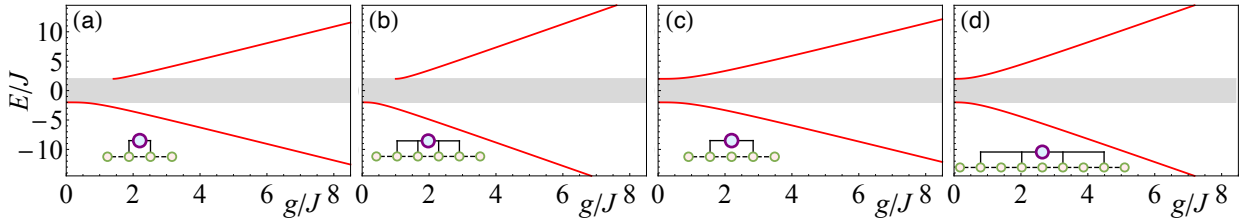


图2. 单个巨原子情况下的束缚态能级随耦合强度 g 的变化关系，图中给出了不同的 Δn 和 N_c 取值。每个面板中的插图均展示了相应的系统示意图。所有图中均假设 $\delta = 0$ 。

方程（15）的解为 E_β，其中 $\beta = \pm 1$ 分别表示上、下束缚态。相应的波函数可写为 $|\psi_\beta\rangle = D_\beta^\dagger |G\rangle$，其中 $D_\beta^\dagger$ 是单原子缀饰态产生算符。

尽管此前已对单个巨原子的束缚态进行了数值研究 [60]，但我们可以从上述解析表达式中提取出束缚态的更多性质。基于这些结果，还可以进一步研究双巨原子和多巨原子的束缚态（见第IV节和第V节）。我们首先考虑束缚态的阈值条件。如式（15）所示，束缚态的能量可以由曲线 $y = E - \delta$ 与$y = \Sigma_\beta$（E）的交点确定。注意，自能 $\Sigma_{\pm 1}$（E）在 $|E| > 2J$时随 E单调递减。对于单个小原子， $\Sigma_{\pm 1}$（$\pm 2J$）发散至 $\pm\infty$，因此对于所有 g [29]，能量为 $E_{-1} < -2J$（$E_1 > 2J$）的束缚态必然存在。然而，对于单个巨原子，由于非偶极效应（即不同耦合点之间的光子交换），在某些参数下，带边处的自能可能是有限的。因此，上方束缚态的出现要求耦合强度大于某个阈值。为说明这一点，我们聚焦于一种特殊情形：相邻耦合点之间的距离为常数 Δn ，且所有耦合强度均相同，记为 g。在这种配置下，当 $N_c \in \mathbb{E}^+$ 且 $\Delta n \in \mathbb{O}^+$时，可以发现上带边处的有限自能 Σ_1（$2J$）为 $= g^2 N_c \Delta n /$（$2J$）。因此，当 $N_c \in \mathbb{E}^+$、 $\Delta n \in \mathbb{O}^+$ 且 $\delta < 2J$时，为确保线性函数 $y = E - \delta$与单调递减函数 $y = \Sigma_1$（E）在 $E > 2J$处有交点，需要满足条件 $2J - \delta < \Sigma_1$（$2J$）；由此可得上方束缚态的阈值条件$g > \sqrt{2J}$（$2J - \delta$）/（$N_c \Delta n$）。而当耦合强度低于该值时，束缚态便会消失，如图2(a)和图2(b)所示。此外，（i）当 $N_c \in \mathbb{E}^+$、 $\Delta n \in \mathbb{O}^+$ 且

$\delta > 2J$、 $2J - \delta$ 为负，而 Σ_1（$2J$）为正； （ii）当 N_c 和 Δn 取其他值时，我们得到 Σ_1（$2J$） $\to +\infty$。因此，对于这两种情况，线性函数$y = E - \delta$ 在 $E = 2J$ 处的取值始终小于 Σ_1（$2J$），这意味着对于 g的任意取值，能量为$E > 2J$ 的上方束缚态必然存在。类似的分析表明， Σ_1（$-2J$） $\to -\infty$始终成立，因此能量为 $E < -2J$ 、位于连续谱下方的束缚态总是存在（见图2）。

在强耦合极限下 $g \gg J$，光子几乎完全局限在与原子相连的谐振腔中。因此，该系统可视为一个腔量子电动力学系统，其中一个原子同时耦合到 N_c 个非相互作用腔；等价地，也可视为一个原子以强度 $\sqrt{N_c}g$耦合到一个腔。相应地，束缚态可近似表示为 $(\cos\theta_\beta\sigma^+ + \beta\sin\theta_\beta \sum_{l=1}^{N_c} c_{n_l}^\dagger/\sqrt{N_c})|G\rangle$，其对应能量为 $E_\beta \simeq \delta/2 + \beta\sqrt{\delta^2 + 4N_c g^2}/2$（例如，当 $\delta = 0$， $E_\beta \simeq \beta\sqrt{N_c}g$时，如图 2所示）。混合角满足 $\tan 2\theta_\beta = 2\beta\sqrt{N_c}g/\delta$， 且 $\cos\theta_\beta = \sin\theta_{-\beta}$。

IV. 双巨型原子的束缚态

现在我们考虑两个原子（分别记为 a 和 b）的情形。根据式（9），我们得到束缚态能量的超越方程

$$E = \frac{1}{2}\left(\tilde{\delta}_a^{(\beta)}(E) + \tilde{\delta}_b^{(\beta)}(E) + \zeta\sqrt{[\tilde{\delta}_{ab}^{(\beta)}(E)]^2 + 4[\Sigma_{ab}^{(\beta)}(E)]^2}\right), \tag{17}$$

其中 $\zeta = \pm 1$、 $\tilde{\delta}_m^{(\beta)}$（$E$） $= \delta_m + \Sigma_{mm}^{(\beta)}$（$E$） （$m = a$、 b）以及 $\tilde{\delta}_{ab}^{(\beta)}$（$E$） $= \tilde{\delta}_a^{(\beta)}$（$E$） $- \tilde{\delta}_b^{(\beta)}$（$E$）分别为。$\Sigma_{ab}^{(\beta)}$（$E$）是原子 a 与 b之间的相互作用能。根据公式（17），至多可以确定四个实数解，记为 $E_{\beta\zeta}$。相应的原子激发振幅可由公式（4）得到，其形式为

$$u_a^{(\beta\zeta)} = \sin\Theta_{\beta\zeta}, \quad u_b^{(\beta\zeta)} = \cos\Theta_{\beta\zeta}, \tag{18}$$

具有混合角的

$$\tan\Theta_{\beta\zeta} = \frac{-2\Sigma_{ab}^{(\beta)}(E_{\beta\zeta})}{\tilde{\delta}_{ab}^{(\beta)}(E_{\beta\zeta}) - \zeta\sqrt{[\tilde{\delta}_{ab}^{(\beta)}(E_{\beta\zeta})]^2 + 4[\Sigma_{ab}^{(\beta)}(E_{\beta\zeta})]^2}}. \tag{19}$$

实空间中的相应原子-光子束缚态可通过令$m = a$、 b 和 $s = \zeta$，代入式10即可表示。

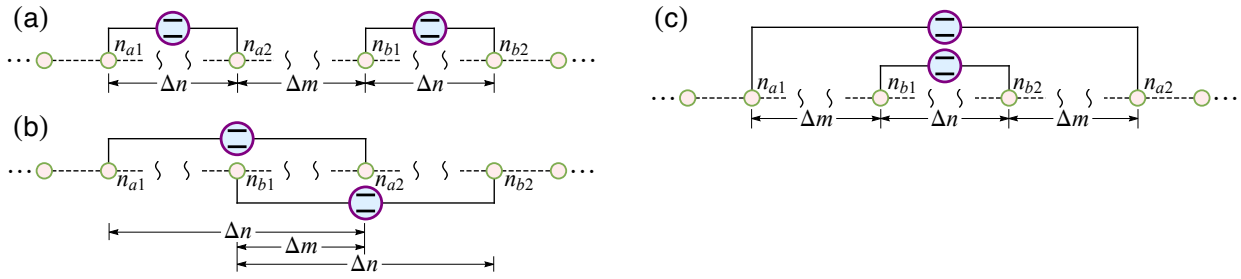


图3. 两个巨原子与耦合光学谐振器阵列耦合的示意图，展示了三种不同的拓扑结构：(a) 两个分离的巨原子，(b) 两个编织巨原子，以及 (c) 两个嵌套的巨原子。

上述结果适用于包含双巨原子的任意构型。接下来，我们重点讨论一种特殊情况：两个原子的频率相等（即$\delta_a = \delta_b = \delta$），每个原子都有两个连接点，且所有耦合强度相同（$g_{ml} = g$）。我们还假设耦合点呈对称分布（见图3），因此每个束缚态都具有确定的宇称。图3(a)-3(c)所示的构型分别称为分离型、编织型和嵌套型巨原子 [44], 。

A. 三种构型的能量修正函数

在本小节中，我们给出图3所示构型的能量修正函数的解析表达式。首先考虑由两个分离或编织原子组成的构型。如图 $\Delta n = n_{a2} - n_{a1} = n_{b2} - n_{b1}$ 和 $\Delta m = |n_{b1} - n_{a2}|$所示，我们可以令这两个原子分别位于3(a) 和3(b)。这两个原子的自能相同：

$$\Sigma_{aa}^{(\beta)}(E) = \Sigma_{bb}^{(\beta)}(E) = \frac{2g^2\left(1 + (-\beta)^{\Delta n} e^{-\frac{\Delta n}{\lambda(E)}}\right)}{E\sqrt{1 - \frac{4J^2}{E^2}}} \equiv \tilde{\Sigma}_\beta(E, \Delta n). \tag{20}$$

而相互作用能变为

$$\Sigma_{ab}^{(\beta)}(E) = \begin{cases} g^2(-\beta)^{\Delta m} e^{-\frac{\Delta m}{\lambda(E)}} \left(1 + (-\beta)^{\Delta n} e^{-\frac{\Delta n}{\lambda(E)}}\right)^2 \left(E\sqrt{1 - \frac{4J^2}{E^2}}\right)^{-1}, & \text{separated} \\ g^2(-\beta)^{\Delta m} e^{-\frac{\Delta n - \Delta m}{\lambda(E)}} \left(e^{\frac{\Delta n - 2\Delta m}{\lambda(E)}} + e^{-\frac{\Delta n}{\lambda(E)}} + 2(-\beta)^{\Delta n}\right) \left(E\sqrt{1 - \frac{4J^2}{E^2}}\right)^{-1}, & \text{braided} \end{cases} \tag{21}$$

对于当前具有 $\tilde{\delta}_{ab}^{(\beta)}(E) = 0$ 的两个相同原子情形，方程（17）变为

$$E - \delta = \tilde{\Sigma}_{\beta}(E, \Delta n) + \alpha \Sigma_{ab}^{(\beta)}(E). \tag{22}$$

此方程在散射连续谱之外最多有四个解，记为 $E_{\beta\alpha}$。相应的原子激发振幅变为 $u_a^{(\beta\alpha)} = 1/\sqrt{2}$ 和 $u_b^{(\beta\alpha)} = \alpha/\sqrt{2}$。这里用 $\alpha = \zeta \mathrm{sgn}(\Sigma_{ab}^{(\beta)}) = \pm 1$ 分别标记偶宇称态和奇宇称态。根据方程（14），相应的光子波函数 $f_j^{(\beta,\pm 1)}$ 是关于 j的偶函数（奇函数）。

对于图 3(c) 所示的嵌套构型，我们假设 $\Delta n = n_{b2} - n_{b1}$ 且 $\Delta m = n_{b1} - n_{a1} = n_{a2} - n_{b2}$。显然，在此构型中两个原子并不相同，自能分别为 $\Sigma_{aa}^{(\beta)}(E) = \tilde{\Sigma}_{(\beta)}(E, \Delta n + 2\Delta m)$和 $\Sigma_{bb}^{(\beta)}(E) = \tilde{\Sigma}_{(\beta)}(E, \Delta n)$。相应地，相互作用能变为

$$\Sigma_{ab}^{(\beta)}(E) = (-\beta)^{\Delta m} e^{-\frac{\Delta m}{\lambda(E)}} \tilde{\Sigma}_{\beta}(E, \Delta n). \tag{23}$$

束缚态的能量满足方程

$$E - \delta = \frac{1}{2}\left[\Sigma_{aa}^{(\beta)}(E) + \Sigma_{bb}^{(\beta)}(E)\right] + \frac{\zeta}{2}\sqrt{\left[\Sigma_{aa}^{(\beta)}(E) - \Sigma_{bb}^{(\beta)}(E)\right]^2 + 4\left[\Sigma_{ab}^{(\beta)}(E)\right]^2}. \tag{24}$$

该方程至多也有四个实数解，记为 $E_{\beta\zeta}$，分别对应束缚态的能量。相应的原子激发振幅由式（18）描述。注意，对于 $E_{\beta,\pm 1}$ 的两个态，光子激发振幅 $f_j^{(\beta,\pm 1)}$ 始终是关于 j 的偶函数，这与分离构型和编织构型不同；在后两种构型中，一对上（或下）束缚态具有相反的宇称。不过，我们可以利用 $u_a^{(\beta\zeta)}/u_b^{(\beta\zeta)}$ 的符号来区分它们，记作 $\mathrm{sgn}(\tan\Theta_{\beta\zeta}) \equiv \eta$。下文中，我们将 $E_{\beta\zeta}, f_{(\beta\zeta)j}$ 等量重新记为 $E_{\beta\eta}, f_{(\beta\eta)j}$。

B。束缚态的阈值条件与光子波函数

与单个巨原子的情况类似，在某些参数条件下，双原子束缚态的出现要求耦合强度大于某个阈值。通过分析式（22）和（23），我们可以推导出束缚态的阈值条件（其中 $\delta = 0$），总结如下。

分离构型的阈值条件：

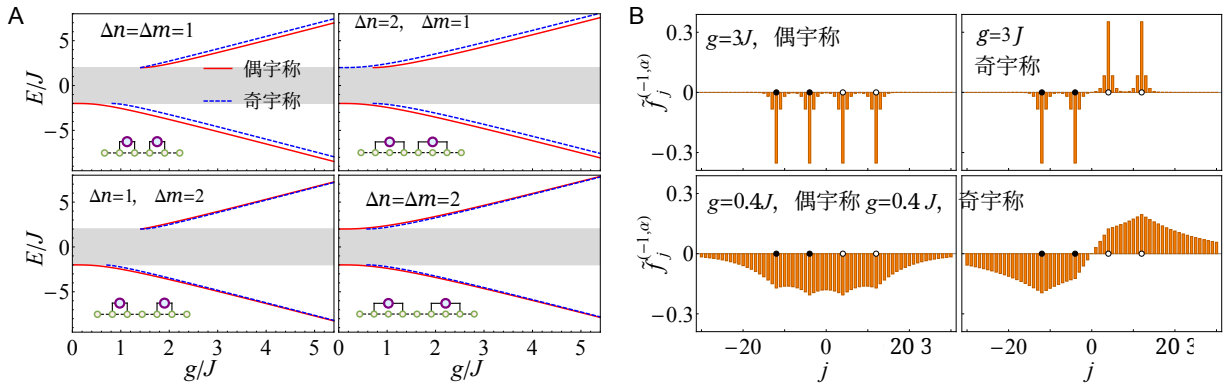


图 4. (A) 绘出了两个分离原子情况下的束缚态能级随 g 变化的关系。每个面板中的插图展示了对应的系统示意图。阴影区域表示光子带。所有图中均假设 $\delta = 0$ 。(B) 距离参数为 $\Delta n = \Delta m = 8$ 的两个分离巨原子的光子空间波函数分布。耦合强度在上排设为 $g = 3J$ ，在下排设为 $g = 0.4J$ 。每个面板中的黑色（白色）圆点用于标示与原子 a （b）相连的格点位置。

（i）偶宇称的低能束缚态始终存在，而另一个能量较高的奇宇称束缚态仅在 $g > \sqrt{2J^2/(\Delta n + 2\Delta m)}$ 时存在，~~如图 4A 所示。~~

(ii) 上方束缚态的出现取决于参数 Δn 和 Δm，可概括如下：

- 若 $\Delta n \in \mathbb{O}^+$ 且 $\Delta m \in \mathbb{O}^+$ （$\Delta m \in \mathbb{E}^+$），当 $g > \sqrt{2J^2/\Delta n}$ 时，会同时出现两个宇称相反的束缚态；奇宇称~~（偶宇~~称）态的能量高于偶宇称（奇宇称）态，如图 4A左列所示。

- 若 $\Delta n \in \mathbb{E}^+$，且 $\Delta m \in \mathbb{O}^+$ ($\Delta m \in \mathbb{E}^+$)，则始终存在一个具有奇（偶）宇称的上方束缚态，而另一个宇称相反、能量较低的上方束缚态仅在$g > \sqrt{2J^2/(\Delta n + 2\Delta m)}$时才存在，如图4A~~右列所示。~~

编织构型的阈值条件：

(i) 始终存在一个具有偶宇称的下方束缚态；当$g > \sqrt{2J^2/(\Delta n - \Delta m)}$时，还会出现另一个能量较高、具有奇宇称的~~束缚态，~~如图5A所示。

（ii）上方束缚态的出现也取决于参数 Δn 和 Δm，可概括如下：

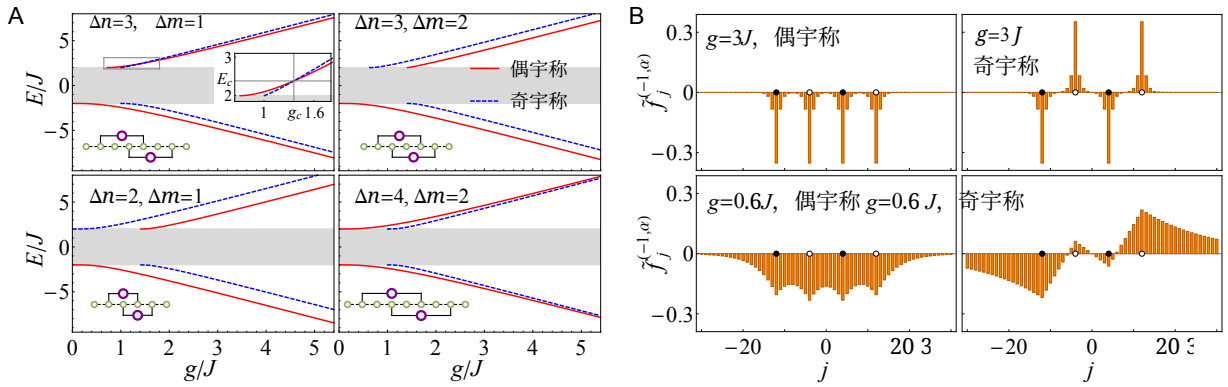


图 5. (A) 展示了两个编织原子情况下束缚态能级随 g 的变化。每个面板中的插图显示了相应的系统示意图。阴影区域表示光子带。所有图中均假设 $\delta = 0$ 。 (B) 两个编织巨原子在距离参数为 $\Delta n = 16, \Delta m = 8$ 时的光子空间波函数分布。每个连接点处的耦合强度设为 $g = 3J$ （上排）和 $g = 0.6J$ （下排）。每个面板中的黑色（白色）圆点用于标示与原子a （b）相连的格点位置。

- 若 $\Delta n \in \mathbb{O}^+$、 $\Delta m \in \mathbb{O}^+$ （$\Delta m \in \mathbb{E}^+$）和 $\Delta n > 2\Delta m$, 则当 $g > \sqrt{2J^2/(\Delta n \pm \Delta m)}$ $[g > \sqrt{2J^2/(\Delta n \mp \Delta m)}]$, 时，存在一个宇称为 $\alpha = \pm 1$ 的上方束缚态，如图5A左上图所示。此外，当 $g = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{E_c}\sqrt{E_c^2 - 4J^2}\mathrm{csch}(x) \equiv g_c$ 时，两个上方束缚态简并，且 $E_{1、1} = E_{1、-1} = E_{c。}$ 这里，$x = \Delta n/[2\lambda$（E_c）$]$、 E_c 是超越方程 $\Sigma(1)_{ab}$ （E） $= 0$ 在区域 $E > 2J$ 内的解。当 $g < g_c$ 时，奇宇称态的能量低于偶宇称态；而当 $g > g_c$ 时，结果相反。对于图5A左上图中的参数，我们分别有 $g_c \simeq 1.356J$ 和 $E_c \simeq 2.383J$。

- 如果 $\Delta n \in \mathbb{O}^+, \Delta m \in \mathbb{O}^+ (\Delta m \in \mathbb{E}^+)$ 且 $\Delta n < 2\Delta m$, 上方束缚态的阈值条件与 $\Delta n > 2\Delta m$的情况相同。然而，正如图 5A 的右上面板所示，奇宇称（偶宇称）态的能量始终低于偶宇称（奇宇称）态。

- 若 $\Delta n \in \mathbb{E}^+$，且 $\Delta m \in \mathbb{O}^+ (\Delta m \in \mathbb{E}^+)$，总是存在一个奇（偶）宇称的上方束缚态；另一个能量较低的偶宇称（奇宇称）束缚态仅在 $g > \sqrt{2J^2/(\Delta n - \Delta m)}$时存在，如图5A下排所示。

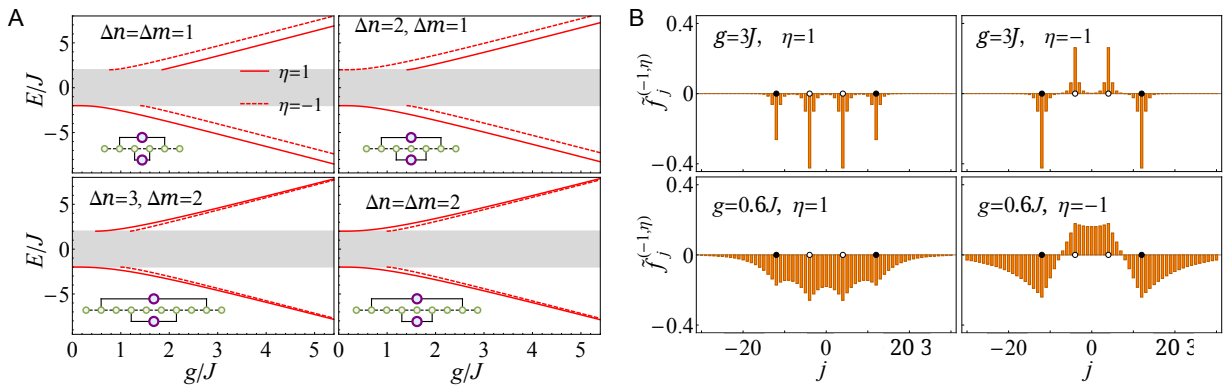


图 6。（A）将两个嵌套原子的束缚态能级绘制为 g 的函数。每个面板中的插图展示了相应的系统示意图。阴影区域表示光子带。对于所有图，假设 $\delta = 0$ 。（B）距离参数为 $\Delta n = \Delta m = 8$ 的两个嵌套巨原子所对应的光子空间波函数分布。每个连接点处的耦合强度设为 $g = 3J$ （上排）和 $g = 0。6J$ （下排）。左（右）列对应于具有 $\eta = 1$ （$\eta = -1$）的束缚态。每个面板中的黑色（白色）圆点用于标记与原子 a （b）相连的格点位置。

嵌套构型的阈值条件：

(i) 始终存在一个较低能量的束缚态，其能量为 $\eta = 1$，当 $g > \sqrt{2J^2/\Delta m}$时，还会出现另一个能量为 $\eta = -1$ 、能量更高的束缚态，如图 6A 所示。

（ii）上方束缚态的出现取决于参数 Δn 和 Δm，可概括如下：

- 若 $\Delta n \in \mathbb{O}^+$ 且 $\Delta m \in \mathbb{O}^+$ $(\Delta m \in \mathbb{E}^+)$，则当 $\eta = \mp 1$ $(\eta = \pm 1)$时会出现一个上方束缚态，且$g > [2J^2/(\Delta n + \Delta m \pm \sqrt{\Delta n^2 + \Delta m^2})]^{\frac{1}{2}}$，具有 $\eta = -1$ $(\eta = 1)$的态能量更高，如图 6A 左栏所示。

- 若 $\Delta n \in \mathbb{E}^+$ 且 $\Delta m \in \mathbb{O}^+$ $(\Delta m \in \mathbb{E}^+)$，则始终存在一个 $\eta = -1$ $(\eta = 1)$对应的上方束缚态；当 $\eta = 1$ $(\eta = -1)$时，还会出现另一个能量较低且具有 $g > \sqrt{2J^2/\Delta m}$的束缚态，如图 6A 右栏所示。

图 4B、5B 和 6B 展示了三种构型中低能束缚态的光子波函数。对于分离构型或编织构型，两个束缚态具有相反的宇称（见图 4B 和 5B）。而对于嵌套构型，两个束缚态均为偶宇称（见图 6B）。当耦合强度较大时，光子高度局域在

耦合点附近（见图 4B–6B 上排）。相反，当耦合强度较小时，单原子波包之间的重叠变得显著，因此必须考虑波包之间的相互畸变。结果，在相对较弱的耦合区间，分离构型或编织构型中的偶宇称束缚态（或嵌套构型中具有 $\eta = 1$ 的束缚态）形成一种“成键”态，光子更局域在两个原子之间的区域。相较之下，分离构型或编织构型中的奇宇称束缚态（或嵌套构型中具有 $\eta = -1$ 的束缚态）可视为一种“反键”态，光子的离域程度更高（见图 4B–6B 下排）。

C. 缀饰原子之间的类偶极-偶极耦合

对于双巨原子，它们共享的光子云可以产生高度可调的原子间相互作用。此外，这一结果可以推广到多个巨原子的情形，从而在量子模拟和量子信息处理中具有潜在应用。在强耦合区 $g \gg J$，光子高度局域在耦合点附近。因此，与单原子束缚态相关的光子波函数之间只有少量重叠，这会使以 $E_\beta \simeq \beta\sqrt{2}g$ （假设 $\delta = 0$）为中心的能量发生小幅劈裂，其中 $|E_{\beta,\,1} - E_{\beta,\,-1}| \ll |E_\beta|$ （这里用 1 和–1 分别标记偶宇称和奇宇称束缚态，E_β 为单个巨原子的束缚态能量。），表征了相距较远的缀饰态之间的类偶极-偶极耦合。在此区间内，哈密顿量可以近似为

$$H \simeq E_\beta \sum_{i=a,b} D_\beta^\dagger(i) D_\beta(i) + \frac{1}{2} U_\beta \left[D_\beta^\dagger(a) D_\beta(b) + \text{H.c.} \right], \tag{25}$$

其中，$D_\beta(i)$为单原子缀饰态算符，它们被视为彼此对易的自由度。U_β 是类偶极-偶极耦合强度。这种相互作用可以理解为发射体通过环境交换虚光子，这些光子局域在耦合点附近。

（a）对于分离构型 [图 3（a）], 耦合强度为

$$U_\beta \simeq \frac{1}{2}(-1)^{\Delta m} \beta^{\Delta m + 1} (\sqrt{2}\tilde{g})^{1-\Delta m} J, \tag{26}$$

其中 $\tilde{g} = g/J$。在当前强耦合区，U_β 仅取决于 Δm ，不受 Δn影响，因为它主要由光子云的重叠贡献。

位于耦合点 n_{a2} 和 n_{b1} 之间（距离为 Δm）。此外， U_β 应与单个原子和波导之间的有效耦合强度 $\sqrt{2}g$ 成正比，同时随 Δm 呈指数衰减（以因子 $e^{-\Delta m/\lambda_\beta}$表征；在强耦合极限下，该因子可进一步近似为 $[J/(\sqrt{2}g)]^{\Delta m}$ ）。因此，对于$\Delta m = 1$，这两种效应相互权衡，使类偶极-偶极耦合 $|U_\beta| = J/2$保持恒定且不依赖于 g。于是，当 g较大时，能级 $E_{\beta,1}$ 和$E_{\beta,-1}$ 之间的劈裂始终为 $J/2$，如图4A上排所示。对于 $\Delta m > 1$，这导致 $|U_\beta| \propto 1/g^{\Delta m-1}$遵循($\Delta m - 1$)次反比定律，因此劈裂会随$g$ 增加而迅速消失；当 g较大时，结果为$E_{\beta,1} \simeq E_{\beta,-1} \simeq E_\beta \simeq \beta\sqrt{2}g$ ，如图4A下排所示。

–

（b）对于编织构型 [图3（b）], 耦合强度为

$$U_\beta \simeq \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{\Delta m}\beta^{\Delta m+1}\left(\sqrt{2}\tilde{g}\right)^{1-\Delta m}J, & \Delta n > 2\Delta m, \\ (-1)^{\Delta m}\beta^{\Delta m+1}\left(\sqrt{2}\tilde{g}\right)^{1-\Delta n+\Delta m}J, & \Delta n < 2\Delta m, \\ \frac{3}{2}(-1)^{\Delta m}\beta^{\Delta m+1}\left(\sqrt{2}\tilde{g}\right)^{1-\Delta m}J, & \Delta n = 2\Delta m. \end{cases} \tag{27}$$

上述表达式中的 1/2、1 和 3/2 这些因子，与不同原子所属光子云的重叠程度有关。具体而言，当 $\Delta n > 2\Delta m$, U_β 主要由距离为 Δm的区域 $n_{b1} < j < n_{a2}$ 中的光子云贡献时，U_β 的表达式与两个分离原子的情形相同 [，见式 (26) 和式 (27) 的第一行]。当 $\Delta n < 2\Delta m$, U_β 主要由两个区域 $n_{a1} < j < n_{b1}$ 和 $n_{a2} < j < n_{b2}$ 中的光子贡献，且这两个区域的宽度均为 $\Delta n-\Delta m$时，得到式 (27) 第二行所示的表达式。当 $\Delta n = 2\Delta m$时，三个原子间区域中的光子云（宽度均为 Δm）贡献相同，因此可得到式 (27) 的第三行。上述结果可直接从能级 $E_{\beta,1}$ 和 $E_{\beta,-1}$ 之间的劈裂看出。具体而言，(i) 对于 $\Delta m = 1, \Delta n > 2$, 劈裂约为 $J/2$，如图5A左上图所示；(ii) 对于 $\Delta m > 1, \Delta n - \Delta m = 1$，劈裂约为 J，如图5A右上图所示；(iii) 对于 $\Delta m = 1, \Delta n = 2$，劈裂约为 $3J/2$，如图5A左下图所示；(iv) 对于$\Delta m > 1, \Delta n - \Delta m > 1$，以及 $\Delta n \geqslant 2\Delta m\,(\Delta n < 2\Delta m)$， $|U_\beta| \propto 1/g^{\Delta m-1}$ ($|U_\beta| \propto 1/g^{\Delta n-\Delta m-1}$) 呈现反幂律。因此，随着 g 增大，劈裂迅速趋于零；当 g 足够大时，得到 $E_{\beta,1} \simeq E_{\beta,-1} \simeq E_\beta \simeq \beta\sqrt{2}g$ ，如图5A右下图所示。

–

(c) 对于嵌套构型 [图 3(c)], 我们有

$$U_\beta \simeq (-1)^{\Delta m}\beta^{\Delta m+1}\left(\sqrt{2}\tilde{g}\right)^{1-\Delta m}J, \tag{28}$$

这主要由区域 $n_{a1} < j < n_{b1}$ 和$n_{b2} < j < n_{a2}$中的光子云贡献，两者的宽度均为 Δm。因此，不难理解，对于这种情况， U_β 的表达式可以由两个分离原子的情况得到，只需将因子 1/2 替换为 1 [参见方程 (26) 和 (28)]。此外，对于 $\Delta m = 1$，我们有 $|U_\beta| \simeq J$，这表明当 g 较大时，能级 $E_{\beta,1}$ 和 $E_{\beta,-1}$ 之间的劈裂始终为 J ，如图 6A 上排所示。而对于 $\Delta m > 1$，劈裂呈现出关于 $|U_\beta| \propto 1/g^{\Delta m-1}$ 的 $(\Delta m - 1)$ 次幂反比定律，因此当 g 较大时，$E_{\beta,1} \simeq E_{\beta,-1} \simeq E_\beta \simeq \beta\sqrt{2}g$ ，如图 6A 下排所示。

–

V. 多巨原子的束缚态

上述分析可以推广到多个原子。对于较大的 N_a 以及较强的原子-波导耦合 g，由于光子介导的相互作用，较低（较高）的束缚态会在裸光子能带下方（上方）形成传播缀饰态激发的元能带结构。当耦合强度低于某一阈值时，部分缀饰态能带会并入连续谱（见图 7A 和图 8B）。由于连接点分布带来的多样性，多巨原子系统的元能带结构及其相应的阈值条件比小原子系统更加复杂且可调 [29]。这使该系统有望成为量子模拟的实用平台。本节聚焦于由以下模型描述的相互作用缀饰原子一维阵列：（i）常规一维紧束缚模型；（ii）SSH 模型 [69]。

A. 由常规一维紧束缚模型描述的缀饰原子阵列的元能带结构

现在我们考虑一条由 N_a 个原子组成的一维链，每对相邻原子均处于分离构型，其距离参数 Δn 和 Δm 定义于第 IV 节。这里我们关注 $g \gg J$ 区间，此时原子之间由光子介导的相互作用呈偶极-偶极形式。此外，根据式（26），最近邻耦合与次近邻耦合之比

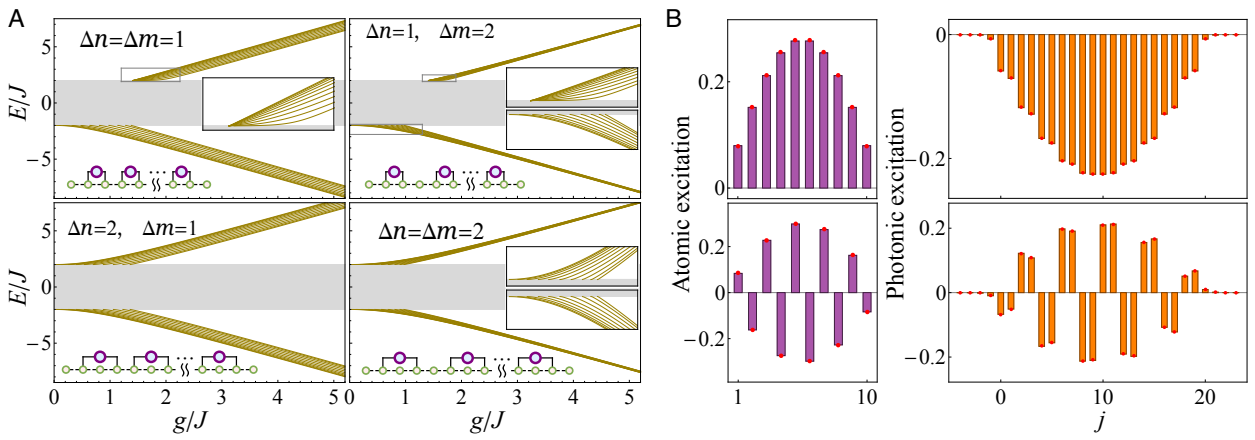


图 7. (A) 数值计算得到的束缚态能级，针对 $N_{\mathrm{a}} = 10$ 分离原子的情形，绘制为 g的函数。阴影区域表示光子带。每个面板中的插图展示了相应的系统示意图。所有图中均假设 $\delta = 0$ 。（B）左列：下亚带中最低（最高）束缚态的原子激发振幅，如上（下）面板所示。右列：相应的光子激发振幅。柱形表示数值结果，红色圆点表示由有效哈密顿量（29）得到的近似结果。参数为 $N_{\mathrm{a}} = 10$, $\Delta n = \Delta m = 1$, $\delta = 0$, 以及 $g = 5J$。

可近似为 $(\sqrt{2}\tilde{g})^{\Delta n+\Delta m} \gg 1$。因此可以忽略次近邻耦合，缀饰原子阵列形成一条一维紧束缚链，其最近邻跃迁率为 $U_\beta/2$，由式（26）描述（假设 $\delta = 0$），相应的有效哈密顿量可近似写为

$$H = E_\beta \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{a}}} D_\beta^\dagger(i) D_\beta(i) + \frac{1}{2} U_\beta \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{a}}-1} \left[D_\beta^\dagger(i) D_\beta(i+1) + \mathrm{H.c.} \right]. \tag{29}$$

根据紧束缚模型的众所周知的结果，哈密顿量（29）的能谱在频率 $E_\beta \simeq \beta\sqrt{2}g$ [附近呈现亚带结构；该频率是强耦合区中的单原子缀饰态频率，见第III]节，其总宽度为 $\Delta\omega \equiv 2|U_\beta| \simeq (\sqrt{2}\tilde{g})^{1-\Delta m} J$。对于 $\Delta m = 1$，有 $\Delta\omega = J$，即当 g 较大时，亚带的谱宽为光子带宽度的四分之一，如图7A 左列所示。对于 $\Delta m > 1$，随着 g 增大，谱宽$\Delta m - 1$呈现关于 $\Delta\omega \propto 1/g^{\Delta m-1}$的$\Delta m - 1$次反比定律 $\Delta\omega \propto 1/g^{\Delta m-1}$，如图7A 右列所示。

图 7B 展示了下亚带中最低和最高束缚态的原子和光子激发振幅，其中 $\Delta n = \Delta m = 1$ 和 $N_a = 10$。耦合

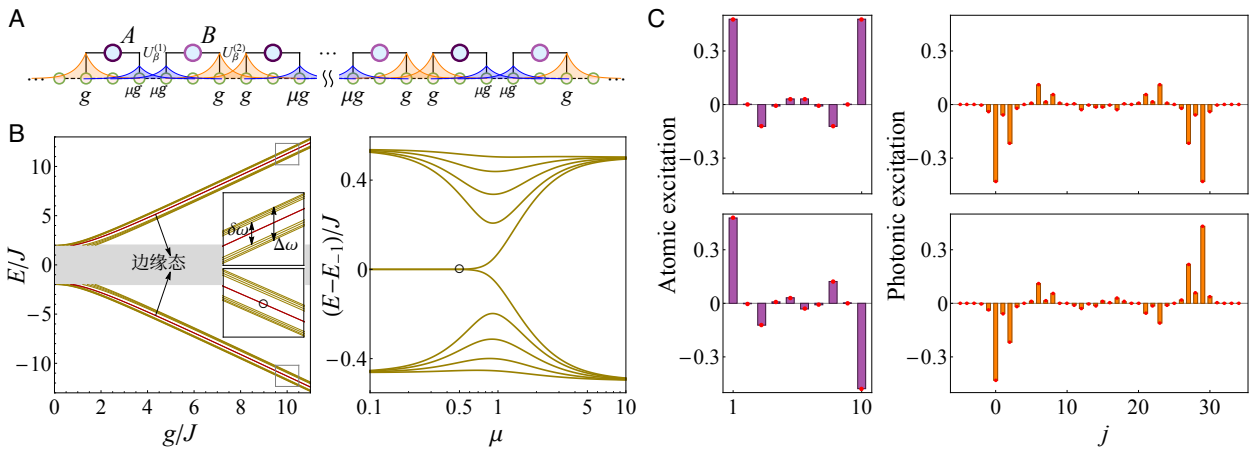


图 8. (A) 采用彼此独立的巨原子实现 SSH 链的装置示意图。距离参数分别设为 $\Delta n = 2$ 和 $\Delta m = 1$。(B) 左图：所示装置 (A) 的束缚态能级随耦合强度 g 的变化。参数为$N_{\mathrm{a}} = 10$，$\mu = 0.5$，且 $\delta = 0$。阴影区域表示光子带。右图：所示装置 (A) 的束缚态能级随 μ 的变化。耦合强度设为 $g = 10J$。其他参数与左图相同。(C) 左列：上（下）图显示了 (B) 中圆圈所示的下亚带隙内具有偶（奇）宇称的边缘态的原子激发振幅，即 $g = 10J$ 和 $\mu = 0.5$。右列：对应的光子激发振幅。柱形表示数值结果，红色圆点表示由有效哈密顿量（30）得到的近似结果。

强度设为相对较大的值 $g = 5J$，因此紧束缚哈密顿量（29）是一个很好的近似。可以看到，紧束缚近似得到的结果（图 7B）与完整数值结果（图 7B 中的柱形）非常吻合。光子云主要集中在与激发态原子相连的格点附近，光子激发振幅与相应的原子激发振幅成正比。

B. 束缚态的拓扑元能带结构

在本小节中，我们进一步提出一种方案，通过操控缀饰态激发来构造由 SSH 模型描述的拓扑自旋链 [69] 。这一维玩具模型可用于理解拓扑物理的一些基本思想

[70–73], 尤其是在低维系统中 [74–76]。

如图 8A 所示，一维 N_a 原子链与谐振器阵列耦合，其中每对相邻原子均采用分离构型（见图 8A）。一个元胞中的两个原子分别标记为 A 和 B。对于 A（B）原子，左侧和右侧连接点处的耦合强度分别为 g （μg）和 μg （g）。 μ是一个无量纲正系数。同样地，在 $g \gg J$ 的情况下，BS 光子在不同原子之间诱导的相互作用属于类偶极-偶极耦合。我们还假设满足 $\tilde{g}^{-\Delta n} \ll \mu$ 和 $\delta = 0$。因此，最近邻耦合的强度分别为 $|U^{(1)}_{\beta}| \simeq \mu^2 \tilde{g}^{1-\Delta m} J/(1+\mu^2)^{(\Delta m+1)/2}$（用于元胞内跃迁）以及 $|U^{(2)}_{\beta}| \simeq \tilde{g}^{1-\Delta m} J/(1+\mu^2)^{(\Delta m+1)/2}$（用于连接相邻元胞的跃迁）。此外，最近邻耦合与次近邻耦合的比值可以远小于 1，因此紧束缚近似成立。由此，我们得到了一个由 SSH 模型 [69] 描述的拓扑缀饰原子阵列

$$H = E_\beta \sum_{i=1}^{N_a} D^\dagger_\beta(i) D_\beta(i) + \left[\frac{1}{2} U^{(1)}_\beta \sum_{i \in \mathbb{O}^+} D^\dagger_\beta(i) D_\beta(i+1) + \frac{1}{2} U^{(2)}_\beta \sum_{i \in \mathbb{E}^+} D^\dagger_\beta(i) D_\beta(i+1) + \text{H.c.} \right]. \quad (30)$$

通过假设周期性边界条件，可以得到由原子-光子缀饰态形成的相应元能带

$$E_{\beta,\pm}(K) = E_\beta \pm \frac{1}{2} \sqrt{U^{(1)2}_\beta + U^{(2)2}_\beta + 2 U^{(1)}_\beta U^{(2)}_\beta \cos K}, \quad (31)$$

其中 $K \in [-\pi, \pi]$ 为波矢。从这个色散关系可以发现，当$\mu \neq 1$（即 $|U_{(1)\beta}| \neq |U_{(2)\beta}|$，注意，在强耦合区，$|U^{(1)}_\beta / U^{(2)}_\beta| \simeq \mu^2$）时，谱呈现带隙，并形成两个以参考频率 $E_\beta \simeq \beta\sqrt{1+\mu^2} g$ （单个巨原子的束缚态能量）为中心的对称能带，其谱宽和带隙。

$$\Delta\omega = \left| U^{(1)}_\beta \right| + \left| U^{(2)}_\beta \right| \simeq (1+\mu^2)^{\frac{1-\Delta m}{2}} \tilde{g}^{1-\Delta m} J, \quad (32a)$$

$$\delta\omega = \left| \left| U^{(1)}_\beta \right| - \left| U^{(2)}_\beta \right| \right| \simeq (1+\mu^2)^{-\frac{\Delta m+1}{2}} \left| 1-\mu^2 \right| \tilde{g}^{1-\Delta m} J, \quad (32b)$$

分别。特别是，对于 $\Delta m = 1$ 的设置（如图8A所示），有$|U^{(1)}_\beta| \simeq \mu^2 J/(1+\mu^2)$, $|U^{(2)}_\beta| \simeq J/(1+\mu^2)$。谱宽变为 $\Delta\omega \simeq J$，且与 g无关。带隙则变为 $\delta\omega \simeq |1-\mu^2| J/(1+\mu^2)$（见图 8B 左图中的下、上元能带）。对于有限系统，μ 的值决定链端是否为弱耦合，这会导致拓扑

稳定的边缘态出现，其能量为 E_β。如图8B左图中的红线所示，当 $\mu = 0.5$（即 $|U_\beta^{(1)}| = 0.2J, |U(2)_\beta| = 0.8J$）且 $N_a = 10$时，上（下）亚带隙中会出现两个能量为 E_1 (E_{-1})的简并边缘态。为了展示参数 μ 对系统拓扑性质的影响，我们在图8B右图中绘出了下亚带束缚态能级随 μ变化的关系。可以看到，当 $\mu < 1$（即 $|U(1_{-1}| < |U_{-1}^{(2)}|$）时，会出现两个能量为 E_{-1}的简并边缘态，这表明系统处于拓扑非平庸相。但若 $\mu > 1$ （即 $|U_{-1}^{(1)}| > |U_{-1}^{(2)}|$），谱隙中不会出现边缘态。因此，系统处于拓扑平庸相。当 $\mu = 1$（即 $|U(1_{-1}| = |U_{-1}^{(2)}|$）时，带隙闭合，系统恢复为第V A节讨论的常规一维紧束缚模型。

图 8C 展示了亚带隙中拓扑稳健边缘束缚态的原子和光子激发振幅（图 8B 中的空心圆所示，对应于 $g = 10J$ 和 $\mu = 0。5$）。原子数为偶数，且 $N_a = 10。$可以看到，两个简并边缘态分别局域在原子阵列两端，宇称分别为偶和奇。由近似哈密顿量（30）（红色圆点）得到的结果，与由哈密顿量（1）得到的完整数值结果（柱条）吻合良好。请注意，对于通常的 SSH 型原子链，相邻原子直接耦合，因此系统的本征态仅包含裸原子的激发。然而，对于当前系统，缀饰原子而非裸原子通过光子介导的相互作用有效耦合，从而形成集体缀饰态。因此，图 8C 所示的边缘态同时包含原子和光子激发。伴随激发程度最高的原子产生的光子云主要集中在原子阵列的左右两端。

VI. 结论

总之，我们详细分析了多个巨原子组成的系统与共同的结构化光子浴耦合时，单激发子空间中的束缚态。我们得到了这些态及其相应能谱所能得到的最一般解析表达式。基于这些结果，我们进一步获得了这些态的一些基本性质。这些结果反映了巨原子系统耦合到结构化环境时所呈现的非常规光物质相互作用。具体而言，束缚态出现的阈值条件

以及不同构型下原子间的光子介导相互作用均得到了分析。对于原子数较多且原子-光子耦合较强的情况，光子带隙中的束缚态可根据耦合点的排列形成不同类型的元能带结构（例如具有非平庸拓扑性质的 SSH 型能带）。这些结果可作为进一步探索其他非平庸多体相的起点，使该系统成为量子模拟和量子信息处理的实用平台。

致谢

本研究得到中国国家自然科学基金委员会（国家自然科学基金委员会）项目（编号：61871333）的资助。

[1] D. Roy、C. M. Wilson 和 O. Firstenberg，《现代物理学评论》89, 021001（2017年）。[2] X. Gu、A. F. Kockum、A. Miranowicz、Y.-x. Liu 和 F. Nori，《物理报告》718-719, 1（2017年）。[3] J.-T. Shen 和 S. Fan，《光学快报》30, 2001（2005年）。[4] J.-T. Shen 和 S. Fan，《物理评论快报》95, 213001（2005年）。[5] D. E. Chang、A. S. Sørensen、P. R. Hemmer 和 M. D. Lukin，《物理评论快报》97, 053002（2006年）。[6] J.-T. Shen 和 S. Fan，《物理评论快报》98, 153003（2007年）。[7] D. E. Chang、A. S. Sørensen、E. A. Demler 和 M. D. Lukin，《自然·物理》3, 807（2007年）。[8] O. Astafiev、A. M. Zagoskin、A. A. Abdumalikov、Y. A. Pashkin、T. Yamamoto、K. Inomata、Y. Nakamura 和 J. S. Tsai，《科学》327, 840（2010年）。[9] P. Longo、P. Schmitteckert 和 K. Busch，《物理评论快报》104, 023602（2010年）。[10] H. Zheng、D. J. Gauthier 和 H. U. Baranger，《物理评论A》82, 063816（2010年）。[11] S. Fan、S.. E. Kocaba.s 和 J.-T. Shen，《物理评论A》82, 063821（2010年）。[12] H. Zheng、D. J. Gauthier 和 H. U. Baranger，《物理评论快报》107, 223601（2011年）。[13] M. Bradford、K. C. Obi 和 J.-T. Shen，《物理评论快报》108, 103902（2012年）。[14] I.-C. Hoi、A. F. Kockum、T. Palomaki、T. M. Stace、B.Fan、L.Tornberg、S.R.Sathyamoorthy、G. Johansson、P. Delsing 和 C. M. Wilson，《物理评论快报》111, 053601（2013年）。

[15] M. Laakso 和 M. Pletyukhov, 《物理评论快报》113, 183601（2014年）。[16] T. Shi、D. E. Chang 和 J. I. Cirac, 《物理评论A》92, 053834（2015年）。[17] W. Z. Jia、Y. W. Wang 和 Y.-x. Liu, 《物理评论A》96, 053832（2017年）。[18] Y. T. Zhu 和 W. Z. Jia, 《物理评论A》99, 063815（2019年）。[19] W. Nie、T. Shi、F. Nori 和 Y.-x. Liu, 《物理评论应用》15, 044041（2021年）。[20] L. Zhou、Z. R. Gong、Y.-x. Liu、C. P. Sun 和 F. Nori, 《物理评论快报》101, 100501（2008年）。[21] Z. Wang、T. Jaako、P. Kirton 和 P. Rabl, 《物理评论快报》124, 213601（2020年）。[22] M. Scigliuzzo、G. Calaj`o、F. Ciccarello、D. Perez Lozano、A. Bengtsson、P. Scarlino、A. Wall- raff、D. Chang、P. Delsing 和 S. Gasparinetti, 《物理评论X》12, 031036（2022年）。[23] M. Bello、G. Platero、J. I. Cirac 和 A. Gonz´alez-Tudela, 《科学进展》 5, eaaw0297 （ 2019 年）。[24] E. Kim 、 X. Zhang 、V. S. Ferreira、J. Banker、J.K. Iverson、A. Sipahigil、M. Bello、A. Gonz´alez- Tudela、M. Mirhosseini 和 O. Painter, 《物理评论X》11, 011015（2021年）。[25] C. Vega、M. Bello、D. Porras 和 A. Gonz´alez-Tudela, 《物理评论A》104, 053522（2021年）。[26] S. John 和 J. Wang, 《物理评论快报》64, 2418（1990年）。[27] S. John 和 J. Wang, 《物理评论B》43, 12772（1991年）。[28] Q.-J. Tong、J.-H. An、H.-G. Luo 和 C. H. Oh, 《物理学杂志B》43, 155501（2010年）。[29] G. Calaj´o、F. Ciccarello、D. Chang 和 P. Rabl, 《物理评论A》93, 033833（2016年）。[30] T. Shi、Y.-H. Wu、A. Gonz´alez-Tudela 和 J. I. Cirac, 《物理评论X》6, 021027（2016年）。[31] J. D. Hood、A. Goban、A. Asenjo-Garcia、M. Lu、S.-P. Yu、D. E. Chang 和 H. J. Kimble, 《美国国家科学院院刊》113, 10507（2016年）。[32] Y. Liu 和 A. A. Houck, 《自然·物理》13, 48（2017年）。[33] E. S´anchez-Burillo、D. Zueco、L. Mart´ın-Moreno 和 J. J. Garc´ıa-Ripoll, 《物理评论A》96, 023831（2017年）。[34] M. Mirhosseini、E. Kim、V. S. Ferreira、M. Kalaee、A. Sipahigil、A. J. Keller 和 O. Painter, 《自然·通讯》9, 3706（2018年）。[35] T. Shi、Y.-H. Wu、A. Gonz´alez-Tudela 和 J. I. Cirac, 《新物理学杂志》20, 105005（2018年）。[36] N. M. Sundaresan、R. Lundgren、G. Zhu、A. V. Gorshkov 和 A. A. Houck, 《物理评论X》9, 011021（2019年）。[37] J. Rom´a n-Roche、E. S´anchez-Burillo 和 D. Zueco, 《物理评论A》102, 023702（2020年）。[38] V. S. Ferreira、J. Banker、A. Sipahigil、M. H. Matheny、A. J. Keller、E. Kim、M. Mirhosseini 和 O. Painter, 《物理评论X》11, 041043（2021年）。

[39] J. Koch、T. M. Yu、J. Gambetta、A. A. Houck、D. I. Schuster、J. Majer、A. Blais、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf，《物理评论A》76，042319（2007年）。[40] A. F. Kockum，载于《数学、量子理论与密码学国际研讨会》，T. Takagi、M. Wakayama、K. Tanaka、N. Kunihiro、K. Kimoto 和 Y. Ikematsu 编（施普林格新加坡，新加坡，2021年），第125–146页。[41] A. F. Kockum、P. Delsing 和 G. Johansson，《物理评论A》90，013837（2014年）。[42] B. Kannan、M. J. Ruckriegel、D. L. Campbell、A. Frisk Kockum、J. Braum¨uller、D. K. Kim、M. Kjaergaard、P. Krantz、A. Melville、B. M. Niedzielski、A. Veps¨al¨ainen、R. Winik、J. L. Yoder、F. Nori、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver，《自然》（伦敦）583，775（2020年）。[43] A. M. Vadiraj、A. Ask、T. G. McConkey、I. Nsanzineza、C. W. S. Chang、A. F. Kockum 和 C. M. Wilson，《物理评论A》103，023710（2021年）。[44] A. F. Kockum、G. Johansson 和 F. Nori，《物理评论快报》120，140404（2018年）。[45] L. Du、L. Guo 和 Y. Li，《物理评论A》107，023705（2023年）。[46] L. Guo、A. Grimsmo、A. F. Kockum、M. Pletyukhov 和 G. Johansson，《物理评论A》95，053821（2017年）。[47] G. Andersson、B. Suri、L. Guo、T. Aref 和 P. Delsing，《自然·物理》15，1123（2019年）。[48] A. Ask、Y.-L. L. Fang 和 A. F. Kockum，arXiv:2011.15077。[49] Q. Y. Cai 和 W. Z. Jia，《物理评论A》104，033710（2021年）。[50] S. L. Feng 和 W. Z. Jia，《物理评论A》104，063712（2021年）。[51] Y.T. Zhu、S. Xue、R. B. Wu、W. L. Li、Z. H. Peng 和 M. Jiang，《物理评论A》106，043710（2022年）。[52] X.-L. Yin、Y.-H. Liu、J.-F. Huang 和 J.-Q. Liao，《物理评论A》106，013715（2022年）。[53] A. Soro 和 A. F. Kockum，《物理评论A》105，023712（2022年）。[54] D. D. Noachtar、J. Kn¨orzer 和 R. H. Jonsson，《物理评论A》106，013702（2022年）。[55] S. Terradas-Brians´o、C. A. Gonz´alez-Guti´errez、F. Nori、L. Mart´ın-Moreno 和 D. Zueco，《物理评论A》106，063717（2022年）。[56] A. Gonz´alez-Tudela、C. S. Mu˜noz 和 J. I. Cirac，《物理评论快报》122，203603（2019年）。[57] Z.-Q. Wang、Y.-P. Wang、J. Yao、R.-C. Shen、W.-J. Wu、J. Qian、J. Li、S.-Y. Zhu 和 J. Q. You，《自然·通讯》13，7580（2022年）。[58] L. Du、Y. Zhang、J.-H. Wu、A. F. Kockum 和 Y. Li，《物理评论快报》128，223602（2022年）。

[59] H. Xiao、L. Wang、Z.-H. Li、X. Chen 和 L. Yuan，《npj量子信息》8，80（2022年）。[60] W. Zhao 和 Z. Wang，《物理评论A》101，053855（2020年）。[61] W. Cheng、Z. Wang 和 Y.-x. Liu，《物理评论A》106，033522（2022年）。[62] A. Soro、C. S. Mu˜noz 和 A. F. Kockum，《物理评论A》107，013710（2023年）。[63] X. Wang、T. Liu、A. F. Kockum、H.-R. Li 和 F. Nori，《物理评论快报》126，043602（2021年）。[64] E. N. Economou，《量子物理中的格林函数》（施普林格，1979年）。[65] L. Guo、A. F. Kockum、F. Marquardt 和 G. Johansson，《物理评论研究》2，043014（2020年）。[66] S. Guo、Y. Wang、T. Purdy 和 J. Taylor，《物理评论A》102，033706（2020年）。[67] T. Tufarelli、F. Ciccarello 和 M. S. Kim，《物理评论A》87，013820（2013年）。[68] G. Calaj´o、Y.-L. L. Fang、H. U. Baranger 和 F. Ciccarello，《物理评论快报》122，073601（2019年）。[69] W. P. Su、J. R. Schrieffer 和 A. J. Heeger，《物理评论快报》42，1698（1979年）。[70] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane，《现代物理评论》82，3045（2010年）。[71] X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang，《现代物理评论》83，1057（2011年）。[72] F. D. M. Haldane 和 S. Raghu，《物理评论快报》100，013904（2008年）。[73] T. Ozawa、H.M.Price、A. Amo、N.Goldman、M.Hafezi、L.Lu、M.C.Rechtsman、D.Schuster、J. Simon、O. Zilberberg 和 I. Carusotto，《现代物理评论》91，015006（2019年）。[74] E. J. Meier、F. A. An 和 B. Gadway，《自然·通讯》7，13986（2016年）。[75] M. Lohse、C. Schweizer、O. Zilberberg、M. Aidelsburger 和 I. Bloch，《自然·物理》12，350（2016年）。[76] S. Nakajima、T. Tomita、S. Taie、T. Ichinose、H. Ozawa、L. Wang、M. Troyer 和 Y. Taka- hashi，《自然·物理》12，296（2016年）。